

FICHE DE SEQUENCE MATHÉMATIQUES N°1 :

Classe : 12^{ème} T.S.Eco

Durée : 2h

1- **Domaine :** S.M.T

Discipline : Maths

2- **Compétences :**

- Résoudre une situation problème
- Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques
- Communiquer des messages en utilisant le langage et symbolisme mathématique

Composantes et manifestations :

- ❖ Diagnostiquer la situation problème
 - sélectionner les données mathématiques ; scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
 - Etablir des relations avec les données retenues
 - Formuler le problème
 - ❖ Mettre à l'essai des pistes de solutions
 - Inventorier les différentes pistes de solutions
 - Choisir une piste parmi un éventail de possibilités
 - Appliquer cette piste
 - ❖ Partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique
 - Se servir de contre exemples pour ajuster des démarches
 - Expliquer des résultats
 - Tirer une conclusion
 - ❖ Comprendre des phénomènes naturels
 - Expliquer les phénomènes à l'aide de lois et de modèles
 - Vérifier la cohérence de l'explication donnée
 - S'approprier les concepts pertinents
 - ❖ Partager des savoirs ou des résultats scientifiques, technologiques et mathématiques
 - Recourir à divers formats de présentation (symbole, tableau, dessin technique, etc.)
 - Sélectionner des modes et représentations selon l'objet du message et l'interlocuteur.
- 3- **Contenu :** PUISSANCES ENTIÈRES ET RATIONNELLES
- 4- **Ressources éducatives :**
- **Ressources matérielles :** Les matériels didactiques (livre, cahier, craie, tableau, règle, etc.)
 - **Ressources humaines :** Le Professeur et les Elèves
- 5- **Stratégies d'animation :**
- Travail en groupe
 - La recherche collective des idées
- 6- **Déroulement des activités (situation d'apprentissage) :**
- **Pré-Evaluation :** Calcule : 2^5 ; 0^3 ; $(-1)^4$. Qu'avons-nous fait ?
 - **Situation problème :**
 - **Situation d'apprentissage et d'Evaluation (S.A.E) :**
- Activités :**

Activité 1 : Puissances entières

On donne les nombres suivants : 2^5 ; 0^3 ; $(-1)^4$; $(-4,2)^5$ et 6^4 .

Consigne 1 : calcule les nombres cités ci-dessus. Que constates-tu ? Que conclure ?

Solution :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \quad ; \quad 0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \quad ; \quad (-4,2)^5 = (-4,2) \times (-4,2) \times (-4,2) \times (-4,2) \times (-4,2) = -1306,91232$$
$$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

Synthèse 1 : Pour avoir la puissance entière d'un nombre ; on multiplie le nombre à lui-même jusqu'à l'exposant fois.

On note : $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs) avec a : la base et n l'exposant de la puissance.

Activité 2 : Opérations sur les puissances entières.

Consigne 2-1 : calcule les nombres suivants : $3^{-2} \times 3^7$; $(3 \times 7)^5$; $(2^5)^3$ et $5^2 \times 5^{-4}$. Que conclure ?

Solution :

$$3^{-2} \times 3^7 = 3^{-2+7} = 3^4 = 81 \quad ; \quad (3 \times 7)^5 = 3^5 \times 7^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 4\,084\,101$$
$$(2^5)^3 = 2^{5 \times 3} = 2^{15} = 32\,768 \quad ; \quad 5^2 \times 5^{-4} = 5^{2-4} = 5^{-2} = 0,04$$

Synthèse 2-1 : Pour tous entiers n, p et tous nombres réels a, b ; on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad ; \quad a^n \times b^n = (ab)^n \quad ; \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

Consigne 2-2 : Simplifie les expressions suivantes : $\frac{a^5}{a^4}$; $\frac{8^4}{2^4}$; $\frac{4^8 \times 3^9}{3^8 \times 4^9}$. Que conclure ?

Solution :

$$\frac{a^5}{a^4} = a^5 \times a^{-4} = a^{5-4} = a^1 = a ;$$

$$\frac{8^4}{2^4} = 8^4 \times 2^{-4} = (2^3)^4 \times 2^{-4} = 2^{3 \times 4} \times 2^{-4} = 2^{12} \times 2^{-4} = 2^{12-4} = 2^8 ;$$

$$\frac{4^8 \times 3^9}{3^8 \times 4^9} = 4^8 \times 3^9 \times 3^{-8} \times 4^{-9} = 4^8 \times 4^{-9} \times 3^9 \times 3^{-8} = 4^{8-9} \times 3^{9-8} = 4^{-1} \times 3^1 = \frac{3}{4}$$

Synthèse 2-2 : Pour tous entiers n, p et tous nombres réels a, b ; on a :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ;$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad ; \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Remarque : 0^0 n'a pas de sens et $a^0 = 1$ pour tout réel a .

Activité 3 : Puissances rationnelles.

On donne les nombres réels suivants : $\sqrt{9}$; $9^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{6}$; $6^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{4 \times 2}$ et $2^{\frac{5}{2}}$.

Consigne 3 : A l'aide de la calculatrice ; calcule les nombres cités ci-dessus. Que constates-tu ? Que conclure ?

Solution :

$$\begin{aligned} \sqrt{9} &= 3 & ; & & 9^{\frac{1}{2}} &= 3 & ; & & \sqrt{6} &= 2,4494 & ; & & 6^{\frac{1}{2}} &= 2,4494 \\ \sqrt{4 \times 2} &= \sqrt{2^2 \times 2} = 2 \times \sqrt{2} = 2 \times 1,4142 = 2,8284 & ; & & 2^{\frac{5}{2}} &= 2,8284 \end{aligned}$$

Synthèse 3 : On constate que : $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$; $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} = 2,449$ et $\sqrt{4 \times 2} = 2^{\frac{5}{2}} = 2,828$.

Pour tout réel a et pour tout entier naturel non nul n ; on a : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ qui est appelé racine $n^{ième}$ de a .

Activité 4 : Opérations sur les puissances rationnelles.

Consigne 4 : Calcule : $(a^{\frac{1}{4}})^3$; $(4^{\frac{1}{2}})^2$; $(5^{\frac{1}{6}})^0$ et $(2^{\frac{2}{3}})^6$. Que constates – tu ? Que conclure ?

Solution :

$$\begin{aligned} (a^{\frac{1}{4}})^3 &= a^{\frac{1 \times 3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} & ; & & (4^{\frac{1}{2}})^2 &= 4^{\frac{1}{2} \times 2} = 4^{\frac{2}{2}} = 4^1 = 4 \\ (5^{\frac{1}{6}})^0 &= 5^{\frac{1}{6} \times 0} = 5^0 = 1 & ; & & (2^{\frac{2}{3}})^6 &= 2^{\frac{2}{3} \times 6} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16 \end{aligned}$$

Synthèse 4 : On constate que les propriétés des puissances sont applicables avec les puissances rationnelles.

Pour tout entier naturel n , pour tout entier non nul m et pour tout réel a ; on a :

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} \quad ; \quad (a^{\frac{1}{n}})^n = a \quad (a^{\frac{1}{n}})^0 = 1$$

Activité 5 : Opérations sur les radicaux.

On donne les nombres suivants : $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}$; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$ et $\sqrt{4^2}$.

Consigne 5 : Calcule les nombres cités ci-dessus. Que conclure ?

Solution :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12} \quad ; \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \quad ; \quad \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} \quad ; \quad \sqrt{4^2} = 4$$

Synthèse 5 : Pour tous réels a et b et tout entier naturel non nul n ; on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad ; \quad \sqrt{a^n} = (a^{\frac{1}{n}})^n$$

7- Synthèse générale :

I- Puissances entières :

- a) **Définition :** Pour tout réel a et pour tout entier naturel non nul n ; on appelle puissance entière de a ou encore a à la puissance n , le nombre réel noté a^n tel que : $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs) avec n l'exposant et a la base de la puissance.
- b) **Propriétés :** Pour tous nombres réels non nuls a et b , pour tous entiers n et p ; on a :
- $$a^n \times b^n = (ab)^n ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n ; \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$
- $$a^n \times a^p = a^{n+p} ; \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; \quad a^0 = 1$$

Remarque :

- Pour tout entier naturel non nul n ; on a : $\begin{cases} 0^n = 0 \\ 1^n = 1 \end{cases}$
- Toute puissance entière d'exposant paire est positive.
- Toute puissance entière d'exposant impaire est du signe de la base.

II- Puissances rationnelles :

- a) **Définition :** Pour tout nombre réel a et pour tout entier naturel non nul n ; on appelle puissance rationnelle de a ou racine n^{ieme} de a le nombre réel noté par $a^{\frac{1}{n}}$ tel que : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- b) **Propriétés :** pour tous nombres réels a et b ; pour tous entiers non nuls n et m ; on a :
- $$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} ; \quad (a^{\frac{1}{n}})^n = a ; \quad (a^{\frac{1}{n}})^0 = 1$$
- $$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (a \times b)^{\frac{1}{n}} ; \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

8- Evaluations :

Exercice 1 :

- 1- Trouver le nombre naturel a dans les cas suivants :
- $$\frac{13^{a-4}}{13} = 169 ; \quad 5^a \times 25 = 125 ; \quad 2^{4+a} = 64 \text{ et } 3^{12} = 9^{3a}.$$
- 2- Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :
- $$\frac{3}{\sqrt{7}} ; \frac{5}{\sqrt{5}+1} ; \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3} ; \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}.$$

Exercice 2 :

- 1- Ecris sous forme d'une puissance a exposant entier :
- $$(5^{-3})^2 \times \frac{1}{125} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} ; (0,25)^4 \times \frac{1}{45} \times 2^{-3} ; \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3^5.$$
- 2- Ecris sous forme de puissance rationnelle :
- $$\sqrt[3]{3^2} ; \sqrt[4]{7^3} \times \sqrt[6]{7^9} \text{ et } \frac{\sqrt[2]{a^5} \times \sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[4]{a^{-7}}}.$$

Exercice 3 : Ecris sous forme de $p\sqrt{3}$ avec p un entier :

- a) $7\sqrt{3} + \sqrt{75} - 2\sqrt{243}.$
- b) $2\sqrt{27} - \sqrt{147} + \sqrt{12}.$