

Programme de mathématiques TS.ECO

UA₁ : Unité d'Apprentissage du premier trimestre

Chapitre I : Puissances entières et rationnelles

Chapitre II : Rapports et Proportions

Chapitre III : Pourcentages

Chapitre IV : Progression arithmétique et géométrie

UA₂ : Unité d'Apprentissage du deuxième trimestre

Chapitre V : Limites, continuités, dérivées

Chapitre VI : Primitive d'une fonction

Chapitre VII : Intégrales

Chapitre VIII : Fonction logarithmique népérienne

Chapitre IX : Fonction exponentielle népérienne

UA₃ : Unité d'Apprentissage du troisième trimestre

Chapitre X : Dénombrements

Chapitre XI : Statistiques

Chapitre XII : Probabilité

Chapitre XIII : Algèbres linéaires

UA₁: Unité d'Apprentissage du premier trimestre

Chapitre I : Puissances entières et rationnelles

I°) Puissance entière :

1°) **Définition** : La puissance nième d'un nombre réel a est un produit de n facteur tous égaux :

$a^n = a \times a \times a \times a \dots \times a$ On dit que a est la base, n est l'exposant

2°) **Propriété** : Pour tout réels a et b non nuls et pour tous entiers n et m non nuls

$$a^n b^n = (ab)^n ; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Application n°1 : simplifier les écritures

$$a^8 \cdot a^{-5} \qquad a^{-8} \cdot a^{14}, \qquad (a^{-2})^3 ; \qquad (a^{-5})^{-n}; \qquad a^{2n-9} \cdot a^{n+12}$$

Application n°2 : Résoudre dans R les équations suivantes :

$$\text{a) } (3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2} ; \text{ b) } 27^{x+2} = 3^{5x+8} \quad 27^{x+2} = 3^{5x+8} ; \text{ c) } (3^{x-1})^3 = 1$$

b) Application n°3 :

1°) Simplifier le plus possible des écritures :

$$A = (a^2 \cdot b^3)^7 \cdot (ab^2)^5, B = \frac{(3^4 x \cdot y^2)^2}{(\sqrt{3} \cdot x^3 \cdot y^3)^2}$$

2°) Calculer

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} ; \quad (a^9)^{\frac{1}{15}} \quad 2^{-5} \cdot 2^8 \cdot 2^{-2} \quad 10^{31} \cdot 10^{26} \cdot 10^{-27}$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2^{3x+1}=1$

2) Simplifiez les expressions suivantes :

$$\text{a) } \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt{\sqrt[6]{4}} \quad \text{b) } \frac{(\sqrt[4]{a^7})^2 \sqrt[4]{a^5}}{(a^2)(\sqrt[5]{a^2})(\sqrt[2]{a^3})}$$

II) Puissances à exposants rationnelles

1) **Définition** : La racine nième d'un nombre réel positif a est le nombre réel r dont la puissance la puissance nième est égale : $R = \sqrt[n]{a} \rightarrow R^n = a$.

2) Propriété :

Chapitre II : Rapports et Proportions**A°) proportionnalité**

Une proportion est une égalité entre deux ou plusieurs rapports. La proportion est l'égalité de deux rapports $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ Quatre nombres a, b, c, d forment une proportion si :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

1°) grandeur directement proportionnelle

a) **Définition** : Les grandeurs x, y, z sont proportionnelles aux nombres a, b, c si et seulement et si : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ ou k est appelé le coefficient de proportionnalité.

b) **Propriété** : Si les grandeurs x, y, z sont proportionnelles aux nombres a, b, c alors nous avons $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = k$

Dans ce cas $x = ak$ $y = bk$ $z = ck$

NB : cette propriété est aussi valable pour la soustraction.

Application n°1 : Déterminer x, y, z tels que leur somme est 5 100 et qu'ils sont directement proportionnels aux nombres 2, 3 et 5.

Réponse : $x = 1\,020$ $y = 1\,530$ $z = 2\,550$

Application n°2 : un champ rectangulaire a pour périmètre 240 m. Calculer la longueur et la largeur sachant que leur mesure est proportionnelle à 7 et 5.

Réponse : $L = 70$ m $l = 50$ m

2°) Grandeurs inversement proportionnelles

Les grandeurs x, y, z sont inversement proportionnels aux nombres a, b et c tous non nuls si et seulement si :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \text{ on a } \frac{x}{bc} = \frac{y}{ac} = \frac{z}{ab} = k = \frac{x+y+z}{bc+ac+ab} = k$$

Application n°3 : Un chef d'entreprise veut partager 287 000 entre trois employés inversement proportionnelles aux nombres 2 ; 3 et 7. Calculez la part de chaque employé.

Réponse : $x = 147\,000$ $y = 98\,000$ et $z = 42\,000$

Application n°4 : Un chef d'entreprise veut partager 79 300 entre trois employés inversement proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 7. Calculez la part de chaque employé.

Réponse : $x=36.400$; $y=27.300$ $z=15600$

Application n°5 : le directeur des ressources humaines de l'entreprise **COURS PRIVE LA SATISFACTION** veut partager 43 384 entre trois bons élèves de TS.ECO inversement proportionnelles aux $\frac{3}{7}$; $\frac{11}{2}$ et $\frac{5}{3}$. Calculez la part de chaque élève.

Réponse : $x=2.484$ $y=31.416$ $z=9.520$

3°) Partage erroné : Le partage erroné veut dire que le comptable s'est trompé dans le partage. Soit une somme S à partager entre trois personnes proportionnelles aux nombres a , b et c . L'opérateur chargé du partage se trompe et effectue le partage de façon inversement proportionnels aux nombres a , b et c . Ainsi une personne aura sa part augmentée ou diminuée.

- Soit x , y , z les parts dans le partage normal
- Soient x' , y' , z' les parts dans le partage erroné.

1^{er} partage : x , y , z proportionnels aux a , b , c alors :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{S}{a+b+c}$$

Les parts des trois personnes sont :

$$x = \frac{a * S}{a+b+c} ; y = \frac{b * S}{a+b+c} ; z = \frac{c * S}{a+b+c}$$

2^{ème} partage : (x' , y' , z') inversement proportionnels aux a , b , c alors :

$$\frac{x'}{\frac{1}{a}} = \frac{y'}{\frac{1}{b}} = \frac{z'}{\frac{1}{c}} = \frac{S}{b * c + a * c + a * b}$$

Les parts des trois personnes, dans le 2^{ème} partage, sont :

$$x' = \frac{b * c * S}{b * c + a * c + a * b} ; y' = \frac{a * c * S}{b * c + a * c + a * b} ; z' = \frac{a * b * S}{b * c + a * c + a * b}$$

Laquelle a vu sa part diminuée ou augmentée ?

La 1^{ère} personne

- Si $x' - x > 0$ alors sa part a augmentée
- Si $x' - x < 0$ alors sa part a diminué
- Si $x' - x = 0$ alors sa part reste inchangée.

La 2^{ème} personne

- Si $y' - y > 0$ alors sa part a augmentée
- Si $y' - y < 0$ alors sa part a diminué
- Si $y' - y = 0$ alors sa part reste inchangée.

La 3^{ème} personne

- Si $z' - z > 0$ alors sa part a augmentée
- Si $z' - z < 0$ alors sa part a diminué
- Si $z' - z = 0$ alors sa part reste inchangée

Application n°6 : Le promoteur de **cours privé la satisfaction** à la personne de M. Bakary KONE enseignant -chercheur souhaite partager une prime entre trois élèves x ; y et z pour des raisons de compétences proportionnellement aux nombres 2, 3 et 5. Le comptable se trompe et effectue le partage de façon inversement proportionnels aux nombres 2 ; 3 et 5. Ainsi une personne a vu part diminuée de 47.500FCFA.

1°) Lequel des trois élèves a vu sa part diminuée de 47.500FCFA

2°) Calculer le montant de la prime à partager

3°) quelle est la part de chacun des trois élèves.

SOLUTION

1^{er} partage : (x, y, z) proportionnels aux 2, 3, 5 alors :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{S}{10}$$

les parts des trois personnes sont :

$$x = \frac{2S}{10} \qquad Y = \frac{3S}{10} \qquad Z = \frac{5S}{10}$$

2^{ème} partage : (x', y', z') inversement proportionnels aux 2, 3, 5 alors :

$$\frac{x'}{\frac{1}{2}} = \frac{y'}{\frac{1}{3}} = \frac{z'}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{S}{31}$$

les parts des trois personnes sont : $x' = \frac{15.S}{31}$; $y' = \frac{10.S}{31}$; $z' = \frac{6.S}{31}$

1°) Lequel a vu sa part diminuée ou augmentée ?

La 1^{ère} personne : $x' - x = \frac{15S}{31} - \frac{2.S}{10} = \frac{+88.S}{310}$ *augmentation*

La 2^{ème} personne : $y' - y = \frac{10S}{31} - \frac{3.S}{10} = \frac{+7.S}{310}$ *augmentation*

La 3^{ème} personne : $z' - z = \frac{6S}{31} - \frac{5.S}{10} = \frac{-95.S}{310}$ *dim inution*

C'est la 3^{ème} personne qui a vu sa part diminuée de 47 500 F .

2°) Calculons le montant de la prime à partager.

$$x' - x = \frac{6S}{31} - \frac{5.S}{10} = \frac{-95.S}{310} = -47.500 \Rightarrow S = 155.000 \text{ FCFA}$$

3 La part de chacun des trois élèves

$$x = \frac{2 * 155.000}{10} = 31.000 \quad ; \quad y = \frac{3 * 155.000}{10} = 46.500 \quad ; \quad z = \frac{5 * 155.000}{10} = 77.500$$

$$x=31\ 000 \quad Y=46\ 500 \quad Z= 77\ 500$$

4°) Partage composé :

X, Y, Z proportionnels aux nombres x, y, z et proportionnel aux nombres a, b , c tous non nuls :

$$\frac{X}{xa} = \frac{Y}{yb} = \frac{Z}{zc} = k \quad X = k.xa \quad Y = k.yb \quad Z = k.zc$$

Application n°7 : on doit partager 53.300F entre trois personnes proportionnelles à 2 ; 3 ; 5 et proportionnelles à 3 ; 7 et 11. Trouvez la part de chaque personne.

SOLUTION

Trouvons la part de chaque personne

$$\frac{x}{2*3} = \frac{y}{3*7} = \frac{z}{5*11} = \frac{x+y+z}{6+21+55} = 650$$

$$X=3.900 \quad y= 13.650 \quad z=35.750$$

Application n°8 : Un chef d'entreprise demande à son comptable de partager la somme de 582.400 F représentant les primes de trois employés directement proportionnelles à leurs nombres d'enfants 3 ; 1 ; 2 ; directement proportionnelles à leurs anciennetés dans le service 5 ans ; 6 ans ; 8ans et directement proportionnelles en millier de francs de leurs salaires 2 ; 3 et 4.

Déterminez la part de chacun.

SOLUTION

Trouvons la part de chaque personne

- Soit x la part de la première personne
- Soit y la part de la deuxième personne
- Soit z la part de la troisième personne

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{21} = \frac{z}{55} = \frac{x+y+z}{6+21+55} = \frac{582\,400}{82} = 7100$$

$$x= 3\,900 \quad y=13\,650 \quad z=35\,750$$

Application n°9 : Un oncle avait décidé de partager sa fortune entre ses trois neveux A, B et C en partie directement proportionnelle à leurs âges 8 ans, 12ans et 18 ans. Il révise son testament et fait le partage proportionnel aux âges.

1°) Quel est le neveu qui conserve la même part ?

2°) Un autre perd 250 000F, calculez le montant de l'héritage et les parts définitives des héritiers.

SOLUTION

1°) **Précisons le neveu qui conserve la même part**

1^{er} partage : partage proportionnel

$$\frac{A}{8} = \frac{B}{12} = \frac{C}{18} = \frac{A+B+C}{8+12+18} = \frac{S}{38}$$

$$A = \frac{8S}{38} \quad B = \frac{12S}{38} \quad C = \frac{18S}{38}$$

2^{ème} partage : partage inversement proportionnel

$$\frac{X}{1/8} = \frac{Y}{1/12} = \frac{Z}{1/18} = \frac{X+Y+Z}{216+144+96} = \frac{S}{456}$$

$$X = \frac{216S}{456} \quad Y = \frac{144S}{456} \quad Z = \frac{96S}{456}$$

$$X-A=\frac{120S}{456} \quad Y-B=\frac{144S-144s}{456}=0 \quad Z-C=\frac{-120S}{456}$$

$X-A > 0$ donc la part du neveu A a augmenté

$Y-B=0$ donc la part du neveu B reste inchangé

$Z-C < 0$ donc la part du neveu C a diminué

Nous précisons que le neveu B conserve sa part

2°) Calculons le montant de l'héritage

$$Z-C = -250\,000 \text{ donc } \frac{-120S}{456} = -250\,000 \text{ alors } S = \frac{250\,000 \times 456}{120} = 950\,000$$

Calculons les parts définitives

$$A = 200\,000 \quad B = 300\,000 \quad C = 450\,000$$

Moyenne proportionnelles

Etant donné deux nombres a et b, la moyenne proportionnelle est le nombre x tel que a ; x ; x ; b forment une proportion si et seulement et si :

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \text{ donc } x^2 = ab \text{ alors } x = \sqrt{ab} \text{ ou } x = -\sqrt{ab}$$

Application n°10 : Trouvez deux entiers naturels dont la moyenne proportionnelle est 8 sachant que l'un est le quart de l'autre.

SOLUTION

Trouvons ces deux nombres

$$x = \sqrt{ab} \text{ donc } \sqrt{ab} = 8 \text{ alors } ab = 64 \text{ et } a = \frac{b}{4} \quad b = 4a \quad a=4 \text{ et } b=16$$

Quatrième proportionnelles

Etant donné trois nombres a, b et c. Leur quatrième proportionnelle est le nombre réel x tel que a ; b ; c et x forment une proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ donc } x = \frac{bc}{a}$$

Application n°11 : calculer la quatrième proportionnelle aux nombres 5, 10 et 2.

Solution

Soit x la quatrième proportionnelle : $\frac{5}{10} = \frac{2}{x}$ donc $x=4$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on dit que a, b, c et d forment une proportion à quatre termes. a et d sont les extrêmes, b et c sont les moyens. ad produit des extrêmes, bc produit des moyens.

- a est appelé la première proportionnelle
- b est appelé la deuxième proportionnelle

- c est appelé la troisième proportionnelle
- d est appelé la quatrième proportionnelle

Application n°12 :

- 1- Trouver la quatrième proportionnelle aux nombres 4, 5 et 20 ; 7,8 et 9 ; 3, $\frac{4}{5}$ et 7
- 2- Trouver la moyenne proportionnelle entre 4 et 9 ; 3 et 27 ; 5 et 45.
- 3- Trouver deux nombres connaissant leur somme 3,6 et leur rapport $\frac{2}{7}$

SOLUTION

1°) Trouvons la quatrième proportionnelle aux nombres

Soit a la quatrième proportionnelle :

$$\frac{4}{5} = \frac{20}{a} \quad \mathbf{a=25}$$

Soit L la quatrième proportionnelle

$$\frac{7}{8} = \frac{9}{L} \quad \mathbf{L=\frac{72}{7}}$$

Soit Z la quatrième proportionnelle

$$\frac{4}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{Z} \quad \mathbf{Z=\frac{28}{15}}$$

2°) Trouvons la moyenne proportionnelle

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \quad \mathbf{x=6 \text{ ou } x=-6}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{27} \quad \mathbf{x=9 \text{ ou } x=-9}$$

3°) trouvons ces deux nombres :

$$x+y=3,6$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{7} \quad \text{après calcul on obtient } \mathbf{x=\frac{8}{10} \text{ et } y=\frac{28}{10}}$$

Application n°13 :

- 1) Partager une somme de 2 720F en parts proportionnelles à 4, 7 et 6.
- 2) Une somme est payée en trois parts directement proportionnelles à 4, 7 et 6. Trouver sachant que le double de la deuxième dépasse la somme des deux autres de 4 000 F.
- 3) Trouver trois nombres réels x, y et z proportionnels aux nombres 7,8 et 9 et sachant que $x-y+z = 64$

Exercice

Proportionnel, inversement proportionnel

- 1° Une entreprise fabrique des tables, dont le prix de vente est fixe à 119 € l'unité.
- a) Exprimer le chiffre d'affaire en fonction de la quantité q de tables vendues
Le chiffre d'affaire est proportionnel à la quantité vendue.
 - b) Combien de tables, au moins, doit vendre l'entreprise pour réaliser un chiffre d'affaires sur ces tables supérieur à 5 000 € ?
- 2° Dans cette entreprise, les 50 salariés perçoivent 1 500 € par mois.
- a) Calculer la masse salariale de cette entreprise.
Définition : *la masse salariale est la somme de tous les salaires de l'entreprise.*
 - b) On admet que la masse salariale est constante et que tous les salariés de l'entreprise ont le même salaire.
Exprime le nombre de salariés en fonction du salaire x , compris entre 1 200 et 4 500 euros.
 - c) Ici, le nombre de salaires de cette entreprise est inversement proportionnel au salaire.
Quel est le nombre de salariés s'ils perçoivent tous 3 000 €

Chapitre III : Pourcentages

I Introduction

Aujourd'hui, les pourcentages sont partout dans notre vie quotidienne. Nous sommes entourés d'affiches publicitaires présentant offres promotionnelles, soldes, offres de prêts

Pour inciter à la consommation, les organismes financiers proposent des crédits à des taux d'intérêts très divers, depuis les prêts « à taux zéro » 0% jusqu'à des taux très élevés, fixes ou variables. Pour éviter le surendettement, il est nécessaire d'en comprendre les modalités.

II rappel

- Prendre les $x\%$ d'un nombre, revient à multiplier ce nombre par $\frac{x}{100}$

Application n°1 : Le promoteur de cours privé la satisfaction accorde une remise de 25% sur une mensualité de 10 000 F. Quel est le montant de la remise ?

Solution : la remise de 5 000 F, en effet $10\ 000 \times \frac{25}{100} = 5\ 000$

- Dire que b représente les $t\%$ de a revient à dire que : $\frac{b}{a} = \frac{t}{100}$

Application n°2 : En 2015 le cours privé la satisfaction a présenté 18 candidats de TS.ECO au baccalauréat malien. 13 candidats ont été admis dont deux mentions assez (il s'agit de Koko DIALLO du lycée LBAD et Bakary KONE du lycée LBS). Quel est le pourcentage de réussite de cours privé la satisfaction ?

Solution : $\frac{t}{100} = \frac{13}{18} = 0,7222$ donc $t = 72,22\%$ des élèves de cours satisfaction ont réussi

- Augmenter une quantité de $x\%$ revient à multiplier le nombre par : $(1 + \frac{x}{100})$.

Application n°3 : La TVA sur la moto Jakarta 300 000 F HT est de 18%. A quel prix la moto Jakarta est – il vendu ?

Solution : La moto est donc vendu 354 000 F TTC ; en effet $300\ 000 \times (1 + \frac{18}{100})$

- Diminuer une quantité de $x\%$ revient à multiplier le nombre par : $(1 - \frac{x}{100})$.

Application n°4 : A quel prix un article sera – t – il vendu après une remise de 5%, sachant que son prix initial est de 120 F.

Solution : il sera vendu 114 F, en effet : $120 \times (1 - \frac{5}{100})$

II Pourcentage de pourcentage

➤ **X% de y% correspond à : $\frac{xy}{100}\%$**

Application n°5 : Au cours privé la satisfaction, les filles représentent 54% des élèves. On a constaté que dans l'entreprise cours privé la satisfaction ; 20% des filles sont de la Ts.Eco. Quel pourcentage d'élèves de cours privé la satisfaction représente les filles de la Ts.ECO ?

Solution : $\frac{20 \times 54}{100} \% = 10,8\%$ on peut dire que 10,8% des élèves de cours privé la satisfaction sont des filles de la Ts.ECO.

III Pourcentages successifs

➤ **Des augmentations (ou baisses) successives ne s'additionnent pas.**

Application n°6 : La population d'un village était de 4 550 habitants au 1^{er} janvier 1993. Elle a augmenté de 8 % chacune des 2 années suivantes. Quelle est la population au bout d'un an ? de deux ans ?

Solution

La population était, le 1^{er} janvier 1994, de 4 914 habitants car :

$$4\,550 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 4\,914$$

Au 1^{er} janvier 1995, elle était de 5 307 habitants

$$4\,914 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 5\,307$$

ATTENTION : Une augmentation de 16% aurait donnée :

$$4\,550 \times \left(1 + \frac{16}{100}\right) = 5\,278$$

III REMARQUES

Une augmentation de x% ne compense pas une baisse de x%

Une baisse de x % ne compense pas une augmentation de x %

Un article coutant 345 F subit une baisse de 10% puis quelques mois plus tard une hausse de 10%. Quel est alors son prix ?

Après remise de 10%, il coute 310,5n en effet : $345 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 310,5$

Après l'augmentation de 10%, son prix est alors $310,5 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 341,55$

On constate qu'il n'est pas revenu au prix initial.

Des évolutions successives exprimées en pourcentages se traduisent par des produits de coefficients multiplicateurs.

La baisse de 10% correspond au coefficient multiplicateur : 0,9.

La hausse de 10% correspond au coefficient multiplicateur : 1,1

$$0,9 \times 1,1 = 0,99 \text{ or } 345 \times 0,99 = 341,55$$

Rappel :

Pour calculer les variations en pourcentages d'une quantité, on utilise la formule

suivante : $T = \frac{VA - VD}{VD} \times 100$ VA= Valeur d'Arrivée et VD= valeur de Départ

- Si $T > 0$ on a une hausse de T%
- Si $T < 0$ on a une baisse de T%

IV Coefficient multiplicateur

Propriété : Lorsqu'une valeur VD subit une évolution pour arriver à une valeur VA, elle est multipliée par un nombre positif **CM** appelé coefficient multiplicateur. Si t est le taux d'évolution, alors $CM = 1 + \frac{t}{100}$ ou encore $t = (CM - 1) \times 100$

- En effet une hausse de t% donne le coefficient multiplicateur $CM = 1 + \frac{t}{100}$
- En effet une baisse de t% donne le coefficient multiplicateur $CM = 1 - \frac{t}{100}$
- Si $CM > 1$ alors $t = 100 (CM - 1)$
- Si $CM < 1$ alors $t = 100 (1 - CM)$

Exemple :

Une valeur passe de 120 à 80. Son coefficient multiplicateur est $CM = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} = 0,6667$
or $(0,667 - 1) \times 100 = -33,33$. La valeur a donc baissé d'environ 33,33% ou d'un tiers de façon exacte.

VI Formules

Variation absolue

$$\Delta V = VA - VD$$

Coefficient multiplicateur

$$CM = \frac{VA}{VD}$$

Variation relative

$$VR = \frac{VA - VD}{VD}$$

VII Taux d'évolution global

Définition et propriété : Une valeur subit deux évolutions successives aux taux t_1 et t_2 . Globalement, elle subit une évolution au taux t . Le coefficient multiplicateur global est : $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$

et le taux global d'évolution est : $T_{\text{global}} = (CM_{\text{global}} - 1) \times 100$

Exemple : Un prix initial de 400 € augmente de 10% puis augmente de 20%

Attention : Pour calculer le taux d'évolution global, on ne peut pas additionner des pourcentages d'évolutions ! il faut utiliser les coefficients multiplicateurs.

$CM_1 = 1,1$ et $CM_2 = 1,2$ pour connaître le coefficient multiplicateur global, on multiplie les coefficients multiplicateurs :

$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 = 1,1 \times 1,2 = 1,32$ or $(1,32 - 1) \times 100 = 32$ donc le taux global d'évolution est de 32% et non 30%

VIII Taux d'évolution réciproque

Définition et propriété : Une valeur subit une évolution du taux t . Pour revenir à sa valeur initiale, on applique un taux d'évolution t' . Le taux d'évolution réciproque t' est tel que le produit des coefficients multiplicateurs CM et CM' des taux t et t' est égal à 1 : $CM \times CM' = 1$. Ainsi, le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \frac{1}{CM}$ donc le taux d'évolution réciproque est $t' = (\frac{1}{CM} - 1) \times 100$

Exemple : Un prix de 100 € augmente de 25%. Il est donc multiplié par $CM = 1,25$ et passe à 125 €.

Pour revenir à sa valeur initiale de 100 €, on divise 125€ par 1,25.

Donc le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \frac{100}{125} = 0,8$.

D'où le taux d'évolution réciproque : $t' = (0,8 - 1) \times 100 = -20\%$

après une hausse de 25 %, il faut appliquer une baisse réciproque de 20% pour retrouver le prix initial.

Exemple :

En 2012, le chiffre d'affaire d'une entreprise a baissé de 15% par rapport à 2011.

1°) Calculer le coefficient multiplicateur du chiffre d'affaire entre 2011 et 2012.

2°) En déduire l'indice d'évolution du chiffre d'affaire pour la même période.

1°) On note y_1 et y_2 les chiffre d'affaire de l'entreprise en 2011 et 2012 respectivement. D'après l'énoncé, le taux d'évolution du chiffre d'affaire entre y_1 et y_2 est :

$$t = -15\% = \frac{-15}{100} = -0,15$$

Donc, le coefficient multiplicateur est donné par : $k = 1 + t = 1 + (-0,15) = 0,85$

Conclusion : Le coefficient multiplicateur est : $k = 0,85$.

2°) Nous avons deux méthodes à notre disposition pour calculer l'indice :

- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (5)

$$I = 100 \times (1 + t)$$

$$I = 100 \times [1 + (-0,15)]$$

$$I = 100 \times 0,85$$

$$I = 85$$

- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (3)

$$I = 100 \times k$$

$$I = 100 \times 0,85$$

$$I = 85$$

Conclusion : L'indice d'évolution du chiffre d'affaire est : $I = 85$

QCM : POUR CHAQUE QUESTION, INDIQUER LA SEULE BONNE RÉPONSE

Exercice1 : Jean désire acheter une automatique qui, neuve, vaut 13500€. Jean dit que l'achat de l'automobile représente 60% de son budget. Le budget dont dispose Jean est de : a. 20000€ b. 8100€ c. 22500€

Exercice2 : Pour un prix de 100€, une augmentation de 2€ correspondant à :

- a. Une hausse de 2% b. une hausse de 102% c. un produit de 0,02.

Exercice3 : Un prix TTC est de 129,90€ avec une TVA à 19,6%. Le prix HT, au centime, est de :

- a. 155,36€ b. 110,30€ c. 108,61€

Exercice4 : A 19h, dans un magasin qui fait nocturne, on compte 1500 clients et seulement 200 clients à 21h. La fréquentation a baissé, à 1 point près, de :

- a. 13% b. 75% c. 87%

Exercice5 : pour les soldes, on applique à un prix un abattement de 10% puis un abattement de 20%. Le prix est multiplié par :

- a. 0,30 b. 0,72 c. 0,70

Exercice 6 : si le nombre 3400 a pour indice 100, l'indice du nombre 4318 est :

- a. 79 b. 127 c. 127% d. 27%

Exercice7 : le prix d'un article a d'abord été doublé, puis ensuite triplé. Le taux d'évolution global est : a. 600% b. 500% c. 400%

Exercice 8 : le volume d'un ballon publicitaire a augmenté de 60% sous l'effet de la chaleur. Pour retrouver son volume initiale il doit maintenant diminuer de :

- a. 40% b. 37,5% c. 60%

Exercice9 : pour compenser une baisse d'un quart d'une valeur, il faut :

- a. Augmenter de 25% b. multiplier par 4 c. augmenter d'un tiers

Exercice 10 : Un capital de 4800€ augmente de 6,5% par an. Au bout de deux ans, le capital a augmenté de :

- a. 624€ b. 644,28€ c. 3120€

Exercice 11 : Une société de crédit propose un prêt de 2000€. Le taux mensuel est 0.9%, ce qui signifie que, chaque mois, la valeur due augmente de 0.9%. Le taux annuel correspondant arrondi à un chiffre après la virgule, est :

- a. 12,1% b. 10,8% c. 11,4%

Exercice 12 : par lecture des indice d'une valeur boursière, compléter le tableau ci-dessous en donnant les pourcentages d'évolution par rapport au mois de janvier :

Au 1 ^{er} du mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Indice	100	110	123	103	93
Taux d'évolution					

Exercice 13 :

- a) Après une hausse de 3%, la population d'une ville atteint 20600 habitants en 2010. Quel était la population en 2009 ?
- b) Après une remise de 20%, une veste est vendu a 58€. Quel était le prix initial de la veste ?
- c) Le taux de TVA est de 19,6% et le prix TTC d'un article est de 258€.
Quel est le prix hors taxe

Exercice 14 : Etude du marché solaire thermique dans 21 pays le l'union européenne

Sur l'année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Croissance par rapport à l'année précédant	11	25	47	-9	60	-10

- a) Expliquer les signe – qui apparaisse dans le tableau.
- b) Calculer le taux d'évolution globale.

Définition : le pouvoir d'achat du salaire d'un consommateur est le quotidien de son salaire par le prix « panier » fictif, l'ensemble d'article et de service de référence, souvent donné par l'indice des prix :

$$\text{Pouvoir d'achat} = \frac{\text{Salaire}}{\text{Prix}}.$$

Solution 1:

a. le budget de Jean est $\frac{13.500}{0,6}=22500\text{€}$

Solution 2:

a. Une hausse de 2% (2€ pour 100€)

Solution 3:

b. prix HT = $\frac{\text{Prix TTC}}{1,196} \approx 108,61\text{€}$

Solution 4:

c. $CM = \frac{200}{1.500} \approx 0.133$.

Et $(0,133-1) \times 100 \approx 86,7$ soit une baisse de 86,7% à 1point près.

Solution 5 :

b. $CM_{Global} = 0,90 \times 0,80 = 0,72$

Solution 6

c. $I = \frac{4318}{3400} \times 100 = 127$

Solution 7

b. $CM_{global} = 2 \times 3 = 6$, soit une hausse de 500%.

Solution 8

b-) $V_{final} = V_{initial} \times 1,6$; donc $V_{initial} = \frac{V_{final}}{1,6}$.

$CM' = \frac{1}{1,6}$; Donc $t' = \left(\frac{1}{1,6} - 1 \right) \times 100 = -37,5$

Solution 9 :

c. $CM = 0,75$ et $CM' \times CM = 1$

Donc $CM' = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. On doit augmenter d'un tiers.

Solution 10 :

b. $4.800 \times 1,065 = 5.444,28$ et $5.444,28 - 4800 = 644,28$

Solution 11 :

c. $((1 + 0,009)^{12} \approx 1,1135$; hausse de 11,4%.

a. 12, 1%

b. 10, 8%

c. 11, 4%

Solution 12 :

Au 1 ^{er} du moi	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Indice	100	110	123	103	97
Taux d'évolution		10%	23%	3%	-3%

Solution 13:

a. $V_0 = \frac{V_1}{CM} = \frac{20600}{1,03} = 20000$ population de 20000 habitants en 2009.

b. $\frac{58}{0,800} = 72,5$. La veste coutait 72,5€.

Solution 14:

a. Le signe – indique une baisse du marché solaire thermique.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Croissance (en %)	11	25	47	-9	60	-10
CM	1,11	1,25	1,47	0,91	1,6	0,9

$$CM_{Global} = 1,11 \times 1,25 \times 1,47 \times 0,91 \times 1,60,9 \approx 2,6727.$$

Soit une hausse d'environ 167% pour ces 6 années.

Chapitre IV : Progression arithmétique et géométrie**I Progression arithmétique**

- a) **Définition :** On appelle progression arithmétique une suite de terme telle que chacun d'eux est égal au précédent augmenté d'un terme constant appelé raison.

Dans ce cas $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$ avec r la raison $\in \mathbb{R}$

NB : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que

$$U_{n+1} - U_n = r$$

- b) **Application n°1 :** soit $U_n = 2n + 3$ montrer que U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Solution

Montrons que U_n est une suite arithmétique

U_n est une suite arithmétique ssi $U_{n+1} - U_n = r$

$$U_n = 2n + 3 \quad U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 2 + 3 = 2n + 5$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n + 5 - 2n - 3$$

$U_{n+1} - U_n = 2$ donc U_n est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 3$

c) Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit U_n une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p ($p < n$).

L'expression du terme général est $U_n = U_p + (n-p)r$

➤ Si $p=0$ alors $U_n = U_0 + nr$

➤ Si $p=1$ alors $U_n = U_1 + (n-1)r$

d) Expression de la somme S_n d'une suite arithmétique

$$S_n = \left(\frac{n-p+1}{2} \right) (u_p + U_n)$$

➤ Si $p=0$ alors $S_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (u_0 + U_n)$

➤ Si $p=1$ alors $S_n = \left(\frac{n}{2} \right) (u_1 + U_n)$

n est le nombre de terme, U_p le premier terme, U_n est le dernier terme. En

remplaçant U_n par son expression on obtient $S_n = \left(\frac{n-p+1}{2} \right) (2u_p + (n-p)r)$

e) CAS PARTICULIER

Trois termes C_1 ; C_2 et C_3 sont en progression arithmétique ssi $2C_2 = C_1 + C_3$

Dans ce cas $C_1 = C_1$ $C_2 = C_1 + r$ $C_3 = C_1 + 2r$

- **Comment insérer K terme en progression arithmétique entre a et b ?**

- Pour insérer, nous devons d'abord chercher la raison de la progression

arithmétique qui se calcule par $r = \frac{b-a}{k+1}$

Exemple : Insérer 4 capitaux en progression arithmétique entre 20 000 et 200 000

Solution

Insérons quatre capitaux

Soient C_1, C_2, C_3 et C_4 ces quatre capitaux

$$a = 20\,000 \text{ et } b = 200\,000 \quad k=4 \quad r = \frac{200\,000 - 20\,000}{4+1} = 36\,000$$

$$C_1 = 20\,000 + 36\,000 = \mathbf{56\,000},$$

$$C_2 = 56\,000 + 36\,000 = \mathbf{92\,000},$$

$$C_3 = 92\,000 + 36\,000 = \mathbf{128\,000} \text{ et}$$

$$C_4 = 128\,000 + 36\,000 = \mathbf{164\,000}$$

II Progression géométrique

- 1) **Définition** : On appelle progression géométrique une suite de terme telle
chacun est égal au produit du précédent par un terme constant appelé raison de
la progression géométrique.

Dans ce cas $V_{n+1} = V_n q$

NB : Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que : $\frac{V_{n+1}}{V_n} =$

q

Exemple : soit V_n la suite définie par $V_n = 2^{n+1}$

Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Solution

Montrons que V_n est une géométrique.

V_n est une suite géométrique ssi $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$

$$V_n = 2^{n+1} \quad V_{n+1} = 2^{n+2} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2^{n+2-n-1} = 2$$

V_n est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $V_0=2$

2) Expression du terme général

Soit V_n est une suite géométrique de raison et de premier terme V_p : $V_n = V_p * q^{n-p}$

Si $p=0$ $V_n = V_0 * q^n$

Si $p=1$ $V_n = V_1 * q^{n-1}$

Exemple : Soit V_n une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0=2$.

Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire V_{20}

Solution

Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire V_{20}

$V_n = V_p * q^{n-p}$ on sait que $q=2$ et $V_0=2$

$V_n = V_0 * q^n$ donc $V_n = 2.2^n \rightarrow V_n = 2^{n+1}$ $V_{20} = 2^{21}$

Application : Soit V_n une suite géométrique telle que $V_5=8$ et $V_9=128$

a) Déterminer la raison et le premier terme de cette suite

b) Exprimer V_n en fonction de n

SOLUTION

a) Déterminons la raison et le premier terme

$V_n = V_p * q^{n-p}$ Pour $n=9$ donc $V_9 = V_5 q^4$; $8 q^4 = 128$ $q = \sqrt[4]{16} = 2$ $q=2$

$V_n = V_0 * q^n \rightarrow V_0 = \frac{V_9}{q^9} = \frac{128}{512} \rightarrow V_0 = \frac{1}{4}$

b) Exprimons V_n en fonction de n

$V_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n \rightarrow V_n = \frac{2^n}{2^2} = 2^{n-2} \rightarrow V_n = 2^{n-2}$

Cas particuliers : Trois termes C_1 ; C_2 et C_3 sont en progression géométrique ssi

$C_2^2 = C_1 \times C_3$ dans ce cas $C_1 = C_1$; $C_2 = C_1 q$; $C_3 = C_1 q^2$

3 Somme S_n des termes d'une suite géométrique

$S_n = V_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right)$ V_p Premier terme, n dernier terme, q la raison de la

progression géométrique, S_n la somme de la suite géométrique.

Comment insérer k capitaux en progression géométrique entre a et b

Pour insérer entre a et b on calcule : $q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$

Exemple : Insérer deux capitaux en progression géométrique entre 5 000 et 135 000

Solution

Insérons deux capitaux en progressions géométriques entre 5 000 et 135 000

$$k=2 \quad a=5\,000 \quad b=135\,000 \quad \text{donc } q = \sqrt[3]{\frac{135\,000}{5\,000}} = 3$$

$$C_1 = C_0 \quad q = 5\,000 * 3 = 15\,000 \rightarrow C_1 = 15\,000$$

$$C_2 = C_1 \quad q = 15\,000 * 3 = 45\,000 \rightarrow C_2 = 45\,000$$

Exercice1

Un pays A à un taux de croissance démographique de 0,4% par an. Un pays B à un taux de croissance de 3%. Au 1^{er} Janvier 1999 le pays A compte 40 millions d'habitants et le pays B 30 millions.

- 1) Quel sera le nombre d'habitants de chacun des pays A et B au 1^{er} Janvier 2009
- 2) En quelle année la population double dans chacun des pays.

Exercice2

Un véhicule coûte 80 millions de francs en 1998. Il se déprécie de 20% par an. (C'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an).

- 1) Quelle est la valeur du véhicule au bout de cinq ans.
- 2) On suppose que pendant la même période les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 4% par an.
- 3) Quelle somme d'argent l'entreprise doit-elle prévoir pour remplacer la véhicule dans cinq ans.

Solution1**1) le nombre d'habitants de chacun au 1^{er} Janvier 2009**

$$n = \text{au } 1^{\text{er}} \text{ Janvier } 2009 - 1^{\text{er}} \text{ Janvier } 1999 = 10 \text{ ans} \Leftrightarrow n = 10 \text{ ans}$$

$$t = 0,4\% ; V_0 = 40\,000\,000$$

$$V_1 = V_0 + 0,4\% V_0 = V_0(1 + 0,004) = 1,004 V_0$$

$$V_2 = V_1 + 0,4\% V_1 = V_1(1 + 0,004) = 1,004(1,004)V_0 = (1,004)^2 \cdot V_0$$

$$V_n = (1,004)^n * V_0$$

Pour le pays A

$$V_{10} = (1,004)^{10} * 40\,000\,000 \Rightarrow V_{10} = 41\,629\,109,$$

Pour le pays B

$$V_{10} = (1,03)^{10} * 30000000 \Rightarrow V_{10} = 40317491,4$$

2) En quelle année la population doublera dans chacun des pays

$$V_n = 2V_0 \Rightarrow (1,004)^n * 40000000 = 80000000$$

$$(1,004)^n = 2 \Rightarrow \ln(1,004)^n = \ln 2$$

$$n \ln(1,004) = \ln 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,004} = 174$$

La population doubler dans les pays A en 2173 (1999+174)

Pour le pays B

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \Rightarrow n = 23$$

La population doublera dans le pays B en 2022 (1999+23)

Solution2

1) Calculons la valeur du véhicule au bout de 5 ans

Soit $V_0 = 80000000$; $t = 0,2$; $n = 1998$

En 1999 $V_1 = V_0 - 20\%V_0 = V_0(1 - 0,2) = 0,8V_0$

En 2000 $V_2 = V_1 - 20\%V_1 \Rightarrow V_2 = V_1(1 - 0,2) = 0,8V_1 = 0,8(0,8V_0) = (0,8)^2 \cdot V_0$

En 2001 $V_3 = V_2 - 20\%V_2 \Rightarrow V_3 = V_2(1 - 0,2) = 0,8V_2 = 0,8(0,8)^2 \cdot V_0 = (0,8)^3 * V_0$

En 2003 $V_5 = (0,8)^5 * V_0 \Rightarrow V_5 = (0,8)^5 * 80000000 \Rightarrow V_5 = 26214400$

2) On suppose que pendant la même période les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 4% par an.

Soit $V_0 = 80000000$; $t = 4\%$; $n = 1998$

En 1999 $V_1 = V_0 + 4\%V_0 = V_0(1,04)$

En 2000 $V_2 = V_1 + 4\%V_1 \Rightarrow V_2 = V_1(1,04) = 1,04(1,04)V_0 = (1,04)^2 V_0$

$$V_n = (1,04)^n * V_0$$

$$V_5 = (1,04)^5 * 80000000 \Rightarrow V_5 = 97332232,19$$

$$S = 97332232,19 - 26214400 \Rightarrow S = 71117832,19$$

EXERCICE :

Afin d'acquérir et d'aménager une boutique de centre-ville de Bamako, un investisseur malien décide de contracter un emprunt d'un montant de 100 000 FCFA auprès de sa banque. Sa banque lui propose de rembourser ce prêt en 7 versements repartis sur 7 ans. Le premier remboursement annuel, noté b_1 serait d'un montant de 20 FCFA. Les remboursements suivants seraient en augmentation de 2% par rapport au remboursement précédent.

On note b_n le remboursement fait l'année n (avec $1 \leq n \leq 7$) et par S_n la somme totale remboursée au bout de n années.

1°) Calculer b_2 et b_3 . Préciser la nature de la suite U_n .

2°) Exprimer b_n , puis S_n en fonction de n

3°) Calculer le montant total, arrondi en franc CFA, remboursé par l'acquéreur.

EXERCICE : EVOLUTION DE LA POPULATION

Au premier janvier de l'année N , la ville de Bamako en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants. L'Institut National de Statistique du Mali fait l'hypothèse qu'à partir du premier janvier de la même année :

- Le nombre d'habitants de Bamako augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès.
- Du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Pour tout entier naturel n , on note U_n le nombre d'habitant de la ville de Bamako au premier janvier de l'année $N + n$. On a donc $U_0 = 100\,000$

1°) Calculer U_1 et U_2 . La suite U est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2°) Justifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,05U_n + 4\,000$

3°) Pour tout entier naturel n on pose $V_n = U_n + 80\,000$

a) Calculer V_0

b) Montrer que V_n , $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que $U_n = 180\,000 * (1,05)^n - 80\,000$

4°) On utilise le modèle théorique que l'on vient d'étudier

- a) Quel sera le nombre d'habitants de la ville de Bamako au premier janvier 2020 sachant que N vaut 2005
- b) Déterminer le sens de variation de la suite U
- c) A partir de quelle année la population de Bamako dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

Solution

Au 1^{er} janvier N la ville de Bamako avait une population de 100 000 habitants. Pour tout entier naturel n , on note U_n le nombre d'habitants de Bamako au 1^{er} janvier de l'année $N + n$. Ainsi **$U_0 = 100\,000$**

On sait que :

- Le nombre d'habitants de la ville de Bamako augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès.
- Du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans la ville de Bamako.

1°) Calculons le nombre d'habitants en $N+1$ et $N+2$

$$\text{On a } U_1 = 1,05 * U_0 + 4\,000 = 1,05 * 100\,000 + 4\,000 = 109\,000$$

$$\text{De même } U_2 = 1,05 * U_1 + 4\,000 = 1,05 * 109\,000 + 4\,000 = 118\,450$$

On a $U_1 - U_0 = 9\,000$ et $U_2 - U_1 = 9\,450$, ainsi $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ ce qui prouve

que la suite U n'est pas arithmétique. On a $\frac{U_1}{U_0} = \frac{109\,000}{100\,000} = 1,09$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{118\,450}{109\,000} = 1,086 \dots$

Ainsi $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ ce qui prouve que la suite U n'est pas géométrique

2°) La population d'une année s'obtient en multipliant le nombre d'habitants de l'année précédente par 1,05 et en ajoutant 4 000. D'où **$U_{n+1} = 1,05U_n + 4\,000$**

3°) a) Calculons V_0

$$V_0 = U_0 + 80\,000 = 100\,000 + 80\,000 \rightarrow \mathbf{V_0 = 180\,000}$$

b) Montrons que V_n est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 80\,000 \rightarrow V_{n+1} = 1,05U_n + 4\,000 + 80\,000$$

$$V_{n+1} = 1,05U_n + 84\,000 \rightarrow V_{n+1} = 1,05(V_n - 80\,000) + 84\,000$$

D'où $V_{n+1} = 1,05V_n$ la suite V est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $V_0 = 180\,000$

d) On sait que $V_n = V_0 q^n$ d'où $V_n = 180\,000 * 1,05^n$ on sait que :

$$U_n = V_n + 80\,000 \rightarrow U_n = 180\,000 * 1,05^n - 80\,000$$

4-

L'année 2020 correspond au rang $n=15$ Calculons

$$U_{15} = 180\,000 * 1,05^{15} - 80\,000 = 294\,207,07 \dots$$

On peut estimer la population de la ville de Bamako à **294 207 habitants en 2020**

b. Déterminons le sens de variation de la suite U

$$U_{n+1} - U_n = 180\,000 * 1,05^{n+1} - 80\,000 - (180\,000 * 1,05^n - 80\,000)$$

$$U_{n+1} - U_n = 180\,000 * 1,05^n * 1,05 - 180\,000 * 1,05^n - 80\,000 + 80\,000$$

$$U_{n+1} - U_n = 180\,000 * 1,05^n (1,05 - 1)$$

d'où $U_{n+1} - U_n > 0$ Et la suite U est croissante

c. A partir de quelle année la population de Bamako dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

Nous cherchons le plus petit entier n tel que $U_n > 200\,000$

Comme la suite U est croissante, il suffit de faire des essais à la calculatrice. On obtient $U_9 = 199\,239,07 \dots$ et $U_{10} = 213\,210,03 \dots$

Pour $n > 9$ on a donc $U_n > 200\,000$, dès l'année 2015 la population de Bamako devrait dépasser 200 000 habitants.

EXERCICE

Disposant d'un capital de 10 000 FCFA un investisseur malien étudie les offres de deux banques différentes maliennes. La BDM propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %. La BNDA propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 2 % du capital. Les intérêts obtenus sont augmentés d'une prime annuelle de 170 FCA intégrée au capital Ainsi, les intérêts et la prime produisent des intérêts pour l'année suivante.

Partie A : Etude l'offre de la Banque Du Mali BDM

On note, pour n entier naturel, a_n le capital en FCFA de l'investissement au début de l'année n. Ainsi $a_0 = 10\,000$ et $a_1 = 10\,350$.

1°) Quelle est la nature de la suite a ? Exprimer a_n en fonction de n

2°) Calculer le capital disponible au début de l'année 10

Partie B : Etude l'offre de la Banque Nationale du Développement Agricole

On note, pour n entier naturel, b_n le capital en FCFA de l'investisseur au début de l'année n . Ainsi $b_0 = 10\,000$ et $b_1 = 10\,370$

1°) La suite b est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2°) Justifier que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = 1,02b_n + 170$

3°) Pour tout entier naturel n , on pose on pose $U_n = b_n + 8\,500$

a) Calculer U_0

b) Démontrer que la suite U est géométrique et préciser sa nature.

c) Exprimer U_n en fonction de n et en déduire que **$b_n = 18\,500 * (1,02)^n - 8\,500$**

4°) Calculer le capital disponible au début de l'année 10

5°) L'investisseur décide de placer son capital jusqu'au début de l'année 10. Déterminer parmi les deux banques maliennes, celle qui propose l'offre la plus intéressante

Exercice 3 :

Le prix d'un appareil électronique diminue de 8% chaque année. Au départ le prix était de 200€

- a. Exprime le prix au bout de n année de diminution.
- b. Calcule le prix au bout de 5ans, en € près.

Exercice 4 :

Calcul de terme

Du fait de bouche à l'oreille, le nombre de client d'un magasin augmente chaque trimestre de 2%. Début Janvier 2010, la fréquentation était de 1000 clients. On note u_n le nombre de client au bout de n trimestre d'augmentation

- 1) a. Exprimer u_n en fonction de n
- b) Calculer u_4 ; puis interpréter le résultat
- 2) la fréquentation a-t-elle augmenté de 16% en 2ans

Exercice 5 :

On propose deux contrats de location d'un appartement : 350€ de loyer mensuel l'année de référence, puis chaque année :

.Contrat A : Une augmentation de 20€ du loyer mensuel ;

. Contrat B : Une augmentation de 5% de loyer mensuel.

Pour l'année n , on note a_n et b_n les loyers mensuels respective correspondants au contrat A et B.

Ainsi, $a_0 = 350$ et $b_0 = 350$.

1) a. Calculer a_1 et b_1 , et a_2 et b_2 .

b. Exprimer a_n et b_n en fonction de n

2) A l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier n tel que $a_n < b_n$. Conclure dans les termes de l'énoncé

Exercice 6 :

Un site de vente par internet souhaite prévoir l'évolution de ses ventes pour les années à venir. Pour cela, on a obtenu le nombre moyen de connexion par jour durant les quatre dernières années

Année	2007	2008	2009	2010
Le nombre moyen de connexion par jour	2600	2795	3005	3230

1) a. Calculer la variation absolue et la variation relative du nombre de connexion par jour entre les deux premières années.

On arrondit la variation absolue à 10^{-3} près.

b. faire le même sur les années suivantes. Que constatons ?

2) on décide de modéliser le nombre u_n de connexion futur l'année 2010+n par une suite géométrique de raison 1,075. Ainsi $u_0=3230$.

a. explique le choix de 1,75 comme raison.

b. Calculer u_1 puis interpréter le résultat.

c. Exprimer u_n en fonction de n .

- 3) a. Quel serait le nombre de connexion par jour en 2020 ?
- b. En quelle année ce nombre moyen dépassera-t-il 6000 connexions par jour ?

EXERCICE

Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec $(k \geq 1)$ avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k + 1)^{\text{ième}}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé.

a) Déterminer en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .

b) Examiner si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies. Déterminer alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

SOLUTION

1) Prouvons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .

D'après les renseignements ci-dessus, on a :

$v_1 = 2v_2$; $v_2 = 2v_3$; $v_3 = 2v_4$ et de manière générale, on a :

$$v_n = 2v_{n+1} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1 .

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé.

a-Déterminons en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .

Ici, le suffrage exprimé S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1^{er} terme v_1 et de raison $q = \frac{1}{2}$ $S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q}$

$$\text{Alors } S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

D'où le suffrage exprimé S_n en fonction de n est : $S_n = 2v_1 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

b-Examinons si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

Par hypothèse, candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé c'est-à-dire : $v_1 > \frac{1}{2} S_n$

$$\Leftrightarrow v_1 - \frac{1}{2} S_n > 0$$

Ainsi étudions le signe de $v_1 - \frac{1}{2} S_n$.

$$v_1 - \frac{1}{2} S_n = v_1 - \frac{1}{2} \left(2v_1 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \right) = v_1 - v_1 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = v_1 - v_1 + \frac{1}{2^n} v_1 = \frac{1}{2^n} v_1$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{2^n} > 0$ et $v_1 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}; v_1 - \frac{1}{2} S_n > 0 \Rightarrow v_1 > \frac{1}{2} S_n$.

Puisque $v_1 > \frac{1}{2} S_n$, alors le candidat est élu président dès le 1^{er} tour.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.

Déterminons alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

Par hypothèse : $S_n = 945$ et $v_1 = 480$.

En remplaçant $S_n = 945$ et $v_1 = 480$ par leur valeur dans $S_n = 2v_1 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, on

a :

$$945 = 2 \times 480 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \Leftrightarrow 945 = 960 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{945}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{945}{960}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{15}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 6$$

Alors on en déduit qu'il y'avait $n = 6$ candidats comme postulant

Exercice

Une association caritative décide de distribué la somme de **7 872 000 F** dans un pensionnat.

Le partage se fait de la manière suivante :

Le $\frac{3}{5}$ de cette somme est affecté aux aveugles et les 24% du reste aux perclus.

Le reste est ensuite partagé entre les trois employés du pensionnat et directement proportionnel à leur âge : 64 ans ; 36 ans et 50 ans, puis inversement proportionnel à leur année de service : 4 ans ; 6 ans et 5 ans.

1°) Quelle est la part des pensionnaires ? (aveugles et perclus).

2°) En déduire la part des trois employés.

SOLUTION

1) **Déterminons la part des pensionnaires (aveugles et perclus).**

- Part des aveugles : $\frac{3}{5} \times 7\,872\,000 \text{ F} = 4\,723\,200 \text{ F}$.
- Part des perclus: $\frac{24}{100} \times 4\,723\,200 \text{ F} = 1\,133\,568 \text{ F}$.

2) **En déduisons la part des trois employés.**

Le reste à partagé entre les trois employés est donc la part des pensionnaires (aveugles et perclus) – la somme totale à partagée, soit :

$$(7\,872\,000 \text{ F}) - (4\,723\,200 \text{ F} + 1\,133\,568 \text{ F}) = 2\,015\,232 \text{ F}.$$

Soient x ; y et Z la part des trois employés.

Puisque le reste : $2\,015\,232 \text{ F}$ est partagé entre les trois employés du pensionnat de tel sorte qu'il soit directement proportionnel à leur âge : 64 ans ; 36 ans et 50 ans, et inversement proportionnel à leur année de service : 4 ans ; 6 ans et 5 ans, on a :

$$(x ; y ; Z) \text{DP}(64 ; 36 ; 50) \text{IP}(4 ; 6 ; 5) \Leftrightarrow (x ; y ; Z) \text{DP}\left(64 \times \frac{1}{4} ; 36 \times \frac{1}{6} ; 50 \times \frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x ; y ; Z) \text{DP}(16 ; 6 ; 10) \Leftrightarrow \frac{x}{16} = \frac{y}{6} = \frac{Z}{10} = \frac{x+y+Z}{16+6+10} = \frac{2\,015\,232}{32} = 62\,976$$

$$\text{- Si : } \frac{x}{16} = 62\,976 \text{ alors } x = 1\,007\,616.$$

$$\text{- Si : } \frac{y}{6} = 62\,976 \text{ alors } y = 377\,856.$$

$$\text{- Si : } \frac{Z}{10} = 62\,976 \text{ alors } Z = 629\,760.$$

D'où la part des employés de 64 ans ; 36 ans et 50 ans est respectivement :

$1\,007\,616 \text{ F}$; $377\,856 \text{ F}$ et $629\,760$

Exercice7 : La graphique suivant donne les valeurs en euros du SMIC horaire brut à chaque 1^{er} Juillet des années 2000 à 2009 : On donne quelque valeur :

Années	2000	2003	2004	2009
SMIC horaire brut(en €)	6,41	7,19	7,61	8,82

1) Calculer le taux d'accroissement SMIC horaire brut entre le 1^{er} Juillet 2003 et 1^{er} Juillet 2004. Comment se lit graphiquement se taux d'accroissement ?

SUJET : N°1**EXERCICE 1**

1°) Calculer a) $2^{-5} \times 2^8 \times 2^{-2}$ b) $10^5 \times 10^3 \times 10^{-11}$

2°) Simplifier les expressions suivantes $\frac{144}{135}$ $\frac{0,36}{1,53}$ $\frac{490}{840}$

3°) Ecrire les nombres suivants à l'aide d'exposants rationnels

$$A = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{5}} \quad B = \frac{a^5}{\sqrt[3]{a}} \quad C = (\sqrt[3]{7})^{\frac{6}{5}}$$

EXERCICE 2

Trouver x dans les proportions suivantes

a) $15 ; x ; 3 ; 117$

b) $x ; 7 - 4\sqrt{3} ; 7 - 4\sqrt{3} ; x$

c) $\frac{4}{3} = \frac{27}{x}$

d) $\frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{5X}{\frac{25}{4}}$

PROBLEME

1°) Une somme de 840 000 FCFA doit être partagée entre trois personnes proportionnellement aux nombres 3 ; 5 ; 7 et inversement proportionnellement aux nombres 2 ; 6 et 3

Calculer les trois parts

2°) Trouver trois nombres a, b, c de somme 147 600 FCFA sont proportionnels aux nombres 7 ; 6 et $\frac{2}{3}$

3°) Une somme S doit être partagée entre trois personnes proportionnelles aux nombres 3 ; 5 et 7

a) Calculer les trois parts en fonction de S

b) La troisième personne gagne 200 FCFA de plus que la première.

Calculer la somme S et les trois parts.

4) Compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous:

	3		11			21
19		5	9	13	6	

« Aucun développement ne peut pas être pleinement s'il ne va de pair avec la justesse, alors soyons tous juste pour contribuer au développement économique du Mali »

SUJET : N°2

SUJET : N°2**EXERCICE 1**

1°) Sur un lycée de 1 534 élèves, 227 sont inscrits au cours privé la satisfaction. Quel est le pourcentage d'élèves du lycée inscrits au cours privé la satisfaction ?

2°) on a célébré au Mali 253,7 milliers de mariages en 1994. Le nombre de mariages a augmenté en 1995 de 4,4%. Combien a-t-on célébré de mariage au Mali en 1995 ?

3°) Claire a payé, après 15% de remise, 265,20 F une robe. Quel était le prix de la robe avant la remise ?

EXERCICE 2

1) Complétez le tableau suivant :

pourcentage de hausse ou de baisse	coefficient multiplicateur correspondant
+15 %	
.....	1.35
+100 %	
-20 %	
.....	0, 75
.....	2,15

EXERCICE 3

Une société dispose d'une somme de 1.000.000 FCFA qu'elle décide de répartir de la façon suivante : 17,5 % de cette somme seront affectée à la constitution d'un compte de retraite ; sur le reste 8% sont destinés aux œuvres sociales et le reste est partagé entre les salariés proportionnellement à leurs anciennetés respectivement 5 ans ; 2 ans ; 15 ans ; 8 ans. **Effectuer le partage**

EXERCICE 4

Un père de famille distribue de l'argent de poche à ses trois enfants, Zoumana, Dramane (5 ans) et Youssouf proportionnellement à leur âge. Il donne 5 600 F à Zoumana, 4 000 F à Dramane et le reste à youssouf. Sachant que la somme des âges des enfants est 23 ans.

1) Quels sont les âges de Zoumana et de youssouf ?

2) Quel est l'argent de poche de youssouf ?

Quelle est la somme totale distribuée.

Solution 1

1 (Se reporter au § 2).

Le pourcentage d'élèves inscrits à l'U.N.S.S. est : 14,8%.

$$\text{En effet } \frac{227}{1\,534} = \frac{x}{100},$$

$$\text{D'où } x = 14.8$$

On pouvait aussi faire le tableau de proportionnalité suivant :

1534	100
227	x

$$x = \frac{227 \times 100}{1\,534} = 14,8$$

2 (se reporter au §2 : augmenter une quantité de x %).

Le nombre de mariages célèbres en 1995 en France est de : 264,86 milliers.

$$\text{En effet } 253,7 \times \left(1 + \frac{4,4}{100}\right) = 253,7 \times 1,044 = 264,86.$$

3 le prix avant remise était de 312 F.

$$\text{En effet : si on appelle } x \text{ le prix de la robe avant remise, on obtient : } 265,20 = x \left(1 - \frac{15}{100}\right) = x \times 0,85,$$

$$\text{D'où } x = \frac{265,20}{0,85} = 312.$$

Solution 2

Pourcentage de hausse ou de baisse	Coefficient multiplicateur correspondant
+15 %	1,15
+35 %	1,35
+100 %	2
- 20 %	0,8
-25 %	0,75
+115 %	2,15

En effet : une hausse de x % donne le coefficient multiplicateur : $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$:

Une baisse de x % correspond au coefficient multiplicateur : $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

SUJET N°3**EXERCICE 1 :**

1) Résoudre les équations suivantes :

a) $(x^4-2)^5 - 2 = 0$ b) $(x^4+2)^4+2 = 0$ c) $(x^4+2)^4 - 2 = 0$ d) $x^3 = -125$
e) $2^{3x+1}=1$ f) $(x^4-2)^4 - 2 = 0$

2) Remplacez les points d'interrogation par les valeurs numériques adéquates :

1°) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{?}$ 2°) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[?]{675}$ 3°) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[?]{?}$

4°) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{b^5} = \sqrt[?]{a^?b^?}$ 5°) $(\sqrt[7]{a^2} * \sqrt[3]{a})^2 = a^? \sqrt[?]{a^5}$

EXERCICE 2

Le Directeur général de l'Ecole Supérieure de Gestion d'Informatique et de comptabilité ESGIC à la personne de M. DIAKARIDIA CAMARA décide de partager une prime S entre trois professeurs X, Y et Z pour des raisons de compétences, proportionnellement aux nombres 2 euros, 3 euros et 5 euros. M. IBRAHIM HAMORO KEITA chargé du partage se trompe et effectue le partage de façon inversement proportionnelles aux nombres 2 euros, 3 euros et 5 euros. Ainsi l'un des professeurs a vu sa part diminuée de 47 500 euros.

- 1) Lequel ?
- 2) Calculez le montant de la prime à partager
- 3) Calculez la part de chacun des professeurs

EXERCICE 3

Un père de famille distribue de l'argent de poche à ses trois enfants, Zoumana, Dramane (5 ans) et Youssouf proportionnellement à leur âge. Il donne 5 600 F à Zoumana, 4 000 F à Dramane et le reste à youssouf. Sachant que la somme des âges des enfants est 23 ans.

- 3) Quels sont les âges de Zoumana et de youssouf ?
- 4) Quel est l'argent de poche de youssouf ?
- 5) Quelle est la somme totale distribuée.

EXERCICE 4

1) On donne la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie : $U_0 = 1$ $U_{n+1} = 3U_n - 1$

1°) Calculez U_1 , U_2 , U_3

2°) soit la suite V_n $n \in \mathbb{N}$ définie par $V_n = U_n - 0,5$

- a) Calculez les trois premiers termes
- b) montrez que V_n est une suite géométrique
- c)) Exprimez V_n en fonction de n .
- d) En déduire l'expression de P_n en fonction de n
- f) Calculez V_{15} ; V_{20} ; U_{20} et U_{25}

SUJET N° 4**EXERCICE 1**

Le promoteur de cours privé la satisfaction à la personne de M. Bakary KONE enseignant-chercheur, veut placer la somme de 1 000 000 F au taux annuel 6,5%. Il peut le faire de deux façons :

- Placement à intérêts simples
- Placement à intérêts composés

On désigne respectivement par C_n et D_n les valeurs acquises par le capital au bout de n années dans chacun des cas :

1.a) Calculer C_1 ; C_2 et C_3

b) Exprimer C_n en fonction de C_{n-1}

En déduire que C_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2.a) Calculer D_1 ; D_2 et D_3

b) Exprimer D_n en fonction de D_{n-1}

En déduire que D_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. Calculer dans chacun des cas, la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.

EXERCICE 2

Le loyer mensuel d'une maison est de 50 000 F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%.

1. Quel est le montant du loyer dans 8 ans ?
2. Au bout de combien d'année le loyer aura-t-il doublé ?
3. Calculer le total des loyers payés pendant les 10 premières années.

EXERCICE 3

Un propriétaire désire vendre sa maison qui comporte deux étages de 16 marches chacun. L'acheteur devra payer 10 F pour la 1^{re} marche, 20 F pour la 2^{ème} marche, 40 F pour la 3^{ème} marche ; ainsi de suite, en doublant chaque fois jusqu'à la dernière marche. Quel est le prix de vente de cette maison ?

EXERCICE 4

Dans un pays de 50 millions d'habitants, le taux d'accroissement annuel de la population est de 20‰. Quelle sera la population de ce pays dans 1 an ? dans 2 ans ? dans 10 ans ?

SUJET : N°5**EXERCICE 1**

Un fermier possède dans sa ferme des vaches, des moutons, et des chèvres. On désigne par X , Y , Z respectivement le nombre de vaches, de moutons et de chèvres. X , Y , Z constituent, dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite arithmétique décroissante. Sachant que X^2 , $3Y$, Z^2 sont dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite géométrique et que le nombre total des animaux est égale à 12. Déterminez le nombre de vache, de moutons et de chèvres.

EXERCICE 2

En 2014, le Mali a réalisé un taux de croissance du PIB de 7,4 %. En effet selon les économistes, aucun développement économique voire durable ne peut être pleinement efficace s'il ne va de pair avec la croissance économique. Mais hélas, cette croissance provoque *l'émission des effets à gaz de serre, la pollution industrielle, les fumées industrielles, la biodiversité, la déforestation . . . bref le réchauffement climatique*. Ainsi pour respecter une norme antipollution, le Directeur général de la SOMAPILE s'engage à réduire de moitié sa production de gaz à effet de serre en 10 ans. Pour atteindre cet objectif, il envisage de réduire chaque année sa production de gaz de 5%. Au cours de l'année 2010, la production de gaz P_0 a été de 40 000 tonnes.

1°) Calculez les productions de gaz envisagées pour 2011, 2012 et 2013

2°) On note P_n la production de gaz envisagée pour 2010 + n

Justifiez que les nombres P_0 ; P_1 ; P_2 ; $P_n . . .$ forment une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression de P_n en fonction de n .

3°) Le Directeur aura – t – il atteint son objectif en 10 ans ? Si non, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la production de gaz soit inférieure à la moitié de la production initiale. Expliquez économiquement en quelque ligne comment une telle mesure du directeur peut – elle contribuer à la préservation de l'environnement ?

EXERCICE 3

Le 01 janvier 2014, une ville possède 20 000 habitants. Cette population augmente de 5 % par an et reçoit 1000 autres personnes chaque année, on note P_n la population de cette ville en janvier 2014+n

1°) déterminez la population de cette ville en 2017

2°) démontrez que la suite P_n vérifie la relation $P_{n+1} = 1,05 P_n + 1000$

3 °) on pose $V_n = P_n + 20000$

a) Démontrez que V_n est une suite géométrique

b) Exprimez V_n en fonction de n. En déduire l'expression de P_n en fonction n

c) Déterminez la population en 2030

EXERCICE 4

M .Dupont désire acheter une automobile qui, au 1^{er} janvier 1993, coûte 90 000 F .

N'ayant à sa disposition que 77 000 F et ne voulant prendre aucun crédit, il décide de placer la somme de 77 000F, dont il dispose. Un organisme financier lui assure un placement, à intérêts composés au taux annuel de 7%.

On note u_n le capital dont dispose M. Dupont 1^{er} janvier de l'année (1993 + n).

1) calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) a) montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) exprimer u_n en fonction de n.

3) on admet que le prix de l'automobile que veut acheter M. Dupont augmente régulièrement de 3% au 1^{er} janvier de chaque année. Pour tout entier n, on note p_n le prix de l'automobile au 1^{er} janvier de l'année (1993 + n).

SUJET N° 6**Définitions: Intérêts simples et intérêts composés**

On appelle rémunération d'un capital les intérêts produits par le capital quand il a été placé. Cette rémunération dépend de la durée de placement, du montant du capital et de la catégorie des intérêts.

Un intérêt est appelé **simple** quand il est proportionnel à la durée de placement.

Un intérêt est appelé **intérêt composé** lorsqu'à la fin de chaque année (ou mois, trimestre, etc.) l'intérêt produit est ajouté au capital. Il produit donc lui-même des intérêts pendant les mêmes années (ou mois, trimestre, etc.) suivantes.

EXERCICE 1

I°) Le promoteur de cours privé la satisfaction dispose de 2 500 F qu'il place à **intérêt simple** à la BDM au taux de 5,5% l'an. On note $C_0 = 2\,500$ F et C_n la somme dont le promoteur disposera au bout de n années de placement.

- A. Calculer C_1, C_2 .
- B. Déterminer C_{n+1} en fonction de C_n
- C. Reconnaître la nature de (C_n)
- D. En déduire l'expression de C_n en fonction de n
- E. De quelle somme le promoteur de cours privé la satisfaction disposera-t-il s'il laisse son argent placé pendant 5 ans

II°) Le promoteur de cours privé la satisfaction dispose de la même somme : 2 500 F. Il place cette somme, à **intérêts composés**, au taux annuel de 5% l'an. On appelle $C'_0 = 2\,500$ F et C'_n le montant dont disposera le promoteur de cours privé la satisfaction à l'issue de n années de placement.

- A. Calculer C'_1, C'_2
- B. Exprimer C'_{n+1} en fonction de C'_n
- C. Reconnaître la nature de C'_n
- D. Exprimer C'_n en fonction de n
- E. Calculer C'_5

III°) Le promoteur de cours privé la satisfaction compare les deux placements

- A. Quel est le placement le plus intéressant s'il place tous les deux 2 500 F pendant 4ans
- B. Même question si la durée du placement est 5 ans

SUJET : N°7

EXERCICE 1

1°) les nombres suivantes a l'aide de puissance entières de nombres premiers

$$A = \frac{8^3 \times 7^3 \times 5^4}{7^5 \times 5^3 \times 2^6} \quad B = \frac{0,081 \times 0,036 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64}$$

2°) Déterminer x € z dans les cas suivants :

a) $(10^{3x})^3 \times 10^{-2} = 10^7$ b) $5^{5x+1} = 625$

3°) a) Insère 10 moyens arithmétiques entre 9 et 64

b) Insère 4 moyens géométrique entre 6 et 12

c) Insérer 4 moyens arithmétiques entre 3 et 13

EXERCICE 2

A - détermine les dimensions d'un champ rectangulaire dont les dimensions sont directement proportionnelles aux chiffres 7 et 4 sachant que le champ mesure 220m de périmètre

B – On veut partager la somme de 620.000F entre trois enfants de façon inversement proportionnelle aux nombres 2 ; 3 et 5. Calculer la part de chaque enfant.

EXERCICE 3

1°) Détermine les capitaux C_1, C_2 et C_3 en progressions arithmétiques croissantes tels que :

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{5} = 14.000 \\ C_2 - C_1 = 5000 \end{cases}$$

2°) Pendant les vacances scolaires, salif se trouve un petit emploi. Cet emploi lui rapporte 2.500F CFA la première semaine et 500F CFA de plus chacune des semaines qui suivent. On désigne par U_n le gain de salif au bout de n semaines.

a) Calculer U_1, U_2, U_3

b) Exprimer pour tout entier naturel n, en fonction n.

c) Au bout de combien de semaines le gain de salif sera-t-il égal à 4.500F CFA ?

d) Calculer le gain de salif pendant les trois mois de vacance.

e) Déterminer les réels x, y, et z dans les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} \\ 3x + 4y - 2z = 5.100 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7} \\ x + y + z = 70.000 \end{cases}$$

SOLUTION

1) Ecrivons les nombres suivants à l'aide d'une puissance entière

$$A = \frac{8^3 * 7^3 * 5^4}{7^5 * 5^3 * 2^6} = \frac{2^9 * 7^3 * 5^4}{7^5 * 5^3 * 2^6} = 2^9 * 2^{-6} * 7^3 * 7^{-5} * 5^4 * 5^{-3}$$

$$A = 2^{9-6} * 7^{3-5} * 5^{4-3} \rightarrow A = 2^3 * 7^{-2} * 5^{4-3} \rightarrow A = \frac{2^3 * 5}{7^2}$$

$$B = \frac{0,081 * 0,036 * 2560}{0,144 * 2,16 * 64} = \frac{81.10^{-3} * 36.10^{-3} * 2560}{144.10^{-3} * 216.10^{-2} * 64}$$

$$B = \frac{81 * 36 * 256}{144 * 216 * 64} = \frac{3^4 * 3^2 * 2^2 * 2^8}{3^2 * 2^4 * 3^3 * 2^3 * 2^6} = \frac{3^{4+2} * 2^{2+8}}{3^{2+3} * 2^{4+3+6}}$$

$$B = 3^{6-5} * 2^{10-13} \rightarrow B = \frac{3}{2^3}$$

2°) Déterminons $x \in \mathbb{Z}$ dans les cas suivants

a) $(10^{3x})^3 \cdot 10^{-2} = 10^7 \Rightarrow 10^{9x-2} = 10^7$ donc $9x - 2 = 7$ alors $x = 1$

b) $5^{5x+1} = 625 \Rightarrow 5^{5x+1} = 5^4 \Rightarrow 5x + 1 = 4$ donc $x = \frac{3}{5}$

3 a) Inserons 10 moyens arithmetiques entre 9 et 64

$$r = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow r = \frac{64-9}{10+1} \Rightarrow r = 5$$

$$C_1 = C_0 + r \Rightarrow C_1 = 9 + 5 \Rightarrow C_1 = 14$$

$$C_2 = C_1 + r \Rightarrow C_2 = 19 \text{ ainsi de suite } C_3 = 24, C_4 = 29, C_5 = 34$$

$$C_6 = 39 \quad C_7 = 44 \quad C_8 = 49 \quad C_9 = 54 \quad C_{10} = 59$$

Inserons 4 moyens géométriques entre 6 et 12

$$\text{Pour insérer entre a et b on calcule : } q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}} \Rightarrow q = \sqrt[4+1]{\frac{12}{6}} = 2^{\frac{1}{5}}$$

$$C_1 = C_0 \cdot q \Rightarrow C_1 = 6 \cdot 2^{\frac{1}{5}} \text{ ainsi de suite } C_2 = 6 \cdot 2^{\frac{2}{5}}, C_3 = 6 \cdot 2^{\frac{3}{5}}$$

$$C_4 = 12$$

b) Insérons 4 moyens arithmétiques entre 3 et 13

$$r = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow r = \frac{13-3}{4+1} \Rightarrow r = 2$$

$$C_1 = C_0 + r \Rightarrow C_1 = 3 + 2 \Rightarrow C_1 = 5$$

$$C_2 = C_1 + r \Rightarrow C_2 = 5 + 2 \Rightarrow C_2 = 7$$

$$C_3 = C_2 + r \Rightarrow C_3 = 7 + 2 \Rightarrow C_3 = 9$$

$$C_4 = C_3 + r \Rightarrow C_4 = 9 + 2 \Rightarrow C_4 = 11$$

SOLUTION3

Déterminons les capitaux en progression arithmétiques croissantes

1) Déterminons les capitaux c_1, c_2, c_3 en progression arithmétique croissante tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{5} = 14000 \end{array} \right.$$

$$c_2 - c_1 = 5000$$

$$2c_2 = c_1 + c_3$$

$$c_1 = c_1$$

$$c_2 = c_1 + r$$

$$c_3 = c_1 + 2r$$

$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{5} = 14000$$

$$\frac{15c_1 + 10c_2 + 6c_3}{30} = \frac{14000 * 30}{30}$$

$$15c_1 + 10c_2 + 6c_3 = 420000$$

$$c_2 - c_1 = 5000$$

$$c_1 + r - c_1 = 5000 \Leftrightarrow r = 5000$$

$$15c_1 + 10(c_1 + r) + 6(c_1 + 2r) = 420000$$

$$15c_1 + 10c_1 + 6c_1 + 50000 + 60000 = 420000$$

$$31c_1 + 110000 = 420000$$

$$31c_1 = 42000 - 110000$$

$$c_1 = \frac{31000}{31} \Leftrightarrow c_1 = 10000$$

$$c_2 = 10000 + 5000 \Leftrightarrow c_2 = 15000$$

$$c_3 = 10000 + 2(5000)$$

$$c_3 = 10000 + 10000 \Leftrightarrow c_3 = 20000$$

$$2) U_0 = 2500 \quad r = 500$$

a) Calculons U_1 , U_2 , U_3

$$U_1 = U_0 + r \Leftrightarrow U_1 = 2500 + 500 \Leftrightarrow U_1 = 3000$$

$$U_2 = U_1 + r \Leftrightarrow U_2 = 3000 + 500 \Leftrightarrow U_2 = 3500$$

$$U_3 = U_2 + r \Leftrightarrow U_3 = 3500 + 500 \Leftrightarrow U_3 = 4000$$

Exprimons pour tout entier nature n en fonction de n

$$U_{n+1} - U_n = r$$

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

Posons $P=0$

$$U_n = U_0 + nr \Leftrightarrow U_n = 2500 + 500n$$

c) Calculons le nombre de semaine

$$U_n = 2500 + 500n$$

$$4500 = 2500 + 500n$$

$$500n = 4500 - 2500$$

$$500n = 2000$$

$$n \frac{2000}{500} \Leftrightarrow n = 4 \text{ semaine}$$

a) Calculons le gain de Salif pendant 3 mois

1 mois = 4 semaine

3 mois = 12 semaine

$$U_{12} = 2500 + 500(12)$$

$$U_{12} = 25000 + 6000 \Leftrightarrow U_{12} = 8500$$

SUJET N°8

Exercice 1

1°) a) montre que le nombre $C = \frac{2^{10} \times 3^6 \times 5^9 \times 77^2}{49000 \times 297}$ est un entier naturel.

b) les 10% de C sont pour récompenser vos efforts a la composition de la première période. Combien espérez-vous obtenir ?

2°) résoudre dans N, l'équation : $\frac{1}{(64)^{x^2}} = (4^{-5})^{2x} \times \frac{1}{(4^{-2})^4}$

3°) détermine les réels x et y vérifiant :
$$\begin{cases} 2^x \times 4^y = \sqrt{2}^{10} \\ \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2

1) Trois personnes s'associent pour créer une entreprise. n la première apporte 27000€, la seconde 54000€ et la troisième 81000€. A la fin de l'exercice, ils se partagent 9000€ proportionnellement à leur apport initial. Combien le premier doit-il recevoir ?

2) la commune de Candé prévoit dans son budget 25000€ au titre des activités culturelles et sociales. la répartition doit s'effectuer ainsi :

- 10% sont attribués à la coopérative scolaire,
- 24% du reste sont affectés à la caisse d'entraide,
- le reste est distribué entre 3 clubs de loisirs inversement proportionnel aux nombres d'années d'activités de chacun soit respectivement 4 ans, 3ans, et 1ans. Effectuer le détail de cette répartition.

Problème :

1°) les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30sièges, 32 sièges, 34sièges et ainsi de suite. De la onzième rangée à la vingtième rangée, chaque rangée est formée de 50 sièges.

Calculer le nombre total de sièges dans cette partie du stade.

2°) une personne décide de placer un capital de 10.000FCFA qui apporte 8% d'intérêt composés par an. Le premier dépôt est effectuer le 1^{er} janvier 2007 et les intérêts sont versés le 31 décembre de l'année en cours (les premiers intérêts seront versés le 31 décembre 2007). On appelle (C_n) le capital disponible, au 1^{er} janvier de l'année $(2007+n)$. Ainsi, $C_0=10.000$

a) calculer C_1 et C_2 .

b) quelle est l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n ?

c) En déduire que la suite (C_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Donner l'expression de C_n en fonction de n et C_0 .

d) quel sera le capital disponible au 1^{er} janvier 2018 ? (résultat arrondi à l'entier le plus proche).

SOLUTION 1

1°) montrons que le nombre $C = \frac{2^{10} \times 3^6 \times 5^9 \times 77^2}{49000 \times 297}$ est un entier naturel

$$C = 2^7 * 3^3 * 5^6 * 11 \Rightarrow C = 594\,000\,000$$

b) Nous espérons obtenir

soit x ce nombre

$$x = 10\% C \Rightarrow x = 59\,400\,000$$

2°) résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\frac{1}{(64)^{x^2}} = (4^{-5})^{2x} \times \frac{1}{(4^{-2})^4}$

$$S = \{2\}$$

3°) déterminons les réels x et y e vérifiant $x = 1$ et $y = 2$

SOLUTION 2

1°) Le premier doit recevoir

Le premier recevra 1 500 euros

3) Effectuons les détails de cette répartition

la coopérative scolaire aura 2 500 euros, La caisse d'entraide aura 5400 euros et le reste final sera 17 100 euros.

$$x = 2\,700 \text{ euros}, \quad y = 3\,600 \text{ euros} \text{ et } z = 10\,800 \text{ euros}$$

PROBLEME

1) Calculons le nombre total de siège : Le nombre total de siège est 890 sièges

2) l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n

L'expression de C_{n+1} est $C_{n+1} = 1,08C_n$

c) Déduisons que la suite est géométrique

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1,08 \text{ donc } C_n \text{ est une SG de raison } q=1,08 \text{ et de premier terme } C_0 = 10\,000 \text{ F}$$

Donnons l'expression de C_n en fonction de n et C_0

$$C_n = 10\,000(1,08)^n$$

d) le capital disponible au 1^{er} janvier 2018

$$\text{En 2018 nous aurons } C_{11} = 23\,316 \text{ F}$$

SUJET: N °9

EXERCICE 1

1) Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers le nombre :

$$A = 7\sqrt{7} - 3\sqrt{28} - 101\sqrt{63}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $16807 \cdot (7^x)^{25} = 1$

3) Les dimensions d'un champ rectangulaire sont proportionnelles aux nombres 7 et 707. Déterminer ses dimensions sachant que son demi-périmètre est 777, 77m

4) Une prime de 777euros est partagée entre trois personnes proportionnellement à leur âges et leur anciennetés dans le service. kaana a 50 ans et 8 ans de service

EXERCICE2

Un pays A a un taux de croissance égal 0,4% par an. En 2000, le pays comptait 40.000.000 d'habitants.

1) Quelle sera la population de ce pays en 2001 ?; 2002

2) On désigne par P_0 la population en 2000 et par p_n la population n années après 2000.

a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n . Quelle est sa nature ?

b) Exprimer P_n en fonction de n.

c) En quelle année la population doublera dans A ?

3) La production agricole du pays A permet de nourrir 100.000.000 d'habitants par an. En quelle année le pays sera frappe par une crise alimentaire ?

Exercice

$C_0, C_1 \dots C_n$ désignent respectivement les salaires des employés d'une entreprise. Les capitaux $C_0, C_1 \dots C_n$ forment une progression arithmétique croissante. La somme des capitaux du deuxième, troisième et quatrième employé est 210 euros. La somme des carrés de ces mêmes capitaux fait 15 500euros.

1) Détermine le salaire du premier employé et la raison de la progression.

2) En déduire C_1, C_2, C_3 .

3) Exprimer C_n en fonction de n.

4) En déduire le salaire du dixième et du centième employé.

5) Le financier de l'entreprise a pu décrypter les codes bancaires du dixième jusqu'au centième employé de l'entreprise. Calculer la somme totale volée par le financier.

« Chez nous, nous faisons la production des élèves susceptibles d'être admis au bac »

SOLUTION 1

Écrivons sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers le nombre

$$A = 7\sqrt{7} - 3\sqrt{28} - 101\sqrt{63} \Rightarrow A = -302\sqrt{7}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation : $16807 \cdot (7^x)^{25} = 1$

$$S = \emptyset$$

3) Déterminer ses dimensions

$$L = 770,14 \text{ m} \text{ et } l = 7,63 \text{ m}$$

4) Effectuons le partage

$$x = 483 \text{ euros}, \quad y = 217 \text{ euros} \quad z = 77 \text{ euros}$$

Solution2

1) la population de ce pays en 2001 ? 2002 ?

$$\text{En 2000 } P_1 = 40\,160\,000 \text{ hbts, en 2002 } P_2 = 40\,320\,640 \text{ hbts}$$

2 a) Exprimons P_{n+1} en fonction de P_n . puis donnons sa nature

$$P_{n+1} = 1,004P_n$$

e) P_n est une SG de raison $q = 1,004$ et de premier terme $P_0 = 40\,000\,000$ hbts

f) La population doublera dans A

La population va doubler en 2174

3) Précisons l'année de crise alimentaire

A partir de 230 ans le pays sera frappé par une crise alimentaire donc l'année de crise alimentaire est 2230 ans

SOLUTION 3

1) Déterminons le salaire du premier employé et la raison de la progression

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 210 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 15\,500 \end{cases}$$

$$0,5c_0^2 - 70C_0 + 1650 = 0 \Rightarrow C_0 = 30 \text{ et } r = 20$$

2) déduisons C_1, C_2, C_3

$$c_1 = 50 \text{ euros}, c_2 = 70 \text{ euros}, c_3 = 90 \text{ euros}$$

3) Exprimons C_n en fonction de n

$$C_n = 30 + 20n$$

4) déduisons le salaire du dixième et du centième employé.

Le salaire du dixième employé est $C_9 = 210$ euros

Le salaire du centième employé est $C_{99} = 2010$ euros

5) Calculons la somme totale volée par le financier.

***Décrypter** : Ici veut dire avoir accès au code bancaire de l'entreprise de manière frauduleuse.*

$$S_n = \left(\frac{n-p+1}{2} \right) (C_p + C_n) \Rightarrow S_{99} = \left(\frac{n-9+1}{2} \right) (C_9 + C_{99}) \Rightarrow S_{99} = 101\,010 \text{ euros}$$

SUJET N° 10

EXERCICE1

2) Utilisez les identités remarquables pour factoriser (Transformez)

a) $x^4 + 2x^2.y + y^6$ b) $z^6 - 2z^3t^8 + t^{16}$ c) $2r - 1 - r^2$

EXERCICE2 :

On partage une somme S entre trois personnes A, B et C.

1°) Dans un premier partage on fait des partages proportionnels aux nombres 11 ; 15 ; 17. Quelle fraction de S chacune des parts représente – t – elle ?

2°) Dans un second partage on fait des partages inversement proportionnels aux nombres 9 ; 6 et 5. Quelles sont les personnes qui gagnent à ce second partage ? Quelles sont celles qui perdent ?

3°) Au second partage l'une des personnes perd 1500 F. Quelle est la S partagée ?

EXERCICE3:

Déterminer la moyenne proportionnelle de a et b si possible dans les cas suivant :

1) $a=3$ et $b=27$ 2) $a=-5$ et $b=-125$ 3) $a=9$ et $b=-900$

EXERCICE 4

Le Directeur générale de Bank OF AFRICA souhaite partager une indemnité de fonction entre le directeur financier, le directeur marketing et le directeur des ressources humaines. Le directeur financier reçoit deux tiers de l'indemnité ; le directeur marketing en reçoit un septième et le directeur des ressources humaines reçoit le reste.

1°) retrouver la part du directeur des ressources humaines en fonction de l'indemnité.

2°) Déterminer la part de chaque directeur sachant que l'indemnité de fonction est 2 100 000 F

Exercice 5:

Les angles d'un triangle sont proportionnels aux nombres 3, 4 et 5. Calculez ces angles.

« Qui sème la paresse, récolte l'échec mais par contre qui sème le courage, la persévérance, l'assiduité, récoltera sûrement la réussite »

SUJET : N°11

EXERCICE 1

Suite aux attaques des terroristes au nord du Mali, le nombre d'abonné au journal Essor quotidien national d'information augmente de 20% pendant l'année 2011. Ensuite le nombre d'abonné augmente de $t\%$ par an pendant les années 2012 et 2013 du au coup d'Etat militaire puis baisse par an pendant les années 2014 et 2015. Le taux global d'évolution sur ces cinq années est de 10%. Calculer le taux t .

Réponse: $t = 20,63\%$

EXERCICE 2

La ville de Kati possède 5 000 habitants. La population diminue du même pourcentage chaque année, suite au coup d'Etat la ville de Kati a perdu 10% de ses habitants en deux ans. Calculer le taux annuel de cette perte d'habitants.

Réponse: $t = 5,13\%$

EXERCICE 3

31 livres sont rangés de gauche à droite par ordre de prix croissant. Le prix de chaque livre diffère de 0,5 du prix de chacun de ses voisins. Pour le prix du livre à l'extrême droite, un client peut acheter le livre du milieu plus un de ses voisins.

1°) Le livre voisin est-il celui de gauche ou de droite ?

2°) Déterminer le prix du livre le plus couteux

3°) Quel est le prix du livre du milieu

Réponse : 1) livre de gauche 2) 15,5 F 3) 8 F

EXERCICE

On étudie les variations du prix d'un article sur quatre mois :

Mois	1	2	3	4
Taux d'évolution (en %)	-9	5	4	10

Au début du deuxième mois, le prix est de 145 €

1°) Calculer les prix au début du troisième mois et au début du premier mois, arrondis au centime près.

2 a) Calculer le taux d'évolution global T sur ces quatre mois, arrondi à deux chiffres après la virgule.

b) Calculer le taux d'évolution réciproque du taux global T

c) Donner le tableau des indices, base 100 au début du premier mois, arrondis au dixième près.

SUJET : N° 12

EXERCICE 1

Une entreprise estime le cout d'un forge de la façon suivante : le premier mètre coute 1 000 F, le 2^e mètre coute 1050 F et ensuite chaque mètre coute 50 F de plus que le précédent. Quelle profondeur pourra-t-on atteindre si on dispose d'une somme de 519750 F ?

EXERCICE 2

Pour la location d'un même local et pour une durée de 12ans, on vous propose 2 contrats (C_1 et C_2) de location. Dans les deux cas la location commence un 1^{er} janvier.

—Pour le contrat c_1 : le loyer mensuel est de 2 000 F la 1^{ère} année, puis il augmente de 300 F au 1^{er} janvier de chaque nouvelle année.

—Pour le contrat c_2 : le loyer mensuel est aussi de 2 000 F la 1^{er} année, puis il augmente de 10% au 1^{er} janvier de chaque nouvelle année.

On appelle $L_1(n)$ le loyer mensuel au cours de la n^e année pour le contrat C_1 et $L_2(n)$ pour le contrat C_2 .

1° Exprime $L_1(n)$ et $L_2(n)$ en fonction de n.

2° A partir de quelle année le loyer mensuel dépasse-t-il le double du loyer initial pour C_1 ? Pour C_2 ?

3° Quel est le contrat le plus avantageux pour la durée totale de la location ? (On ne tiendra pas compte de l'inflation.)

UA₂ : Unité d'Apprentissage du deuxième trimestre

Résumé des leçons de l'unité d'apprentissage deux

1°) Qu'est-ce que l'économie ?

L'économie est la science qui étudie les mécanismes qui déterminent la production, la consommation ainsi que la répartition des richesses entre les individus.

2°) Quel est le rôle des économistes dans une société ?

Le rôle des économistes est d'une part d'analyser comment la société humaine produit ses richesses et d'autre part de proposer des possibilités d'amélioration à certains dysfonctionnement économiques. Les économistes doivent élaborer des projets de sociétés qui consistent à améliorer le bien économique et social des populations.

3°) Formules

- **Bénéfice** est $B = \text{Recette totale} - \text{cout total}$
- **Recette totale** est $RT = \text{Prix de vente} * \text{quantité vendues}$
- **Cout total** est $CT = \text{Cout variable (x)} + \text{Cout fixe}$

Cout Total : est l'ensemble des dépenses monétaires consacrées à la production.

Cout variable : est la partie du cout dépendant du volume de production.

Cout Fixe : est la partie du cout indépendant du volume de production.

Prix de Revient = Prix d'Achat + Frais

Bénéfice = Prix de vente – Prix d'achat

- **Cout moyen** est $CM = \frac{\text{Cout total}}{\text{Quantité produite}}$
- **Cout marginal** est $Cm = (\text{Cout total})'$
- **Cout fixe moyen** est $CFM = \frac{\text{Cout Fixe}}{\text{Quantité produite}}$

Cout moyen est le cout par unité produite. On l'appelle aussi cout unitaire ou couts moyens totaux.

Cout marginal : est l'accroissement du cout total de production provoqué par l'augmentation de la quantité produite.

Cout Fixe Moyen : est le cout fixe par unité produite.

4°) Quel est l'objectif général d'une entreprise ?

L'objectif général d'une entreprise est la maximisation du profit c'est-à-dire avoir le maximum de bénéfice. C'est pourquoi nous montrerons comment se calcule le bénéfice maximal ou maximum.

Le bénéfice est maximum si et seulement et si nous avons :

$$- B'(x) = 0 \rightarrow x_1$$

- $B''(x_1) < 0$ alors l'entreprise atteint son bénéfice maximum au point x_1
- $B''(x_1) > 0$ alors l'entreprise atteint son bénéfice minimum au point x_1

Le bénéfice maximum et le bénéfice minimum peuvent être appréciés le tableau de variation.

B	$-\infty$	B_0	$+\infty$
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$		↗ M ↘	

Relation entre la croissance économique et le développement économique :

Le développement économique et la croissance économique sont deux phénomènes liés. Ils sont à la fois la cause et la conséquence l'un de l'autre de façon réciproque.

C'est la croissance économique qui précède toujours le développement économique. De ce fait, il n'y aura jamais un développement économique sans croissance économique mais on peut avoir une croissance économique sans ou avec développement économique.

N.B : il ne faut pas confondre les notions suivantes

- **L'expansion économique** : C'est l'augmentation de la production pendant une courte période ;
- **La récession économique** : c'est la diminution de la production pendant une courte période ;
- **Le progrès économique** : Il y a progrès économique lorsqu'on assiste à la fois à l'augmentation de la production suivit d'une amélioration du cadre de vie se traduisant par une meilleure efficacité (productivité, progrès technique, organisation du travail, etc.). On parle de progrès économique lorsqu'une collectivité atteint ou se rapproche des objectifs qu'elle s'est fixé.

LES TAUX D'ACCROISSEMENT :

On les appelle encore taux d'accroissements ou taux de variation. Il y'a lieu de distinguer absolument deux taux d'accroissements véritablement différents : taux d'accroissement global (TAG ou T) et le taux d'accroissement annuel moyen (TAAM ou TAM ou T').

1- Le taux d'accroissement global (TAG ou T) :

Il enregistre l'évolution entre deux périodes de référence.

$TAG \text{ ou } T = \frac{VA - VD}{VD} \times 100$. VA : VALEUR D'ARRIVEE VD : VALEUR DE DEPART.

2- Le taux d'accroissement annuel moyen (TAAM ou T') :

Il enregistre une évolution fictive (imaginaire) entre deux périodes de référence fictive car les taux effectivement constatés sont différents des taux moyens annuels obtenus.

$TAM = (\sqrt[n]{m} - 1)100$, $T' = (\sqrt[n]{m} - 1)100$ avec n = nombre d'année de la période et m = coefficient multiplicateur de la période avec $Mg = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_k$

N.B :

- On ne peut compenser une baisse par une hausse équivalente.
- On ne peut ni additionner ni soustraire les taux d'accroissement ; on peut seulement les diviser ou les multiplier mais pour cela, il faut au préalable les transformer en coefficient multiplicateur..
- Il y a diminution si seulement si le taux d'accroissement est négatif sur la période.
- Si le taux ne cesse d'augmenter ; il s'agit alors une accélération.
- Tous les taux sont exprimés en pourcentage

LE COEFFICIENT MULTIPLICATEUR :

C'est un nombre par lequel une grandeur est multipliée entre 2 dates ; $m = VA/VD$

N.B :

- Lorsque $m < 1$, cela signifie que la grandeur a diminué pendant la période considérée ;

- lorsque $m > 1$, cela signifie que la grandeur a augmenté pendant la période considérée ;
- lorsque $m = 1$, cela signifie que la grandeur n'a connu aucune évolution au cours de la période.

V- LA PART :

C'est un nombre qui mesure l'importance ou le poids d'une grandeur dans un ensemble donné.

$$P = \frac{\text{Sous Ensemble}}{\text{Ensemble}} * 100$$

- N.B : La part est toujours exprimée en pourcentage et la somme des parts est toujours égale à 100 ou 1

5°) Autres formules

- **f est un axe de symétrie si et seulement et si :**

$$f(2a - x) = f(x)$$

- **f est un centre de symétries si et seulement et si :**

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

- **Equation de la tangente**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- **Dérivabilité d'une fonction**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **Division euclidienne**

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad \text{q est le quotient, r est le reste, b est le diviseur et a est le dividende.}$$

Chapitre V : Limites, continuités, dérivées

1 Définition

La limite d'une fonction en un point x_0 de son domaine de définition Df.

Théorème : Si f est une fonction définie au point x_0 ($x_0 \in Df$), alors elle admet une limite au point x_0 qui est égale à $f(x_0)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7x + 1 = 2^2 - 14 + 1 = -9$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x + 1}{x + 2} = \frac{6 + 1}{-1} = -7$$

2°) Limite à l'infini des fonctions usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+ \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

3 opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions définies au point x_0 et l et n leurs limites respectives.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = n ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = n ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = l * n$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3) \quad ; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x + 3 \quad ; \quad \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2} \quad ; \quad \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x+3}{2x+1} \quad \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{3x^3}$$

SOLUTION

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 3 = -5 \quad ; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x + 3 = 3 \quad ; \quad \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = -\infty$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2} = 0^- ; \quad \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x+3}{2x+1} = \frac{5}{2} \quad \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{3x^3} = 0^+$$

4 Les formes indéterminées

Les formes indéterminées sont : $\frac{0}{0}$; $+\infty - \infty$; $0 * \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Dans de tels cas ; on effectue les opérations algébriques pour lever l'indétermination.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} ; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} ; \quad \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$$

5 Théorème

- La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers plus ou moins infini est égale à la limite de son monôme le plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle quand x tend vers plus ou moins infini est égale à la limite du rapport des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x - 1) ; & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 7x + 3) \\ \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 7}{2x + 1} ; & \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 4x - 7} \end{array}$$

SOLUTION

Calculons les limites données :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x - 1) = -\infty ; & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 7x + 3) = -\infty \\ \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 7}{2x + 1} = 2 ; & \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 4x - 7} = -\infty \end{array}$$

5 Limite à gauche et limite à droite

Si x_0 est une borne de Df de la fonction f , on ne peut pas calculer directement la limite de f au point x_0 mais on calcule la limite de f à gauche et à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ est appelée limite à gauche de x_0

b) Limite à droite

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ est appelée limite à droite de x_0

f admet une limite en x_0 si la limite à gauche de x_0 est égale à la limite à droite de x_0 .

6 Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur une partie D sur $\mathbb{R}$ et soit a un réel de D . on dit que f est continue en a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple : soit $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 1}$

- ① Déterminer D_f
- ② Calculer les limites aux bornes de D_f

SOLUTION

① Déterminons le domaine de définition

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 1}$$

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}; x - 1 \neq 0\} \text{ posons } x - 1 = 0 \text{ donc } x = 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

② Calculer les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Exercice : soient les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x + 2}{3 - x} \text{ et } g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

- ① Déterminer D_f et D_g
- ② Calculer les limites aux bornes de D_f et D_g

SOLUTION

$$f(x) = \frac{3x + 2}{3 - x}$$

① Déterminons D_f et D_g

$$D_f = \left\{ \frac{x}{x} \in \mathbb{R}; 3 - x \neq 0 \right\} \text{ et } D_g = \left\{ \frac{x}{x} \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$$

② Calculer les limites aux bornes de D_f et D_g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(3) + 2}{3 - 3} = \frac{11}{0} \quad \text{posons } 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$3 - x$	$+$	0	$-$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{11}{0^+} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

DERIVATION**II) fonctions dérivées****1) Calcul des dérivées des fonctions usuelles**

- Tableau récapitulatif :

<i>Fonction f</i>	<i>Fonction dérivée f'</i>
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = (ax + b)^n$	$f' = na(ax + b)^{n-1}$
$f = U * V$	$f' = U'V + V'U$
$f = \frac{U}{V}$	$f' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
$f = \frac{1}{U^n}$	$f' = -\frac{n U'}{U^{n+1}}$
$f = U^n$	$f' = nU'U^{n-1}$
$f = \sqrt{U}$	$f' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$f = U + V$	$f' = U' + V'$
$f = \frac{1}{U}$	$f' = -\frac{1}{U^2}$

Théorème : soit f une fonction définie et dérivable sur I .

- Si la dérivée $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur I .
- Si la dérivée $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .
- Si la dérivée $f'(x) > 0$ alors la fonction f est croissante sur I .

III Etude de fonction

1°) Asymptotes

Asymptote verticale : si la limite quand $x \rightarrow a$ de la fonction f est $+\infty$ ou $-\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ est une Asymptote Verticale (AV)}$$

Asymptote Horizontale : si la limite quand $x \rightarrow \pm\infty$ de la fonction f est b ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{4x-5}{-2+x}$

Calculer les limites aux bornes de D_f puis en déduire l'équation des asymptotes.

Asymptote oblique : soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = 0 \Rightarrow y = ax + b \text{ est Asymptote Oblique à la courbe.}$$

2°) Position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique

Si $f(x) - y > 0$ alors la courbe C_f est dessus de l'asymptote oblique.

Si $f(x) - y < 0$ alors la courbe C_f est dessous de l'asymptote oblique

Si $f(x) - y = 0$ alors la courbe C_f et l'asymptote oblique se coupent en un point quelconque.

3°) Extremums

Minimum : soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. f admet un minimum relatif (local) au point x_0 si sa dérivée f' s'annule en x_0 .

x	$+\infty$	x_0	$-\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		↘	↗

Maximum : soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

f est un maximum relatif(local) au point x_0 si sa dérivée f' s'annule en x_0 .

x	$+\infty$	x_0	$-\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$		↗	↘

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Etudier les variations de f et en déduire les extremums.

SOLUTION

Etudions les variations de f

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \text{posons } f'(x) = 0 \text{ alors } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

maximum relatif(local) au point x_0 si sa dérivée f' s'annule en x_0 .

x	$+\infty$	-1	1	$-\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-1) = 4 \text{ et } f(1) = 0$$

Déduisons les extremums : $M \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)$ et $m \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

IV Symétrie de la courbe

1°) Centre de symétrie

Le point $I \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si :

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

NB : si la fonction f est impaire c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ alors l'origine du repère est centre de symétrie à la courbe C_f

2°) Axe de symétrie

La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie $f(-x) = f(x)$ alors la courbe C_f admet l'axe OY comme axe de symétrie.

Plan d'étude d'une fonction

1°) Déterminer le domaine de définition

2°) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition

3°) Calculer la dérivée, étudier son signe et dresser son tableau de variation

4°) Déterminer les points particuliers à la courbe de f .

- Asymptotes, extremums
- Points d'intersections de la courbe avec les axes du repère
 - Axe (OX) dans ce cas $C \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$ donc $A \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$
 - Axe (OY) dans ce cas $C \cap OY \Rightarrow f(0)$ donc $B \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix} \right)$

Sujet : N° 12

Exercice 1 : l'entreprise « Superior » fabrique et commercialise chaque jour un nombre x d'objets. Le cout unitaire de fabrication d'un objet est fonction du nombre d'objets fabriqués. Ce cout unitaire est déterminé par la fonction :

$$f(x) = x^2 - 108x + 4\,580 \text{ pour } x \in [0,100].$$

- A. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.
- B. Dresser le tableau de variation de f .
- C. Détermine le nombre d'objets que doit fabriquer chaque jour l'entreprise pour minimiser le cout de fabrication unitaire.
- D. Détermine le cout total $C(x)$ de fabrication.
- E. l'entreprise vend 6 500 f chaque objet. On appelle $r(x)$ la recette obtenue par la vente de x objet et $B(x)$ le bénéfice réalisé.
Vérifier que $B(x) = -x^3 + 108x^2 + 1\,920x$
- F. Calculer $B'(x)$ et étudier le signe de $B'(x)$.
en déduire les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,100]$.
- G. Déterminer pour quelle valeur de x , l'entreprise « Superior » réalise un bénéfice maximal. calculer alors ce bénéfice.

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique chaque jour une quantité x d'objets ; x est un entier compris entre 0 et 45. Le cout de production de la fabrication de ces x objets exprime en francs, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$.

1) Pour l'étude de la fonction f , on considère que x est un réel de l'intervalle $[0,45]$.

- a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	5	10	30	45
$f(x)$					

- b) Calculer la dérivée de f ; étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,45]$

- c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal () du plan, d'unités graphiques : 1 cm pour représenter cinq objets. en abscisse et 1 cm pour représenter 100F en ordonnée.
- 2) le prix de vente d'un objet est de 34 F.
- a) Calculer le bénéfice journalier de l'entreprise si elle fabrique et vend 40 objets.
- b) En supposant que la vente moyenne en 1995 a été de 40 unités par jour et que l'entreprise a travaillé 300 jours, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise en 1995.
- c) Ce bénéfice a été placé le 1^{er} janvier 1996 à intérêts composés au taux annuel de 6% Quelle sera la valeur acquise de ce placement au janvier 1998 ?

Exercice3

La fonction du coût total C de fabrication d'un produit par une entreprise est donnée par $C(q) = q^3 - 14q^2 + 76q$ où q est le nombre d'unités fabriquées. On rappelle que le coût unitaire moyen est donné par $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$ et que la fonction coût marginal est la dérivée C' de la fonction du coût C .

1) Exprimer en fonction de q le coût moyen et le coût marginal, puis calculer le nombre q_0 d'unités à fabriquer pour que ces deux coûts soient égaux. Montrer que $C_m(q_0)$ représente un minimum de la fonction coût moyen.

2) Le prix de vente de chacune des q unités fabriquées dépend de q suivant la relation : $p(q) = 60 - q^2$. On suppose que l'entreprise vend toute sa production.

a) Montrer que le bénéfice réalisé est :

$$B(q) = -q^3 + 13q^2 - 16q$$

b) En déduire l'intervalle $[a, b]$, avec a et b entiers, dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise soit rentable.

c) Détermine le nombre d'unités à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum.

d) Retrouver graphiquement les résultats précédents.

Exercice 4: une entreprise produit entre 5 et 40 appareils électroménagers par heure.

Le coût honoraire de production de x appareils en euro est donc par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 100, \text{ pour } 5 \leq x \leq 40.$$

Le prix de vente unitaire d'un appareil 100€.

On suppose que le coût de fabrication de 15 appareils par heure ?

1) Quelle est la recette associée ?

L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ? Si oui, donne-leur. Sinon, donne les des pertes.

2) Justifier que le bénéfice horaire (algébrique) réalisé par la fabrication et la vente de x appareil est :

$$B(x) = x^2 + 50x - 100, \text{ pour } 5 \leq x \leq 40.$$

3) Dresser le de signe sur $\mathbb{R}$ de :

$$F(x) = -x^2 + 50x - 100.$$

L'entrepriserealise – t – elle toujours des benefices?

Exercice 5 : La courbe C suivante représente le cout moyen $CM(q)$, en euro , pour une production q de 8 à 40 objet :

$$\text{On admet que } CM(q) = 0,16q - 5 + \frac{64}{q}.$$

1) Calculer $CM(8)$, $CM(20)$ et $CM(40)$.

Par lecture graphique, donne le tableau de variation de sur $[8 ; 30]$.

2) Pour quelle(s) production(s) le cout moyen est-il de 3€ ? de 3,5€ ?.

3) Le prix de vente d'un objet est de 2,5€.

a) Déterminer algébriquement les points morts de la production, arrondis à unité près .

b) En s'aidant du graphique, lire la plage le bénéfice de l'entreprise.

3)a) Que ce passe-t-il si le prix de vente d'un est de 1,3€.

b) A quelle condition sur le prix de vente unitaire cette production réalise-t-elle un bénéfice ?

Exercice 6 : Une entreprise fabrique des objets.

On note $C(x)$ le cout total de fabrication de x centaine d'objets, en milliers d'euro.

Une étude a permis d'obtenir la courbe représentative C ci-dessous de la fonction C :

L'allure de la courbe a permis d'estimer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout réels :

$$C(x) = a(x - 4)^3 + b.$$

De plus, on a $C(0) = 72$ et $C(4) = 200$.

1) Déterminer les réels a et b .

2) Justifier que la fonction C est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3) Déterminer la quantité maximale d'objets à produire pour que les cout soit inférieur ou égaux à :

a) 450 milliers d'euro.

b) 400000€ (arrondir la quantité à l'unité près).

2) Calculer le d'accroissement du SMIC horaire brut entre le 1^{er} Juillet 2000 et 1^{er} Juillet 2009. Comment se lit graphiquement se taux d'accroissement ?

Exercice 08 : Le bénéfice (algébrique) d'une entreprise, en milliers d'euros, lorsqu'elle produit et vend x centaine est :

$$B(x) = \frac{x^3}{3} - 16x^2 + 220x, \text{ pour } 0 \leq x \leq 18.$$

a) Calculer $B'(x)$ et étudier son signe sur $[0; 18]$.

b) En déduire, le sens de variation de B sur $[0; 18]$.

Déterminer le bénéfice maximum et la quantité x associées.

Exercice 09 : Une entreprise fabrique x tonne d'un produit alimentaire, avec $x \in [0.15]$, pour *un cout total de fabrication, en milliers d'euros*, de :

$$C(x) = x^2 + 2x + 100.$$

On assimile **le cout marginal** de favorisation C_m à la fonction dérivée du cout total :

$$C_m(x) = C'(x).$$

Le cout moyen de fabrication CM est définie par :

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Le cout moyen et le cout marginal sont exprimés en milliers d'euros par tonne ou en euros par kg.

a) Déterminer le cout marginal $C_m(x)$ et le cout moyen $CM(x)$ en fonction de x .

b) Dresser le tableau de variation du cout moyen sur $]0; 15]$.

c) Vérifier que, lorsque le cout moyen est minimum, il est égale au cout marginal.

Pour info : on démontre ; et on admettra ici , que le cout marginal est égale au moyen lorsque le cout moyen est minimum.

Ils sont exprimés dans l'unité de cout divisé par l'unité de prix.

Chapitre VI : Primitive d'une fonction

1°) **Définition** : Soit f une fonction définie sur un intervalle. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie sur I tel que $F'(x) = f(x)$

NB : Si une fonction f admet sur un intervalle I une primitive F alors f admet sur I une infinité de primitive et l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

2°) Linéarité de la primitive

Soit F une primitive de f sur I , G une primitive de g sur I et soit α un nombre réel non nul. Alors αF est une primitive de αf sur I et $F + G$ est une primitive de $f + g$

3°) Condition d'existence d'une primitive

Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

4°) Ensemble des primitives

Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

5°) Recherche de primitive**a) Tableau des primitives usuelles**

Fonction	0	A	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	x^n	$\frac{1}{x^n}$
Primitive	C	ax	$-\frac{1}{x}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

Exemple : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + \sqrt{3} ; g(x) = x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2} + \pi$$

Solution

Déterminons une primitive de chacune des fonctions

$$F(x) = x^3 - x^2 + 6\sqrt{x} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + x\sqrt{3} \text{ et } G(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + \pi x$$

b°) Primitive de $U' U^n$

$$U' U^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}$$

Exemple : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^7 ; g(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 1)^3 ;$$

$$g(x) = 4x(x^2 + 1)^6; h(x) = 1 - 2x; j(x) = 3(2x - 1)^8$$
$$j(x) = 3(2x - 1)^8; k(x) = \frac{5(x + 1)^9}{3}; l(x) = \frac{2(1 - 5x)^7}{3}$$

Solution

Déterminons une primitive de chacune des fonctions

$$F(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^8}{8}; G(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)^4}{8}; G(x) = \frac{2(x^2 + 1)^7}{7}$$
$$H(x) = \frac{(1-2x)^{12}}{24}; J(x) = \frac{(2x-1)^9}{6}; K(x) = \frac{(x+1)^{10}}{6}; L(x) = \frac{2(1-5x)^2}{3}$$

6°) Primitive de $\frac{U}{U^n} \quad \forall n \neq 1$

$$\frac{U}{U^n} = -\frac{1}{(n-1)U^{n-1}}$$

Exemple : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-9}; g(x) = \frac{2x}{(2x^2+1)^2}; h(x) = \frac{3}{(1-3x)^4}; i(x) = \frac{5}{2(3x-1)^2}$$

Solution

Déterminons une primitive de chacune des fonctions

$$F(x) = -\frac{1}{4(x^2-2x-1)^2}; G(x) = \frac{-2}{2x^2+1}; H(x) = \frac{1}{3(1-3x)^3}$$

7°) Primitive de $\frac{U'}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U}$

8°) Primitive de $\sqrt{ax+b}; \sqrt{A(x)} = (A(x))^{1/2}$

Exemple : Déterminer une primitive de $f(x) = \sqrt{2x+3}$

SOLUTION

Déterminons une primitive

$$G(x) = \frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{3}$$

9°) Primitive de la division euclidienne

$$\text{Déterminer une primitive de } f(x) = \frac{8x^3 + 4x^2 - 2x + 2}{(2x+1)^2}; f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2}$$

SOLUTION

Déterminer une primitive

$$F(x) = x^2 - x - \frac{3}{4x+2} \text{ et } F(x) = x^2 - x + \frac{1}{x}$$

10

10) Primitive et dérivée

$f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de $g(x)$

Exemple: $f(x) = x\sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$ Calculer $f'(x)$ puis en déduire une primitive de $g(x)$

Solution

Calculer $f'(x)$

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ puis déduisons une primitive de $g(x)$

$f'(x) = \frac{3}{2} g(x)$ Ce qui implique que $g(x) = \frac{2}{3} f'(x)$

Dans ce cas $\frac{2f(x)}{3}$ est une primitive de $g(x) \Rightarrow \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ est une primitive de $g(x)$

$$G(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$$

11°) Primitive des fonctions circulaires

Fonction	$\sin x$	$\cos x$	$1 + \tan^2 x$	$U' \sin U$	$U' \cos U$	$\sin(ax + b)$
Primitive	$-\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$-\cos U$	$-\sin U$	$-\frac{1}{a} \sin(ax + b)$

Chapitre VII : Intégrales

1) **Définition** : soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle intégrale de a à b le nombre réel $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple : Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx; \quad J = \int_3^2 \frac{4}{(2x - 1)^3} dx; \quad K = \int_{-1}^1 (2x - 1)(x^2 + x - 1)^2 dx$$
$$L = \int_{-2}^{-3} (3x^2 - 2x + 1) dx$$

SOLUTION

Calculons les intégrales

$$I = 2 \quad J = -\frac{16}{225}; \quad K = \frac{2}{3}; \quad L = -25$$

2) Propriété de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les nombres réels a , b et c et soit k un nombre réel, alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx; \quad k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b k f(x)dx$$

$$\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3) Intégration par partie

Soient U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle I contenant les nombres réels a et b . Si de plus les fonctions $U'V$ et $V'U$ sont continues sur I alors:

$$\int_a^b U'V = [UV] - \int_a^b V'U \text{ ou encore } \int_a^b V'U = [UV] - \int_a^b U'V$$

Chapitre VIII : Fonction logarithme népérienne

I notion de la fonction logarithme népérienne

1°) **Introduction** : Dans le tableau des primitives, pour la fonction $\frac{1}{x^n}$ avec $\forall n \neq 1$ et $\frac{U'}{U^n}$ avec $\forall n \neq 1$; leurs primitives existent. Si $n=1$ la primitive de $\frac{1}{x}$ et $\frac{U'}{U}$ donne une nouvelle fonction appelée logarithme népérienne **ln**.

2°) **Définition** : on appelle fonction logarithme népérienne, la fonction numérique définie sur $] 0 ; +\infty[$ s'annulant à 1 et qui a pour dérivée la fonction $\frac{1}{x}$.

3°) **Propriété immédiate** : l'ensemble de définition de la fonction **ln** est $] 0 ; +\infty [$ pour tout x strictement positif, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Pour toute fonction U strictement positive $(\ln u)' = \frac{U'}{U}$

4°) **Formules** : Pour tout nombre réel strictement positif a et b ; n un nombre entier. Nous avons :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b ; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ; \ln(a)^n = n \ln a ; \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln 1 = 0 ; \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

II Dérivée des fonctions ln

$$\ln(UV)' = \frac{U'}{U} + \frac{V'}{V} ; \ln\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'}{U} - \frac{V'}{V} ; (\ln U)^n = n \cdot \frac{U'}{U} ; (\ln \sqrt{u})' = \frac{U'}{2U}$$

$$\left(\ln \frac{1}{v}\right)' = -\frac{V'}{V}$$

III limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$$

IV Primitive de ln

$$\int \frac{U'}{U} dx = \ln|U| + C \text{ et } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

V Equation et Inéquation de la fonction ln

A Equation**I Equation de type $\ln x = a$ ou $\ln(u(x)) = a$**

La résolution de ce type d'équation revient à :

- Déterminer l'ensemble de validité c'est-à-dire $D_v = \{x \in \mathbb{R}, u(x) > 0\}$
- Ecrire l'équation à la forme : $\ln u(x) = \ln e^a$
- Ensemble solution est $S = \{x \in \mathbb{R}, u(x) = e^a\} \cap D_v$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- 1) $\ln(x + 1) = -2$
- 2) $2 \ln(x^2 - 1) = 0$
- 3) $\ln(x - 1) - \ln(x + 1) = 2$
- 4) $\ln(x + 1)(x - 1) = \ln(2x^2 + x - 3)$

solution

Résolvons dans $\mathbb{R}$

- 1) $D_v =]-1; +\infty[$ et $S = \{e^{-2} - 1\}$
- 2) $D_v =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
- 3) $D_v =]1; +\infty[$ et $S = \emptyset$
- 4) $D_v =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]1; +\infty[$ et $S = \{-2\}$

II Equation du type $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$

La résolution de ce type d'équation s'effectue à l'aide d'une équation obtenue par changement d'inconnue c'est-à-dire en posant $X = \ln x$.

L'équation $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$

Déviert $a(X)^2 + b(X) + c = 0$

Si $a(X)^2 + b(X) + c = 0$ admet des solutions X_1 et X_2 alors l'ensemble des solutions de l'équation de $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$ est $S = \{e^{X_1}; e^{X_2}\}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- a) $2(\ln x)^2 + 3(\ln x) - 5 = 0$
- b) $\ln^2 x - 4(\ln x) + 4 = 0$
- c) $\ln^2 x + \ln x + 1 = 0$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{R}$

- a) $S = \{e^1; e^{-\frac{5}{2}}\}$ b) $S = \{e^2\}$ c) $S = \emptyset$

B) Inéquation**I) Inéquation de type $\leq$; $<$; $\geq$ et $>$**

Elle a la même résolution que les équations mais à la différence du signe d'inéquation, leurs ensembles de définitions se présentent généralement sous forme d'intervalle ou réunion d'intervalle.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \ln(x+1) \leq \ln x ; b) \ln(x^2 - 1) \geq \ln(2x+1); c) \ln x - \ln(2x-1) < 0$$

Solution

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations

a) $\ln(x+1) \leq \ln x$

$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, x+1 > 0; x > 0\}$ à partir du tableau de signe, on obtient

$DV =]0; +\infty[$ et après résolution on obtient $\mathbf{s} = \emptyset$

b) $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(2x+1)$

$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0; 2x+1 > 0\}$ à Partir du tableau de signe, on obtient

$\mathbf{DV} =]1; +\infty[$ ensuite il faut faire un tableau de signe pour trouver la solution S

$$\ln(x^2 - 1) \geq \ln(2x+1) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ donc } \mathbf{S} = [1 + \sqrt{2}; +\infty[$$

c) $\ln x - \ln(2x-1) < 0$

$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 0; 2x-1 > 0\}$ à partir du tableau de signe, on obtient

$DV =]\frac{1}{2}; +\infty[$ et après résolution on obtient $\mathbf{s} =]1; +\infty[$

Exercice1 Résoudre

1) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$, 2) $\ln(3-x) + \ln 2 = 2 \ln(x+1)$

3) $\ln(3-x) + \ln 2 \geq 2 \ln(x+1)$; 4) $\ln(x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

5) $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

Réolvons

1) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}; 2x > 0, x^2 - 1 > 0\}$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$

$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
---------	-----	-----	-----	-----

$$DV =]1 ; +\infty[$$

$$\ln(2x) = \ln x^2 - 1 \Rightarrow 2x = x^2 - 1 \Rightarrow 2x - x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow \Delta = 8 = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-2(1 - \sqrt{2})}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2} \notin dv$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} \Rightarrow x_2 = \frac{-2(1 + \sqrt{2})}{-2} \Rightarrow x_2 = 1 + \sqrt{2} \in dv$$

$$S = \{1 + \sqrt{2}\}$$

$$2) \ln(3 - x) + \ln 2 = 2 \ln(x + 1)$$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, 3 - x > 0; x + 1 > 0\}$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \quad | \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$
$3 - x$		$+$	0	$-$

$$DV =]-1 ; 3[$$

$$\ln(3 - x) + \ln 2 = 2 \ln(x + 1) \Rightarrow \ln(3 - x)(2) = \ln(x + 1)^2$$

$$\ln a = \ln b \Rightarrow a = b \Rightarrow (3 - x)(2) = (x + 1)^2 \quad 6 - 2x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - 6 + 2x \Rightarrow x^2 + 4x - 5$$

On sait que

$$\text{Si } a + b + c = 0 \quad x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{c}{a}; \quad \text{Si } a - b + c = 0 \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$a = 1, b = 4, c = -5 \Rightarrow 1 + 4 - 5 = 0 \text{ donc } x_1 = 1 \in DV \quad x_2 = -5 \notin DV$$

$$S = \{1\}$$

$$3)\ln(3-x) + \ln 2 \geq 2 \ln(x+1)$$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, 3-x > 0; x+1 > 0\} \quad DV =]-1; 3[$$

$$\ln(3-x)(2) > \ln(x+1)^2 \quad \ln a \geq \ln b \text{ si } a \geq b$$

$$(3-x)(2) \geq (x+1)^2$$

$$6-2x \geq x^2+2x+1 \Rightarrow 6-2x-x^2-2x-1 \geq 0 \Rightarrow -x^2-4x+5 \geq 0$$

Transformons l'inéquation en équation

$$-x^2-4x+5=0 \quad x_1=1; x_2=-5$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$-x^2-4x+5$		$-$	0	$+$

$$S_1 = [-5; 1] \quad S = S_1 \cap DV \quad S =]-1; 1]$$

$$4)\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, 3x^2-x > 0; x > 0\}$$

$$\text{Posons } 3x^2-x=0 \Rightarrow x(3x-1)=0$$

$$x=0 \text{ ou } 3x-1=0 \quad 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	0	$1/3$	$+\infty$
x		$-$	0	$+$
$3x-1$		$-$	0	$+$

$$DV = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

$$\ln(3x^2-x) \leq \ln(x)(2) \Rightarrow 3x^2-x \leq 2x \Rightarrow 3x^2-x-2x \leq 0 \Rightarrow 3x^2-3x \leq 0$$

Transformons l'inéquation en équation

$$3x^2-3x=0 \Rightarrow 3x(x-1)=0 \Rightarrow 3x=0 \text{ ou } x-1=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x^2-3x$		$+$	0	$-$

$$S_1 = [0; 1] \quad S = S_1 \cap DV \quad S =]1/3; 1]$$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$1)\ln(-x+2) > \ln(x+3) ; 2)\ln(2x-3) < \ln(4-x)$$

$$3) 2 \ln x^2 - 3 \ln x - 2 = 0 ; 4) \ln(2x - 3) \geq \ln(4 - x)$$

Solutions

$$1) \ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}; -x + 2 > 0; x + 3 > 0\}$$

$$\text{Posons } -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ et } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$-x + 2$	$+$	$+$	0	$-$

$$DV =]-3; 2[$$

$$\ln(-x + 2) > \ln(x + 3) \Rightarrow \ln a > \ln b \Leftrightarrow a = b \Rightarrow -x + 2 > x + 3$$

Transformons l'inéquation en équation

$$-x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow x + x = 2 - 3 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$

$$S' = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\quad S = S' \cap DV \quad S = \left] -\frac{1}{2}; 2 \right[$$

$$2) \ln(2x - 3) < \ln(4 - x)$$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}; 2x - 3 > 0; 4 - x > 0\}$$

$$\text{Posons } 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} ; 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$$

x	$-\infty$	$3/2$	4	$+\infty$
$2x - 3$	$-$	0	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	0	$-$

$$DV = \left] \frac{3}{2}; 4 \right[$$

$$\ln(2x - 3) < \ln(4 - x) \Rightarrow \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \Rightarrow (2x - 3) < (4 - x)$$

Transformons l'inéquation en équation

$$2x - 3 = 4 - x \Leftrightarrow 2x + x = 3 + 4 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
-----	-----------	---------------	-----------

$3x-7$	$-$	0	$+$
--------	-----	-----	-----

$$S' = \left] -\infty ; \frac{7}{3} \right[\quad S = S' \cap DV \quad S = \left] \frac{3}{2} ; \frac{7}{3} \right[$$

$$3) 2 \ln x^2 - 3 \ln(x-2) = 0$$

$$DV =]0 ; +\infty[$$

$$2 \ln x^2 - 3 \ln(x-2) = 0 \quad \text{Posons } \ln x = X$$

$$2X^2 - 3X - 2X = 0 \Leftrightarrow a = 2 \quad b = -3 \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2*2} = \frac{-1}{2}; X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2*2} = 2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}; \quad \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$$S = \left\{ e^{-\frac{1}{2}}; e^2 \right\}$$

$$4) \ln(2x-3) \geq \ln(4-x)$$

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=3/2; \quad 4-x=0 \Leftrightarrow -x=-4 \Leftrightarrow x=4$$

x	$-\infty$	$3/2$	4	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	0	$-$

$$DV = \left] \frac{3}{2} ; 4 \right[$$

$$\ln(2x-3) \geq \ln(4-x) \quad \ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow 2x-3 \geq 4-x$$

Transformons l'inéquation en équation

$$2x-3 \geq 4-x \Leftrightarrow 2x-3=4-x \Leftrightarrow 2x+x=4+3 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=7/3$$

x	$-\infty$	$7/3$	$+\infty$
$3x-7$	$-$	0	$+$

$$S' = \left[\frac{7}{3} ; +\infty \right[\quad S = S' \cap DV \quad S = \left[\frac{7}{3} ; 4 \right[$$

Chapitre IX : Fonction exponentielle népérienne**I Notion de la fonction exponentielle**

1°) **Définition** : On appelle fonction exponentielle et on note e^x la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

2°) **Propriété** : Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel y strictement positif, nous avons l'équivalence : $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

- Pour tout nombre réel x , nous avons $\ln e^x = x$
- Pour tout nombre réel x strictement positif, nous avons $e^{\ln x} = x$

3°) **Propriété algébrique** : Les propriétés algébriques sont voisines à celles des propriétés de puissances.

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b} ; (e^a)^b = e^{a \cdot b} ; \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; e^0 = 1 ; \sqrt{e} = e^{1/2}$$

4°) **Théorème** : Pour tout nombre réel a et b nous avons :

- si $a = b \Rightarrow e^a = e^b$, et si $a < b \Rightarrow e^a < e^b$

II°) Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^d e^x = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}_+ ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^d}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$$

2°) Dérivée :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} ; (e^x)' = e^x ; (e^{ax})' = a e^{ax}, (e^u)' = u' e^u$$

3°) Primitive

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} ; \int e^x dx = e^x + c$$

Pour toute fonction u définie et dérivable nous avons :

$$\int u' e^u dx = e^u + c$$

Exercice d'application : Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes

$$a) f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2+1}}; \quad b) f(x) = \frac{e^{x+1}}{1 - e^{2x+1}}; \quad c) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Solution

Calculons la fonction dérivée des fonctions :

$$a) f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} e^{\frac{x-1}{x^2+1}}, \quad b) f'(x) = \frac{e^{x+1} + e^{3x+2}}{(1 - e^{2x+1})^2}$$

$$c) f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

III Equations comportant exponentielle

1°) **Equation de type $e^x = a$**

Si $a \leq 0$ alors $S = \emptyset$; si $a > 0$ alors, $x = \ln a \Rightarrow S = \{\ln a\}$

Exercice d'application: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$a) e^{x+2} = 3; \quad b) e^{\frac{2x-1}{x-2}} = e^{\frac{x-2}{2x-1}}; \quad c) e^{x^2+2} = e^{-x^2+4}; \quad d) e^{x-1} = e^{2x^3-x^2-1}$$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$a) DV = \mathbb{R} \text{ et } S = \{-2 + \ln 3\}; \quad b) DV = \{x/x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0 \text{ et } 2x - 1 \neq 0\}$$

$$\text{donc } DV = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; 2 \right[\cup \left] 2; +\infty \right[\text{ avec } S = \{-1; 1\}$$

$$c) DV = \mathbb{R} \text{ avec } S = \{-2; 1\}; \quad d) DV = \mathbb{R} \text{ avec } S = \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

II Equations par changements d'inconnues

a) Equation de type $ae^{2x} + be^x + c = 0$ avec $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

L'ensemble de validité de ces équations est $\mathbb{R}$. Pour résoudre cette équation on pose : $e^x = X$ ($X > 0$)

Exercice d'application : Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$

$$a) 2e^{2x} - 3e^x - 5 = 0 ; \quad b) e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 ; \quad c) e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations

$$a) S = \left\{ \ln \frac{5}{2} \right\} ; \quad b) S = \{0; \ln 2\} ; \quad c) S = \{ \quad \}$$

II) Inéquations des fonctions exponentielles

Exercice d'application : résoudre les inéquations

$$a) e^{-2x} < 3 ; \quad b) e^{2x} < 3 ; \quad c) e^{-x^2} < -10^{100}$$

Solution

Résolvons les inéquations : Tapez une équation ici.

$$a) S =]-\ln\sqrt{3} ; +\infty[; \quad b) S = \left] -\infty ; \frac{\ln 3}{2} \right[; \quad c) S = \{ \quad \}$$

Exercice d'application : résoudre les inéquations

$$a) e^{x^2+2x} \leq e^3 ; \quad b) e^{\frac{x-1}{x+1}} \geq e^{\frac{x+1}{x-1}} ; \quad c) e^{\frac{x+2}{x^2}} > e^{\frac{3}{x^3}}$$

Solution

Résolvons les inéquations

$$a) \forall x \in DV ; e^{x^2+2x} \leq e^3$$

$$x^2 + 2x \leq 3$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Signe de $(x^2 + 2x - 3)$

$$\text{Posons } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{x_2} = -3$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-3	1	∞
$x^2 + 2x - 3$	+	-	+	

$$DV = [-3; 1]$$

$$b) e^{\frac{x-1}{x+1}} \geq e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Ensemble de validité

$$Dv = \{x \in R, x + 1 \neq 0; x - 1 \neq 0\}$$

$$\text{posons } x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$\text{posons } x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$Dv = R - \{-1; 1\}$$

$$\forall x \in Dv; e^{\frac{x-1}{x+1}} \geq e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{[(x-1) + (x+1)][(x-1) - (x+1)]}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2x(-2)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-4x}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\text{Signe de } \frac{-4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Posons } -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-4x$	+	+	-	-	
$x-1$	-	-	-	+	
$x+1$	-	+	+	+	
$\frac{-4x}{(x-1)(x+1)}$	+	-	+	-	

$$S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$$

c) $e^{\frac{x+2}{x^2}} > e^{\frac{3}{x^3}}$

Ensemble de validité

$$Dv = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 0 \text{ et } x^3 \neq 0\}$$

Posons $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$Dv = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in Dv; e^{\frac{x+2}{x^2}} > e^{\frac{3}{x^3}} \Rightarrow \frac{x+2}{x^2} > \frac{3}{x^3} \Rightarrow \frac{x+2}{x^2} - \frac{3}{x^3} > 0$$

$$\frac{x(x+2)-3}{x^3} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x^3} > 0 \Rightarrow \text{Signe de } \frac{x^2+2x-3}{x^3}$$

Posons $x^2 + 2x - 3 = 0$

$1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$

$x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	-	-	+	
x^3	-	-	+	+	
$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3}$	-	+	-	+	

$$S =]-3; 0[\cup]1; +\infty[$$

SUJET N° 13**EXERCICE 1**

En l'an 2000, une personne place une somme de 500 000 F à la caisse d'épargne. Chaque année le capital acquis augmente de 8% de sa valeur. On pose C_n le capital en l'an (2000 + n).

- 1) Déterminer C_0 , C_1 et C_2
- 2) Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire la nature de la suite C_n
- 3) Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n
- 4) En quelle année, le capital doublera-t-il pour la première fois

EXERCICE 2

1°) Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 8 + 6x - 3x^2 - x^3$

- a) Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (2 - x)(1 + x)(4 + x)$
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x + 3) - \ln(x + 1)^2 = 2\ln 2$

2°) Déterminons le domaine de définition

- a) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$
- b) $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2}$

PROBLEME

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

- 1) Calculons $P(-1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs du 1^{er} degré
- 2) Résoudre $P(x) = 0$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{3x} - 3e^{2x} - 8e^x - 3 \geq 0$

II°) soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ de courbe (C) dans un repère orthogonal (o, i, j) d'unités 2 cm sur l'axe $x'ox$ et 3 cm sur l'axe $y'oy$.

- 1) a) justifier que pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ et puis $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
- b) En déduire les calculs de limites respectives de en $-\infty$ et $+\infty$; préciser alors les asymptotes de (C)

2°) a) Déterminer pour tout réel x, $f'(x)$ et justifier pourquoi dit-on que cette fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- b) Dresser le tableau de variation de f
- c) Donner une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 0.
- 3) a) Tracer soigneusement la courbe (C) dans (o, i, j)
- b) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

SOLUTION 1

En l'an 2000, la somme placée est de 500 000 F. Ce capital augmente de 8%. Soit C_n le capital en l'an 2000 + n

1) Déterminons C_0 , C_1 et C_2

$$\text{Pour } n=0 \Rightarrow C_0 = 500\,000 \text{ F}$$

$$\text{Pour } n = 1 \Rightarrow C_1 = C_0 + 8\% C_0 \Rightarrow C_1 = 1,08C_0 \text{ donc } C_1 = 540\,000 \text{ F}$$

$$\text{Pour } n = 2 \Rightarrow C_2 = C_1 + 8\% C_1 \Rightarrow C_2 = 1,08C_1 \text{ donc } C_2 = 583\,000 \text{ F}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n

$C_{n+1} = C_n + 8\% C_n \Rightarrow C_{n+1} = 1,08C_n$ Donc la suite C_n est une suite géométrique de raison $q = 1,08$ et de 1^{er} terme $C_0 = 500\,000$ F.

$$C_n = C_0 q^n \Rightarrow C_n = 500\,000 (1,08)^n$$

3) Déterminons l'année de doublement du capital

$$C_n \geq 2C_0 \quad C_n \geq 2 * 500\,000 = 1\,000\,000 \text{ F}$$

$$\text{Or } C_n = 500\,000 (1,08)^n \geq 1\,000\,000$$

$$(1,08)^n \geq \frac{1\,000\,000}{500\,000} \Rightarrow \ln(1,08)^n \geq \ln 2 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1,08)} = 9,006$$

Pour $n = 10$, en l'an 2010 ; le capital doublera pour la première fois.

SOLUTION 2

1 Soit le polynôme $P(x) = 8 + 6x - 3x^2 - x^3$

$$d) \text{ Vérifions que } \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (2-x)(1+x)(4+x)$$

$$\text{Nous avons } (2-x)(1+x)(4+x) = (2-x)(x^2 + 4x)$$

$$= 8 + 2x + 8x + 2x^2 - x^3 - 4x^2 - 4x$$

$$= 8 + 6x - 3x^2 - x^3$$

$$\text{Donc } P(x) = (2-x)(1+x)(4+x)$$

e) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$$(2-x)(1+x)(4+x) = 0 \Rightarrow S = \{-4; -1; 2\}$$

f) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3) - \ln(x+1)^2 = 2\ln 2$

$$DV = \{x/x \in \mathbb{R}, x+3 > 0, x+1 \neq 0\} \Rightarrow DV =]-3; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\text{Pour } x \in DV \ln(x+3) - \ln(x+1)^2 = 2\ln 2 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+3}{(x+1)^2}\right) = \ln(2^2)$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = 4 \Rightarrow -4x^2 - 7x - 1 = 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{-7+\sqrt{33}}{8}; \frac{-7-\sqrt{33}}{8}\right\}$$

1) Déterminons le domaine de définition

c) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 > 0\}$$

$$\text{Posons } x^2 + 3x - 4 = 0 \quad a+b+c=0 \text{ donc } x_1=1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		$+$	$-$	$+$

$$Df =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$$

d) $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2}$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 - 1 \neq 0\} \text{ donc } DV =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

PROBLEME

1) soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

2) Calculons $P(-1)$

$$P(-1) = -2 - 3 + 8 - 3 \Rightarrow P(-1) = 0 \text{ alors } P(x) = (x+1)(2x^2 - 5x - 3)$$

$$\text{Factorisons } 2x^2 - 5x - 3 = 2(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = 3$$

$$\text{Par la suite } P(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

$$\text{Résolvons } P(x) = 0 \Rightarrow S = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 3\right\}$$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ $2e^{3x} - 3e^{2x} - 8e^x - 3 \geq 0$

1^{ère} Méthode : Posons $e^x = X$ avec $X > 0$ $2X^3 - 3X^2 - 8X - 3 \geq 0$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
		$\leftarrow$	$\rightarrow$		
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$

$x + \frac{1}{2}$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$X \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup]3; +\infty[\text{ Or } X = e^x > 0 \Rightarrow X \in]3; +\infty[\quad X \geq 3 \Rightarrow e^x > 3$$

$$x \geq \ln 3$$

$$x \in [\ln 3; +\infty[$$

2^{ème} méthode: $P(x) \geq 0 \quad 2(X+1)\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-3) \geq 0$

$$2(e^x + 1)\left(e^x + \frac{1}{2}\right)(e^x - 3) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + 1 > 0 \quad e^x + \frac{1}{2} > 0 \quad (e^x - 3) \geq 0$$

Le signe dépend de $(e^x - 3)$ par la suite $(e^x - 3) \geq 0 \Rightarrow e^x - 3 \geq 0$

$$e^x \geq 3 \quad \ln e^x \geq \ln 3 \quad x \geq \ln 3 \quad x \in [\ln 3; +\infty[$$

II°) soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Justifions que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ et $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} \neq 0$ donc $Df = \mathbb{R}$

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{CQFD}$
- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = \frac{1 - e^{-x-x}}{1 + e^{-x-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad \text{CQFD}$
- $\lim_{+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad \lim_{+\infty} f = 1$

La droite (D_1) $y=1$ est une Asymptote Horizontale

- $\lim_{-\infty} f = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

La droite (D_2) $y=-1$ est une Asymptote Horizontale

2a) la dérivée

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x} * 2e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^0}{e^x + e^{-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{e^x + e^{-x})^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} (e^x + e^{-x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$, d'où f est strictement ↗

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

b) Tableau de variation

x	$-\infty$	-	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			1
	-1	↗	

e) Equation de la tangent (T_0) en x_0

T_0 $y = x$ est appelée équation de la première bissectrice

3 a) Tracé de la courbe

Tableau de valeur

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-0,96	-0,76	0,76	0,96

b) Calcul de l'aire du domaine

$$A(x) = \int_0^1 f(x)(U.A) dx \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx = \llbracket \ln(e^x + e^{-x}) \rrbracket$$

$$= \ln(e + e^{-1}) - \ln 2$$

$$U.A = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A = 6 \left\llbracket \ln \frac{(e + e^{-1})}{2} \right\rrbracket \cong 2,6 \text{ cm}^2 \Rightarrow A \cong 2,6 \text{ cm}^2$$

UA₃ : Unité d'Apprentissage du troisième trimestre

Chapitre X : Dénombrements :

La détermination d'une probabilité exige en général un double dénombrement :

Celui des cas favorables à l'évènement et celui des cas possibles ; ceci rend utile le rappel des formules de dénombrement traitées par l'analyse combinatoire.

Ensemble fini de n éléments			
	Définition	Formule du nombre	Caractéristiques
Permutation	Tout classement ordonné de n éléments	$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots*2*1$	Deux permutations sont différentes par l'ordre seulement des éléments
Arrangement	Un classement ordonné des n éléments pris P à P	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Deux arrangements différents soit par l'ordre des éléments, soit par leur nature.
Combinaison	Tout groupement de P éléments pris parmi les n éléments dans un ordre quelconque	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Deux combinaisons ne diffèrent que par la nature de leurs éléments

Remarque :

Si $p=n$, l'arrangement devient une permutation

DEFINITION DE QUELQUES NOTIONS :**A° Définition :**

La probabilité d'un évènement A notée $P(A)$ est le rapport du nombre n de cas favorables à la réalisation de l'évènement A ou nombre N de cas possibles ; tous les cas étant supposés équiprobables. Deux évènements équiprobables sont deux évènements, qui, avant l'épreuve, ont la même chance de se réaliser.

$$P(A) = \frac{NCF}{NCP}$$

Remarque :

Dans le cas où $n = NP(A) = 1$, l'évènement est dit certain

Si $n = 0$ $P(A) = 0$ l'évènement est dit impossible

Alors on a $0 \leq P_i \leq 1$

La possibilité de réalisation d'un évènement est un nombre appartenant à $(0, 1)$

$P(A) + P(A) = 1$

$P(A) = 1 - P(A) \quad \sum P_i = 1$

Notions sur la théorie des probabilités :**- Epreuve ou expérience aléatoire :**

C'est une expérience dont le résultat, dépendant du hasard est incertain, mais pour laquelle on connaît l'ensemble des résultats possibles parmi lesquels un seul est nécessairement réalisé après l'épreuve.

- Evènement élémentaire (ou éventualité)

C'est l'un quelconque des résultats possibles auxquels peut conduire l'épreuve ;

- L'univers :

Ensemble des évènements élémentaires noté Ω

- Evènements indépendants :

La réalisation de l'un d'eux n'a aucun impact sur celle de l'autre (cas de tirage avec remise).

- Evènements dépendants :

La réalisation de l'un d'eux a un impact sur celle de l'autre (cas de tirage sans remise).

- Evènements compatibles :

C'est des événements qui peuvent se réaliser au même moment

- Evènements incompatibles :

La réalisation de l'un empêche celle de l'autre.

- Evènements impossibles :

C'est un événement qui n'a aucune chance de se réaliser, sa probabilité de réalisation est égal à zéro (0).

- Evènements certain :

C'est un événement qui se réalise quelle que soit la situation. : sa probabilité de réalisation est égal à un (1).

OPERATION SUR LES EVENEMENTS :

Si A et B sont les événements d'un même univers (liés à une même épreuve). On a :

$P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$ seront déterminer en fonction de la nature de deux (2) événement.

Si A et B sont indépendants :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Si A et B sont dépendants :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \text{ et } P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = P(B) * P(A/B)$$

Remarque : Deux événements complémentaires noté A et $\bar{A}$ sont tel que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

La réalisation de $A \cap B$ entraîne les réalisations simultanées de A et B.

La réalisation de $A \cup B$ est la réalisation d'au moins l'un d'entre eux (A ou B).

PROBABILITE CONDITIONNELLE :

On appelle probabilité conditionnelle de l'évènement B relativement à A ou probabilité de B sachant que A s'est réalisé note $P(B/A)$, la probabilité de réalisation de l'évènement B sous la condition que A s'est réalisé.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Evènements indépendants : Deux évènements indépendants sont deux évènements tels que la réalisation ou la non réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre. La probabilité conditionnelle concerne deux évènements indépendants.

Si A et B sont dépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$ sachant B.

Si A et B sont indépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

IV.5-THEOREME DE BAYES (OU PROBABILITE CONDITIONNELLE) :

Supposant qu'un évènement A résulte de l'intervention de l'une quelconque des deux causes C_1, C_2 , s'excluant mutuellement, on connaît :

- La probabilité d'intervention de chacune des deux causes avant la réalisation de A (probabilité à priori $P(C_1)$; $P(C_2)$)
- La probabilité de réalisation de A sachant que la cause est C_1 ; $P(A/C_1)$, que la cause est C_2 ; $P(A/C_2)$.

Il s'agit de déterminer la probabilité que l'évènement A se réalise, et que la cause en soit C_1 $P(C_1/A)$; que la cause en soit C_2 $P(A/C_2)$ est un problème dont la donnée par la formule :

$$P(C_1/A) = \frac{P(C_1)P(A/C_1)}{P(C_1)P(A/C_1) + P(C_2)P(A/C_2)}$$

$$P(C_2/A) = \frac{P(C_2) \times P(A/C_2)}{P(C_1) \times P(A/C_1) + P(C_2) \times P(A/C_2)}$$

$$P(C_1/A) + P(C_2/A) = 1$$

$$I=1$$

.NOTION DE VARIABLES ALEATOIRES :

Une variable aléatoire (v. a) est une grandeur pouvant prendre différentes valeurs, une probabilité étant associée à chacune de ces valeurs.

On distingue des variables aléatoires discrètes susceptibles de prendre un nombre fini de valeurs isolées et des variables aléatoires continues susceptibles de prendre toutes les valeurs situées dans un intervalle donné fini ou infini.

V.1 NOTION DE LOI DE PROBABILITE :

1- Définition

La loi de probabilité de la variable aléatoire X exprime l'ensemble des couples (X_i, P_i) , c'est-à-dire des valeurs X_i que peut prendre la variable aléatoire et des probabilités correspondantes telles que :

$$\sum P_i = 1$$

2- Fonctions :

- Fonction de distribution : elle est celle qui à chaque valeur de X_i de Ω , fait correspondre sa probabilité $P(x)$
- Fonction de répartition : elle est celle qui à toute valeur de X appartenant à l'ensemble des réels fait correspondre la probabilité de l'évènement $(X < x)$

$$F(x) = P(X < x)$$

Dans le cas de variables discrètes, on a :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

3. Principaux paramètres :

La moyenne est appelée espérance mathématique notée $E(X)$; c'est un paramètre de position.

X dans le cas de variables discrètes :

PRINCIPALES LOIS DE PROBABILITES :

Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements compatibles, c'est-à-dire qui peuvent se produire simultanément $A \cap B \neq \emptyset$ Avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$

La probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé se note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ et se lit .

Probabilité de A conditionnée par B (ou sachant B). Par définition cette probabilité conditionnelle est

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ on tire } P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B).$$

La probabilité de réalisation de B sachant que A est réalisé est

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ on tire } P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A).$$

Puisque $A \cap B = B \cap A$ on peut écrire que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$$

Remarque:

Si les événements A et B sont indépendants

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\text{Pisque } P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = P(A) \times P(B/A)$$

Si A et B sont indépendants on a

$$P(A/B) = P(A) \text{ et } P(B/A) = P(B)$$

$$P(A/B) = P(A) \text{ et } P(B/A) = P(B)$$

Généralisation :

Soit A, B, C des événements liés à une expérience aléatoire.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

En procédant à des permutations entre A, B, C, on peut écrire

$$P(A \cap B \cap C) = P(B) \times P(A/B) \times P(C/B \cap A)$$

$$P(C \cap A \cap B) = P(C) \times P(A/C) \times P(B/C \cap A)$$

Il y a au total six combinaisons.

Toutes les probabilités sont identiques car $(A \cap B \cap C) = (B \cap A \cap C) \dots\dots\dots$

Loi binomiale :

Une expérience aléatoire a deux issues possibles et contraires : Un événement A et son contraire $\bar{A}$ est appelé épreuve de BERNOULLI et l'évènement est dit binomial. C'est

dire qu'il a une probabilité de réalisation et une de non réalisation. Si nous désignons par p la probabilité de (succès) réalisation de l'évènement lors d'une épreuve, q , la probabilité de non réalisation (probabilité d'échec). $q = 1 - p$ Le nombre x de réalisation avec succès de cet évènement lors de n répétitions successives indépendantes de la même épreuve est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p La variable aléatoire X est discrète : elle prend les valeurs entières de 0 à n . La probabilité associée à la valeur $X = k$ est :

$$P(X = K) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

Avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Son espérance mathématique est $E(x) = n \times p$

$V(x) = n \times p \times q$ et l'écart type est : $\sigma = \sqrt{npq}$

La loi binomiale est donc entièrement caractérisée par la donnée de n et p .

P représente la probabilité de réalisation de l'évènement au cours d'une expérience (probabilité de succès. Q la probabilité de non réalisation du même évènement au cours de la même expérience (probabilité d'échec), $P + q = 1$.

Exercice1 : Dans une loterie on émet des carnet de 20 billets tels que dans chaque carnet, un billet gagne 30F, deux billets gagnent 10F, 5 billets gagnent 5 F et 12 billets ne gagnent rien.

Une personne achète deux billets d'un même carnet. Quelle est la probabilité :

a) A « qu'elle ne gagne rien » ? $p(A) = \frac{C_{12}^2 C_8^0}{C_{20}^2}$

b) B « qu'elle gagne 30F » ? $p(B) = \frac{C_1^1 C_{20}^1}{C_{20}^2}$

c) C « qu'elle gagne 10F » ? $p(C) = \frac{C_2^1 C_{12}^1}{C_{20}^2} + \frac{C_5^2 C_{12}^0}{C_{20}^2}$

d) D « que les deux billets soient gagnants » ? $p(D) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2}$

Exercice2 : Deux cartes sont tirées d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que les deux cartes soient de pique, si on effectue un tirage :

a) A « sans remise » ? $p(A) = \frac{C_8^2}{C_{32}^2}$

b) B « avec remise de la première carte tirée » $p(B) = \frac{8^2}{32^2} = \left(\frac{8}{32}\right)^2$

Exercice3 : Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y'a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète.

a) A « un billet » ? $p(A) = 1 - \frac{C_{93}^1}{C_{100}^1} = \frac{7}{100}$

b) B « deux billets » ? $p(B) = 1 - \frac{C_{93}^2}{C_{100}^2}$

Exercice4 : Dans une urne contient 5 boules : 3 blanches (1,2 et 3) et 2 noires (4 et 5).

Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire deux boules simultanément et on s'intéresse à la couleur de ces boules tirées.

- 1) Proposer un univers correspondant à ce problème et qui vérifie la propriété d'équiprobabilité

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- 2) Décrire dans cet univers les événements suivants :

a) A : « les deux boules sont blanches » ; $p(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2}$

b) B : « les deux boules sont noires » ; $p(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2}$

c) C : « les deux boules sont de couleurs différents » $p(C) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2}$

d) D : « les deux boules sont de la même couleur » $p(D) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2}$

STATISTISQUE

1) Droite de régression : Il existe deux méthodes pour déterminer la droite de régression. Il s'agit de MAYER et la Moindre Carrée.

- **Méthode de MAYER:** Nous divisons le tableau statistique en deux parties égales dans la mesure du possible puis nous calculons deux petites moyennes arithmétiques dans les deux cas.

$$\text{Sous-nuage 1 : } E_1 = \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ y_{E_1} \end{pmatrix} ; \quad \overline{x_{E_1}} = \frac{\sum x_i}{n} ; \quad \overline{y_{E_1}} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\text{Sous-nuage 2 : } E_2 = \begin{pmatrix} x_{E_2} \\ y_{E_2} \end{pmatrix} ; \quad \overline{x_{E_2}} = \frac{\sum x_i}{n} ; \quad \overline{y_{E_2}} = \frac{\sum y_i}{n}$$

n est le nombre d'observation réalisée aux cours de l'étude ou de l'enquête.

$$\begin{cases} Y_{E_1} = a x_{E_1} + b \\ Y_{E_2} = a x_{E_2} + b \end{cases} \quad \text{La droite de régression serait : } Y = aX + b$$

- **Méthode des moindre carrée :** dans ce cas, nous calculons la covariance, les différentes moyennes et la variance. Il s'agit de procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} a = \frac{\text{Cov}(x; y)}{V(x)} \\ b = \bar{y} - a \bar{x} \end{cases} \quad V(x) = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2 ; \quad \text{cov}(x; y) = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} ; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

2) Le calcul de Loi de probabilité

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n	$\sum P_i$
P_i	P_1	P_2	P_3		P_n	1

3) Fonction de répartition

$$\begin{aligned}x < x_1 & F(x) = 0 \\x_1 \leq x < x_2 & F(x) = P_1 \\x_2 \leq x < x_3 & F(x) = P_1 + P_2 \\x_3 \leq x < x_4 & F(x) = P_1 + P_2 + P_3 \\x \geq x_n & F(x) = 1\end{aligned}$$

4) Esperance mathématique et variance

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P_i \quad ; \quad E(x^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P_i \quad ; \quad V(x) = E(x) - E(x^2)$$

L'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

5°) **Formule de la fréquence** : La fréquence est $f_i = \frac{n_i}{N}$ N est l'effectif total et est n_i l'effectif de la classe à étudier

6°) Formules des différentes moyennes

Il existe quatre moyennes qui sont : Moyenne arithmétique, moyenne géométrique, moyenne quadratique et moyenne harmonique.

- Moyenne arithmétique : $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$
- moyenne géométrique $\overline{x_G} = e^{\sum n_i \ln x_i}$
- moyenne quadratique $\overline{x_q} = \frac{\sum n_i x_i^2}{N}$
- moyenne harmonique $\overline{x_H} = \frac{N}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$

Exercice 1

Une population de ménage a été répartie en fonction du nombre de parts familiales permettant le calcul de l'impôt sur les revenus

Nombre de parts	[0; 4[	[4; 6[	[6; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[	
Nombres	20	60	90	100	70	80	70	40	20
Nombre de candidat		48	58	136	184	210	122	62	12

- 1) calculer la proportion de ménage ayant plus de 2 parts familiales.
- 2) donnez une représentation graphique de cette population.

Réponses :

1° la proportion des ménages ayant plus de 2 parts familiales est :

$$P = (184+210+122+62+12)/832 = 590/832 \approx 0.71$$

2° les caractères est un caractère quantitatif discret et peut donc être représenté par un diagramme en bâtons. La hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif

Exercice 3 :

On considère une population de 1.000 répartie en fonction de leurs âges :

Age	[0; 10[	[10; 15[	[15; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 60[	[60; 80[
Nombres	120	100	140	200	180	160	100

1° construire un histogramme représentant cette population

2° tracez les polygones de fréquence.

Exercice 4 :

1° Les tableaux suivants donnent la répartition d'une population en fonction du nombre de visites de musée durant une année

x_i	0	1	2	3	4	5	6
-------	---	---	---	---	---	---	---

n_i	12	34	43	39	28	10	4
-------	----	----	----	----	----	----	---

Calculer le mode de cette série.

Réponse :

Les modes de la série est la valeur du caractère correspondant a l'effectif le plus grand : Le mode est donc égale a 2

Exercice 5 :

Une étude pourtant sur la durée de vie d'une centaine d'appareil électrique de même type a permis d'établir le tableau ci-contre

Durée de vie (en heures)	Nombre d'appareil
[0; 2.000[	8
[2.000; 4.000[	26
[4.000; 5.000[	20
[5.000; 6.000[	22
[6.000; 8.000[	18
[8.000; 10.000[	6

Déterminer la classe modale.

Réponse :

Les classes ne sont pas d'amplitude égale ; la classe modale n'est donc pas nécessairement celle ou l'effectif est le plus élevé. En effet, la classe [2.00; 4.000[dont l'effectif est 26 a une amplitude double de la classe [5.000; 6.000[dont l'effectif est 22

La classe dont la densité est maximum, est la classe modale. La densité est calculée à l'aide des effectifs et de l'amplitude. On a

$$d_i = \frac{n_i}{a_i}$$

On obtient alors le tableau suivant :

Durée de vie	n_i	a_i	d_i
[0; 2.000[	8	2.000	0.004
[2.000; 4.000[	26	2.000	0.013
[4.000; 5.000[	20	1.000	0.020
[5.000; 6.000[	22	1.000	0.022
[6.000; 8.000[	18	2.000	0.009
[8.000; 10.000[	6	2.000	0.003

La classe modale est donc la classe [5.000; 6.000[.

Exercice 6 :

Nombre d'enfant.

Nombre d'enfant	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de ménage	286	380	416	258	112	62	47	12	7

1°calculer la proportion des ménage ayant moins de quatre enfant

2°Calculer le mode.

3°Calculer le nombre moyen d'enfants par ménage.

Réponse ;

x_i	n_i	$f_i(\%)$	$n_i x_i$
0	286	18.10	0
1	380	24.05	380
2	416	26.33	832
3	258	16.33	774
4	112	7.09	448
5	62	3.92	310
6	47	2.98	282
7	12	0.76	84
8	7	0.44	56
<u>Total</u>	<u>1580</u>	<u>100</u>	<u>3166</u>

1°la proportion des ménage ayant moins de 4 enfants est la sommes des pourcentages associer au valeur du caractère 0.1.2.3.

$$P = 18,10 + 24,05 + 26,33 + 16,33 = 84,81$$

La proportion de ménage ayant moins de 4 enfants est de 84,81 %

2°le caractère étant discret, la valeur du mode est la valeur du caractère dont l'effectif est le plus grand. Le mode est donc égal à 2

3° les nombres moyen d'enfant par ménage est égale a :

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^p n_i x_i}{\sum_{i=1}^p n_i} = \frac{3166}{1580} \approx 2,00$$

Le nombre moyen d'enfant par ménage est 2 enfants

Exercice 7 :

Dans une banque on considère un échantillon de 12 clients choisis au hasard. On note X le nombre de chèque émis et Y le nombre de visite à l'agence de chaque client durant un trimestre. On obtient

X	34	42	53	30	50	60	46	57	32	24	36	28
Y	12	14	15	10	15	17	12	14	10	9	11	10

- 1) Calculer $\text{cov}(X, Y)$.
- 2) Chercher la droite d'ajustement de X en Y, puis la droite d'ajustement de Y en X.
- 3) Tracer sur un graphique les points (x_i, y_i) et les droites d'ajustements.

Réponse :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
34	12	408	1156	144
42	14	588	1764	196
53	15	795	2809	225
30	10	300	900	100
50	15	750	2500	225
60	17	1020	3600	289
46	12	552	2116	144
57	14	798	3249	196
32	10	320	1024	100
24	9	216	576	81
36	11	396	1296	121
28	10	280	784	100
492	149	6423	21774	1921

Exercice 7 :

Dans le cadre du plan de prévention du bruit, une municipalité décide d'installer des capteurs pour mesure le niveau de bruit dans trois rue de la ville.

Ces capteur fournissent chacun 10 relevé sur une période de 24h. Les résultats effectués sont décibels (db)

rue 1	55	50	52	56	64	74	79	65	74	64
rue 2	48	52	54	54	53	55	51	49	50	54

1) a. Calculer le niveau moyen de bruit pour les deux rues étudiées.

Donner les écarts type correspondant.

b. Commenter la qualité sonore de la vie des habitants de ces deux rues pendant la période étudiée.

On appelle matrice élargie d'un système noté (A/B) ou, (A,B) la matrice obtenue en juxtaposant à la droite de la matrice A la matrice colonne B.

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Définition 3:

Le système est dit résoluble s'il admet au moins une solution.

Théorème (Kronecker-Capela) : un système est résoluble si et seulement si le rang de la matrice A du système est égal au rang de la matrice élargie du système c'est-à-dire $\text{rg}A = \text{rg}(A,B)$ et impossible si le rang de la matrice du système est inférieure au rang de la matrice élargie du système.

- a) Un système résoluble est dit redondant si et seulement si le rang de la matrice du système est inférieur au nombre d'équation au système.
- b) Un système résoluble est dit déterminé si et seulement si le rang de la matrice du système est égale au nombre d'inconnue (dans ce cas le système admet une seule solution).

Un système résoluble est dit indéterminé si et seulement si le rang de la matrice du système est inférieur au nombre d'inconnue (dans ce cas le système admet une infinité de solution)

- c) Si le système est déterminé et qu'on pose $\text{rg}A = r$, alors il est possible de trouver parmi les inconnues r inconnues principales et n-r inconnue secondaire tel que chacune des inconnues principales s'exprime comme combinaisons linéaires des inconnues secondaire. Les valeurs des inconnues secondaires sont arbitraires.
- d) Un système d'équation linéaire est dit carré si le nombre d'équation est égale au nombre d'inconnue c'est-à-dire $m=n$. la matrice A tel d'un tel système est donc une matrice carré
- e) La méthode de Gauss : elle consiste à faire des transformations ou manipulation élémentaire sur les lignes de la matrice élargie du système pour la transformation en une matrice triangulairement supérieure ou échelon. On obtient ainsi équivalent au système initial.

Remarque : on peut aussi faire ces transformations élémentaires sur les équations du système.

SUJET N°14

EXERCICE 1

- 1) Résoudre dans $\mathbb{N}$
 - a) $2 C_n^2 + 6 C_n^3 = 9n$
 - b) $A_n^2 = 15 - 3n$
 - c) $C_n^{n-2} = 28$
 - d) $C_n^5 = 17 C_n^4$

2) Une urne contient 15 boules indiscernables au touché dont 10 sont rouges, 3 bleus et 2 vertes. Le principe du jeu est le suivant : le joueur paye 50 F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément deux boules de l'urne :

- Le tirage d'une boule rouge ne donne rien
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50 F
- Chaque boule verte tirée rapporte 250 F

N'GOLO joue une fois, quelle est la probabilité pour N'GOLO :

- a) De ne ni gagner ni perdre
- b) De perdre 50 F
- c) De gagner 50 f

EXERCICE 2 :

Une urne contient 10 boules indiscernable au toucher, deux de ces boules portent le numéro 1, trois portent le numéro 2 et 5 portent le numéro 3. On tire simultanément 2 boules et on observe la somme de numéro porté par ces deux boules. On note X la variable aléatoire égale à la somme de numéro porté par ces deux boules

- 1a) Déterminez les valeurs prises par X
- b) Déterminez la loi de probabilité de X
- 2) Déterminez et représentez la fonction de répartition de X
- 3) Calculez l'espérance mathématique de X
- 4) calculez la variance et l'écart type de X

EXERCICE 3

Soit les données statistiques de l'entreprise « cours privé la satisfaction »

Elèves X_i	0	5	10	15	20	25
Degré de satisfaction Y_i	55,7	62,1	67,7	71,7	77	78,9

- 1) Représentez le nuage des points
- 2) Déterminez les coordonnées du point moyen G puis représentez
- 3) Déterminez la droite de régression par la méthode de MAYER puis représentez
- 4) Déterminez la droite de régression ou d'ajustement par la méthode des moindres carrés puis représentez

Sujet N°15

Exercice 1 :

un enfant a dans sa poche 6 pièces de monnaie : 2 pièces de 100 F, 3 pièces de 50 F et une pièce de 25 F. Dans un magasin pour régler son achat de 225 F, il extrait au hasard et simultanément 3 pièces de sa poche.

- 1 a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne ainsi la somme exacte de 225 F
- b) quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante pour régler son achat.
- 2) On désigne par X la variable aléatoire égale la somme de pièces en francs.
- a) Déterminez les valeurs prises par X

- b) Déterminez la loi de probabilité de X
- 3) Déterminez et représentez la fonction de répartition de X
- 4) Calculez l'espérance mathématique de X

Exercice 2 :

Un sac contient 10 jetons identiques dont 5 portent le chiffre - 2 ; 3 portent le chiffre + 1 et 2 portent le chiffre 3. On tire simultanément et au hasard deux jetons dans le sac et soit X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe la somme des chiffres obtenus sur les jetons.

- 1a) Déterminez les valeurs prises par X
- b) Déterminez la loi de probabilité de X
- 2) Déterminez et représentez la fonction de répartition de X
- 3) Calculez l'espérance mathématique de X

Exercice 3 :

Une case contient 12 souris dont 7 femelles et 5 males. On extrait simultanément et au hasard 3 souris de la case :

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 males et 1 femelle
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 souris de même sexe
- 3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de souris male sur les 3 souris extraites de la case
- a) Déterminez les valeurs prises par X
- b) Déterminez la loi de probabilité de X
- 4) Déterminez et représentez la fonction de répartition de X
- 5) l'espérance mathématique de X , la variance et l'écart types.

Exercice 4

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 2. On tire 3 boules de cette urne. Calculez le nombre de tirage distincts dans les trois cas suivants :

- a) Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
- b) Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.
- c) Les trois boules sont tirées simultanément

Sujet**EXERCICE :**

Le Directeur des ressources humaines d'une entreprise dénommée « COURS PRIVE LA SATISFACTION » doit embaucher des enseignants en philosophie, en anglais, et en géographie économique. Lors du précédent recrutement, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant.

Salaires proposés x_i	60 000	64 000	68 000	72 000
Nombre de candidatures y_i	11	17	20	25

- 1) Représenter le nuage de point associé à cette série

- 2) Déterminer la droite de régression de y en x
- 3) En déduire une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 20 enseignants.

EXERCICE

Le tableau suivant donne, pour six années, les montants x des frais de publicité d'une entreprise et y de son chiffre d'affaires, exprimés en millions de francs.

x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7
y_i	128	102	138	116	118	142

1. Représenter le nuage de point associé à cette série
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Le résultat permet-il d'ajuster un ajustement linéaire ?
3. Déterminer la droite de régression de y en x
4. En déduire :
 - a) Une estimation du chiffre d'affaires si l'on engage 9 millions de francs de publicité.
 - b) Une estimation du budget de publicité à prévoir si l'on désire réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs.

EXERCICE :

Le tableau suivant donne, pour dix pays, la population x de ces pays et la population y de leurs capitales, exprimées en millions d'habitants.

Pays	Population du pays (x_i)	Population de la capitale (y_i)
Bénin	5,6	0,18
Burkina Faso	10,6	0,69
Burundi	6,6	0,30
Cameroun	13,6	0,80
Mali	10,6	0,81
Madagascar	14,3	0,80

Mauritanie	2,3	0,73
Niger	9,5	0,42
Sénégal	8,6	1,15
Togo	4,3	0,38

1°) Représenter le nuage de point associé à cette série.

2°) Déterminer la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y . Tracer ces deux droites

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire

Sujet N°16

Exercices

Les variables suivantes sont-elles quantitatives ou qualitatives ?

- 1- Les marques de voitures garées dans la cour de Lycée Bouillagui Fadiga
- 2- Les nationalités des touristes qui ont visité les tombeaux des ASKIA en 2014.
- 3- L'âge des auditeurs de la radio chaîne 2 du Mali.
- 4- Le niveau d'instruction de groupement des femmes de Tabacoro.
- 5- Le nombre de communes rurales de Goundam.

- 6- Les températures relevées chaque jour sous abri à Bamako.
- 7- Les hauteurs de précipitations tombées chaque année à Kidal.
- 8- Temps mis par les élèves pour faire le trajet entre le domicile et LBF
- 9- Le nombre de personnes infectées par le VIH dans une commune X en fonction du nombre de leurs partenaires.
- 10- Nombre d'ampoules nécessaire pour l'éclairage de la salle cours satisfaction.
- 11- La religion pratiquée par les élèves de cours privé la satisfaction.
- 12- La couleur des cheveux des futurs bacheliers
- 13- Le sexe

Exercice 1

1) complétez le tableau suivant :

Caractère : nombre d'enfants	Effectif : les employés d'une entreprise	Fréquences	Effectifs cumulés décroissants	Effectifs cumulés croissants	Fréquences cumulées décroissants
0	17				
1	11				
2	9				
3	8				
4	5				

- 3) Donnez le nombre d'employés : qui ont au moins 2 enfants ? Qui ont moins de 2 enfants? Qui ont au plus 2 enfants? Qui ont plus de 2 enfants ?
- 3) calculez la moyenne arithmétique

Problème

Pour l'achat d'un matériel un commerçant propose les modes de paiement suivants :

1^{er} mode : paiement au comptant de 400 00 FCFA

2^{ème} mode : Paiement d'une somme de 90 800 FCFA le jour de l'achat et l'acceptation de huit traites mensuelles de même valeur nominale échéant de mois en mois, la première dans un mois après l'achat $t = 9\%$

3^{ème} mode : paiement de douze traites mensuelles de 34 886 FCFA chacune échéant de mois en mois, la première dans un mois.

4^{ème} mode : paiement de 157 500 le jour de l'achat et de n traites de valeur 50 000 FCFA échéant de mois en mois, la première dans un mois. $t=12\%$

5^{ème} mode : paiement d'une somme S le jour de l'achat et de dix traites mensuelles de 25 000 FCFA chacune échéant de mois en mois, la première un mois après un achat. $t=12\%$

TAF

1°) Calculer la valeur nominale commune de chaque traite dans le deuxième mode.

2°) Calculer le taux d'escompte de crédit utilisé dans le troisième mode.

3°) Calculer le nombre de traite dans le 4^{ème} mode en supposant que le nombre de traite ne doit pas dépasser dix traites

4°) Calculez la somme S dans le 5^{ème} mode

5°) quel est le mode de paiement le moins cher pour l'acheteur.

Exercice 1 :

Mr YOU remet le 01^{er} mars 4 effets à l'escompte : 270 000F au 05 mars ; 180 000F au 10 mars ; 420 000F au 30 mars ; 600 000F au 29 avril.

Conditions : escompte 6% endos 1,2% commission proportionnelle ½‰ commission fixe 100F par effet taxe 15%.

Note : minimum de jours est 15 jours et ajouter un jour supplémentaire aux effets dépassant le minimum de jour.

Etablir le bordereau d'escompte et calculer la valeur nette escomptée.

EXERCICE 2

Un Héritage de 602.500 F a été partagé entre deux personnes de telle sorte qu'en ajoutant à la première part l'intérêt qu'elle produirait au taux de 8 % en 2 ans et à la deuxième part l'intérêt qu'elle produirait au taux de 5 % en 5 ans. On obtient deux sommes égales. Quelles sont les parts d'héritages.

EXERCICE 3

Un employé de banque en calculant à la main les intérêts produits par un capital de 5 000 000 F échéant le 20 décembre 2014 au taux de 4,5% l'an se trompe et frappe des chiffres du taux dans l'ordre inverse. La différence entre le résultat erroné et le résultat exact s'est élevé à 1250F

Déterminez le nombre de jour de placement de ce capital puis en déduire la date de placement du capital.

EXERCICE 4

Une somme de 900 000 F est placée à intérêt simple. Si taux augmente de 1% et la durée de 2 mois l'intérêt aurait augmenté de 14 250 F et si le taux diminue de 2% et la durée de 1 mois l'intérêt aurait diminué de 10 500 F. Calculez le taux et la durée initiale et le taux.

Exercice 5

Calculez la date de placement dans les cas suivants :

- a) 50 jours échéance le 14- 05-N
- b) 65 jours échéance le 17-08-N
- c) 15 jours échéance le 29-01-N
- d) 65 jours échéance le 05- 06 - N
- e) 39 jours échéances le 07 - 04 -2012