

SUITES NUMÉRIQUES

Classe : TS Eco

Durée : 4H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Thème : **PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE**

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager des savoirs ou des résultats scientifiques, technologiques et mathématiques.
- Produire des messages à caractère scientifique, technologique et mathématique.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenu

Séquence 1 : Généralités sur les suites numériques	2
1.1. Définition 1 :	2
1.2. Mode de génération	2
1.3. Sens de variation d'une suite :	2
Séquence 2 : Suites arithmétiques et suites géométriques	3
2.1. Suites arithmétiques :	3
2.2. Suites géométriques :	4
Séquence 3 : Insertion de K moyens entre deux (2) nombres :	5
3.1. Insertion de k moyens arithmétiques entre deux nombres a et b :	5
3.2. Insertion de k moyens géométriques entre deux nombres a et b :	5

Déroulement des activités

Séquence 1 : Généralités sur les suites numériques

1.1. Définition 1 :

On appelle suite numérique toute fonction u de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Remarque :

- ☞ La suite numérique u d'ensemble de définition E est notée $(u_n)_{n \in E}$
- ☞ $u(n)$ est l'image de l'entier naturel n par la suite u .
- ☞ $u(n)$ est simplement noté u_n et se lit : « u indice n ».
- ☞ u_n est appelé le **terme général** de la suite u .
- ☞ $u_{n+1} \neq u_n + 1$

1.2. Mode de génération

Activité 1 :

Calculer les trois premiers termes de chacune des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$u_n = -3n + 1; \quad v_n = \frac{n-1}{n}; \quad \begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 5 \end{cases}$$

Synthèse :

u_n et v_n sont exprimés en fonction de n , on dit que (u_n) tout comme (v_n) est une suite définie par une formule explicite.

(w_n) est définie par le premier terme et le terme w_{n+1} en fonction de w_n , on dit que (w_n) est définie par une formule de récurrence.

1.3. Sens de variation d'une suite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est dite croissante.
- Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est dite décroissante.
- Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n = 0$, alors (u_n) est dite constante.
- Une suite monotone est une suite, soit croissante, soit décroissante.

Remarque : si l'inégalité est stricte, on dit que les suites sont strictement monotones.

Exemple : Etudier les variations des suites suivantes.

$$\begin{aligned} U_n &= n^2 - n - 4; \quad V_n = 2 + \frac{1}{n}; \quad u_n = -2n - 2; \quad v_n = 3n - 7; \\ w_n &= 1 - \frac{1}{2}n; \quad t_n = -3 \end{aligned}$$

Synthèse :

$$U_{n+1} - U_n = [(n+1)^2 - (n+1) - 4] - (n^2 - n - 4)$$

$$U_{n+1} - U_n = n^2 + 2n + (1 - n) - 1 - 4 - n^2 + n + 4$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n \geq 0 \text{ alors la suite } (U_n) \text{ est croissante.}$$

Séquence 2 : Suites arithmétiques et suites géométriques

2.1. Suites arithmétiques :

Activité 2 :

Une jeune vendeuse place une somme de $u_0 = 50\,000\text{ F}$ dans une caisse d'épargne le 30 janvier 2015. A la fin de chaque mois son argent lui rapporte un intérêt de 500 F.

- Calculez ; le montant u_1 , que la vendeuse aura dans son compte, en fin février 2013 ? le montant u_2 en fin mars 2013 ? le montant u_3 en fin avril 2013 ?
- Comparer $u_1 - u_0$; $u_2 - u_1$; et $u_3 - u_2$.

Activité 2' :

Moussa est un couturier styliste qui décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 5 500 F CFA. Le coût de confection unitaire augmentera de 250 F CFA par vêtement supplémentaire.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , on désigne par C_n le coût de confection (en F CFA) du $n^{\text{ième}}$ vêtement.

- Compléter le tableau suivant :

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
5 500				

- Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

2.1.1. Définition :

On appelle **suite arithmétique**, une suite (u_n) dont chaque terme est obtenu en **ajoutant** une constante r au terme qui le précède. La constante r est appelé la **raison** de la suite (u_n) .

☞ (u_n) est arithmétique si, et seulement si,

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ ou encore } u_{n+1} - u_n = r \text{ où } r \text{ est la raison.}$$

Exemple :

Les suites suivantes sont-elles des suites arithmétiques ?

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = v_n - 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} v_1 = -1 \\ u_{n+1} = v_n - n \end{cases}$; c) $w_{n+1} = w_n + 3$; d) $t_n = 3n - 7$

Propriété 1 : Détermination par une formule explicite :

Activité 3 :

Dans l'activité 2, en posant $r = 500\text{ F}$; exprimer les termes u_1 ; u_2 ; u_3 en fonction de u_0 et r .

Consignes :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Durée 5 minutes

Synthèse :

Propriété 1 :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$.

☞ De façon générale $u_n = u_k + (n - k)r$. Où u_k est le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) .

☞ On dit alors qu'on a exprimé le terme général u_n en fonction de n .

Exemple :

- Soit la suite arithmétique de raison 14 et de premier terme -3.

- Calculer u_1 , u_2 , u_3 sans utiliser la forme explicite.
- Donner la forme explicite puis calculer u_{50} et $u_{2\,000}$.

- Calculer la raison r et le premier terme u_0 d'une suite arithmétique vérifiant :

- a) $u_5 = 13$ et $u_{11} = 31$.
b) $u_{30} = 3\ 100$ et $u_{150} = 40$.

Propriété 2 : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- ☞ Si u_0 est le premier terme alors la somme $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ est la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite (u_n) .
- ☞ Si u_1 est le premier terme alors la somme $s'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ est la somme des (n) premiers termes de la suite (u_n) .
- ☞ De façon générale $s_n = \frac{n+1-k}{2}(u_k + u_n)$ Où u_k est le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) .

Exemple :

- a) Montrer que la suite (t_n) des entiers naturels est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b) Exprimer le terme général t_n en fonction de n .
- c) Calculer la somme des 20 premiers termes des entiers naturels.

Propriété 3: Termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soient a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors on a : $a + c = 2b$. On dit alors que les trois termes a, b, c sont en **progression arithmétique**.

Exemple :

Montrer que les trois termes consécutifs $u_0 ; u_1 ; u_2$ de l'Activité 3 sont en progression arithmétique.

2.2. Suites géométriques :

Activité 4 :

Reprenons l'activité 3. La jeune vendeuse place la même somme $u_0 = 50\ 000\ F$ dans une autre caisse d'épargne le 30 janvier 2015. A la fin de chaque mois son argent lui rapporte un intérêt de 6%.

- c) Calculez ; le montant u_1 , que la vendeuse aura dans son compte, en fin février 2013 ? le montant u_2 en fin mars 2013 ? le montant u_3 en fin avril 2013 ?
- d) Comparer $\frac{u_1}{u_0}$; $\frac{u_2}{u_1}$ et $\frac{u_3}{u_2}$.

Consignes :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Durée 10 minutes

Synthèse :

Définition :

On appelle **suite géométrique**, une suite (u_n) dont chaque terme est obtenu en **multipliant** une constante q au terme qui le précède. La constante q est appelé la **raison** de la suite (u_n) .

☞ (u_n) est **géométrique** si, et seulement si,

$$u_{n+1} = q \times u_n \text{ ou encore } \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{où } q \text{ est la raison.}$$

Propriété 4 : Détermination par une formule explicite :

Si (u_n) est une suite **géométrique** de premier terme u_0 et de raison q , alors, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 \times q^n$.

- ☞ De façon générale $u_n = u_k \times q^{n-k}$ Où u_k est le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) .
- ☞ On dit alors qu'on a exprimé le terme général u_n en fonction de n .

Propriété 5: Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$:

☞ Si u_0 est le premier terme alors la somme $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) .

☞ Si u_1 est le premier terme alors la somme $s'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ est la somme des (n) premiers termes de la suite (u_n) .

☞ De façons générales $s_n = u_k \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q}$ Où u_k est le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) .

Propriété 6: Termes consécutifs d'une suite géométrique:

Soient a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors on a : $a \times c = b^2$. On dit alors que les trois termes a, b, c sont en **progression géométrique**.

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et premier terme 1.

- 1) Calculer u_1 ; u_2 et u_3 puis vérifier que les termes u_1, u_2 et u_3 sont dans cet ordre en progression géométrique.
- 2) Exprimer le terme général u_n en fonction de n .
- 3) Calculer le 6^{ème} et le 8^{ème} terme de la suite (u_n) .
- 4) Calculer l'indice n du terme égal 1024.
- 5) Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

Exemple :

Un fonctionnaire dispose au 1er janvier 2014 d'un capital $C_0 = 1\,000\,000\text{F}$ qu'il place à la BOA à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital au bout de n années.

- 1) Calculer C_1, C_2 et C_3 .
- 2) Démontrer que (C_n) est une suite géométrique puis exprimer C_n en fonction de n .
- 3) Au bout de combien de temps n le capital aura-t-il doublé ? (on pourra utiliser une calculatrice)
- 4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année ce fonctionnaire pourra-t-il s'offrir une maison dont le prix est 25 000 000F ? (on pourra utiliser une calculatrice)

Séquence 3 : Insertion de K moyens entre deux (2) nombres :

3.1. Insertion de k moyens arithmétiques entre deux nombres a et b :

Pour insérer un nombre entre deux nombres a et b d'une progression arithmétique ; on calcule la raison $r = \frac{b-a}{k+1}$ avec $\mathbb{N}^*$.

Exemple : insérer 8 termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.

3.2. Insertion de k moyens géométriques entre deux nombres a et b :

Pour insérer un nombre entre deux nombres a et b d'une progression arithmétique ; on calcule la raison $q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : insérer 3 termes entre 3 et 48 de manière à obtenir une progression géométrique.