

FICHE DE SÉQUENCE (PRÉPARATION)

La numérotation de la fiche n'est pas exigée, mais elle est utile en ce sens qu'elle permet à l'enseignant d'organiser ses fiches dans une logique d'exécution et de les hiérarchiser.

Classe : TSEco	Chapitre V : Analyse	Durée : 06H
Domaine : SMT	Discipline: Mathématiques	Discipline
Classe : TSEco	Fiche n° :	Durée :
Nombre de séances : 03 séance	Séance n° :	Durée séance : 02H

1. Compétences :

- 📖 Etudier une fonction numérique d'une variable réelle ;
- 📖 Résoudre une situation problème économique ;
- 📖 Résoudre les activités numériques de :
 - ▶ Fonction logarithme népérien.
 - ▶ Fonction exponentielle népérienne
 - ▶ Logarithme décimal;
 - ▶ Fonctions puissances.

Composantes, manifestations :

- ✓ Déterminer le domaine de définition puis les limites aux bornes de Df
- ✓ Calculer la dérivée ; étudier son signe puis en déduire le sens de variation ;
- ✓ Tracer une la courbe ;
- ✓ La résolution des équations, inéquations et systèmes d'équations ;

2. Contenu(s) : ANALYSE :

On insistera davantage sur les applications pratiques et l'utilisation de ces notions, plutôt que sur leur aspect théorique et l'on développera les techniques de calcul.

a) Limites, continuité, dérivée, primitives :

- 📖 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle (on admettra la continuité).
- 📖 Fonction dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- 📖 Fonction dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone sur un intervalle.
- 📖 Exemple de dérivée de fonctions du type : f^m $m \in \mathbb{Q}$.
- 📖 Fonction dérivée seconde d'une fonction.

b) Primitives d'une fonction

- 📖 Définition – tableau des primitives usuelles

c) Intégrale:

- 📖 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ – Définition et notation.
- 📖 Calcul d'aire. – Intégration par parties.

d) Exemples d'étude de fonctions :

La recherche de point d'inflexion ne sera pas à faire de façon systématique.

- 📖 Fonctions polynômes – fonctions rationnelles (Asymptotes obliques)
- 📖 Fonctions logarithme népérien et exponentielle :

e) Activités numériques

- 📖 Fonction logarithme népérien.
- 📖 Fonction exponentielle népérienne
- 📖 Logarithme décimal;
- 📖 Fonctions puissances.

3. Ressources éducatives

- **Ressources humaines** : Apprenants ; enseignants ; parent des apprenants etc.
- **Ressources matérielles** :
 - ♣ Les logiciels de calcul ou une calculatrice scientifique
 - ♣ Les données
 - ♣ Le matériel de géométrie (équerre ; règle ; compas ; rapporteur ; Té ; craies ; gomme etc.)
- **Ressources financières** :
 - ♣ Frais d'un logiciel de calcul ou d'une calculatrice scientifique ;
 - ♣ Frais des matériels de géométrie (équerre ; règle ; compas ; rapporteur ; Té ; etc.)

4. Stratégies d'animation

1. Travaux en groupe (pédagogie active).
2. Travaux par table (pédagogie active) si la formation en groupe rend difficile le passage d'enseignant pour contrôle de travaux effectués par groupe pendant l'apprentissage

5. Déroulement des activités (situations d'apprentissage)

- **Pré évaluation** : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

a) $3x^2-5x+1=0$; b) $x^2+x+2=0$; c) $-4x^2+36x-81=0$; d) $-2x^2+4x+30\leq 0$;

e) $3x^2+5x+4>0$; f) $9x^2+6x+1<0$; g) $\frac{2x}{x+2}\leq 0$; h) $\frac{-2x+3}{x-1}>0$

- **Situation-problème** :

Activités

Activité 1 : Domaine de définition d'une fonction

1. Fonction polynôme :

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[.$$

2. Fonctions rationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0\}$.

- Si l'équation $v(x)=0$ admet des solutions $x_1, x_2, \dots$, alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$.
- Si l'équation $v(x)=0$ n'admet pas de solution, alors $D_f = \mathbb{R}$.

3. Fonctions logarithmes népériens :

Soit u une fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère la fonction logarithme népérien f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln u(x)$

- L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, u(x) > 0\}$

4. Fonctions exponentielles népériennes :

Soit u une fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère la fonction exponentielle népérienne f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{u(x)}$

L'ensemble de définition d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Consigne : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-4x-5} ; h(x) = 2x^3+3x^2-17x+12 ; f(x) = x^3+2x-1 ; b^o) f(x) = \frac{x}{x^2-3} ;$$

$$e) f(x) = \frac{x}{2x-8} ; f^o) f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+1} ;$$

$$g^o) f(x) = \frac{x-7}{x^2+x+1} ; h) f(x) = \frac{x^2+2x-1}{-8}$$

$$i) f(x) = \ln(2-3x) ; j) f(x) = \ln(2x-3) + \ln(5x-2) ; k) f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{4x+8}\right)$$

$$l) f(x) = \ln\left(\left|\frac{-x+3}{3x-9}\right|\right) ; m) f(x) = \ln(x+2)^2 ; n) f(x) = (3x+2)e^x ;$$

$$o) f(x) = e^{3x-1} ; p) f(x) = \frac{e^{3x}}{x-1} ; q) f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}}$$

Activité 2: calculer les limites en l'infini ou en un point x_0

1. Fonctions polynômes :

📖 Formules usuelles :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} ; c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

📖 Propriété :

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

2. Fonctions rationnelles :

📖 Propriété 1 :

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

📖 Propriété 2 :

Soit f une fonction définie en a avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Consigne 1: calcule les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{x^5} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{2}x^6 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^2 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 + 9) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^2 - 3x^3 + x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4 + 4x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x}{x^4+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x+5}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{2x+3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-4}{1-2x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-5x+1}{4x-7}$$

Consigne 2 : calcule les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{x+1} ; \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+10x-1) ; \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} (\ln(x^2 - x - 2)) ; \lim_{x \rightarrow -2} \left(\ln \left(\frac{x+2}{5x-1} \right) \right) ; \lim_{x \rightarrow -2} \left(\ln \left| \frac{2x^2-1}{3x+1} \right| \right)$$

Activité 3 : Enlever l'indétermination

Les formes indéterminées :

Les formes suivantes sont dites indéterminées : $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$. Pour lever

l'indétermination, on procède à une factorisation des fonctions considérées ou la division euclidienne ou à une multiplication de l'expression par son conjugué.

Consigne : calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} ; \quad b^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} ; \quad c^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x} ; \quad d^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \\ e^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{25-x} ; \quad f^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} ; \quad g^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{x^2-25} ; \quad h^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x^2-5x+3} \end{aligned}$$

Activité 6 : calculer la limite à gauche et la limite à droite

Consigne : soit les fonctions f définies par :

$$\begin{aligned} a^{\circ}) f(x) = \ln \left(\frac{x-4}{-x+2} \right) ; \quad b^{\circ}) f(x) = \frac{x+3}{-x+2} ; \quad c^{\circ}) f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x-5} ; \\ d^{\circ}) f(x) = \frac{2x+3}{x-3} ; \quad e^{\circ}) f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x^2-4} \quad f^{\circ}) f(x) = \frac{e^x}{x-1} \end{aligned}$$

Déterminer Df de chacune des fonctions ci – dessus puis les limites aux bornes de Df

Remarque : Asymptote parallèle aux axes de coordonnées :

Propriétés : Dans le plan muni d'un repère orthonormal ; soit une fonction f et a, b des réels.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$ alors $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe (C) de f.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ alors $x = a$ est asymptote horizontale à la courbe (C) de f

Activité 7 : Etudier la continuité d'une fonction f :

1- Continuité en un point d'abscisse x0 :

a) Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition Df. On dit que f est continue au point d'abscisse x0 de Df si et seulement si f(x0) est définie et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left(\begin{array}{c} x \text{ est continue au point} \\ x_0 \text{ de Df} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f(x_0) \text{ définie} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right)$$

Consigne 1:

1- soit $f(x) = \frac{x-2}{2x}$, la fonction f est elle continue en $x_0=1$? ; en $x_0=0$, ?

2- Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$

a) Déterminer le domaine de définition de f ;

b) f est-elle continue en $x_0 = 2$?

2- Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{array} \right) \text{ si et seulement si } \begin{cases} x_0 \notin Df \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Son prolongement est la fonction g définie par
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

Consigne 2 :

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$; f est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 1$? si oui déterminer son prolongement g .

b) Soit f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

3- Continuité d'une fonction sur un intervalle $I = [a ; b]$

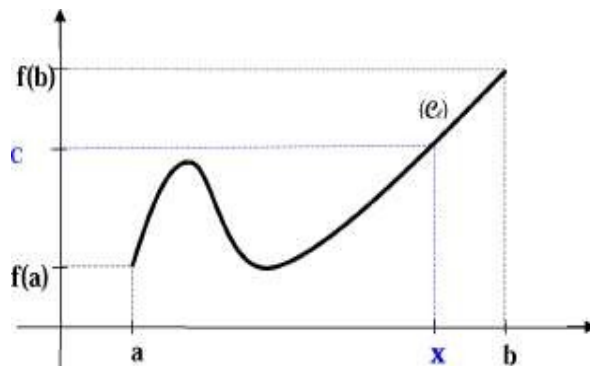
Une fonction f est continue sur $I = [a ; b]$, si elle est continue en tout point de $I = [a ; b]$.

4- Théorème 1:

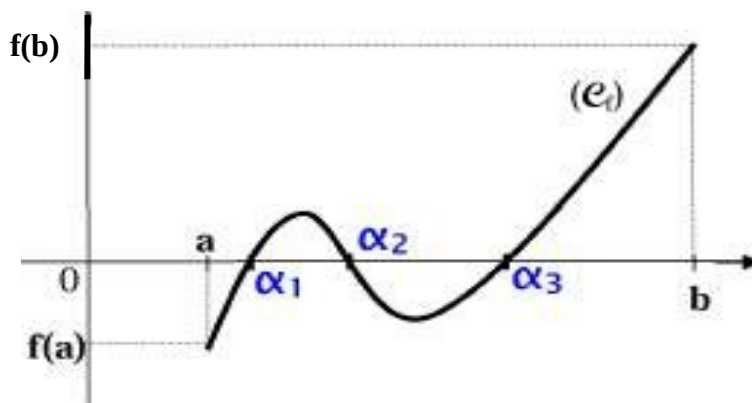
- 📄 Une fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- 📄 Une fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.

5- Théorème des valeurs intermédiaires 2 :

a) Énoncé du théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a ; b]$ et c un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$ inclusivement ; alors il existe au moins une valeur x dans l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(x) = c$

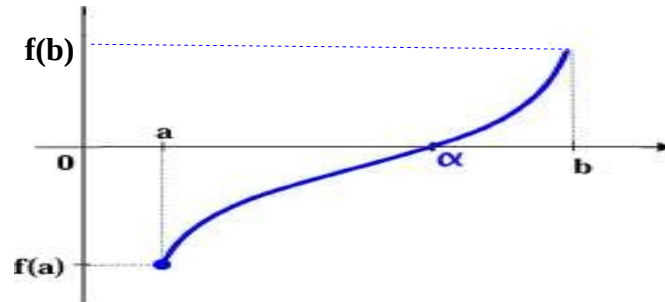


b) Conséquence du Théorème 2 : Si f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



c) **Théorème de la bijection** : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a ; b]$ sur $f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle.

De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



d) **Propriétés : Image d'un intervalle par une fonction continue** :

- ☞ L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.
- ☞ Si f est continue et croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
- ☞ Si f est continue et décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Activité 7 : Calcul des dérivés :

a- **Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles** :

➤ **Formules usuelles**

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = na x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = (ax + b)^n$	$f'(x) = na(ax + b)^{n-1}$

➤ **Opérations sur les dérivées** :

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = ku$	$f' = ku'$
$f = uv$	$f' = u'v + v'u$
$f = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Consigne :

Dans chacun des cas suivants, calcule la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par :

- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$; 2) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 100$; 3) $f(x) = (2x - 1)^2$
 4) $f(x) = (-5x + 3)^4$; 5) $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$; 6) $f(x) = \frac{-4}{x^2 - 3x + 4}$; 7) $f(x) = x + 2 + \frac{8}{x}$
 8) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 9) $f(x) = (x^2 - 2x)(3x + 1)$; 10) $f(x) = (x - 2)^2(1 - 2x)$
 11°) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 12°) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$; 13°) $f(x) = \sqrt{-x^3 + 2x + 5}$

Dérivée de la composée de deux fonctions :

Théorème 6 :

- ☞ Si f est une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable au point $f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$
 ☞ Si f est une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a : $\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$;

Activité 10 : Application de la dérivée :

a- Dérivée et tangente : soit f une fonction de courbe représentative C_f , A un point de C_f , d'abscisse x_0 . Lorsque f est dérivable en x_0 , une équation de la tangente en A à la courbe C_f est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

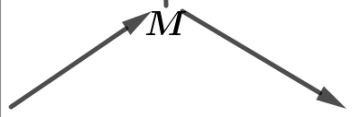
b- Dérivée et sens de variation :

Propriétés : soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I .

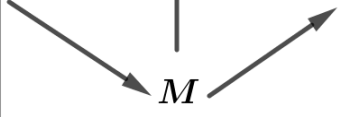
- Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I ;
- Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I ;
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I

c- Dérivée et extremum :

Propriétés : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a ; b[$ et x_0 un élément de $]a ; b[$, si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum relatif en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f admet un minimum relatif M en x_0

d- Dérivée et continuité :

Propriétés : Si f est dérivable sur intervalle I alors elle est continue sur cet intervalle.

Consigne 1:

Soient les fonctions f et h définies par $f : x \mapsto -x^3 + x - 2$ et $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

- Etudier les variations de f et h ;
- Dresse le tableau de variation de f et h ;
- Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse -2 et C_h au point d'abscisse 1 ;
- Construis les courbes C_f et C_h respectivement de fonctions f et h .

Consigne 2 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur par : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$

On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité 1cm.

- Détermine le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de Df
- En déduis une équation de l'asymptote verticale.
- Vérifier que $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x - 2}$ sur Df .
 - En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C)
 - Préciser la position relative de (C) et (Δ) .
- Calculer $f'(x)$ et prouver que : $f'(x) = \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 2)^2}$
 - Dresser le tableau de variation de f et construis (C) .
 - Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$

Activité 1: Définis une fonction logarithme népérien et dégage les propriétés et leurs conséquences

Consigne 1 : Compléter la table de valeurs ci – dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur :

- ✓ L'ensemble de définition de la fonction ;
- ✓ Le signe des images ;
- ✓ Construire une représentation graphique partielle à partir de la table de valeurs obtenues.
- ✓ Emettre des conjectures sur le sens de variation de la fonction.

a	-10	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	2	e	3	4	5	6	7	8	9	10
Ln (a)																		

Consigne 2 :

Compléter le tableau ci – dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur les résultats trouvés

a	2	3	4	5,2	6,3	7	49,8
b	1,8	3,2	4,5	5	6	12,9	104
Ln(a) + Ln(b)							
Ln (a×b)							
Ln(a) – ln(b)							
Ln (a/b)							
a×ln(b)							
Ln (b ^a)							

Synthèse partielle :

Définition : La fonction logarithme notée **ln** est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule pour $x=1$

Conséquences :

- $f(x) = \ln x$ et $Df =]0, +\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est strictement croissante

Propriétés fondamentales :

Pour tout réels $a; b$ strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$, on a

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln a^r = r \ln a$
- $\ln a = \ln b \implies a = b$ et $\ln a < \ln b \implies a < b$ (car la fonction $\ln$ est bijective)

Il existe un réel unique dont le logarithme népérien est 1 ; on le note e et on l'appelle base de logarithme népérien $\ln e = 1$ avec $e \approx 2,718$.

Evaluation 2 :

1- Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

$$\ln(e^2) ; \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) ; \ln(\sqrt{e}) ; \ln\left(\frac{e^4}{\sqrt{e}}\right) ; \ln(e^2 \sqrt{e}) ; \ln(\sqrt{e})^3$$

2- Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$\ln 32 ; \ln\left(\frac{1}{4}\right) ; 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right) ; \ln \sqrt{2} ; \ln(3\sqrt{2}) ; 2 \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) ; \ln 36 - 2 \ln 12 ; \ln 27 + 2 \ln 8 - 3 \ln 108$$

3- Ecrire sous forme de $\ln(A)$ chacun des nombres réels suivants :

$$3 \ln 2 - \ln 7 + \ln 4 ; \ln 5 - 3 \ln 3 - \ln 2 ; \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 9 - 2 \ln 5$$

$$\ln(0,1) + \ln 10 - \ln(0,001) ; \ln(1+\sqrt{2}) + \ln(1-\sqrt{2}) ; \ln\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5+\sqrt{3}}\right)$$

4- Simplifier :

$$\ln(1-\sqrt{2})^{10} + \ln(1+\sqrt{2})^{10} ; \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Activité 4 : calculer les limites de fonctions logarithmes népériens

Les limites de référence :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

Consigne : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\ln x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) \ln x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2+11x+2) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x+3-4 \ln x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x+2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x+3}{\ln x+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Activité 8 : calculer la dérivée de fonctions logarithmes népériens

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I.

Propriétés des dérivées logarithmiques : $U(x) > 0$ et $V(x) > 0$

Les fonctions logarithmiques $f(x)$	dérivées logarithmiques $f'(x)$
$f(x) = \ln(U(x))$	$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$
$f(x) = \ln \left(\frac{U(x)}{V(x)} \right)$	$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{V'(x)}{V(x)}$
$f(x) = \ln(U(x) \times V(x))$	$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)} + \frac{V'(x)}{V(x)}$
$f(x) = \ln(U(x))^n$	$f'(x) = n \frac{U'(x)}{U(x)}$

Consigne : Déterminer la fonction dérivée de chacune de fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x^2+3x-1) ; f(x) = -\ln((2x-5)(x^3+3)) ; f(x) = \ln \left| \frac{2x-1}{-x+3} \right| ;$$

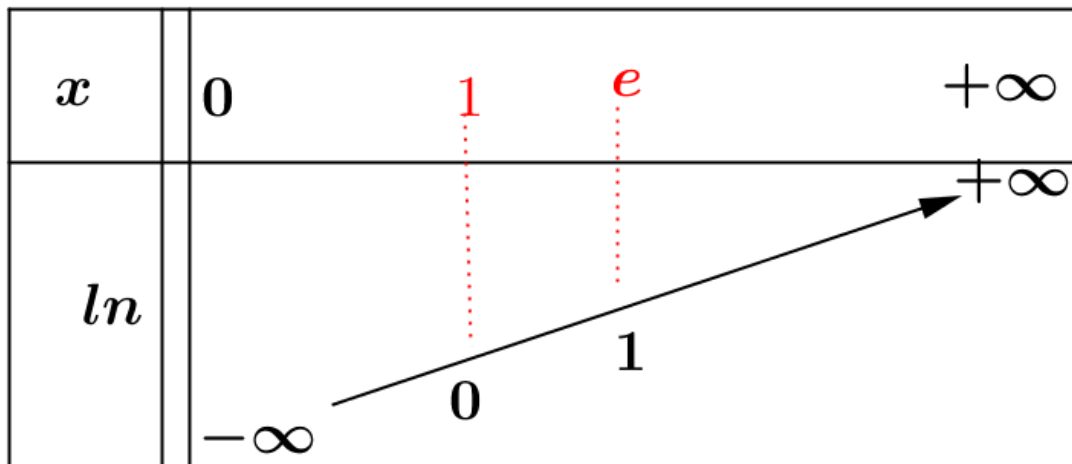
$$f(x) = \ln(x+3)^5 ; f(x) = \frac{\ln x+1}{\ln x-1} ; f(x) = (x+1) \ln(3x^2-1)-5x ; f(x) = \frac{\ln x}{x} ;$$

Activité 6 : Etude de la fonction logarithme

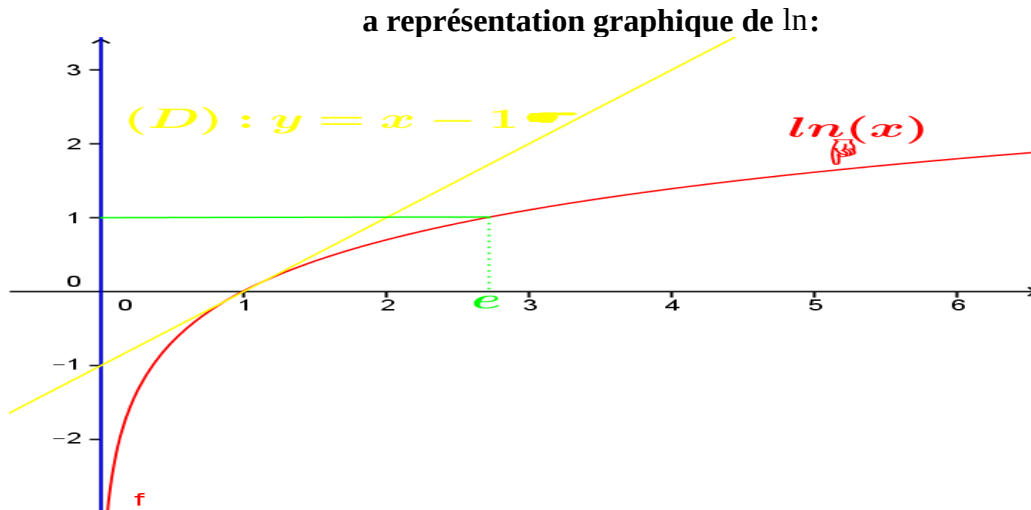
Théorème : $\ln$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$: $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Le tableau de variation de $\ln$:



L



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2 + \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f ;
3. Etudie les variations de f et construis sa représentation graphique C dans le plan muni du repère orthonormé.

Activité 7 : fonction logarithme de bases quelconques :

Définition : Soit a un nombre réel strictement positive et différent de 1 : $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle logarithme de base a l'application notée $\log_a$ définie par $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque :

- Si $a=10$, on obtient logarithme décimal, qu'on note $\log$
- Si $a=e$, on obtient $\ln$

Propriétés : Soient $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$; x et $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) ;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a x^n = n \log_a(x)$$

Activité 8 : Définis une fonction exponentielle népérienne et ses propriétés algébriques

Consigne : Compléter les tableaux ci – dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur la bijectivité des fonctions :

A	0,7	1	3	8,4	15,9	28,3	102	271	465
$e^{\ln a}$									

A	-20	-16	-5,3	-1,9	0	5,4	7,2	8,1	9,6
$\ln e^a$									

Synthèse partielle :

1- Définition : On appelle exponentielle la fonction qui à tout réel x associé l'unique réel y tel que $\ln y = x$. (on dit qu'exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien). L'exponentielle de x est notée $\exp(x)$.

2- Notation : On note $\exp(x) = e^x$ et se lit « e puissance x » ou e puissance x

3- Propriétés immédiates : Soit $f(x) = e^x$ $Df = \mathbb{R}$; $e^1 = e$; $e^0 = 1$ (car $\ln 1 = 0$)

4- Propriétés : Pour tout nombre réel x :

1. e^x est un nombre strictement positif.

2. $\ln(e^x) = x$

3. Pour tout nombre réel strictement positif : $e^{\ln(x)} = x$

5- Relation fondamentale : Soient x et y deux nombres réels on a :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y ; \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} ; \quad (e^x)^n = e^{nx} \text{ pour } n \in \mathbb{N} ;$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y ; \quad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

Evaluation : x étant un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

$$e^{3 \ln 5} ; \quad e^{\ln 2 + \ln 5} ; \quad \ln(e^{3x}) ; \quad \ln(3e^{6x}) ; \quad \frac{e^{x-1}}{e^2} \times \ln e^3 \times e^{\ln e^3} + 2 \ln(\ln e) ; \quad e^{-\ln 2}$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln 6} ; \quad \frac{1}{2} \ln e^{8.5} ; \quad e^{\ln 3 - \ln 7} ; \quad \ln \sqrt{e^5} ; \quad e^{\ln x} - \ln e^x ; \quad e^{1 - \ln 5} ; \quad e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$$

Activité 5 : Calculer les limites de fonctions exponentielles népériennes

Les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Consigne : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x) e^x ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+3}$$

Activité 9 : Dérivée des fonctions exponentielles

Dérivée : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction e^u est dérivable sur K et on a : $(e^u)' = u' e^u \Leftrightarrow f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u' e^u$.

Consigne 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K

$$f(x) = (2x+3)e^x ; \quad f(x) = e^{2x} \ln x ; \quad f(x) = (x^3+4)e^{-x} ; \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f(x) = e^{x^3} ; \quad f(x) = \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}} ; \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} ; \quad f(x) = e^{\ln x} ; \quad f(x) = \frac{x}{1 - e^x}$$

Activité 11 : Définitions et propriétés de primitives :

a) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que, pour tout élément x de I , $F'(x) = f(x)$

b) Propriétés : Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I .

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet une primitive sur I .

Pour tout nombre réel c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur I .

Primitives de fonctions usuelles: Soient f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
$f(x) = 0$	$F(x) = C$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = ax^n$	$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = (x-a)^m ; m \neq -1$	$F(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + C$
$f(x) = (ax+b)^n ; n \neq -1$	$F(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$
$f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$	$F(x) = \ln U(x) + C, U(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$	$F(x) = \sqrt{U(x)} + C ; U(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{U'(x)V(x) - V'(x)U(x)}{(V(x))^2}$	$F(x) = \frac{U(x)}{V(x)} + C ; V(x) \neq 0$
$f(x) = U'(x)U^n(x) ; n \neq -1$	$F(x) = \frac{U^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{U'(x)}{(U(x))^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)(U(x))^{n-1}} + C ; n \neq 1$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + C$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

Consigne 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} ; \quad f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}} ; \quad f(x) = 10x(5x^2 - 7)^4$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3} ; \quad f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-2}} ;$$

$$f(x) = \frac{3}{2-x} ; \quad f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1} ;$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; \quad f(x) = \frac{2x}{x^2+1} ; \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} ; \quad f(x) = e^{-x+3} ;$$

$$f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1} ; \quad f(x) = e^{2x} ; \quad f(x) = 3xe^{x^2-1} ; \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$$

Consigne 2 :

1- On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$

a- Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$

b- Déterminer une primitive sur $]2 ; +\infty[$ de la fonction f

2- f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : pour tout x distinct de -1/2.

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$$

b) En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$.

c) Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$

Activité 7: Calcul Intégral :

1- **Définition** : Soit F une primitive d'une fonction f sur $[a ; b]$. On appelle intégrale définie

de f sur $[a ; b]$ le réel noté : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

2- **Propriétés** :

$$a) \int_b^a f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_c^a f(t) dt ; \quad b) \int_a^a f(t) dt = 0 ; \quad c) \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

$$d) \int_a^b (f+g) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt ; \quad e) \int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt$$

$$f) \text{ si } f \geq 0 \text{ sur } [a ; b] \text{ alors } \int_a^b f(x) dt \geq 0 ; \quad g) \text{ si } f \geq g \text{ sur } [a ; b] \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

3- **La formule de l'intégration par partie**

$$\int_a^b U(x) V'(x) dx = [U(x) V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x) V(x) dx$$

Consigne 1 : Calcule les intégrales suivantes

$$\int_0^1 (2x+4) dx ; \quad \int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} ; \quad \int_0^1 (-x^2+4x+1) dx ; \quad \int_0^2 e^{-3x+4} dx$$

$$\int_{-1}^1 e^{3x+1} dx \quad ; \quad \int_2^3 \left(2x-1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \quad ; \quad \int_0^1 (2x-5)(x^2-5x+1) dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad ; \quad \int_0^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(2x+3)^2} \right) dx \quad ; \quad \int_{-1}^0 (2x-3)e^{x^2-3x+1} dx$$

Consigne 2 :