

Chapitre I : Puissances entières et rationnelles

Classe : TSEco

Durée : 03 Heures

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Compétence :

Composantes,

Manifestations

Contenus :

- Opérations sur les puissances
- Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre positif

Ressources éducatives :

- * ressources humaines : Enseignant ; Apprenant ;
- * ressources matérielles : Livres ; Cahiers ; Craies ; Bic ; Chiffons ; etc....

Stratégies d'animation :

Méthodes, techniques,...(le travail de groupe ; la recherche collective des idées)

Déroulement des activités :

Pré-évaluation :

Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers naturels suivants :

32 ; 64 ; 100 ; 450 ; 49 ; 231 ;

I. Puissances entières positives ou négatives

1. **Définitions :** soit $n \geq 1$ un entier naturel, la puissance $n^{\text{ème}}$ d'un réel x est le produit de n facteurs égaux à x , on le note x^n et on lit « x à la puissance n ». On a donc :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \dots \times x}_{n \text{ fois}}$$

La puissance est dite entière si $n \in \mathbb{Z}$ (par exemples 3^5 ; 10^{-4}).

Elle est dite rationnelle si $n \in \mathbb{Q}$ (par exemples $2^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{2}{3}}$).

2. **Règles de calcul avec les puissances entières :** Pour tous réels x, y et pour tous entiers naturels $n \geq 1$ et $m \geq 1$; on a :

Propriétés :

- a) $x^n \times x^m = x^{n+m}$;
- b) $(x^n)^m = x^{n \times m}$
- c) $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
- d) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

Activité 1 : Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance.

$$2^4 \times 2^6 ; (-2)^3 \times (-2)^7 ; a^{11} \times a^8 ; (3^7)^3 ; 6^4 \times (-7)^4 ; \frac{4^4 \times 4^{12}}{4^5 \times 4^{15}} ; \left(-\frac{3}{5}\right)^6 \times \left(-\frac{10}{3}\right)^6$$

3. **Identités remarquables :** (savoir au moins la première ligne)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ; (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Activité 2 : Utiliser les identités remarquables pour transformer les expressions suivantes :

1) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$; 2) $z^6 - 2z^3t^8 + t^{16}$; 3) $2r - 1 - r^2$

4. **Extension de la définition aux exposants négatifs** : On peut généraliser la définition de x^n aux exposants négatifs ou nuls, pour cela il faut que $x \neq 0$, et on pose les définitions suivantes :

Propriétés : ($x \neq 0$ et $n, m \in \mathbb{Z}$)

a) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

b) $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$

c) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

d) $x^0 = 1$

Exo2 : Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombre premiers :

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \quad B = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} ; \quad C = \frac{(-5^3) \times (-8)^3 \times (-9)^2}{(15)^2 \times (12)^4} ;$$

$$\frac{28 \times 10^3}{0,4 \times 10^4}$$

$$\frac{18 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{15 \times 10^2}{0,3 \times 10^5}$$

$$\frac{0,7 \times 10^5}{14 \times 10^3}$$

$$D = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64} ; \quad E = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4} ; \quad F = \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$$

II. Puissances Rationnelles :

- Convention d'écriture : soit $a \geq 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on écrit $a^{\frac{p}{q}}$ pour représenter le nombre $(a^p)^{\frac{1}{q}}$. Et pour tout rationnel r représenté par $\frac{p}{q}$, on écrit $a^r = a^{\frac{p}{q}}$
- Règle de calcul : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $r, r' \in \mathbb{Q}$ (voir les propriétés ci-dessus)

Propriétés :

a) $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (a^p)^{\frac{1}{q}}$

b) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (racine nième $n \in \mathbb{N}^*$)

c) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a$

d) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (racine carrée de a)

Activité 3:

1) Calculer sans machine

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}; \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}; \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}; 125^{\frac{-1}{3}}; 16^{\frac{-3}{3}}; \left(3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

2) Exprimer les expressions suivantes sous la forme a^n .

$$\frac{1}{a}; \sqrt[3]{a}; \sqrt{a^3}; \frac{(a^2)^3}{\sqrt{a}}; \sqrt{(a^3)^2}; \frac{1}{a^2 \times a^5}; a \sqrt{a \sqrt{a}}$$

III. Résolution de l'équation $x^n = a$ pour les nombres réels

On peut résumer l'ensemble solution de l'équation $x^n = a$ pour les nombres réels dans le tableau ci-dessous :

L'équation $x^n = a$	Si $a < 0$	Si $a \geq 0$
n pair	Pas de solution ($S = \emptyset$)	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$
n impair	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$

Activité 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1^\circ) x^6 = 64; 2^\circ) x^5 = 243; 3^\circ) x^6 = -7^{12}; 4^\circ) x^3 = -8; 5^\circ) (x+2)^{10} = \sqrt{2};$$

$$6^\circ) (x^4 - 2)^3 + 2 = 0; 7^\circ) y^8 + 1 = 33; 8^\circ) (x^4 - 2)^4 + 2 = 0$$

Evaluation :

Exercice 1 : Sachant que $a \times b \times c = 1$, montrer que les égalités suivantes sont vraies :
 $a^3 \times b \times c = a^2$; $a^2 \times b^3 \times c^2 = b$; $a^3 b^3 c^4 = c$.

Exercice 2 : Trouver les nombres négatifs parmi :

$$3^7; (-3)^{17}; (-3)^{12}; -3^9; -3^{12}$$

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$1) E = \frac{2a^4 b^4 (c^{-1})^3}{\frac{a^{-2} b^3 c^4}{ac^2}}; 2) F = \frac{\left(\frac{a^4 b^{-4}}{(a^{-2} b^3)^{-2}}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-2} b^3)^4}{a^8 b^{-10}}\right)^{-2}}; 3) H = \frac{15\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} (\sqrt[4]{9})^3}{(\sqrt{3})^2}; 4) G = \frac{27^{-\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{(5\sqrt[5]{243})^2}$$

Exercice 4 : Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombre premiers :

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6}; B = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4}; C = \frac{(-5^3) \times (-8)^3 \times (-9)^2}{(15)^2 \times (12)^4};$$

$$D = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64}; E = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}; F = \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$$

Exercice 5: Simplifier le plus possible les écritures suivantes (rendre rationnel le dénominateur)

$$A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}; C = \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1};$$

$$D = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}}{\sqrt{135} - \sqrt{15}} ; E = \sqrt{9(1 - \sqrt{3})^2} ; F = \sqrt{3(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{4(1 - \sqrt{3})^2} ;$$

$$G = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{15} - 1)^2 ; H = \frac{2a-1}{a+2} + \frac{3-a}{2+a} + \frac{3-a}{a-3} ; I = \left(\frac{2a}{3} - \frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{4a^2}{9} + \frac{25a^2}{4}\right) ;$$

$$J = a^4 \times b^2 \times c^{-3} \times a^{-2} ; K = \frac{a^3 \times b^5 \times c}{a^2 \times b^7} ; L = \frac{a^3 \times b^2 \times (ab)^{-4} \times (bc)^2}{(abc)^{-2} \times a^3 \times b}$$

Application : calculer :

- J et K pour $a = -4, b = 1, c = 2$.
- L pour $a = -4, b = 2, c = -5$.

Exercice 6 : Démontrer les égalités suivantes :

$$a^{\circ}) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4,5} ; b^{\circ}) \sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 1 ; c^{\circ}) \frac{\sqrt{20 - \sqrt{320}} - \sqrt{12 + \sqrt{48}}}{\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = -2 ;$$

$$d^{\circ}) \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3 + \sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \frac{1}{2} ; e^{\circ}) \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \text{ pour } a > b \geq 0 ;$$

$$f^{\circ}) \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2 = 2(a + b) \text{ pour } a > b \geq 0 .$$

Exercice 7 : calculer la valeur de x dans R

$$a^{\circ}) 2^{2x-8} = 1 ; b^{\circ}) \frac{1}{2^x} = 4^2 ; c^{\circ}) 3^x = 27 \times 9 ; d^{\circ}) 3 \times 27 = \frac{9}{3^{6x}} ; e^{\circ}) 5 \times 5^x = \frac{125}{5^{-9}} ;$$

$$f^{\circ}) ((2 \times 3)^3)^x = 6^9 ; g^{\circ}) 243 = 3^{2x-3} ; h^{\circ}) 2^x = 4\sqrt{2} ; i^{\circ}) 2^x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{64}} ;$$

$$j^{\circ}) 5^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{125}} ; k^{\circ}) 3^x \sqrt{3} = 9 ; l^{\circ}) 2^x \times \sqrt[5]{64} = 32 ; m^{\circ}) 4^x = 0,25 ;$$

$$n^{\circ}) 4^x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} ; o^{\circ}) 4^x = 2^7 ; p^{\circ}) 3^x = \sqrt[5]{3} ; q^{\circ}) 3^x = \sqrt[4]{243} ; r^{\circ}) a^x = a\sqrt{a} ;$$

$$s^{\circ}) a^x = \frac{a}{\sqrt[5]{a^2}} ; t^{\circ}) \sqrt{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}}} = a^x$$