

Fiche de séquence

Classe : Tseco

Domaine : SMT

Contenu : Analyse

Déroulement des activités

Pré évaluation :

Cas N°01 : Etude de signe des binômes

Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = ax + b$$

- 1) Résoudre dans IR , l'équation $P(x) = 0$
- 2) Etudier et expliquer dans IR , le signe de binôme P tels que :
 - a) Si $a > 0$; b) Si $a < 0$

Réponses

Cas N° 02 : Etude de signe des trinômes du second degré

Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = ax^2 + ax + b$$

- 3) Résoudre dans IR , l'équation $P(x) = 0$
- 4) Etudier et expliquer dans IR , le signe des trinômes P tels que :
 - a) $\Delta > 0$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta < 0$

Situation problème :

Une société fabrique et vend un appareil très performant de mesure physiques . En tenant compte de tous les coûts induits par la fabrication et la vente de ce produit, elle estime que le bénéfice B qu'elle peut dégager s'exprime en fonction du prix de vente p par la relation :

$$B = -0,012 p^2 + 5400 p - 600\,000\,000$$

A quel prix la société doit-elle proposer son appareil pour maximiser son bénéfice ?

Séance 1 : Généralités sur les fonctions

Activité 1 :

Soit les fonctions ci-dessous :

- 1) $f(x) = x^3 - 4x + 7$
- 2) $f(x) = \frac{x+1}{2x-10}$
- 3) $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x^2-1}$
- 4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
- 5) $f(x) = \sqrt{3x+12}$

Consignes :

- 1) Préciser la nature de chacune des fonctions ci-dessus
- 2) Trouver le domaine de définition des fonctions ci-dessus

Synthèse partielle

Séance 2 : Notion de limites

Activité 1 : Limites finies d'une fonction en un point

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2$$

Consignes :

- 1) Compléter le tableau ci-dessous

x	0,9	0,99	0,999	
$f(x)$				

- 2) Que remarquez – vous quand x s’approche de 1 ?
- 3) La fonction f est -elle définie en $x = 1$?
- 4) Quelle valeur semble être approchée par $f(x)$ quand x s’approche de 1 ?
- 5) Quelle conclusion peut-on tirer ?

Synthèse partielle

Activité 2 : Limite à gauche et à droite en un point x_0

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Consignes :

- 1) Compléter le tableau ci- dessous

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$							

- 2) Quel constat faites – vous de $f(x)$ si x s’approche de plus en plus de 0 vers la gauche et la droite
- 3) Que constate – t- on ?

Synthèse partielle

- On constate que lorsque x s’approche de plus en plus de 0 vers la gauche, $f(x)$ s’approche de $-\infty$. On dit que f admet comme limite lorsque x tend vers 0 à gauche et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

- On constate que lorsque x s’approche de plus en plus de 0 vers la droite, $f(x)$ s’approche de $+\infty$. On dit que f admet comme limite lorsque x tend vers 0 à droite et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

On retient que :

Limite des fonctions élémentaires

Nous admettons des résultats suivants :

$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k ; k = \text{constante}$		$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
$n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$ et n pair $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$n \in \mathbb{N}^*$ et n impair $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Activité 3 : Limites infinies d’une fonction en un point

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Consignes :

- 1) Complétez le tableau :

x	1,5	1,9	1,99	2,1	2,01	2,001
$f(x)$						

- 2) Que se passe-t-il quand x s'approche de 2 ?
 3) Représentez graphiquement le comportement.

Synthèse partielle

Activité 4 : Fonction de limite infinie en plus l'infini ($+\infty$) ou moins l'infini ($-\infty$)

On considère la fonction f définie par le tableau ci-dessous

x	-1000	-100	-10	0	10	100	1000
x^2							
x^3							
$\sqrt{x}$							
$\frac{1}{\sqrt{x}}$							

Consigne :

- Complétez le tableau de valeurs ci-dessus en utilisant la notation scientifique avec une décimale.
- Donne la valeur de x pour la quelle $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ne sont pas définies
- Que pensez-vous du comportement de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?
- Que constate-t-on ?

Synthèse partielle

On constate que : chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$x \rightarrow x$; $x \rightarrow x^2$; $x \rightarrow x^3$; $x \rightarrow \sqrt{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut quand x tend vers $+\infty$: il suffit pour cela de choisir x suffisamment grand

Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$:

Seance2 : Operations sur les limites

Activité :

Soit les propriétés de limite de la somme de deux fonctions f et g tels que l et l' sont deux nombres réels ci-dessous

- 1) **Limite de la somme de deux fonctions :**

Si $f(x)$ a pour limite	Si $g(x)$ a pour limite	$f(x) + g(x)$ a pour limite
l	l'	
$-\infty$	l'	
$+\infty$	l'	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

- 2) **Limite du produit de deux fonctions**

Si $f(x)$ a pour limite	Si $g(x)$ a pour limite	$f(x) \times g(x)$ a pour limite
l	l'	

$-\infty$	$l' > 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$ ou $-\infty$	0	

3) Limite du quotient de deux fonctions

Si $f(x)$ a pour limite	Si $g(x)$ a pour limite	$\frac{f(x)}{g(x)}$ a pour limite
l	l'	
l	$+\infty$ ou $-\infty$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' > 0$	
0	0	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	

Consignes :

- 1) Complétez le tableau de limite ci – dessus
- 2) Quelle conclusion peut – on tirer ?

Synthèses générales

1) Cas des formes indéterminées :

En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, nous avons obtenu les quatre formes indéterminées :

$$+\infty - \infty ; \quad 0 \times \infty ; \quad \frac{\infty}{\infty} ; \quad \frac{0}{0}$$

1.1) Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations

- Si la limite d'une fonction rationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$, on leve l'indetermination en utilisant la division euclidienne.

1.2) Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de l'expression conjuguée.

- Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $+\infty - \infty$, on leve l'indetermination en utilisant l'expression conjuguée.

2) Limite à l'infini d'une fonction polynôme et rationnelle :

2.1) Limite à l'infini d'une fonction polynôme :

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers plus ou moins l'infini est égale à la limite de son monome le plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

2.2) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle :

La limite d'une fonction rationnelle quand x tend vers plus ou moins l'infini est égale à la limite du rapport des monomes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^n}$$

3) Interprétation graphique et asymptote :

3.1) Asymptote verticale :

Soit a est un nombre réel.

- SI $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors (Cf) admet une asymptote verticale de la droite d'équation $x = a$ en $-\infty$ et en $+\infty$

3.2) Asymptote horizontale :

Soit b est un nombre réel.

- SI $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ alors la courbe (Cf) admet une asymptote verticale de la droite d'équation $y = b$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3.3) Asymptote oblique :

Soient a et b sont deux nombres réels.

- SI $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ il ya possibilité d'asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :
$$f(x) = \text{Quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}} = q(x) + \frac{R}{D(x)}$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R}{D(x)} = 0$ OU $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R}{D(x)} = 0$ Alors la droite d'équation $y = q(x)$ est appelée asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (D) :

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (D) , on étudie le signe de $f(x) - y$.

- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (D) .
- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (D) .
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (D) sont confondues.

Séance 3 : Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point x_0

Activité 1 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 4$$

1) Etudier la continuité de f en un point $x_0 = 1$:

Consignes 1 :

1.1) Détermine l'ensemble de définition de f

1.2) Calculer $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

1.3) Que peut-on dire des résultats obtenus par $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$?

1.4) f – elle continue en $x_0 = 1$?

2) Etudier la dérivabilité de f en un point $x_0 = 1$:

Consignes 2 :

2.1) Calculer $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

2.2) Si le résultat obtenu par $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est un réel donc f est dérivable en 1. La fonction f est – elle dérivable en $x_0 = 1$? Si oui détermine $f'(1)$.

2.3) Quelle conclusion peut-on tirer ?

Synthèses générales

1. Continuité d'une fonction en un point x_0 :

1) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel appartenant à I .

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$.

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si : $f(x_0)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l$ (l fini).

Remarque : les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0 .

2) **Continuité à gauche – Continuité à droite en un point x_0**

- On dit que f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- On dit que f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

II. **Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 :**

- 1) **Définition** : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

C'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = l$

Remarque : Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

2) **Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point x_0 :**

- f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$
- f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$
- Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

3) **Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 :**

L'équation de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est donnée par la formule :

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

4) **Formules sur les dérivées :**

a) **Tableau récapitulatif des fonctions dérivées usuelles**

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x) = a ; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = nax^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{a}{x} ; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \frac{a}{x^n} ; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{na}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = a\sqrt{x}$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$
---	-------------------------------

b) Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

Soit U et V sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f = U + V$	$f' = (U + V)' = U' + V'$
$f = U - V$	$f' = (U - V)' = U' - V'$
$f = K \times U$	$f' = (K \times U)' = K \times U'$
$f = U \times V$	$f' = (U \times V)' = U' \times V + U \times V'$
$f = \frac{1}{U}$	$f' = \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$
$f = \frac{a}{U}$	$f' = \left(\frac{a}{U}\right)' = -\frac{aU'}{U^2}$
$f = \frac{1}{U^n}$	$f' = \left(\frac{1}{U^n}\right)' = -\frac{nU'}{U^{n+1}}$
$f = \frac{a}{U^n}$; $a \in \mathbb{R}$	$f' = \left(\frac{a}{U^n}\right)' = -\frac{a \times nU'}{U^{n+1}}$
$f = \frac{U}{V}$	$f' = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$
$f = U^2$	$f' = (U^2)' = 2 \times U' \times U$
$f = U^3$	$f' = (U^3)' = 3 \times U' \times U^2$
$f = U^n$	$f' = (U^n)' = n \times U' \times U^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{U}$	$f' = (\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$f(x) = a\sqrt{U}$, $a \in \mathbb{R}$	$f' = (a\sqrt{U})' = \frac{a \times U'}{2\sqrt{U}}$

5) Sens de variation d'une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est constante ou stationnaire.

6) Tableau de variation d'une fonction :

Les variations d'une fonction f peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f . Ce tableau comporte les éléments suivants :

- Le domaine de définition de f (D_f).
- Les limites aux bornes du domaine de définition D_f .
- Les valeurs pour lesquelles la dérivée f' s'annule.
- Des flèches indiquant si la fonction monte (croissante) ou descend (décroissante) montrant les variations de f .

7) Identifier le Maximum et le Minimum d'une fonction :

a) Le Maximum (Sommet) :

Il y a un maximum en x_0 si la dérivée s'annule en changeant de signe du positif vers le négatif.

- **Visuellement** : La flèche monte puis descend ($\nearrow \searrow$).
- $f(x_0)$ est la valeur maximale.

b) Le Minimum (Creux) :

Il y a un minimum en x_0 si la dérivée s'annule en changeant de signe du négatif vers le positif.

- **Visuellement** : La flèche descend puis monte.
(∩ ∪) .

- $f(x_0)$ est la valeur minimale .

Si la dérivée s'annule mais ne change pas de signe (par exemple, elle est positive, s'annule, puis reste positive), il n'y a ni maximum ni minimum à cet endroit, mais un point d'inflexion.

8) **Symétrie de la courbe** :

a) **Centre de symétrie** :

Le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est dit centre de symétrie pour la courbe (Cf) de f si : $f(2a - x) + f(x) = 2b$
Ou $f(-x) = -f(x)$ est impaire.

b) **Axe de Symétrie** :

La droite d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie pour la courbe (Cf) de f si :
 $f(2a - x) = f(x)$ Ou $f(-x) = f(x)$ est paire.

Remarque :

- Toute fonction paire admet l'axe (y'o y) comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

9) **Intersection de la courbe (Cf) avec les axes du repère** :

Pour déterminer les points d'intersections de la courbe (Cf) avec les axes du repère ainsi :

- Avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$.
- Avec l'axe des ordonnées, on calcule $f(0)$

Séance 3 : Les fonctions économiques

I. **Etude des fonctions économiques** :

L'étude des fonctions économiques permet à une entreprise de modéliser son activité pour optimiser sa production et maximiser son profit

- 1) **La fonction de Cout** : Le cout total de production, noté $C(x)$, dépend de la quantité x d'objets produits.

- **Cout Total $C_T(x)$** : Somme des couts fixes (loyer, machines) et des couts variables (matières premières, salaires).

$$C_T(x) = C_V(x) + C_F$$

- **Cout Moyen $C_M(x)$** : Cout par unité produite.

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$$

- **Cout Marginal $C_m(x)$** : Cout de la dernière unité produite. En mathématiques, on l'assimile à la dérivée du cout total.

$$C_m(x) = C'_T(x)$$

- 2) **La Fonction Recette** : La recette totale $R_T(x)$ est le montant d'argent perçu par la vente des produits. Si le prix de vente unitaire est P , alors :

$$R_T(x) = P \times x$$

- 3) **La Fonction Profit ou Bénéfice** : Le profit $B(x)$ (ou Bénéfice) est la différence entre la recette et le cout total .

$$B(x) = R_T(x) - C_T(x)$$

- Si $B(x) > 0$, l'entreprise réalise un bénéfice.
- Si $B(x) < 0$, l'entreprise est en déficit

- **Optimisation** : Le profit est maximal lorsque sa dérivée est nulle, soit $B'(x) = 0$, ce qui revient à dire que le cout Marginal est égal à la Recette Marginale.

II. Les courbes de référence :

- 1) **La courbe de cout Total $C_T(x)$** : Elle part souvent d'une valeur positive (les couts fixes) et croit de plus en plus vite à cause de la loi des rendements décroissants.
- 2) **La courbe de Recette $R_T(x)$** : Si le prix de vente est constant, c'est une droite passant par l'origine. Sa pente est égale au prix unitaire.
- 3) **La courbe de Bénéfice $B(x)$** : Elle représente l'écart vertical entre la recette et le cout.

III. Interprétation des points :

- 1) **Le seuil de Rentabilité (Points d'intersection)** :

Graphiquement, le seuil de rentabilité correspond aux points où la courbe de recette coupe la courbe de cout ($R_T(x) = C_T(x)$) .

- **Zone de perte** : Quand la courbe de cout est au-dessus de la droite de recette.
- **Zone de profit** : Quand la droite de recette est au-dessus de la courbe de cout.
- **Points morts** : Les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est nul ($B(x) = 0$)

- 2) **Le profit Maximum (Ecart maximal)** :

Le profit est à son maximum là où l'écart vertical entre $R_T(x)$ et $C_T(x)$ est le plus grand.

Fin