

Ressources pédagogiques

Mathématiques

Terminale Sciences Économiques

Exercices d'application, d'approfondissement
et situations complexes (APC)

Almame TRAORÉ — Professeur de mathématiques (LBF - LPMT)

Sommaire — conforme au programme officiel de TSECO (3 h/semaine, coefficient 2)

UA1 — Calcul numérique et commercial

- Séquence 1 Puissances entières et rationnelles ; racines n -ièmes
Séquence 2 Rapports, proportions et grandeurs proportionnelles
Séquence 3 Partages proportionnels (simples et composés)
Séquence 4 Pourcentages (directs, successifs, par tranches, en dedans, en dehors)
Séquence 5 Progressions arithmétiques et géométriques ; insertion de moyens

UA2 — Analyse

- Séquence 6 Limites, continuité, dérivation (réciproque, composée, x^m , dérivée seconde)
Séquence 7 Primitives et intégrales ; aires ; intégration par parties
Séquence 8 Études de fonctions polynômes et rationnelles ; asymptotes obliques ; fonctions économiques
Séquence 9 Fonction logarithme népérien ; logarithme décimal
Séquence 10 Fonction exponentielle ; fonctions puissances

UA3 — Dénombrement, statistique, probabilités, algèbre linéaire

- Séquence 11 Dénombrement
Séquence 12 Statistique à deux caractères
Séquence 13 Probabilités ; loi binomiale
Séquence 14 Systèmes d'équations linéaires et matrices

Évaluations

- Devoirs Un devoir de synthèse de 2 h (sur 20) à la fin de chaque séquence
BAC Trois sujets type BAC de 3 h (sur 20) couvrant tout le programme

Mode d'emploi

Chaque séquence comprend un encadré **L'essentiel à retenir**, des **exercices d'application** (niveau 1), des **exercices d'approfondissement** (niveau 2) et deux **situations complexes** structurées selon l'APC (contexte, support, fonction, consignes), ancrées dans les réalités du Mali, puis un **devoir de synthèse de 2 heures** noté sur 20 avec barème détaillé. Le livret se termine par **trois sujets type BAC de 3 heures** sur 20. Les données ont été vérifiées ; les montants sont en francs CFA et la TVA est au taux malien de 18 %.

Unité d'apprentissage 1

UA1

**Puissances · Rapports et proportions · Partages
proportionnels · Pourcentages · Progressions**

Séquence 1

Puissances entières et rationnelles

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Opérations sur les puissances à exposant entier ; racine n -ième d'un nombre positif ; puissances à exposant rationnel ; équations du type $x^n = a$ et $a^x = a^k$.

L'essentiel à retenir

- Pour $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$: $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Pour $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la **racine n -ième** de a est l'unique réel positif b tel que $b^n = a$; on note $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
- Pour $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$. Les règles de calcul restent valables pour les exposants rationnels.
- Équation $x^n = a$: si n est impair, une seule solution $\sqrt[n]{a}$ (avec $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$) ; si n est pair et $a > 0$, deux solutions $\pm \sqrt[n]{a}$; si n est pair et $a < 0$, aucune solution.
- Si $a > 0$ et $a \neq 1$: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$. On ramène les deux membres à la **même base**.

Exercices d'application**Exercice 1** — Équations avec des puissances

1) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $(3^{x-1})^3 = 9 \times 3^{x-2}$ b) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$ c) $(3^{x-1})^3 = 1$ d) $x^6 = 64$
 e) $x^5 = 243$ f) $x^6 = -7^{12}$ g) $x^{-3} = -8$ h) $(x+2)^{10} = \sqrt{2}$
 i) $(x^4 - 2)^3 + 2 = 0$ j) $y^8 + 1 = 33$ k) $(x^4 - 2)^4 + 2 = 0$

2) Détermine l'entier relatif x dans chacun des cas suivants :

a) $(10^{3x})^3 \times 10^{-2} = 10^7$ b) $5^{x+1} = 625$

c) $5 \times 5^x = \frac{125}{5-9}$ d) $\frac{13^{x-4}}{13} = 169$

3) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis précise celles qui ont une solution dans $\mathbb{N}$:

$$\text{a) } 9^x \times 2^{2x} = 6^{-3} \quad \text{b) } \frac{1}{(64)^{x^2}} = (4^{-5})^{2x} \times \frac{1}{(4^{-2})^4}$$

$$\text{c) } (64^{2x})^3 = 512^4$$

$$\text{d) } \frac{1}{(64)^{x^2}} = (4\,096)^{-1} \quad \text{e) } 2^{2x-8} = 1 \quad \text{f) } \frac{1}{2^x} = 4^2$$

$$\text{g) } 3 \times 27 = \frac{9}{36x} \quad \text{h) } 3^x = 27 \times 9$$

$$\text{i) } 2^x = 4\sqrt{2} \quad \text{j) } 2^x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{64}} \quad \text{k) } 5^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{125}}$$

$$\text{l) } \sqrt{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\left(a^{\frac{2}{3}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} = a^x \quad (a > 0)$$

4) Détermine les réels x et y vérifiant :

$$\begin{cases} 2^x \times 4^y = \sqrt{2}^{10} \\ \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

5) Un capital placé à intérêts composés au taux annuel i vérifie $\frac{(1+i)^{n+3}}{(1+i)^{n-5}} = 1,593\,848$. Résous cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$ et donne le taux i en pourcentage.

Exercice 2 — Simplifications

1) a, b, c, x, y sont des réels strictement positifs. Simplifie le plus possible les écritures suivantes :

$$A = (a^2 b^3)^7 (ab^2)^5 \quad B = \frac{(3^4 x y^2)^2}{(\sqrt{3x^3 y^3})^2}$$

$$C = \sqrt[5]{3\sqrt{4}} \times \sqrt[6]{6\sqrt{4}} \quad D = \frac{(\sqrt[4]{a^7})^2 \sqrt[4]{a^5}}{a^2 (\sqrt[5]{a^2}) (\sqrt{a^3})}$$

$$V = \frac{a^8 b^6 c^4}{a^{10} b c^6} \quad W = \frac{a^{-4} b^5 (ac^2)^3}{(ba^{-2})^5} \quad X = \frac{(a^2 b)^{-3} \times (bc^3)^2 \times (a^{-2} b^5 c)^3}{(b^2 c^2 a)^{-4} \times (a^{-1} b^6)^2}$$

$$Y = \frac{(a^{-2} c)^{-4} \times (-b^2 c)^5 \times (a^3 b c^{-1})^{-2}}{(-a^2 b^{-3} c)^3 \times (-b)^4 \times (a^{-5} c)^2}$$

2) Exprime chacune des quantités suivantes sous la forme $2^p \times 3^q$ ($p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}$) :

$$A = \frac{8 \times 27 \times 12}{3 \times 24} \quad B = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{27} \times \sqrt{2} \quad C = \frac{(2^{-2} \times 3)^3 \times (12^3 \times 2)^3}{[(6^{-1})^2 \times \sqrt{2^4}]^2}$$

Exercice 3 — Décomposition en facteurs premiers

Écris les nombres suivants à l'aide de puissances (entières ou rationnelles) de nombres premiers :

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} \quad B = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2\,560}{0,144 \times 2,16 \times 64} \quad C = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}$$

$$D = \frac{\sqrt[11]{4} \times \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[4]{8^3} \times \sqrt[6]{7^2}} \quad E = \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$$

Exercices d'approfondissement**Exercice 4** — Racines cubiques, simplification et systèmes

- 1) a) Développe $a = (2 + \sqrt{2})^3$ et $b = (2 - \sqrt{2})^3$.
 b) Déduis-en la valeur exacte de $c = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{2x - 9} = 3$.
- 3) Soit a un réel strictement positif. Simplifie $d = \frac{\sqrt[3]{a^5} \times (\sqrt[4]{a^7})^2}{(a^2)^2 \times \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[5]{a^3}}$.
- 4) Résous dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} (2^6)^{-x} \times \frac{1}{(16)^y} = \frac{1}{1\,024} \\ (13^{-x}) \times \frac{1}{(169)^y} = \frac{1}{2\,197} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{(5^{-7})^y} \times \frac{1}{5} \\ \frac{1}{(6^{-2})^x} \times 6^y = 6^5 \end{cases}$$

Exercice 5 — Taux moyen et racine n -ième

Le prix d'un sac de 50 kg de riz est passé de 15 000 F à 20 100 F en 6 ans.

- 1) Calcule le coefficient multiplicateur global, puis montre que le coefficient annuel moyen c vérifie $c^6 = 1,34$.
- 2) Déduis-en $c = 1,34^{\frac{1}{6}}$ et le taux annuel moyen d'augmentation, à 0,1 % près.

Situations complexes**Situation complexe 1.1** Puissances rationnelles · taux moyen**L'épargne de la tontine des commerçantes de Médine**

1 · Contexte

Les commerçantes du marché de Médine (Bamako) ont placé l'avoir de leur tontine dans une institution de microfinance. Elles veulent savoir quel taux annuel moyen leur placement a rapporté.

2 · Support

Somme placée le 1^{er} janvier 2019 : 2 000 000 F. Avoir au 1^{er} janvier 2025 : 2 680 000 F. Une banque voisine propose un taux annuel de 4,5 %. Le marché compte plus de 300 étals.

3 · Fonction

Tu es la trésorière de la tontine. Tu dois présenter le rendement réel du placement à l'assemblée.

4 · Consignes

- 1 Calcule le coefficient multiplicateur global du placement sur la période.
- 2 Détermine le coefficient annuel moyen à l'aide d'une racine n -ième, puis le taux annuel moyen (à 0,01 % près).
- 3 Dis si l'offre de la banque voisine aurait été plus avantageuse. Justifie.

Situation complexe 1.2 Puissances · racine n -ième · baisse moyenne**Le recul du fleuve à Mopti****1 · Contexte**

Une ONG environnementale suit la superficie des bourgoutières (pâturages inondés) d'une commune du delta intérieur du Niger.

2 · Support

Superficie inondée : 5 000 ha en 2015, puis 3 277 ha en 2020 (diminution régulière en pourcentage chaque année). La crue a lieu chaque année entre septembre et décembre.

3 · Fonction

Tu es chargé d'études de l'ONG. Tu dois estimer la baisse annuelle et faire une prévision.

4 · Consignes

- 1 Montre que le coefficient annuel c vérifie $c^5 = 0,6554$ et calcule c à 10^{-3} près.
- 2 Déduis-en le pourcentage annuel moyen de diminution.
- 3 Estime la superficie inondée en 2025 si la tendance se poursuit, et commente.

Devoir de synthèse — Séquence 1

Puissances entières et rationnelles

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Calculs et simplifications

1) Écris sous la forme $2^p \times 3^q$ puis donne la valeur de $A = \frac{(2^3 \times 3^{-2})^2 \times 6^2}{2^4 \times 3^{-3}}$. (2 pt)

2) a est un réel strictement positif. Simplifie $B = \frac{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}}$. (2 pt)

3) Écris à l'aide de puissances de nombres premiers : (2 pt)

$$C = \frac{0,027 \times 0,16 \times (10^{-2})^{-1}}{0,09 \times 0,4}$$

Exercice 2 (6 points) — Équations

Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $4^{x+1} = 8^{x-1}$ (1 pt)

2) $x^5 = -32$ puis $x^4 = 81$ (1,5 pt)

3) $25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$ (pose $X = 5^x$) (1,5 pt)

4) le système $\begin{cases} 3^x \times 9^y = 3^7 \\ \frac{2^x}{4^y} = 8 \end{cases}$ (2 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : les abonnés au mobile money

Un opérateur comptait 4 millions d'abonnés au mobile money au Mali en 2018 et 6,4 millions en 2024. On suppose que le nombre d'abonnés a été multiplié chaque année par un même coefficient c .

1) Calcule le coefficient multiplicateur global entre 2018 et 2024. (1 pt)

2) Montre que $c^6 = 1,6$; déduis-en $c = 1,6^{\frac{1}{6}}$ et le taux annuel moyen d'augmentation, à 0,01 % près. (3 pt)

3) Estime le nombre d'abonnés en 2028 si la tendance se poursuit (à 0,01 million près). (2 pt)

4) Un concurrent affirme avoir connu une hausse de 10 % par an sur la même période, en partant aussi de 4 millions. Calcule son nombre d'abonnés en 2024 et compare. (2 pt)

Séquence 2

Rapports, proportions et grandeurs proportionnelles

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème de la vie courante. Définition des rapports et des proportions ; grandeurs directement proportionnelles (à partir d'une situation de proportionnalité) ; chaînes de grandeurs proportionnelles ; grandeurs inversement proportionnelles ; applications pratiques.

L'essentiel à retenir

- Le **rapport** de deux nombres a et b ($b \neq 0$) est le quotient $\frac{a}{b}$. Une **proportion** est une égalité de deux rapports $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; on a alors $ad = bc$ (produit des extrêmes = produit des moyens).
- Propriété des suites de rapports égaux : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$.
- Connaissant $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ et la somme $S = x + y$: $x = \frac{p}{p+q}S$ et $y = \frac{q}{p+q}S$; avec la différence $D = x - y$: $x = \frac{p}{p-q}D$.
- Deux grandeurs x et y sont **directement proportionnelles** si $y = kx$ ($\frac{y}{x}$ constant) ; **inversement proportionnelles** si $xy = k$ (le produit est constant), c'est-à-dire si y est proportionnelle à $\frac{1}{x}$.
- **Chaîne de grandeurs** : si une grandeur G est proportionnelle à x et à y (et inversement proportionnelle à z), alors $G = k \frac{xy}{z}$. On résout par la **règle de trois composée**.

Exercices d'application**Exercice 1** — Rapports et proportions

- 1) Deux capitaux C_1 et C_2 ont pour somme 18 000 F et pour rapport $\frac{C_1}{C_2} = \frac{18}{27}$. Calcule C_1 et C_2 .
- 2) Deux capitaux diffèrent de 25 000 F et ont pour rapport $\frac{9}{4}$. Calcule-les.
- 3) Trouve deux sommes dont le rapport est $\frac{9}{2}$ et la somme 22 440 F.

Exercice 2 — Rapport simplifié

Deux nombres X et Y vérifient $315X = 168Y$.

- 1) Calcule le rapport $\frac{X}{Y}$ sous forme irréductible.
- 2) Calcule X et Y lorsque : a) $X + Y = 253$; b) $Y - X = 126$; c) $XY = 1\,080$ (avec $X > 0$ et $Y > 0$).

Exercice 3 — Proportionnalité directe

On paie 27 000 F pour 18 m de tissu wax. Combien paiera-t-on 10 m ; 12 m ; 7,5 m ; 24 m du même tissu ? Présente les résultats dans un tableau de proportionnalité et donne le coefficient.

Exercice 4 — Proportionnalité inverse

Pour désherber un champ de mil, 6 ouvriers mettent 10 jours (même rendement journalier).

- 1) Combien de jours mettraient 4 ouvriers ? 15 ouvriers ?
- 2) Justifie que le nombre d'ouvriers et la durée sont inversement proportionnels. Quelle est la constante ?

Exercice 5 — Règle de trois composée

12 tailleurs, travaillant 8 h par jour, confectionnent 240 boubous en 5 jours. Combien de boubous 9 tailleurs travaillant 10 h par jour confectionneront-ils en 6 jours ?

Exercices d'approfondissement**Exercice 6 — Chaîne de grandeurs**

Le coût du transport de marchandises est proportionnel à la masse transportée et à la distance parcourue. Le transport de 8 tonnes sur 120 km coûte 192 000 F.

- 1) Exprime le coût C en fonction de la masse m (en tonnes) et de la distance d (en km).
- 2) Calcule le coût du transport de 15 tonnes de Bamako à Ségou (240 km).
- 3) Quelle masse peut-on transporter sur 300 km pour 450 000 F ?

Exercice 7 — Le carburant dans les quartiers de Bamako

Le tableau donne, pour une semaine, le nombre de stations ouvertes et le carburant distribué dans huit quartiers.

Quartier	Stations	Carburant (L)	Quartier	Stations	Carburant (L)
Badalabougou	5	25 000	Hamdallaye	6	30 000
Lafiabougou	3	12 000	Hippodrome	3	15 000
Sogoniko	4	20 000	Banconi	4	18 000
Magnambougou	2	8 000	Missira	2	7 000

- 1) Calcule la quantité totale distribuée et la part (en %) de chaque quartier.
- 2) Calcule la quantité distribuée par station dans chaque quartier. La distribution est-elle proportionnelle au nombre de stations ?
- 3) La semaine suivante, la distribution totale augmente de 10 %. Propose une répartition proportionnelle au nombre de stations.

Situations complexes

Situation complexe 2.1 Proportionnalité directe et inverse · règle de trois

La construction de la salle de classe

1 · Contexte

Le comité de gestion scolaire (CGS) d'un village du cercle de Kati construit une salle de classe en briques de banco. Il doit planifier la main-d'œuvre avant le début de l'hivernage.

2 · Support

Les 12 maçons du village, travaillant 6 h par jour, fabriquent 3 600 briques en 5 jours. Il faut 10 800 briques pour la salle. L'hivernage commence dans 12 jours ; le chef du village ne peut libérer que 10 maçons.

3 · Fonction

Tu es le secrétaire du CGS. Tu dois vérifier si les briques seront prêtes à temps.

4 · Consignes

- 1 Calcule le nombre de briques fabriquées par un maçon en une heure.
- 2 Détermine le nombre de jours nécessaires à 10 maçons travaillant 6 h par jour pour fabriquer les 10 800 briques.
- 3 Dis si le délai est respecté ; sinon, calcule la durée journalière de travail nécessaire pour finir en 12 jours.

Situation complexe 2.2 Rapports · proportion · propriété des rapports égaux

Le mélange de l'aliment pour bétail

1 · Contexte

Un éleveur de Sikasso prépare un aliment pour l'embouche de ses bœufs en mélangeant tourteau de coton, son de maïs et fanes d'arachide.

2 · Support

Le mélange respecte les proportions 5 (tourteau) ; 3 (son) ; 2 (fanes). Prix au kilogramme : tourteau 250 F ; son 125 F ; fanes 75 F. L'éleveur dispose de 900 kg de son de maïs. Il possède 15 bœufs.

3 · Fonction

Tu es agent vétérinaire. Tu dois aider l'éleveur à préparer et à chiffrer son mélange.

4 · Consignes

- 1** Détermine la quantité maximale de mélange que l'éleveur peut préparer avec son stock de son, et les quantités de tourteau et de fanes correspondantes.
- 2** Calcule le coût total de ce mélange et le prix de revient d'un kilogramme.
- 3** Calcule la ration journalière d'un bœuf si ce mélange doit nourrir les 15 bœufs pendant 20 jours.

Devoir de synthèse — Séquence 2

Rapports, proportions et grandeurs proportionnelles

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Rapports et proportions

- 1) Calcule a et b sachant que $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ et $a + b = 96$. (1,5 pt)
- 2) Calcule x et y sachant que $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ et $y - x = 45$. (1,5 pt)
- 3) Calcule a, b, c sachant que $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ et $a + b + c = 60$. (2 pt)

Exercice 2 (5 points) — Règle de trois composée

8 ouvriers, travaillant 6 h par jour, creusent 1 200 m de canal d'irrigation en 15 jours dans l'Office du Niger.

- 1) Calcule la longueur creusée par un ouvrier en une heure. (2 pt)
- 2) Combien de jours faudra-t-il à 10 ouvriers travaillant 8 h par jour pour creuser 2 000 m ? (3 pt)

Exercice 3 (4 points) — Proportionnalité inverse

Un car met 10 h pour aller de Bamako à Kayes (600 km) à la vitesse moyenne de 60 km/h.

- 1) Complète le tableau : vitesse (km/h) : 50 ; 60 ; 75 ; 80 — durée (h) : ... (2 pt)
- 2) Justifie que la vitesse et la durée sont inversement proportionnelles ; précise la constante et sa signification. (2 pt)

Exercice 4 (6 points) — Situation : l'abreuvement du troupeau

Un éleveur de Nioro du Sahel constate que 40 bœufs consomment 9 600 litres d'eau en 6 jours. La consommation est proportionnelle au nombre de bœufs et au nombre de jours.

- 1) Calcule la consommation d'un bœuf en un jour. (1,5 pt)
- 2) Calcule la quantité d'eau nécessaire pour 25 bœufs pendant 15 jours. (1,5 pt)
- 3) L'éleveur dispose d'une réserve de 18 000 litres. Pendant combien de jours peut-il abreuver 30 bœufs ? 50 bœufs ? (2 pt)
- 4) Pour une réserve fixée, explique la relation entre le nombre de bœufs et le nombre de jours. (1 pt)

Séquence 3

Partages proportionnels

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème de la vie courante. Partages simples : partages directement proportionnels, partages inversement proportionnels ; partages composés (proportionnels à plusieurs suites de nombres, directement et/ou inversement).

L'essentiel à retenir

- **Partage directement proportionnel** de S à a, b, c : chaque part vaut $\frac{a}{a+b+c}S, \frac{b}{a+b+c}S, \frac{c}{a+b+c}S$ (on calcule la valeur d'une part : $k = \frac{S}{a+b+c}$).
- **Partage inversement proportionnel** à a, b, c : c'est un partage directement proportionnel à $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. On réduit au même dénominateur et on partage proportionnellement aux numérateurs obtenus.
- **Partage composé** : proportionnel à a_i et à b_i , inversement proportionnel à $c_i \Rightarrow$ partage directement proportionnel aux nombres $\frac{a_i b_i}{c_i}$.
- Astuce : on peut multiplier ou diviser tous les coefficients par un même nombre non nul sans changer le partage (simplifier avant de calculer).
- Contrôle : la somme des parts doit redonner la somme partagée.

Exercices d'application**Exercice 1** — Partage direct

Trois salariées, Yaya, Bagayogo et Moussa, ont travaillé respectivement 5, 8 et 12 mois dans l'année. Le nombre de jours de congés payés est proportionnel au nombre de mois travaillés ; 50 jours sont alloués au total. Calcule les jours de congé de chacun.

Exercice 2 — Dimensions d'un champ

La longueur et la largeur d'un champ rectangulaire sont proportionnelles à 13 et 10. Le périmètre du champ mesure 920 m. Détermine ses dimensions et son aire en hectares.

Exercice 3 — Partage inverse

Un commerçant achète une pièce de 180 m de tissu. Les $\frac{2}{9}$ de la pièce sont détériorés. Il divise le reste en trois coupons dont les longueurs sont inversement proportionnelles à 2 ; 4 et 7. Calcule la longueur de chaque coupon.

Exercice 4 — Le transport scolaire

Deux écoles se regroupent pour le transport scolaire, qui coûte 600 000 F par mois. Elles prennent en charge les $\frac{3}{4}$ des frais ; le reste est payé par les élèves. La première école compte 100 élèves, la seconde 200.

- 1) Calcule le montant pris en charge par les écoles, puis la part de chaque école (proportionnelle au nombre d'élèves).
- 2) Combien paie chaque élève ?

Exercice 5 — Erreur de partage

On veut partager une somme S en deux parts inversement proportionnelles à 6 et 11 ; par erreur, on la partage en parts directement proportionnelles à 6 et 11. La première part diminue alors de 6 400 000 F. Calcule S .

Exercice 6 — Bénéfice proportionnel aux apports

Fanta, Aminata, Nimaga et Koukou, associés, se partagent un bénéfice de 14 490 000 F proportionnellement à leurs apports. La somme des apports est 21 000 000 F ; Fanta a apporté 3 000 000 F, Koukou 7 500 000 F et la part de bénéfice d'Aminata est 3 105 000 F. Calcule les apports d'Aminata et de Nimaga, puis toutes les parts de bénéfice.

Exercices d'approfondissement

Exercice 7 — Partage composé : âge et nombre d'enfants

Une gratification est partagée entre trois ouvriers proportionnellement à leurs âges (28, 40 et 30 ans) et inversement proportionnellement à leurs nombres d'enfants (7, 4 et 15). Le premier et le deuxième touchent ensemble 322 000 F. Calcule la part de chaque ouvrier et le montant de la gratification.

Exercice 8 — Âges inconnus

Un père partage 6 300 000 F entre ses trois enfants proportionnellement à leurs âges a, b, c tels que $\frac{a+4}{3} = \frac{b-2}{4} = \frac{c}{4}$. Le troisième enfant a reçu 2 400 000 F. Calcule les âges, puis les parts des deux autres enfants.

Exercice 9 — Partage composé avec erreur

Une prime P est partagée entre trois contremaîtres proportionnellement à leurs salaires annuels (42 000 ; 35 000 ; 28 000, en centaines de francs), à leurs années de service (7 ; 5 ; 3) et inversement proportionnellement à leurs retards dans l'année (4 ; 2 ; 5). Le comptable oublie la dernière condition : le deuxième touche alors 35 250 F de moins que ce qu'il aurait dû toucher. Calcule P et les parts correctes.

Exercice 10 — Le testament révisé

Un oncle partage sa fortune entre ses neveux Fanfara, Ousmane et Nimaga proportionnellement à leurs âges : 8, 12 et 18 ans. Il révisé ensuite son testament : le partage devient inversement proportionnel aux âges.

- 1) Exprime la part de chacun en fonction de la fortune F dans les deux cas.

- 2) Quel neveu conserve la même part ? Sachant qu'il reçoit 1 800 000 F, calcule F .

Exercice 11 — La société des trois associés

Aïssata, Sy et Guindo fondent une société : Aïssata apporte les $\frac{3}{8}$ du capital, Sy les $\frac{3}{4}$ du reste et Guindo 8 500 000 F. Après deux ans, le bénéfice net est de 16 000 000 F : 20 % vont en réserve, 15 % du reste sont versés au gérant Sy, et le solde est réparti entre les associés proportionnellement à leurs apports.

- 1) Calcule le capital de la société et l'apport de chaque associé.
- 2) Calcule la part de bénéfice de chaque associé (gérance comprise pour Sy).

Exercice 12 — Le fonds de l'entreprise Touré

L'entreprise Touré de Bamako répartit 1 000 000 F ainsi : 17,5 % pour un fonds de retraite ; sur le reste, 8 % pour les œuvres sociales ; le solde est partagé entre quatre salariés A, B, C, D.

	A	B	C	D
Ancienneté (proportionnel)	5 ans	2 ans	15 ans	8 ans
Personnes à charge (proportionnel)	4	5	3	5
Salaire mensuel (inversement proportionnel)	200 000	200 000	300 000	160 000

- 1) Effectue le partage proportionnellement à l'ancienneté seule.
- 2) Effectue le partage en tenant compte des trois critères. Qui y gagne ? Qui y perd ?

Situations complexes

Situation complexe 3.1 Partage composé · direct et inverse

L'aide alimentaire aux familles déplacées

1 · Contexte

Une ONG installée à Mopti distribue 400 kg de denrées à trois chefs de famille déplacés venus du Nord. Le comité de distribution hésite entre deux règles de partage.

2 · Support

	Âge	Enfants	Distance parcourue
Famille A	20 ans	3	200 km
Famille B	40 ans	2	240 km
Famille C	30 ans	2	120 km

Règle 1 : partage proportionnel à l'âge et au nombre d'enfants. Règle 2 : partage inversement proportionnel à l'âge, proportionnel au nombre d'enfants et à la distance parcourue. La distribution a lieu un vendredi.

3 · Fonction

Tu es membre du comité. Tu dois calculer les parts et conseiller la règle la plus juste.

4 · Consignes

- ❶ Calcule la part de chaque famille selon la règle 1.
- ❷ Calcule la part de chaque famille selon la règle 2.
- ❸ Compare les deux partages et dis, en argumentant, laquelle des deux règles favorise les familles les plus éprouvées.

Situation complexe 3.2 Partage composé · inversement proportionnel

La prime de fin d'année à la menuiserie

1 · Contexte

Le patron d'une menuiserie de Kayes veut récompenser ses trois employés en décembre. Il demande à son fils, élève de Terminale SECO, de faire un partage « équitable ».

2 · Support

Somme disponible : 582 400 F.

	Heures de retard	Ancienneté	Enfants
Employé 1	3 h	5 ans	2
Employé 2	1 h	6 ans	3
Employé 3	2 h	8 ans	4

Le patron souhaite récompenser l'ancienneté et les charges familiales, et pénaliser les retards.

3 · Fonction

Tu es le fils du patron. Tu dois proposer et justifier le partage.

4 · Consignes

- ❶ Précise, pour chaque critère, si le partage doit être directement ou inversement proportionnel. Justifie.
- ❷ Calcule la part de chaque employé et vérifie que la somme des parts vaut 582 400 F.
- ❸ Calcule ce qu'aurait reçu chaque employé si l'on avait (à tort) partagé proportionnellement aux heures de retard, et commente.

Devoir de synthèse — Séquence 3

Partages proportionnels

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Partages simples

- 1) Partage 2 520 000 F en trois parts directement proportionnelles à 4, 5 et 6.
(2 pt)
- 2) Partage 1 300 000 F en trois parts inversement proportionnelles à 2, 3 et 4.
(3 pt)

Exercice 2 (7 points) — Partage composé

Une prime de 2 160 000 F est partagée entre trois agents proportionnellement à leur ancienneté (6, 9 et 12 ans) et inversement proportionnellement à leurs jours d'absence (2, 3 et 6 jours).

- 1) Calcule les coefficients de partage simplifiés. (2 pt)
- 2) Calcule la part de chaque agent et vérifie le total. (3 pt)
- 3) Calcule les parts si l'on tient compte de l'ancienneté seule. Quel agent est pénalisé par ses absences ? (2 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : la récolte du périmètre irrigué

Trois familles d'un périmètre rizicole de Niono se partagent une récolte de 12 tonnes de paddy.

	Famille A	Famille B	Famille C
Superficie cultivée	2 ha	3 ha	5 ha
Journées de travail fournies	30	20	12

- 1) Calcule les parts si le partage est proportionnel à la superficie seule. (2 pt)
- 2) Calcule les parts si le partage est proportionnel à la superficie et aux journées de travail. Que remarques-tu ? (3 pt)
- 3) Pour chaque famille, calcule la différence entre les deux partages. Laquelle des deux règles te paraît la plus juste ? Argumente. (3 pt)

Séquence 4

Pourcentages

Compétences et contenus visés. Résoudre des problèmes de la vie courante. Pourcentages directs : calcul de pourcentages, pourcentages additifs, successifs, par tranches ; pourcentages indirects : pourcentages en dedans, pourcentages en dehors.

L'essentiel à retenir

- Prendre t % d'une quantité Q : $\frac{t}{100} \times Q$. Proportion : $p = \frac{\text{partie}}{\text{total}}$; pourcentage = $100p$.
- Augmenter de t % : multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; diminuer de t % : multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Taux d'évolution : $\frac{V_A - V_D}{V_D}$.
- **Pourcentages additifs** : appliqués à la **même base**, ils s'ajoutent. **Pourcentages successifs** : les coefficients se **multiplient** (et non les taux qui s'ajoutent) : $(1 + t_1)(1 + t_2) \dots$.
- **Pourcentages par tranches** : on applique à chaque tranche son propre taux puis on additionne (commissions, impôts, tarifs).
- **Pourcentage en dehors** : calculé sur la valeur de départ (prix HT, prix d'achat) : $V = V_0 (1 + t)$. **Pourcentage en dedans** : calculé sur la valeur finale (prix de vente, prix TTC) : $t \times V$; on retrouve la base par $V = \frac{V_0}{1 - t}$.
- Au Mali, le taux normal de TVA est de 18 % : $\text{TTC} = 1,18 \times \text{HT}$ et $\text{HT} = \frac{\text{TTC}}{1,18}$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Traduire par une opération

- 1) Donne les 30 % de 12 000 F.
- 2) Combien d'heures et de minutes représentent 10 % d'une journée ?
- 3) Lors d'une excursion au mont Hombori, 9 des 29 élèves choisis étaient des filles. Donne la proportion de filles arrondie au centième.
- 4) Un transporteur réalise un chiffre d'affaires annuel de 12 000 000 F et ses frais généraux s'élèvent à 2 450 600 F. Quel pourcentage du chiffre d'affaires représentent les frais généraux ?

Exercice 2 — Sondage

On a interrogé 2 500 personnes : chacune répond OUI, NON ou SANS OPINION. 1 000 ont répondu OUI et 25 % ont répondu NON. Calcule le pourcentage des OUI, celui des SANS OPINION, le nombre de NON et le nombre de SANS OPINION.

Exercice 3 — Retrouver le total

- 1) Il y a 42 filles, ce qui représente 15 % de l'effectif. Combien de personnes au total ?
- 2) Un héritier a reçu 12 % de l'héritage, soit 3 600 000 F. Quel est le montant de l'héritage ?
- 3) Le tiers d'un salaire, soit 75 000 F, part pour le loyer. Quel est ce salaire ?
- 4) La TVA à 18 % sur un article s'élève à 18 000 F. Quel est le prix HT, puis le prix TTC ?
- 5) La proportion de syndiqués dans une entreprise est 0,78, soit 195 personnes. Quel est l'effectif de l'entreprise ?

Exercice 4 — Prix, remise et TVA

- 1) Un article coûte 25 000 F hors taxe. Calcule son prix TTC (TVA 18 %).
- 2) Le prix TTC d'un article est 15 000 F ; le magasin fait une remise de 20 %. Quel est le prix à payer ?
- 3) La population d'une commune a augmenté de 5 % en un an ; elle est maintenant de 19 467 habitants. Quelle était-elle l'année précédente ?

Exercice 5 — Pourcentage en dehors, pourcentage en dedans

- 1) Pour expédier une marchandise achetée 2 540 F, on paie 7,5 % du prix d'achat. Quel est son coût à destination ?
- 2) Un objet est vendu 7 320 F ; ce prix comprend une taxe de 5 % calculée *sur le prix de vente*. Quel est le prix taxe déduite ?
- 3) Un rabais de 6 % sur une facture s'est élevé à 843 F. Quel était le montant initial de la facture ?
- 4) Un éditeur accorde à une librairie une remise de 30 % sur les prix marqués. Le prix net est de 21 000 F. Calcule le prix marqué et la remise.
- 5) La vente d'une robe supporte une taxe de 26 % du prix de vente. Calcule cette taxe pour un prix de vente de 14 250 F.

Exercice 6 — Pourcentages successifs

Le prix d'un sac d'engrais augmente de 10 %, puis de 20 %, puis baisse de 25 %.

- 1) Calcule le coefficient multiplicateur global et le taux d'évolution global.
- 2) Explique pourquoi ce taux n'est pas égal à $10 + 20 - 25 = 5$ %.

Exercice 7 — Proportions dans un lycée

Niveau	10 ^e commune	11 ^e	Terminale	Total
Garçons	100	200	220	520
Filles	140	160	180	480
Total	240	360	400	1 000

Calcule, à 1 % près : le pourcentage de garçons dans le lycée ; de garçons de 10^e dans le lycée ; de garçons parmi les élèves de 10^e ; d'élèves de 10^e parmi les garçons. Pour quel niveau le pourcentage de filles est-il le plus élevé ?

Exercices d'approfondissement**Exercice 8** — Pourcentages par tranches

Le directeur commercial de l'entreprise Dembélé reçoit chaque année une commission sur le chiffre d'affaires (CA) calculée par tranches : 0 % de 0 à 1 000 000 F ; 2 % de 1 000 000 à 2 000 000 F ; 3 % de 2 000 000 à 4 000 000 F ; 4 % au-delà de 4 000 000 F.

- 1) Calcule sa commission pour un CA de 250 000 F, puis de 5 800 000 F.
- 2) Détermine le CA correspondant à une commission de 56 000 F.

Exercice 9 — Prix de vente d'un téléviseur

Un vendeur calcule ses prix ainsi : prix de vente HT = coût d'achat + marge de 20 % du coût d'achat ; puis on ajoute la TVA de 18 %.

- 1) Calcule le prix TTC d'un téléviseur acheté 250 000 F. Le vendeur consent une remise de 5 % : quel prix paie le client ?
- 2) Un autre téléviseur a été vendu, sans remise, 212 400 F TTC. Calcule son prix d'achat.

Exercice 10 — Élections et taux de réussite

- 1) Dans une classe A de 30 élèves, le taux de réussite est 80 % ; dans une classe B de 40 élèves, il est de 70 %. Calcule le taux global.
- 2) Lors d'une élection, le candidat A obtient 1 044 voix de plus que B, soit 50,48 % contre 49,52 %. Calcule le nombre de suffrages exprimés et les voix de chacun.
- 3) Dans une commune, 78 000 personnes sont inscrites ; 57 % se sont abstenues et 90 % des votants se sont exprimés. Le candidat en tête obtient 54 % des suffrages exprimés. Calcule la proportion des suffrages exprimés parmi les inscrits, puis la proportion de voix du candidat en tête parmi les votants et parmi les inscrits.

Exercice 11 — La déforestation de l'Amazonie

La déforestation de l'Amazonie était de 27 000 km² en 2004 et d'environ 4 600 km² en 2011.

- 1) La ministre brésilienne affirmait qu'elle avait baissé de 83 %. Est-ce exact ?
- 2) Soit t le taux annuel moyen de diminution. Montre que $(1 - t)^7 = \frac{23}{135}$, puis calcule t .
- 3) Estime la surface déboisée en 2018 si cette évolution se poursuit.

Situations complexes**Situation complexe 4.1** Fractions · pourcentages · intérêts**L'épargne des femmes du quartier****1 · Contexte**

Trois femmes de Kalaban-Coro, Néné, Kadidia et Mariama, adhèrent à l'association d'épargne des femmes du quartier.

2 · Support

Argent de poche mensuel : Néné 60 000 F ; Kadidia 40 000 F ; Mariama 20 000 F. Néné dépense les $\frac{3}{5}$ pour son entretien, envoie les $\frac{3}{10}$ à sa mère et épargne le reste. Kadidia utilise les $\frac{3}{8}$ pour ses besoins, donne la moitié du reste à son frère étudiant et épargne l'autre moitié. Mariama dépense les $\frac{5}{8}$, donne 5 000 F à son père et épargne le reste. Au bout de 12 mois, chaque femme récupère son épargne augmentée d'un intérêt de 9 %.

3 · Fonction

Tu es la secrétaire de l'association. Tu dois calculer ce que chaque femme recevra.

4 · Consignes

- ❶ Calcule l'épargne mensuelle de chaque femme.
- ❷ Calcule la somme totale que chacune recevra en fin d'année.
- ❸ Calcule, pour chacune, la part de l'argent de poche épargnée (en %) et dis qui épargne proportionnellement le plus.

Situation complexe 4.2 TVA · remises successives · pourcentage en dedans**Les soldes de la Tabaski****1 · Contexte**

À l'approche de la Tabaski, un magasin d'électroménager de l'ACI 2000 annonce une « remise exceptionnelle de 30 % ». Une cliente veut acheter un

réfrigérateur.

2 · Support

Prix affiché TTC : 354 000 F (TVA 18 % incluse). Offre : remise de 20 %, puis remise supplémentaire de 10 % sur le prix remis. Le magasin livre gratuitement dans le district de Bamako.

3 · Fonction

Tu es la conseillère de la cliente. Tu dois vérifier la publicité et calculer le prix réellement payé.

4 · Consignes

- ❶ Calcule le prix HT du réfrigérateur et le montant de la TVA.
- ❷ Calcule le prix payé après les deux remises et le pourcentage de remise réellement obtenu.
- ❸ Dis si l'annonce « 30 % de remise » est exacte. Justifie.

Devoir de synthèse — Séquence 4

Pourcentages

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — TVA et remises

La TVA est de 18 %.

- 1) Calcule le prix TTC d'un article de 85 000 F HT. (1 pt)
- 2) Un article coûte 59 000 F TTC. Calcule son prix HT et le montant de la TVA. (2 pt)
- 3) Un article de 40 000 F HT bénéficie d'une remise de 15 % avant TVA. Calcule le prix TTC payé. (2 pt)

Exercice 2 (5 points) — Pourcentages successifs

- 1) Le prix du litre d'huile augmente de 20 % puis baisse de 20 %. Calcule le taux d'évolution global. (2 pt)
- 2) Un prix augmente de 25 %. De quel pourcentage doit-il baisser pour revenir à sa valeur initiale ? (3 pt)

Exercice 3 (4 points) — Pourcentages par tranches

Une taxe communale sur le revenu mensuel est calculée par tranches : 0 % jusqu'à 50 000 F ; 10 % de 50 000 à 150 000 F ; 20 % au-delà de 150 000 F.

- 1) Calcule la taxe pour un revenu de 120 000 F, puis de 300 000 F. (2 pt)
- 2) Quel revenu correspond à une taxe de 25 000 F ? (2 pt)

Exercice 4 (6 points) — Situation : la marge du commerçant

Un commerçant du marché de Missira achète un sac de riz 60 000 F. Il hésite entre deux façons de calculer sa marge de 25 %.

- 1) Calcule le prix de vente HT si la marge représente 25 % du prix d'achat (pourcentage en dehors). (1,5 pt)
- 2) Calcule le prix de vente HT si la marge représente 25 % du prix de vente (pourcentage en dedans). (2 pt)
- 3) Il retient la seconde méthode, ajoute la TVA de 18 %, puis accorde une remise de 10 % à un client fidèle. Calcule le prix payé par ce client. (2,5 pt)

Séquence 5

Progressions arithmétiques et géométriques

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Définition et propriétés des suites arithmétiques et géométriques : terme général, sens de variation, somme de n termes consécutifs ; insertion de k moyens arithmétiques et de k moyens géométriques entre deux nombres a et b ; intérêts simples et composés.

L'essentiel à retenir

Suite arithmétique de raison r

- $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + nr = u_p + (n - p)r$.
- Croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- $S = \frac{N(\text{premier} + \text{dernier})}{2}$ où N est le nombre de termes.
- a, b, c consécutifs $\Leftrightarrow 2b = a + c$.
- k moyens entre a et b : $r = \frac{b - a}{k + 1}$.

Suite géométrique de raison q

- $u_{n+1} = q u_n$; $u_n = u_0 q^n = u_p q^{n-p}$.
- Si $u_0 > 0$: croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- $S = \text{premier} \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$ ($q \neq 1$).
- a, b, c consécutifs $\Leftrightarrow b^2 = ac$.
- k moyens entre $a > 0$ et $b > 0$: $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k+1}}$.

Intérêts simples au taux t : $C_n = C_0(1 + nt)$ (suite arithmétique). **Intérêts composés** : $C_n = C_0(1 + t)^n$ (suite géométrique).

Exercices d'application

Exercice 1 — Suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- 1) $u_0 = 1$ et $u_{25} = 51$: calcule r et u_{100} .
- 2) $u_5 = 2$ et $u_{10} = -18$: calcule r et u_{52} .
- 3) $u_{26} = 3$ et $u_{42} = -13$: calcule r et u_0 .
- 4) $u_{23} = 20$ et $u_{30} = -1$: calcule r et u_0 .
- 5) $u_0 = 1$ et $r = 4$: calcule $u_3 + u_4 + \dots + u_{200}$.
- 6) $u_0 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$: calcule $u_{100} + u_{101} + \dots + u_{1000}$.
- 7) $u_5 = 8$ et $u_{10} = 28$: calcule r, u_0 , puis $u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{100}$.

Exercice 2 — Suites géométriques

(u_n) est une suite géométrique de raison q .

- 1) $u_5 = 3$ et $q = 3$: calcule u_{10} et u_0 .
- 2) $u_{10} = 2$, $u_{12} = 32$ et $q > 0$: calcule q et u_7 .
- 3) $u_{51} = 3$ et $u_{54} = 10$: calcule u_{57} et u_{48} .
- 4) $u_8 = -24$ et $u_{11} = 192$: calcule q et u_0 .
- 5) $u_0 = 1$ et $q = 2$: calcule $u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$.
- 6) Calcule $S = 13 + 52 + 208 + 832 + 3\,328 + 13\,312 + 53\,248$ et $S' = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$.

Exercice 3 — Premiers termes, rang, raison

- 1) Détermine la raison et le premier terme u_1 d'une suite arithmétique dont le 3^e terme est 3 et le 9^e terme 57.
- 2) Calcule le rang du terme $-11,4$ d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison $-2,3$.
- 3) Une suite arithmétique de raison 5 a pour somme des seize premiers termes 648. Calcule le 1^{er} et le 16^e terme.
- 4) X, Y, Z sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison -4 , de somme 9. Calcule-les.

Exercice 4 — Insertion de moyens

- 1) Insère 4 moyens arithmétiques entre 7 et 32. Insère 9 moyens arithmétiques entre -5 et 15.
- 2) Insère 3 moyens géométriques entre 2 et 162. Insère 4 moyens géométriques entre 1 et 243.
- 3) Le prix d'une tonne de coton graine passe de 250 000 F à 290 000 F en 4 ans ; on suppose une hausse annuelle constante de même montant. Insère les prix des années intermédiaires.

Exercice 5 — Intérêts simples

Siga place 1 000 000 F à intérêts simples au taux mensuel de 0,5 %. V_n est la valeur acquise au bout de n mois.

- 1) Calcule V_1, V_2, V_3 ; exprime V_{n+1} en fonction de V_n . Quelle est la nature de (V_n) ?
- 2) Calcule la valeur acquise au bout de 10 mois. Au bout de combien de temps atteindra-t-elle 1 600 000 F ?

Exercice 6 — Intérêts composés

Bintou place 1 000 000 F à intérêts composés au taux annuel de 5 %. V_n est la valeur acquise au bout de n années.

- 1) Calcule V_1, V_2, V_3 ; montre que (V_n) est géométrique et exprime V_n en fonction de n .
- 2) Calcule la valeur acquise au bout de 10 ans. À l'aide de la calculatrice, détermine au bout de combien d'années le capital aura doublé.

Exercices d'approfondissement

Exercice 7 — Trois nombres

- 1) Trouve trois termes consécutifs a, b, c d'une suite arithmétique tels que $a + b + c = 3$ et $3a - 6b + c = 6$.
- 2) Trouve trois termes consécutifs a, b, c d'une suite géométrique tels que $abc = 216$ et $a + b + c = 19$.
- 3) Trouve les réels a et b tels que $(a; a+4b; 5a+2b)$ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et $(b+3; 3a+1; 6a+b)$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 8 — Suite arithmético-géométrique

Au 1^{er} janvier 2020, la population d'une ville était de 50 000 habitants. Chaque année, elle augmente de 2 % et 500 personnes supplémentaires viennent s'y installer. On note U_n la population au 1^{er} janvier de l'année 2020 + n .

- 1) Calcule U_1 et U_2 , puis exprime U_{n+1} en fonction de U_n .
- 2) Soit $V_n = U_n + 25\,000$. Montre que (V_n) est géométrique de raison 1,02. Exprime V_n , puis U_n , en fonction de n .
- 3) Calcule la population en 2030. En quelle année dépassera-t-elle 100 000 habitants ?

Exercice 9 — Abonnement et budget

En 2020, l'abonnement annuel à une revue coûte 20 000 F ; il augmente de 6 % chaque année. P_n est le prix en 2020 + n .

- 1) Montre que (P_n) est géométrique ; exprime P_n en fonction de n .
- 2) Résous dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1,06^n \geq 2,5$ (calculatrice).
- 3) Mlle Guindo dispose d'un budget annuel de 50 000 F pour cet abonnement. Ce budget suffira-t-il toujours ? Justifie.

Exercice 10 — L'élection du bureau de l'association

Lors de l'élection du bureau d'une association de n candidats, le candidat classé k^e a obtenu le double des voix du candidat classé $(k+1)^e$. On note v_1 les voix du premier, ..., v_n celles du dernier.

- 1) Montre que (v_k) est géométrique ; précise la raison.

- 2) Exprime le nombre $S_n = v_1 + \dots + v_n$ de suffrages exprimés en fonction de n et v_1 . Montre que $v_1 > \frac{S_n}{2}$: un second tour était-il nécessaire ?
- 3) Il y a eu 945 suffrages exprimés et l'élu a obtenu 480 voix. Combien y avait-il de candidats ?

Situations complexes

Situation complexe 5.1 Suite géométrique · somme · comparaison

Le choix du contrat de travail

1 · Contexte

Awa, comptable diplômée, reçoit deux propositions d'embauche pour un contrat de 10 ans dans des entreprises de Bamako.

2 · Support

Entreprise A : salaire annuel de 2 400 000 F la 1^{re} année, augmenté de 150 000 F chaque année. Entreprise B : salaire annuel de 2 200 000 F la 1^{re} année, augmenté de 5 % chaque année. Les deux entreprises sont situées à moins de 5 km de son domicile.

3 · Fonction

Tu es la conseillère d'orientation d'Awa. Tu dois l'aider à choisir le contrat le plus avantageux.

4 · Consignes

- 1 Identifie la nature des suites des salaires annuels (a_n) et (b_n) et exprime le salaire de la n -ième année dans chaque cas.
- 2 Calcule le salaire de la 10^e année dans chaque entreprise.
- 3 Calcule le total perçu sur 10 ans dans chaque entreprise et conseille Awa.

Situation complexe 5.2 Suites arithmétique et géométrique · seuil

La moto de Yaya

1 · Contexte

Le 1^{er} janvier 2025, Yaya reçoit 100 000 F de son père. Il veut acheter une moto de 300 000 F et hésite entre deux placements.

2 · Support

Placement 1 : caisse d'épargne à intérêts composés, 5 % par an. Placement 2 : tontine qui ajoute 12 000 F par an (intérêts simples). Le prix de la moto reste stable. Yaya habite Kati.

3 · Fonction

Tu es l'ami de Yaya, élève en Terminale SECO. Tu dois lui expliquer quel

placement lui permettra d'acheter la moto le plus tôt.

4 · Consignes

- ❶ Exprime, pour chaque placement, l'avoir de Yaya au bout de n années.
- ❷ Détermine, pour chaque placement, l'année à partir de laquelle il pourra acheter la moto.
- ❸ Compare les avoirs des deux placements au bout de 5 ans, puis au bout de 40 ans. Un placement est-il toujours meilleur que l'autre ? Conclus.

Devoir de synthèse — Séquence 5

Progressions arithmétiques et géométriques

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_{10} = 32$.

- 1) Calcule la raison r et u_0 ; exprime u_n en fonction de n . (2 pt)
- 2) Calcule $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$. (1,5 pt)
- 3) Insère trois moyens arithmétiques entre 10 et 30. (1,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Suite géométrique

(v_n) est une suite géométrique de termes positifs telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.

- 1) Calcule la raison q et v_0 ; exprime v_n en fonction de n . (2 pt)
- 2) Calcule $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_9$. (1,5 pt)
- 3) Insère quatre moyens géométriques entre 3 et 96. (1,5 pt)

Exercice 3 (10 points) — Situation : deux plans d'épargne

Mariam, couturière à Kati, veut épargner pendant 12 mois. Elle hésite entre deux plans. Plan A : elle verse 20 000 F le 1^{er} mois, puis 2 000 F de plus chaque mois. Plan B : elle verse 20 000 F le 1^{er} mois, puis 5 % de plus chaque mois.

- 1) On note a_n et b_n les versements du n -ième mois. Précise la nature de chaque suite et exprime a_n et b_n en fonction de n . (2 pt)
- 2) Calcule le versement du 12^e mois dans chaque plan. (2 pt)
- 3) Calcule le total épargné sur 12 mois dans chaque plan. Quel plan permet d'épargner le plus ? (3 pt)
- 4) À l'aide de la calculatrice, détermine à partir de quel mois le versement du plan B dépasserait celui du plan A si l'épargne se prolongeait. (1 pt)
- 5) Mariam place ensuite 1 000 000 F à intérêts composés au taux annuel de 6 %. Au bout de combien d'années son capital dépassera-t-il 1 500 000 F ? (2 pt)

Unité d'apprentissage 2

UA2

Dérivation · Primitives et intégrales · Études de fonctions · Logarithme · Exponentielle et puissances

Séquence 6

Limites, continuité et dérivation

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Limites et continuité (rappels) ; fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ; dérivée de la composée de deux fonctions dérivables ; dérivée de la fonction réciproque ; dérivée de $x \mapsto x^m$ ($m \in \mathbb{Q}$) ; dérivée seconde ; applications économiques (coût marginal, élasticité).

L'essentiel à retenir

- Limite d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$: limite du quotient des termes de plus haut degré. Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » en a : on factorise par $(x - a)$ ou on multiplie par l'expression conjuguée.
- f est **continue en** a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (pour une fonction définie par morceaux : limites à gauche et à droite égales à $f(a)$).
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$; sa **réciproque** f^{-1} est continue, de même sens de variation, et $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- **Composée** : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$. En particulier $(u^n)' = n u' u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$.
- **Réciproque** : si $f'(x_0) \neq 0$ et $y_0 = f(x_0)$, alors $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- Pour $m \in \mathbb{Q}$ et $x > 0$: $(x^m)' = m x^{m-1}$; par exemple $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
- **Dérivée seconde** : $f'' = (f')'$. Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 , le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion (la vitesse de variation f' y est extrémale).
- En économie : **coût marginal** $C_m(q) \approx C(q+1) - C(q)$, assimilé à $C'(q)$; **élasticité** de la demande $q(p)$: $e(p) = \frac{p q'(p)}{q(p)}$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Limites

Calcule :

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x \rightarrow 6} \frac{36 - x^2}{x - 6} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x - 1} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} \\
\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x + 4} - 3} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 5}{2x + 3} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{-x^4 - 3x^2 + 1}
\end{array}$$

Exercice 2 — Limites à gauche et à droite, asymptotesCalcule les limites à gauche et à droite en x_0 et interprète graphiquement : a)

$$f(x) = \frac{4x}{x+1}, x_0 = -1 ; \text{ b) } f(x) = \frac{x^2}{21-7x}, x_0 = 3 ; \text{ c) } f(x) = \frac{2}{1-x}, x_0 = 1.$$

Exercice 3 — Continuité

- 1) $f(x) = x^2 + 4$ si $x \leq 2$ et $f(x) = 3x + 2$ si $x > 2$. f est-elle continue en 2 ?
- 2) $g(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ si $x \leq -1$ et $g(x) = x^2 + x + 2$ si $x > -1$. Étudie la continuité de g en -1 .
- 3) $h(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = m$. Détermine m pour que h soit continue en 0.

Exercice 4 — Dérivées usuelles et composées

Précise l'ensemble de dérivabilité puis calcule la dérivée :

$$\begin{array}{lll}
f_1(x) = x^3 - 5x^2 + x + \sqrt{6} & f_2(x) = (1 + 4x)(-x^3 + 5) & f_3(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{3x - 1} \\
f_4(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + x - 2} & & \\
f_5(x) = (-x^2 + 4x - 1)^4 & f_6(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & f_7(x) = \frac{5}{(3 - 4x)^2} \\
f_8(x) = x^{\frac{5}{2}} & f_9(x) = \sqrt[3]{x} \ (x > 0) &
\end{array}$$

Exercice 5 — TangentesDétermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0

$$\text{ : a) } f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3, x_0 = 1 ; \text{ b) } f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 2}, x_0 = -2 ; \text{ c) } f(x) = \sqrt{2x + 5}, x_0 = 2.$$

Exercice 6 — Dérivée seconde

Calcule f' et f'' pour $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 8$; $g(x) = \frac{1}{x+1}$; $h(x) = \sqrt{x-1}$.
 Pour f , étudie le signe de f'' et donne l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 7 — Fonction réciproque

Soit $f(x) = x^2 + 2x$ définie sur $I = [-1 ; +\infty[$.

- 1) Montre que f est continue et strictement croissante sur I . Détermine $J = f(I)$.
- 2) Justifie que f admet une réciproque f^{-1} définie sur J . Résous $f(x) = y$ et donne l'expression de $f^{-1}(y)$.
- 3) Calcule $f(1)$ et $f'(1)$. Déduis-en $(f^{-1})'(3)$, puis vérifie avec l'expression de f^{-1} .

Exercices d'approfondissement**Exercice 8** — Coût marginal

Le coût total de production de x objets est $C(x) = 180 + 12x - 0,01x^2$ (en milliers de francs), pour $0 \leq x \leq 500$.

- 1) Calcule la valeur exacte $C(x+1) - C(x)$ du coût marginal.
- 2) Calcule $C'(x)$. Quelle erreur commet-on en prenant $C'(x)$ comme valeur approchée du coût marginal ?

Exercice 9 — Retrouver une fonction à partir de son tableau

Une fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

- 1) Calcule $f'(x)$ et détermine a , b et c .
- 2) Donne une équation de la tangente à la courbe aux points d'abscisses -3 et 1 .

Exercice 10 — Élasticité d'une demande

La demande d'un produit en fonction de son prix p (en centaines de francs) est $q(p) = 200\sqrt{100 - p}$, pour $0 \leq p < 100$.

- 1) Calcule $q'(p)$ (dérivée d'une composée) et étudie le sens de variation de q .
- 2) Montre que l'élasticité est $e(p) = \frac{-p}{2(100 - p)}$. Calcule $e(60)$ et interprète.

Situations complexes

Situation complexe 6.1 Dérivée d'une composée · élasticité · maximum**Le prix du ticket du parc****1 · Contexte**

La direction d'un parc de loisirs de Bamako veut fixer le prix du ticket d'entrée qui rapporte la plus grande recette hebdomadaire.

2 · Support

Une étude montre que le nombre de visiteurs par semaine est $q(p) = 200\sqrt{100 - p}$, où p est le prix du ticket en dizaines de francs ($0 \leq p \leq 100$). La recette hebdomadaire est $R(p) = p \times q(p)$ (en dizaines de francs). Le parc ouvre du mardi au dimanche.

3 · Fonction

Tu es le conseiller commercial du parc. Tu dois proposer un prix et justifier ton choix.

4 · Consignes

- ❶ Calcule $R'(p)$ et montre que $R'(p) = \frac{100(200 - 3p)}{\sqrt{100 - p}}$.
- ❷ Dresse le tableau de variations de R sur $[0 ; 100[$ et détermine le prix qui maximise la recette (arrondi à 10 F près), le nombre de visiteurs et la recette correspondante.
- ❸ Vérifie que l'élasticité $e(p) = \frac{-p}{2(100 - p)}$ vaut -1 pour ce prix et explique ce que cela signifie.

Situation complexe 6.2 Dérivée seconde · vitesse de production**L'usine d'égrenage de coton de Koutiala****1 · Contexte**

Le chef d'équipe d'une usine d'égrenage de coton de Koutiala étudie le rythme de travail de son équipe pendant un poste de 8 heures.

2 · Support

Nombre de balles de coton produites t heures après le début du poste : $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 30t$, pour $0 \leq t \leq 8$. La vitesse de production est $V(t) = P'(t)$ (balles par heure). L'équipe compte 25 ouvriers.

3 · Fonction

Tu es le chef d'équipe. Tu dois déterminer le moment le plus productif et placer la pause.

4 · Consignes

- ❶ Calcule $V(t)$ et la production totale du poste.
- ❷ Calcule $P''(t)$, étudie son signe et déduis-en l'instant où la vitesse de pro-

duction est maximale, ainsi que cette vitesse.

- ❸ Détermine l'instant à partir duquel la vitesse devient inférieure à 30 balles par heure, et propose l'heure de la pause.

Devoir de synthèse — Séquence 6

Limites, continuité et dérivation

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Calcul de dérivées

Calcule la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle où elle est dérivable :

$$f(x) = (3x^2 - 1)^4 \quad g(x) = \sqrt{2x^2 + 1} \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \quad k(x) = x^{\frac{5}{3}} \quad (x > 0)$$

(6 pt)

Exercice 2 (5 points) — Dérivée seconde et tangente

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

- 1) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$; dresse le tableau de variations de f . (2,5 pt)
- 2) Calcule $f''(x)$, étudie son signe et donne les coordonnées du point d'inflexion. (1,5 pt)
- 3) Détermine une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. (1 pt)

Exercice 3 (4 points) — Continuité et fonction réciproque

- 1) Soit $g(x) = ax + 1$ si $x \leq 1$ et $g(x) = x^2 + 2$ si $x > 1$. Détermine a pour que g soit continue en 1. (1,5 pt)
- 2) Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Justifie que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Calcule $f(1)$, puis $(f^{-1})'(2)$. (2,5 pt)

Exercice 4 (5 points) — Situation : le coût marginal à l'atelier de couture

Le coût total de fabrication de q dizaines de tenues dans un atelier de couture de Bamako est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$ (en milliers de francs), pour $0 \leq q \leq 10$.

- 1) Calcule le coût marginal $C'(q)$ et justifie que le coût total est croissant. (2 pt)
- 2) Calcule $C''(q)$ et détermine la production pour laquelle le coût marginal est minimal, ainsi que ce coût marginal. (2 pt)
- 3) Interprète économiquement ce résultat. (1 pt)

Séquence 7

Primitives et intégrales

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Primitives d'une fonction : définition, tableau des primitives usuelles ; intégrale d'une fonction continue sur $[a; b]$: définition et notation ; calcul d'aire ; intégration par parties ; applications économiques (coût total, valeur moyenne, surplus).

L'essentiel à retenir

- F est une **primitive** de f sur I si $F' = f$ sur I . Les primitives de f sont les fonctions $F + k$ (k constante) ; une condition $F(x_0) = y_0$ fixe la constante.
- Primitives usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	$u'u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $ (séqu. 9)
$\frac{1}{x}$	$\ln x $ (séqu. 9)	$u'e^u$	e^u (séqu. 10)

- Si F est une primitive de f continue sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Linéarité, relation de Chasles, et si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Aire** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$ est $\int_a^b f(x) dx$ unités d'aire ; entre deux courbes ($f \geq g$) : $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
- **Intégration par parties** : $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.
- En économie : le coût total C_T est la primitive du coût marginal C_m telle que $C_T(0) = \text{coûts fixes}$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Primitives

Détermine une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_3(x) = (2x + 1)^4 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = x(x^2 + 3)^2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_5(x) = \frac{2}{(2x - 1)^2} \text{ sur }]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f_6(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 2 — Primitive vérifiant une condition

- 1) Détermine la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.
- 2) Détermine la primitive G de $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ sur $]0; +\infty[$ telle que $G(4) = 10$.

Exercice 3 — Calculs d'intégrales

Calcule :

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx & \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ & \int_{-1}^1 (x^3 + x) dx & \int_1^2 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ & \int_0^1 (2x + 1)^3 dx \end{aligned}$$

Exercice 4 — Aires

- 1) Calcule l'aire du domaine limité par la parabole $y = -x^2 + 4x$ et l'axe des abscisses. Fais une figure.
- 2) Calcule l'aire du domaine compris entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 2x$.

Exercice 5 — Valeur moyenne

La température (en °C) à Kayes, t heures après 6 h, est modélisée par $T(t) = -0,25t^2 + 3t + 26$ pour $0 \leq t \leq 12$. Calcule la température moyenne entre 6 h et 18 h.

Exercice 6 — Intégration par parties — à traiter après les séquences 9 et 10

Calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^1 x e^x dx \quad \int_1^e \ln x dx$$

$$\int_1^e x \ln x dx \quad \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$$

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Du coût marginal au coût moyen — après la séquence 9

Une entreprise fabrique une quantité x (en milliers de tonnes) d'un produit, dont le coût marginal est $C(x) = x + \frac{4}{x+1}$ sur $[0; 10]$ (en centaines de millions de francs).

- 1) Vérifie que le coût total C_T , primitive de C qui s'annule en 0, est $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1)$.
- 2) Soit $f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8 \ln(x+1)$ sur $[0; 10]$. Montre que $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$; dresse le tableau de variations de f et justifie que f s'annule en une unique valeur $\alpha \in]1; 10[$. Vérifie que $1,712 < \alpha < 1,713$.
- 3) Le coût moyen est $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{4 \ln(x+1)}{x}$ sur $]0; 10]$. Montre que $C'_M(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$, puis détermine la production qui minimise le coût moyen et ce coût minimal.

Exercice 8 — Aire et bénéfice cumulé

Le bénéfice marginal d'une entreprise est $b(x) = -3x^2 + 12x + 15$ (en milliers de francs par unité), pour $0 \leq x \leq 6$.

- 1) Étudie le signe de $b(x)$ sur $[0; 6]$.
- 2) Calcule $\int_0^5 b(x) dx$ et interprète ce résultat comme une aire et comme une variation de bénéfice.

Situations complexes**Situation complexe 7.1** Primitive · coût total · bénéfice maximal**L'atelier de fabrication de charrettes****1 · Contexte**

Un atelier de soudure de Ségou fabrique des charrettes asines pour les

paysans. Le gérant ne connaît que son coût marginal et ses coûts fixes.

2 · Support

Coût marginal pour x charrettes : $C_m(x) = 3x^2 - 12x + 20$ (en milliers de francs). Coûts fixes mensuels : 50 000 F. Chaque charrette est vendue 56 000 F. L'atelier emploie 4 soudeurs et produit au plus 10 charrettes par mois.

3 · Fonction

Tu es le comptable de l'atelier. Tu dois établir les fonctions de coût et de bénéfice et conseiller le gérant.

4 · Consignes

- 1 Détermine le coût total $C_T(x)$ et calcule le coût de production de 10 charrettes.
- 2 Exprime le bénéfice $B(x)$ et étudie ses variations sur $[0 ; 10]$.
- 3 Détermine le nombre de charrettes à fabriquer pour un bénéfice maximal, et ce bénéfice.

Situation complexe 7.2 Intégrale · aire entre deux courbes · surplus**Le marché de la mangue à Sikasso****1 · Contexte**

Une association de producteurs de mangues de Sikasso étudie le marché local pour mieux négocier avec les acheteurs.

2 · Support

Pour une quantité x (en centaines de tonnes), le prix de demande est $p_d(x) = 100 - x^2$ et le prix d'offre est $p_o(x) = 4x + 40$ (en milliers de francs la tonne). Le *surplus des consommateurs* est l'aire entre la courbe de demande et la droite $y = p_0$ (prix d'équilibre) de 0 à x_0 ; le *surplus des producteurs* est l'aire entre la droite $y = p_0$ et la courbe d'offre de 0 à x_0 . La saison dure d'avril à juin.

3 · Fonction

Tu es l'économiste de l'association. Tu dois présenter l'équilibre du marché et les gains des deux parties.

4 · Consignes

- 1 Détermine la quantité d'équilibre x_0 et le prix d'équilibre p_0 .
- 2 Calcule le surplus des consommateurs à l'aide d'une intégrale.
- 3 Calcule le surplus des producteurs et dis quelle partie profite le plus de l'équilibre.

Devoir de synthèse — Séquence 7

Primitives et intégrales

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Primitives

- 1) Détermine une primitive de $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$, de $g(x) = (3x - 1)^4$ et de $h(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$. (3 pt)
- 2) Détermine la primitive F de f telle que $F(1) = 0$. (2 pt)

Exercice 2 (5 points) — Calculs d'intégrales

- 1) Calcule $I = \int_0^3 (x^2 - 2x) dx$. Ce résultat représente-t-il une aire ? Explique. (2 pt)
- 2) Calcule $J = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ et $K = \int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$. (3 pt)

Exercice 3 (4 points) — Aire entre deux courbes

Calcule l'aire du domaine compris entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = x + 2$. Fais une figure. (4 pt)

Exercice 4 (6 points) — Situation : recette et coût de la fromagerie peule

Une fromagerie de Mopti (fromage peul « wagassi ») produit x centaines de fromages par mois ($0 \leq x \leq 20$). La recette marginale est $R_m(x) = 120 - 4x$ et le coût marginal $C_m(x) = 2x + 30$ (en milliers de francs). Les coûts fixes sont de 400 000 F et la recette est nulle pour $x = 0$.

- 1) Détermine la recette totale $R(x)$ et le coût total $C(x)$. (2 pt)
- 2) Montre que le bénéfice est $B(x) = -3x^2 + 90x - 400$ et détermine la production qui le rend maximal, ainsi que ce bénéfice. (2,5 pt)
- 3) Calcule la recette moyenne $\frac{1}{20} \int_0^{20} R(x) dx$. (1,5 pt)

Séquence 8

Études de fonctions polynômes et rationnelles

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Étude et représentation graphique de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles ; asymptotes verticales, horizontales et obliques ; position relative d'une courbe et d'une asymptote ; fonctions économiques (coût total, coût moyen, coût marginal, recette, bénéfice).

L'essentiel à retenir

- Plan d'étude : ensemble de définition ; limites aux bornes ; dérivée et signe ; tableau de variations ; asymptotes ; points particuliers (intersections avec les axes, tangentes) ; tableau de valeurs ; courbe. (La recherche des points d'inflexion n'est pas systématique.)
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$: asymptote **verticale** $x = a$. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$: asymptote **horizontale** $y = b$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$: la droite $y = ax + b$ est asymptote **oblique**.
Pour $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg P = \deg Q + 1$, on écrit $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$ (division euclidienne). Le signe de $f(x) - (ax + b)$ donne la position relative.
- Économie : coût moyen $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$; coût marginal $C'(x)$; recette $R(x) = px$; bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$. Au minimum du coût moyen, $C_M(x_0) = C'(x_0)$ et la tangente à la courbe du coût total passe par l'origine.

Exercices d'application

Exercice 1 — Fonction polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Calcule $f'(x)$, étudie son signe et dresse le tableau de variations de f .
- 3) Détermine une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 et étudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
- 4) Vérifie que $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ et construis $(\mathcal{C})$ et (T) .

Exercice 2 — Fonction polynôme de degré 4

Soit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.

- 1) Calcule les limites aux bornes ; montre que $f'(x) = 4x(x-1)(x-2)$.
- 2) Dresse le tableau de variations de f ; précise les extremums. Construis la courbe.

Exercice 3 — Asymptotes

Pour chaque fonction, donne l'ensemble de définition, calcule les limites aux bornes et déduis-en les asymptotes :

$$f_1(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 1} \quad f_2(x) = \frac{x - 3}{-x^2 + x + 2}$$

$$f_3(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 4x + 8} \quad f_4(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Pour f_1 , écris $f_1(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ et étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.

Exercice 4 — Fonction rationnelle avec asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe.

- 1) Détermine D_f , les limites aux bornes et l'asymptote verticale.
- 2) Détermine a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$. Montre que (D) : $y = x + 1$ est asymptote oblique et étudie la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D).
- 3) Calcule $f'(x)$, dresse le tableau de variations et précise les extremums relatifs.
- 4) Construis ($\mathcal{C}$) et ses asymptotes. Montre que le point $\Omega(-2; -1)$ est centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

Exercice 5 — Fonction rationnelle paire

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

- 1) Détermine D_f , les limites aux bornes et les asymptotes. Montre que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe.
- 2) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations. Détermine les points d'intersection avec les axes et construis la courbe.

Exercice 6 — Coût moyen et asymptote

Le coût de production de x jouets est $C(x) = 0,5x^2 + x + 4$ (en milliers de francs), $x > 0$.

- 1) Vérifie que le coût moyen est $C_M(x) = 0,5x + 1 + \frac{4}{x}$ et étudie ses variations ; donne le coût moyen minimal.
- 2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [C_M(x) - (0,5x + 1)]$ et interprète graphiquement puis économiquement.

Exercices d'approfondissement

Exercice 7 — Coût moyen minimal et coût marginal

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit pour un coût $C(x) = \frac{x^2}{10} + 20x + 1\,960$ (en francs), $x > 0$.

- 1) Calcule $C'_M(x)$ et déduis-en la valeur x_0 qui minimise le coût moyen.
- 2) Calcule $C'(x)$ et vérifie que $C'(x_0) = C_M(x_0)$.
- 3) Vérifie que la tangente à la courbe du coût total au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Exercice 8 — La maroquinerie

Une maroquinerie de Bamako fabrique chaque jour x sacs ($0 \leq x \leq 10$) pour un coût $f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x$ (en milliers de francs). Chaque sac est vendu 14 000 F.

- 1) Étudie le sens de variation de f et construis sa courbe (1 cm pour 1 sac ; 1 cm pour 40 000 F).
- 2) Exprime le bénéfice $h(x)$ et vérifie que $h(x) = -x(x-1)(x-6)$.
- 3) Trace la droite de recette $y = 14x$ et détermine graphiquement, puis par le calcul, les productions rentables.

Exercice 9 — Le camion Bamako-Ségou

Un camion effectue le trajet Bamako-Ségou (240 km) à la vitesse moyenne de x km/h. Sa consommation de gasoil est de $6 + \frac{x^2}{800}$ litres par heure. Le gasoil coûte 800 F le litre et le chauffeur est payé 1 600 F de l'heure.

- 1) Exprime en fonction de x la durée du trajet, le salaire du chauffeur et le coût du gasoil. Montre que le coût du trajet est $f(x) = 240x + \frac{1\,536\,000}{x}$.
- 2) Étudie les variations de f sur $]0; +\infty[$; détermine la vitesse qui rend le coût minimal et ce coût.
- 3) Détermine les asymptotes à la courbe de f ; complète un tableau de valeurs pour $x \in \{40; 60; 80; 100; 120\}$ et trace la courbe.

Exercice 10 — Recette, charges et bénéfice

La recette totale de la récolte d'un produit agricole est $R(x) = -0,4x^2 + 8x$ et les charges totales sont $g(x) = 25 + x$ (x en milliers de tonnes, montants en millions de francs).

- 1) Étudie R et représente-la avec la droite des charges. Détermine leurs points d'intersection.
- 2) Détermine le bénéfice $B(x)$, la zone de bénéfice et la production qui le rend maximal.

Exercice 11 — Population d'une ville nouvelle

La population (en milliers) d'une ville nouvelle fondée en 1960 est $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$, où x est le nombre d'années depuis début 1960.

- 1) Écris $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$; calcule $f'(x)$ et justifie que la population croît.
- 2) Résous $f(x) = 52$. À partir de quelle année la population dépasse-t-elle 52 000 habitants ?
- 3) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interprète.

Situations complexes**Situation complexe 8.1** Fonction polynôme · tangente · bénéfice maximal**L'unité de transformation du karité****1 · Contexte**

Une coopérative de femmes de Bougouni transforme les amandes de karité en beurre. Elle veut connaître les quantités rentables et la production optimale.

2 · Support

Pour x tonnes de beurre produites ($0 \leq x \leq 13$), le coût de production est $p(x) = x^3 - 15x^2 + 76x$ (en milliers de francs). La tonne est vendue 40 000 F ; la recette est $r(x) = 40x$ et le bénéfice $b(x) = r(x) - p(x)$. La coopérative compte 60 membres.

3 · Fonction

Tu es la conseillère en gestion de la coopérative. Tu dois analyser les coûts et proposer une production.

4 · Consignes

- ① Étudie le sens de variation de p sur $[0 ; 13]$ et calcule le coût de production de la troisième tonne et de la douzième tonne.
- ② Vérifie que $b(x) = -x(x - 3)(x - 12)$ et déduis-en les productions pour lesquelles la coopérative réalise un bénéfice.
- ③ Étudie les variations de b , détermine la production qui donne le bénéfice maximal (à 0,01 t près) et donne ce bénéfice et le coût correspondant, arrondis à 1 000 F près.

Situation complexe 8.2 Fonction rationnelle · coût moyen · lecture graphique**La farine de mil de Ségou****1 · Contexte**

Une petite unité agroalimentaire de Ségou produit de la farine de mil enrichie

pour les cantines scolaires. Elle peut produire entre 0,3 et 6 tonnes par jour.

2 · Support

Le coût moyen de production d'une tonne, pour x tonnes produites, est $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ (en dizaines de milliers de francs). La tonne est vendue 200 000 F. L'unité fonctionne 6 jours sur 7.

3 · Fonction

Tu es le gestionnaire de l'unité. Tu dois déterminer les niveaux de production rentables.

4 · Consignes

- ❶ Montre que $f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{x^2}$, dresse le tableau de variations de f sur $[0,3 ; 6]$ et donne le coût moyen minimal.
- ❷ Calcule la recette, le coût total et le bénéfice pour une production de 3 tonnes.
- ❸ Trace la courbe de f et la droite $y = 20$, puis détermine graphiquement et par le calcul les productions pour lesquelles l'unité réalise un profit.

Devoir de synthèse — Séquence 8

Études de fonctions polynômes et rationnelles

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Fonction polynôme

Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. (1 pt)
- 2) Montre que $f'(x) = -3(x+1)(x-3)$ et dresse le tableau de variations de f . (3 pt)
- 3) Donne les extremums de f . (1 pt)

Exercice 2 (8 points) — Fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Détermine D_f et les limites de f aux bornes de D_f . (1,5 pt)
- 2) Montre que $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$. Dédus-en que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont tu donneras les équations, et étudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (2,5 pt)
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ et dresse le tableau de variations de f . (2,5 pt)
- 4) Trace $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes. (1,5 pt)

Exercice 3 (7 points) — Situation : la briqueterie

Une briqueterie de Kati produit x centaines de briques par jour ($1 \leq x \leq 20$). Le coût total est $C(x) = x^2 + 8x + 36$ (en milliers de francs) et la centaine de briques est vendue 28 000 F.

- 1) Exprime le coût moyen $C_M(x)$, étudie ses variations et donne le coût moyen minimal. (2,5 pt)
- 2) Montre que la droite $y = x + 8$ est asymptote à la courbe de C_M . (1 pt)
- 3) Montre que le bénéfice est $B(x) = -(x-2)(x-18)$; déduis-en les productions rentables, la production qui maximise le bénéfice et ce bénéfice. (3,5 pt)

Séquence 9

Fonction logarithme népérien et logarithme décimal

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonction logarithme népérien : définition (primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1), propriétés algébriques, étude, limites usuelles ; équations, inéquations et systèmes ; fonctions $\ln u$; logarithme décimal ; activités numériques ; applications économiques.

L'essentiel à retenir

- $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln 1 = 0$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; elle est strictement croissante ; $\ln e = 1$ ($e \approx 2,718$).
- Pour $a > 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- $\ln a = \ln b \iff a = b$; $\ln a < \ln b \iff a < b$ (pour $a, b > 0$) ; $\ln x > 0 \iff x > 1$. **Toujours** déterminer d'abord le domaine de validité.
- Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- Si $u > 0$ est dérivable : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- **Logarithme décimal** : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$; $\log 10^n = n$; mêmes règles de calcul que $\ln$; $\log x = y \iff x = 10^y$. Un entier $N \geq 1$ a k chiffres si et seulement si $k - 1 \leq \log N < k$.

Exercices d'application**Exercice 1 — Calculs**

- 1) Exprime en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: $\ln 12$; $\ln \frac{9}{8}$; $\ln \sqrt{24}$; $\ln 36 - 2 \ln 6 + \ln \frac{1}{27}$.
- 2) Simplifie $A = \ln(e^3) - \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e^2}$ et $B = \log 1\,000 - \log 0,01 + \log \sqrt{10}$.

Exercice 2 — ÉquationsRésous dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(5 - 2x) = 0$ b) $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5)$

c) $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$ d) $6(\log x)^2 + 7 \log x - 3 = 0$

Exercice 3 — InéquationsRésous dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$ b) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$

c) $\ln(x + 5) + \ln(x + 4) \leq \ln(x + 13)$ d) $2(\ln 2x)^2 - 5 \ln 2x - 3 \leq 0$

Exercice 4 — SystèmesRésous dans $\mathbb{R}^2$:

a)
$$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$$

Exercice 5 — Polynôme et logarithmeSoit $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.1) Vérifie que $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(x + 3)$ et résous $P(x) = 0$.2) Déduis-en les solutions de : a) $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$; b) $\ln 2x - \ln 3 = \ln(1 + x^2) - \ln(4 - x^2)$.**Exercice 6 — Dérivées avec $\ln$** Calcule la dérivée de : $f_1(x) = x \ln x - x$; $f_2(x) = \frac{\ln x}{x}$; $f_3(x) = \ln(x^2 + 1)$; $f_4(x) = (\ln x)^2$; $f_5(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Déduis-en une primitive de $\frac{2x}{x^2+1}$ et de $\frac{\ln x}{x}$.**Exercice 7 — Logarithme décimal**1) Calcule $\log 2^{100}$ (avec $\log 2 \approx 0,30103$) et déduis-en le nombre de chiffres de 2^{100} .2) L'intensité sonore en décibels est $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Un marteau-piqueur produit un son 10 000 000 de fois plus intense que I_0 . Calcule L . Que devient L si l'intensité est multipliée par 100 ?3) Un capital placé à 8 % par an double au bout de n années. Montre que $n = \frac{\log 2}{\log 1,08}$ et calcule n .

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 — Étude d'une fonction avec $\ln$

Soit $f(x) = 1 + (\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f .
- 3) Détermine une équation de la tangente (T) au point d'abscisse e ; montre qu'elle passe par l'origine. Trace (T) et $(\mathcal{C})$.

Exercice 9 — Étude de $x \mapsto x - 1 - \ln x$

Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- 1) Étudie les variations de g et calcule son minimum. Dédus-en que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
- 2) Interprète graphiquement ce résultat (tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1).

Situations complexes

Situation complexe 9.1 Logarithme · signe · résolution d'inéquations

Le bénéfice de la boulangerie

1 · Contexte

Une boulangerie de Sébénikoro (Bamako) fabrique et vend des baguettes. Le propriétaire veut savoir combien de baguettes produire par jour.

2 · Support

Pour x centaines de baguettes ($1 \leq x \leq 10$), le résultat journalier (bénéfice ou perte) en centaines de milliers de francs est $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$. On admet que $f'(x) = \frac{5(3 - 2 \ln x)}{x}$. Données : $e \approx 2,718$; $e^{1,5} \approx 4,482$; $e^2 \approx 7,389$. La boulangerie emploie 5 personnes.

3 · Fonction

Tu es le comptable de la boulangerie. Tu dois conseiller le propriétaire sur la production.

4 · Consignes

- 1 Étudie le signe de $f(x)$ et détermine, à une baguette près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
- 2 Dresse le tableau de variations de f sur $[1; 10]$ et donne la production qui rend le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice en francs.
- 3 Détermine les productions qui assurent un bénéfice d'au moins 100 000 F.

Situation complexe 9.2 Logarithme · lecture graphique · seuil de rentabilité**L'atelier de pièces détachées de motos****1 · Contexte**

Un atelier de la zone industrielle de Bamako fabrique des pièces détachées pour les motos de transport (« moto-taxis »).

2 · Support

Pour x lots de pièces fabriqués par mois ($0 \leq x \leq 15$), le coût de production est $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 1$ (en millions de francs). Chaque lot est vendu 800 000 F. L'atelier livre à Bamako, Kati et Koulikoro.

3 · Fonction

Tu es l'ingénieur de production. Tu dois déterminer le nombre minimal de lots à vendre pour être rentable.

4 · Consignes

- ❶ Étudie les variations de f sur $[0 ; 15]$, complète un tableau de valeurs (au dixième) et trace la courbe de f et la droite $(D) : y = 0,8x$.
- ❷ Montre que le bénéfice mensuel est $B(x) = 0,8x - 1 - 2 \ln(x + 1)$; calcule $B(3)$ et $B(14)$ et interprète.
- ❸ Détermine, en justifiant graphiquement et par le calcul, le nombre minimal de lots à vendre pour réaliser un bénéfice.

Devoir de synthèse — Séquence 9

Fonction logarithme népérien et logarithme décimal

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Équations et inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 8)$ (2 pt)
- 2) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ (1,5 pt)
- 3) $\ln(2x - 1) \leq \ln(x + 3)$ (1,5 pt)

Exercice 2 (4 points) — Logarithme décimal

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log x + \log(x - 3) = 1$. (2 pt)
- 2) Calcule $\log 3^{50}$ (avec $\log 3 \approx 0,4771$) et déduis-en le nombre de chiffres de 3^{50} . (2 pt)

Exercice 3 (11 points) — Situation : le bénéfice de la boutique de pagnes

Une boutique de pagnes du Grand Marché vend x centaines de pagnes par mois ($1 \leq x \leq 15$). Le bénéfice mensuel, en centaines de milliers de francs, est $B(x) = 6 \ln x - x + 2$.

- 1) Calcule $B'(x)$ et dresse le tableau de variations de B sur $[1 ; 15]$. (3 pt)
- 2) Détermine la quantité qui rend le bénéfice maximal et ce bénéfice en francs (à 1 000 F près). (2 pt)
- 3) Calcule $B(1)$ et $B(15)$. La boutique est-elle toujours bénéficiaire sur $[1 ; 15]$? Justifie. (2 pt)
- 4) Dresse un tableau de valeurs et trace la courbe de B . (2 pt)
- 5) Détermine graphiquement, puis à la calculatrice, les quantités pour lesquelles le bénéfice dépasse 500 000 F. (2 pt)

Séquence 10

Fonction exponentielle et fonctions puissances

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonction exponentielle népérienne (réciproque de $\ln$) : propriétés, étude, limites ; équations, inéquations, systèmes ; fonctions e^u ; fonctions $x \mapsto a^x$ et fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$; applications économiques (demande, élasticité, coûts, croissance).

L'essentiel à retenir

- $\exp$ est la réciproque de $\ln$: pour tout réel x et tout $y > 0$, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$. $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln y} = y$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u'e^u$; une primitive de $u'e^u$ est e^u .
- Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Pour $a > 0$: $a^x = e^{x \ln a}$; pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Équation $\alpha e^{2x} + \beta e^x + \gamma = 0$: on pose $X = e^x > 0$.

Exercices d'application**Exercice 1 — Équations**

Résous dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{-x-4} - 6 = 0$ b) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

c) $e^x - 10e^{-x} = 3$

d) $3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$

e) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$

f) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$ g) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

h) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0$

Exercice 2 — Inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$: a) $e^{x-6} - 1 > 0$; b) $e^{x+2} < 8$; c) $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; d) $e^x - 5 - 6e^{-x} \geq 0$.

Exercice 3 — Systèmes

Résous dans $\mathbb{R}^2$:

$$\text{a) } \begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$$

Exercice 4 — Polynôme et exponentielle

Soit $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$.

- 1) Calcule $P(1)$ et factorise $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré ; résous $P(x) = 0$ et $P(x) \leq 0$.
- 2) Dédus-en les solutions de $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$, de $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8 \ln x + 15 = 0$ et de $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8 \ln x + 15 \leq 0$.

Exercice 5 — Dérivées, primitives, fonctions puissances

- 1) Calcule la dérivée de $f_1(x) = (2x + 2)e^{-0,3x+2}$; $f_2(x) = x^2e^{-x}$; $f_3(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$; $f_4(x) = 1,05^x$; $f_5(x) = x^{0,6}$ ($x > 0$).
- 2) Détermine une primitive de $g_1(x) = e^{2x}$; $g_2(x) = 3e^{-0,5x}$; $g_3(x) = xe^{x^2}$; $g_4(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- 3) Compare, à l'aide de la calculatrice, $x^{0,6}$, $\ln x$ et $1,05^x$ pour $x = 10$, $x = 100$ et $x = 1\,000$. Que constates-tu ?

Exercice 6 — Coût moyen minimal — extrait du BAC TSECO 2014

Le coût marginal de fabrication d'un produit est $C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$ sur $[1 ; 20]$ (q en tonnes, coûts en milliers de francs).

- 1) Vérifie que $C_T(q) = 4q - q^2e^{-0,2q}$ est une primitive de C_m sur $[1 ; 20]$.
- 2) Vérifie que le coût moyen est $C_M(q) = 4 - qe^{-0,2q}$ et calcule $C'_M(q)$.
- 3) Détermine la production q_0 qui rend le coût moyen minimal ; calcule ce coût et le coût marginal pour q_0 . Que constates-tu ?

Exercices d'approfondissement (type BAC)

Exercice 7 — Coopérative de beurre de karité de Koulikoro

La demande (en milliers de pots) est $f(x) = (2x + 2)e^{-0,3x+2}$ sur $[1; 15]$, où x est le prix unitaire en centaines de francs.

- 1) Montre que $f'(x) = (-0,6x + 1,4)e^{-0,3x+2}$; étudie son signe et dresse le tableau de variations de f .
- 2) Vérifie que $F(x) = \left(-\frac{20}{3}x - \frac{260}{9}\right)e^{-0,3x+2}$ est une primitive de f . Calcule $I = \int_2^{10} f(x) dx$ (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2}).
- 3) Calcule le nombre de pots demandés (à l'unité près) pour un prix de 300 F, puis de 700 F. Déduis de I la demande moyenne quand le prix varie de 200 F à 1 000 F.
- 4) Le revenu est $R(x) = x f(x)$ (en centaines de milliers de francs). À l'aide de la calculatrice, détermine le prix qui maximise le revenu.
- 5) L'élasticité est $E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$. Montre que $E(x) = \frac{-0,6x^2 + 1,4x}{2x + 2}$; calcule $E(4)$ et interprète.

Exercice 8 — Coopérative de miel de Ségou

La demande (en milliers de pots) est $D(p) = (2p + 6)e^{-0,4p+2}$ sur $[2; 12]$, p étant le prix du pot en milliers de francs.

- 1) Montre que $D'(p) = (-0,8p - 0,4)e^{-0,4p+2}$ et dresse le tableau de variations de D .
- 2) Vérifie que $\Delta(p) = (-5p - 27,5)e^{-0,4p+2}$ est une primitive de D ; calcule la demande moyenne quand le prix varie de 3 000 F à 9 000 F.
- 3) Calcule la demande pour un prix de 4 000 F puis de 8 000 F.
- 4) Montre que l'élasticité est $E(p) = \frac{-0,8p^2 - 0,4p}{2p + 6}$; calcule $E(5)$ et interprète.

Exercice 9 — Unité de jus de fruits locaux de Bamako

Une PME transforme tamarin, bissap et gingembre en jus. Pour q centaines de bouteilles ($1 \leq q \leq 20$), le coût marginal est $C_m(q) = 5 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$ et le coût total $C_T(q) = 5q - q^2e^{-0,2q} + 10$ (en dizaines de milliers de francs).

- 1) Vérifie que $C'_T = C_m$. Que représente la constante 10 ? Calcule le coût de production de 800 bouteilles.
- 2) Montre que le coût moyen est $C_M(q) = 5 - qe^{-0,2q} + \frac{10}{q}$ et que $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2}$ avec $g(q) = (0,2q - 1)q^2e^{-0,2q} - 10$.
- 3) On admet que C'_M s'annule en une unique valeur $q_0 \approx 8,76$. Calcule le coût moyen minimal et le coût marginal pour q_0 ; compare.
- 4) Chaque bouteille est vendue 750 F. Exprime le bénéfice $B(q)$; détermine à la calculatrice la production minimale rentable et le bénéfice pour q_0 .

Exercice 10 — Transformation du coton à Sikasso

Le bénéfice (en millions de francs) pour x tonnes de coton transformé est $B(x) = (-x^2 + 6x - 5)e^{-0,2x} + 2$ sur $[0; 10]$.

- 1) Montre que $B'(x) = (0,2x^2 - 3,2x + 7)e^{-0,2x}$ et étudie son signe sur $[0; 10]$.
- 2) Détermine la quantité qui donne le bénéfice maximal et ce bénéfice (au millier de francs près).
- 3) Détermine, à la calculatrice, l'intervalle des quantités pour lesquelles l'entreprise est rentable ($B(x) > 0$).

Situations complexes**Situation complexe 10.1** Exponentielle · logarithme · seuil**La croissance de la population d'une ville****1 · Contexte**

La mairie d'une ville de l'intérieur du Mali prépare son plan d'urbanisme (écoles, eau potable, marchés) pour les quinze prochaines années.

2 · Support

Le service des statistiques modélise la population par $P(t) = 250 e^{0,045t}$ (en milliers d'habitants), où t est le nombre d'années depuis 2020. Un château d'eau peut desservir 400 000 habitants. La ville compte 12 quartiers.

3 · Fonction

Tu es l'urbaniste de la mairie. Tu dois faire des prévisions et fixer la date limite de construction d'un nouveau château d'eau.

4 · Consignes

- 1 Calcule la population prévue en 2030 et le pourcentage annuel d'augmentation correspondant au coefficient $e^{0,045}$.
- 2 Détermine l'année à partir de laquelle le château d'eau ne suffira plus.
- 3 Calcule le temps de doublement de la population et donne un conseil à la mairie.

Situation complexe 10.2 Exponentielle · intégrale · valeur moyenne**La dépréciation du tricycle de livraison****1 · Contexte**

Un commerçant de Kayes achète un tricycle motorisé pour livrer ses marchandises. Il veut prévoir la date de revente.

2 · Support

Valeur du tricycle t années après l'achat : $V(t) = 1\,500\,000 e^{-0,25t}$ (en francs).
Il compte le revendre dès que sa valeur passe sous 500 000 F. Le tricycle parcourt environ 100 km par jour.

3 · Fonction

Tu es le comptable du commerçant. Tu dois préparer le plan d'amortissement.

4 · Consignes

- ❶ Calcule la valeur du tricycle après 1 an et après 2 ans, et la perte annuelle en pourcentage.
- ❷ Détermine au bout de combien d'années (entières) il devra être revendu.
- ❸ Calcule la valeur moyenne du tricycle sur les quatre premières années à l'aide d'une intégrale.

Devoir de synthèse — Séquence 10

Fonction exponentielle et fonctions puissances

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Équations, inéquations, système

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$. (1,5 pt)
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x+1} \geq e^{3-x}$. (1 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$ (2,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Étude d'une fonction

Soit $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$). (1,5 pt)
- 2) Montre que $f'(x) = -xe^{-x}$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)
- 3) Vérifie que $F(x) = (-x - 2)e^{-x}$ est une primitive de f et calcule $\int_0^1 f(x) dx$. (1,5 pt)

Exercice 3 (10 points) — Situation : le prix du sachet de lait

Une laiterie de Bamako estime que la demande mensuelle de sachets de lait caillé est $D(p) = 50e^{-0,04p}$ (en milliers de sachets), où p est le prix du sachet en dizaines de francs ($0 \leq p \leq 50$).

- 1) Calcule $D'(p)$ et justifie que la demande diminue quand le prix augmente. (2 pt)
- 2) Détermine le prix pour lequel la demande est réduite de moitié par rapport à $p = 0$ (à 1 F près). (2 pt)
- 3) La recette est $R(p) = p \times D(p)$ (en dizaines de milliers de francs). Montre que $R'(p) = 50e^{-0,04p}(1 - 0,04p)$. (2 pt)
- 4) Détermine le prix qui maximise la recette et la recette maximale (en francs). (2 pt)
- 5) L'élasticité de la demande est $E(p) = p \frac{D'(p)}{D(p)}$. Montre que $E(p) = -0,04p$, calcule $E(25)$ et interprète. (2 pt)

Unité d'apprentissage 3

UA3

Dénombrement · Statistique à deux caractères · Probabilités · Systèmes et matrices

Séquence 11

Dénombrement

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini ; arrangements, permutations et combinaisons dans un ensemble fini ; choix du modèle de dénombrement (avec ou sans ordre, avec ou sans répétition).

L'essentiel à retenir

- Principe multiplicatif : si un choix se fait en k étapes successives offrant $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités, il y a $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ choix.
- E à p éléments, F à n éléments : nombre d'applications de E dans F : n^p (**p -listes**, tirages successifs **avec remise**).
- **Arrangements** ($p \leq n$) : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \dots (n-p+1)$ = nombre d'applications injectives de E dans F (tirages successifs **sans remise**, l'ordre compte).
- **Permutations** : $n! = A_n^n$ = nombre de bijections d'un ensemble à n éléments (rangements). Convention $0! = 1$.
- **Combinaisons** : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ = nombre de parties à p éléments (tirages **simultanés**, l'ordre ne compte pas). $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (triangle de Pascal).
- « Au moins un » : on passe souvent par le complémentaire : $\text{card}(\text{au moins un}) = \text{card}(\text{total}) - \text{card}(\text{aucun})$.

Exercices d'application**Exercice 1** — Calculs

Calcule $6!$, $\frac{10!}{8!}$, A_8^3 , C_8^3 , C_{12}^{10} . Vérifie que $C_7^3 = C_6^2 + C_6^3$ et construis les six premières lignes du triangle de Pascal.

Exercice 2 — Applications, injections, bijections

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- 1) Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? d'applications injectives de E dans F ?
- 2) Combien y a-t-il de bijections de F dans F ?

Exercice 3 — Numéros de téléphone

Au Mali, un numéro de téléphone mobile comporte 8 chiffres. On considère les numéros commençant par 7.

- 1) Combien de numéros différents commencent par 7 ?
- 2) Combien de ces numéros ont leurs 8 chiffres tous différents ?
- 3) Combien commencent par 76 et se terminent par un chiffre pair ?

Exercice 4 — Bureau et comité

Une association de jeunes compte 15 membres : 9 garçons et 6 filles.

- 1) L'association élit un bureau formé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien de bureaux différents peux-tu former ?
- 2) Elle désigne un comité de 4 membres sans fonction particulière. Combien de comités peux-tu former ? Combien comprennent exactement 2 filles ? Combien comprennent au moins une fille ?

Exercice 5 — Anagrammes et rangements

- 1) Combien d'anagrammes du mot BAMAKO peut-on former ? du mot SEGOU ?
- 2) De combien de façons peut-on asseoir 6 personnes sur un banc ? si deux d'entre elles veulent être côte à côte ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Tirages dans une urne : trois modèles

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire 3 boules. Dans chacun des cas suivants — tirage simultané ; tirages successifs sans remise ; tirages successifs avec remise — calcule le nombre de tirages possibles, puis le nombre de tirages comportant exactement 2 boules rouges.

Exercice 7 — Le jeu de dominos et les poignées de main

- 1) 20 délégués d'élèves se saluent tous une fois par une poignée de main. Combien de poignées de main sont échangées ?
- 2) Combien de diagonales possède un polygone convexe à n côtés ? Application : $n = 8$.
- 3) Montre que $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ et résous dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_n^2 = 45$.

Situations complexes

Situation complexe 11.1 Arrangements · p -listes · comparaison**La sécurité des codes de mobile money****1 · Contexte**

Un opérateur de téléphonie veut renforcer la sécurité des comptes de mobile money de ses clients au Mali.

2 · Support

Code actuel : 4 chiffres. Le compte est bloqué après 3 essais erronés. Proposition : un code de 5 chiffres, tous différents. L'opérateur compte environ 2 millions de clients.

3 · Fonction

Tu es analyste en sécurité informatique. Tu dois comparer les deux systèmes.

4 · Consignes

- 1 Détermine le nombre de codes possibles avec le système actuel et avec le système proposé.
- 2 Calcule, dans chaque système, la proportion de codes qu'un voleur peut essayer avant le blocage.
- 3 Dis quel système est le plus sûr et propose, en justifiant par un calcul, une amélioration supplémentaire.

Situation complexe 11.2 Combinaisons · principe multiplicatif · complémentaire**La délégation au Festival sur le Niger****1 · Contexte**

Une classe de Terminale SECO d'un lycée de Ségou doit former une délégation pour accueillir les visiteurs du Festival sur le Niger.

2 · Support

La classe compte 30 élèves : 12 filles et 18 garçons. La délégation comprend 5 élèves dont un chef de délégation. Le festival se tient en février sur les berges du fleuve.

3 · Fonction

Tu es le délégué de classe. Tu dois expliquer combien de délégations sont possibles selon les règles retenues.

4 · Consignes

- 1 Calcule le nombre de délégations de 5 élèves sans chef désigné, puis avec un chef désigné parmi les 5.
- 2 Calcule le nombre de délégations de 5 élèves comprenant exactement 2 filles, puis au moins une fille.
- 3 Le proviseur exige au moins 2 filles et au moins 2 garçons. Calcule le

nombre de délégations possibles.

Devoir de synthèse — Séquence 11

Dénombrement

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Codes et plaques

Une coopérative attribue à chaque membre un code formé de 3 lettres (parmi 26) suivies de 2 chiffres (parmi 10).

- 1) Combien de codes différents peux-tu former ? (2 pt)
- 2) Combien de codes ont leurs trois lettres toutes différentes ? (2 pt)
- 3) Combien de codes commencent par la lettre M et se terminent par 0 ? (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Comité

On forme un comité de 5 personnes parmi 8 hommes et 6 femmes.

- 1) Combien de comités différents peux-tu former ? (1,5 pt)
- 2) Combien de comités comprennent exactement 2 femmes ? (2 pt)
- 3) Combien de comités comprennent au moins une femme ? (2,5 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : le tournoi inter-quartiers

La mairie de la Commune IV de Bamako organise un tournoi de football entre 8 équipes de quartiers.

- 1) Dans une première formule, chaque équipe rencontre chaque autre équipe une seule fois. Calcule le nombre de matchs. (2 pt)
- 2) Dans une seconde formule, il y a des matchs aller et retour. Calcule le nombre de matchs. (2 pt)
- 3) Combien de podiums (1^{er}, 2^e, 3^e) différents sont possibles ? (2 pt)
- 4) On répartit les 8 équipes en deux poules de 4 (non numérotées). Combien de répartitions sont possibles ? (2 pt)

Séquence 12

Statistique à deux caractères

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide de tableaux et de graphiques. Séries statistiques à deux caractères ; représentation d'un nuage de points (cas de points pondérés) ; point moyen ; ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ; corrélation linéaire ; prévisions.

L'essentiel à retenir

- Série $(x_i ; y_i)$, $1 \leq i \leq n$: **nuage de points** $M_i(x_i ; y_i)$; **point moyen** $G(\bar{x} ; \bar{y})$ avec $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$. Si les points sont pondérés par des effectifs n_i , on calcule des moyennes pondérées.
- Variances : $V(x) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$; $V(y) = \frac{1}{n} \sum y_i^2 - \bar{y}^2$. **Covariance** : $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$.
- Droite de régression de y en x (moindres carrés) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$; elle passe par G . Droite de x en y : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(y)}$.
- **Coefficient de corrélation linéaire** : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$, $-1 \leq r \leq 1$ ($r^2 = aa'$). Si $|r|$ est proche de 1 (en pratique $|r| \geq 0,87$), la corrélation est forte et l'ajustement linéaire justifié ; le signe de r est celui de a .
- On utilise la droite d'ajustement pour faire des **prévisions** (interpolation, extrapolation prudente).

Exercices d'application**Exercice 1** — Pluviométrie et rendement du mil

Dans une zone agricole du cercle de Ségou, on a relevé la pluviométrie annuelle x (en mm) et le rendement du mil y (en quintaux par hectare).

x (mm)	400	500	600	700	800
y (q/ha)	6	8	9	11	12

- 1) Représente le nuage de points (1 cm pour 100 mm à partir de 300 mm ; 1 cm pour 1 q/ha) et place le point moyen G .
- 2) Calcule $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$. Déduis-en l'équation de la droite de régression de y en x et le coefficient r .

- 3) Estime le rendement pour une pluviométrie de 650 mm.

Exercice 2 — Engrais et rendement du coton

Engrais x (kg/ha)	50	100	150	200	250	300
Coton y (kg/ha)	800	950	1 150	1 250	1 400	1 500

- 1) Calcule les coordonnées du point moyen G .
- 2) Détermine, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de y en x (coefficients à 10^{-2} près).
- 3) Calcule r et conclus. Estime la production pour 350 kg/ha d'engrais ; cette estimation est-elle fiable ?

Exercice 3 — Points pondérés

Le tableau donne la répartition de 50 commerçants d'un marché selon le nombre x d'années d'activité et le nombre y d'employés.

$x \setminus y$	1	2	3
2	10	4	1
5	5	12	3
8	1	6	8

- 1) Donne les séries marginales de x et de y ; calcule $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
- 2) Représente le nuage de points pondérés (cercles de taille proportionnelle aux effectifs) et place G .

Exercices d'approfondissement

Exercice 4 — Prix et demande de mangues

Sur un marché de Bamako, on a relevé le prix x d'un kilogramme de mangues (en francs) et la quantité vendue y (en kg) par jour.

x (F)	100	150	200	250	300	350
y (kg)	520	470	400	350	290	250

- 1) Représente le nuage ; un ajustement linéaire est-il justifié ? Calcule r .
- 2) Détermine la droite de régression de y en x et estime la quantité vendue pour un prix de 400 F.
- 3) Exprime la recette journalière $R(x) = x y(x)$ à l'aide de l'ajustement et détermine le prix qui la rend maximale.

Exercice 5 — Droites de régression et coefficient

Pour une série à deux caractères, on a obtenu $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 22$, $V(x) = 4$, $V(y) = 47,3$ et $\text{cov}(x, y) = 13,7$.

- 1) Détermine les équations des droites de régression de y en x et de x en y .
- 2) Vérifie qu'elles passent par G et calcule r de deux manières.

Situations complexes**Situation complexe 12.1** Nuage · moindres carrés · prévision**Les ventes de la boutique de téléphones****1 · Contexte**

Une boutique de téléphones portables du Grand Marché de Bamako veut prévoir ses ventes pour commander son stock.

2 · Support

Ventes annuelles (en milliers d'appareils) selon le rang x de l'année (1 pour 2018) :

Rang x	1	2	3	4	5	6	7
Ventes y	12	15	19	22	26	28	33

La boutique emploie 6 vendeurs et ouvre de 8 h à 19 h.

3 · Fonction

Tu es le gestionnaire de la boutique. Tu dois justifier un modèle et faire une prévision.

4 · Consignes

- 1 Représente le nuage de points et calcule les coordonnées du point moyen G .
- 2 Détermine la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation linéaire. L'ajustement est-il justifié ?
- 3 Estime les ventes en 2026 (rang 9) et détermine l'année à partir de laquelle les ventes dépasseraient 40 000 appareils.

Situation complexe 12.2 Corrélation · ajustement · décision**La campagne de vaccination dans le district sanitaire****1 · Contexte**

Le médecin-chef d'un district sanitaire de la région de Kayes étudie le lien entre le nombre d'agents de santé communautaires et le taux de couverture vaccinale des villages.

2 · Support

Agents x	1	2	3	4	5	6
Couverture y (%)	52	60	67	73	80	86

L'objectif national est une couverture d'au moins 90 %. Un agent coûte 60 000 F par mois au district.

3 · Fonction

Tu es l'assistant statisticien du médecin-chef. Tu dois l'aider à décider du nombre d'agents à recruter.

4 · Consignes

- 1 Calcule le coefficient de corrélation linéaire et dis si un ajustement linéaire est pertinent.
- 2 Détermine l'équation de la droite de régression de y en x .
- 3 Estime le nombre minimal d'agents à affecter à un village pour atteindre l'objectif de 90 %, puis le coût mensuel correspondant.

Devoir de synthèse — Séquence 12

Statistique à deux caractères

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Calculs à partir de résumés

Pour une série à deux caractères de 10 observations, on donne : $\sum x_i = 50$; $\sum y_i = 120$; $\sum x_i^2 = 290$; $\sum x_i y_i = 660$; $\sum y_i^2 = 1\,540$.

- 1) Calcule $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$. (3 pt)
- 2) Détermine la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation linéaire. (3 pt)

Exercice 2 (14 points) — Situation : la publicité à la radio

Une entreprise de jus locaux de Ségou a relevé ses dépenses de publicité à la radio x (en centaines de milliers de francs) et ses ventes y (en millions de francs) pendant six mois.

x	1	2	3	4	5	6
y	3,2	4,1	5,3	5,9	7,2	7,9

- 1) Représente le nuage de points dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 1 million en ordonnée). (2 pt)
- 2) Calcule les coordonnées du point moyen G et place-le. (2 pt)
- 3) Calcule $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$ (à 10^{-2} près). (3 pt)
- 4) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r et dis si un ajustement linéaire est justifié. (2 pt)
- 5) Détermine une équation de la droite de régression de y en x (coefficients à 10^{-2} près) et trace-la. (3 pt)
- 6) Estime les ventes pour une dépense publicitaire de 800 000 F. (2 pt)

Séquence 13

Probabilités

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; faire ressortir le lien entre statistique et probabilités. Espace probabilisé fini ; probabilité conditionnelle ; événements indépendants ; formule des probabilités totales ; variable aléatoire, loi de probabilité, espérance mathématique, variance ; loi binomiale.

L'essentiel à retenir

- Un **espace probabilisé fini** (Ω, P) : $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. En cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$. La fréquence observée sur un grand nombre d'épreuves approche la probabilité.
- **Probabilité conditionnelle** ($P(B) \neq 0$) : $P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, d'où $P(A \cap B) = P(B) P_B(A)$.
- **Probabilités totales** : si $B_1, \dots, B_k$ forment une partition de Ω , $P(A) = \sum P(B_i) P_{B_i}(A)$ (arbre pondéré).
- A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.
- **Variable aléatoire** X prenant les valeurs $x_1, \dots, x_k$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_k$: $E(X) = \sum p_i x_i$; $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Un jeu est **équitable** si $E(X) = 0$ (gain algébrique).
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$: nombre de succès dans n épreuves identiques et indépendantes à deux issues (succès de probabilité p) : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Tirage simultané

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ? Justifie l'équiprobabilité.
- 2) Calcule la probabilité des événements A : « 3 boules rouges », B : « exactement 2 rouges », C : « au moins une verte ».

Exercice 2 — Tableau et probabilité conditionnelle

Dans un lycée de 1 000 élèves (voir le tableau de la séquence 4 : 520 garçons dont 220 en Terminale ; 480 filles dont 180 en Terminale), on choisit un élève au hasard. On note G : « l'élève est un garçon » et T : « l'élève est en Terminale ».

- 1) Calcule $P(G)$, $P(T)$, $P(G \cap T)$, $P_T(G)$ et $P_G(T)$.

- 2) Les événements G et T sont-ils indépendants ?

Exercice 3 — Arbre pondéré

Une coopérative achète du coton dans deux zones : 60 % vient de la zone A et 40 % de la zone B. 70 % du coton de la zone A et 50 % du coton de la zone B est classé « premier choix ». On prélève une balle au hasard.

- 1) Construis l'arbre pondéré. Calcule la probabilité que la balle soit de premier choix.
- 2) La balle est de premier choix. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la zone A ?

Exercice 4 — Variable aléatoire et jeu

Une association vend 100 tickets de tombola à 1 000 F. Elle met en jeu 1 lot de 30 000 F, 5 lots de 5 000 F et 20 lots de 1 000 F. Un joueur achète un ticket ; X est son gain algébrique (lot moins prix du ticket).

- 1) Donne la loi de probabilité de X .
- 2) Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Le jeu est-il équitable ? Quel bénéfice l'association peut-elle espérer ?

Exercice 5 — Loi binomiale

Le taux de germination d'un lot de semences de maïs est de 80 %. On sème 10 graines ; on admet que les germinations sont indépendantes. X est le nombre de graines qui germent.

- 1) Justifie que X suit une loi binomiale ; précise ses paramètres.
- 2) Calcule $P(X = 10)$, $P(X = 8)$ et $P(X \geq 8)$ (à 10^{-3} près).
- 3) Calcule $E(X)$ et $V(X)$ et interprète $E(X)$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Le test de dépistage

Dans une région, 2 % de la population est atteinte d'une maladie. Un test de dépistage est positif chez 95 % des malades et chez 4 % des personnes saines.

- 1) Calcule la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un test positif.
- 2) Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Commente.

Exercice 7 — Fraudes au mobile money

Un opérateur estime que 5 % des transactions signalées comme suspectes sont réellement frauduleuses. Un agent contrôle 20 transactions suspectes, de façon indépendante. Y est le nombre de transactions frauduleuses.

- 1) Calcule la probabilité de ne trouver aucune fraude, puis d'en trouver au moins une.
- 2) Calcule la probabilité d'en trouver exactement une, et l'espérance de Y .

- 3) Combien de transactions faut-il contrôler pour que la probabilité de trouver au moins une fraude dépasse 0,95 ?

Situations complexes

Situation complexe 13.1 Arbre · probabilités totales · variable aléatoire

Le rendement d'un champ de coton

1 · Contexte

Un producteur de coton de Koutiala prépare la campagne agricole et veut estimer son revenu, qui dépend de la pluviométrie.

2 · Support

D'après les relevés des 20 dernières années, l'hivernage est bon 12 fois, moyen 6 fois et mauvais 2 fois. Revenu net du champ selon l'hivernage : bon 1 500 000 F ; moyen 800 000 F ; mauvais -200 000 F (perte). Une assurance agricole coûte 60 000 F et rembourse 500 000 F en cas de mauvais hivernage. Le champ fait 5 ha.

3 · Fonction

Tu es le conseiller agricole du producteur. Tu dois l'éclairer sur son revenu probable et sur l'intérêt de l'assurance.

4 · Consignes

- 1 Détermine, à partir des fréquences observées, la loi de probabilité du revenu R du producteur sans assurance.
- 2 Calcule l'espérance et l'écart-type de R .
- 3 Détermine la loi et l'espérance du revenu avec assurance. Conseille le producteur en tenant compte de l'espérance et du risque de perte.

Situation complexe 13.2 Loi binomiale · espérance · décision

Le contrôle qualité de l'usine de jus

1 · Contexte

Une usine de jus de Bamako livre des cartons de 12 bouteilles aux boutiques. Un client se plaint de bouteilles mal capsulées.

2 · Support

Le service qualité estime que 3 % des bouteilles sont mal capsulées, indépendamment les unes des autres. Un carton est refusé par la boutique s'il contient au moins 2 bouteilles défectueuses. L'usine livre 500 cartons par semaine.

3 · Fonction

Tu es responsable qualité de l'usine. Tu dois évaluer le nombre de cartons refusés et proposer un objectif.

4 · Consignes

- ❶ Justifie que le nombre X de bouteilles défectueuses dans un carton suit une loi binomiale et calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
- ❷ Calcule la probabilité qu'un carton soit refusé, puis le nombre moyen de cartons refusés par semaine.
- ❸ Calcule ce nombre si le taux de défaut descend à 1 %, et conclus sur l'intérêt d'améliorer la machine.

Devoir de synthèse — Séquence 13

Probabilités

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Tirage dans une urne

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ? (1 pt)
- 2) Calcule la probabilité d'obtenir 3 boules noires, puis exactement 2 boules blanches. (3 pt)
- 3) Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche. (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Probabilité conditionnelle

Dans un lycée, 70 % des élèves sont externes et 30 % internes. 60 % des externes et 80 % des internes réussissent au BAC. On choisit un élève au hasard.

- 1) Construis un arbre pondéré. (2 pt)
- 2) Calcule la probabilité que l'élève réussisse au BAC. (2 pt)
- 3) L'élève a réussi. Calcule la probabilité qu'il soit interne (à 10^{-3} près). (2 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : la vendeuse de pagnes au porte-à-porte

Une vendeuse de pagnes au porte-à-porte visite 8 clientes par jour. Chaque cliente achète un pagne avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres. X est le nombre de pagnes vendus dans la journée.

- 1) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres. (1,5 pt)
- 2) Calcule $P(X = 2)$ et $P(X \geq 1)$ (à 10^{-3} près). (2,5 pt)
- 3) Calcule $E(X)$ et $V(X)$. (2 pt)
- 4) Chaque vente lui rapporte 5 000 F et ses frais journaliers sont de 8 000 F. Calcule son gain moyen par jour. (2 pt)

Séquence 14

Algèbre linéaire : systèmes d'équations linéaires et matrices

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Systèmes d'équations linéaires à deux et trois inconnues (méthode du pivot de Gauss) ; matrices : vocabulaire, somme, produit par un réel, produit de matrices ; écriture matricielle $AX = B$ d'un système ; déterminant et inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

L'essentiel à retenir

- Une **matrice** de format (m, n) est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes ; a_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j .
- Somme (même format) : on additionne terme à terme ; produit par un réel k : on multiplie chaque terme par k .
- **Produit** AB (nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B) : le coefficient (i, j) de AB est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B . En général $AB \neq BA$. Matrice unité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $AI = IA = A$.
- Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\det A = ad - bc$. Si $\det A \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$; si $\det A \neq 0$, $X = A^{-1}B$.
- **Pivot de Gauss** (3 inconnues) : on élimine une inconnue dans deux équations à l'aide de combinaisons de lignes ($L_2 \leftarrow L_2 - kL_1, \dots$) pour obtenir un système **triangulaire**, que l'on résout en remontant.

Exercices d'application**Exercice 1** — Opérations sur les matrices

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calcule $M + 2N$, MN et NM . Que constates-tu ?
- 2) Calcule $\det M$ et M^{-1} ; vérifie que $MM^{-1} = I_2$.

Exercice 2 — Matrice d'un tableau de ventes

Une boutique vend du riz (500 F le kg), de l'huile (1 200 F le litre) et du sucre (700 F le kg). Les ventes de deux jours sont : lundi : 20 kg de riz, 15 L d'huile, 10 kg de sucre ; mardi : 12 kg de riz, 18 L d'huile, 25 kg de sucre.

- 1) Écris la matrice Q (2 lignes, 3 colonnes) des quantités et la matrice colonne P des prix.
- 2) Calcule QP et interprète le résultat.

Exercice 3 — Système 2×2 par la matrice inverse

Écris sous forme matricielle puis résous à l'aide de A^{-1} : $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases}$.

Exercice 4 — Pivot de Gauss

Résous par la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 80 \\ x + 3y + 2z = 130 \\ x + y + 4z = 90 \end{cases}$$

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 , A^3 et conjecture l'expression de A^n . Vérifie ta conjecture pour $n = 4$.

Exercice 6 — Système avec paramètre

On considère $\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ 2x + my = m + 2 \end{cases}$ où m est un réel.

- 1) Calcule le déterminant du système en fonction de m . Pour quelles valeurs de m le système admet-il une unique solution ?
- 2) Résous le système pour $m = 0$, puis étudie les cas $m = 2$ et $m = -2$.

Situations complexes

Situation complexe 14.1 Système 3×3 · pivot de Gauss**Les prix du marché de Kati****1 · Contexte**

Une association de consommateurs de Kati veut connaître le prix unitaire de trois produits de base à partir des dépenses de trois familles.

2 · Support

Dépenses relevées le même jour au marché : famille A : 5 kg de riz, 2 L d'huile et 2 kg de sucre pour 6 300 F ; famille B : 10 kg de riz, 3 L d'huile et 4 kg de sucre pour 11 400 F ; famille C : 3 kg de riz, 1 L d'huile et 5 kg de sucre pour 6 200 F. Le marché se tient le dimanche.

3 · Fonction

Tu es le secrétaire de l'association. Tu dois retrouver les prix et les publier.

4 · Consignes

- ① Traduis la situation par un système de trois équations à trois inconnues et l'écrire sous forme matricielle.
- ② Résous le système par la méthode du pivot de Gauss.
- ③ Calcule la dépense d'une famille qui achète 25 kg de riz, 5 L d'huile et 6 kg de sucre pour le mois.

Situation complexe 14.2 Matrices · produit · système**La production de la savonnerie****1 · Contexte**

Un groupement de femmes de Sikasso fabrique trois produits à base de karité : savon, beurre conditionné et pommade. Il veut utiliser entièrement ses ressources de la semaine.

2 · Support

Ressources nécessaires pour un lot :

	Savon	Beurre	Pommade
Karité (kg)	2	1	1
Main-d'œuvre (h)	1	3	2
Emballages (cartons)	1	1	4

Disponible pour la semaine : 80 kg de karité, 130 heures de travail, 90 cartons.
Prix de vente d'un lot : savon 15 000 F ; beurre 20 000 F ; pommade 25 000 F.

3 · Fonction

Tu es la gestionnaire du groupement. Tu dois planifier la production et estimer la recette.

4 · Consignes

- ❶ Écris la matrice A des besoins et le système vérifié par les nombres x , y , z de lots de savon, de beurre et de pommade.
- ❷ Résous ce système par la méthode du pivot de Gauss.
- ❸ Calcule la recette de la semaine à l'aide d'un produit de matrices.

Devoir de synthèse — Séquence 14

Systèmes d'équations linéaires et matrices

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Calcul matriciel

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calcule $A + B$, $2A - B$, AB et BA . (3 pt)
- 2) Calcule $\det A$ et A^{-1} . (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Système par la méthode du pivot de Gauss

Résous le système $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ par la méthode du pivot de Gauss. (6 pt)

Exercice 3 (9 points) — Situation : la billetterie du concert

Pour un concert au Palais de la culture de Bamako, 500 billets ont été vendus : billets « adulte » à 3 000 F, « étudiant » à 2 000 F et « enfant » à 1 000 F. La recette totale est de 1 050 000 F et il y a autant de billets « étudiant » que de billets « enfant ».

- 1) Traduis la situation par un système de trois équations à trois inconnues a , s , e . (2 pt)
- 2) Écris ce système sous forme matricielle $MX = B$. (2 pt)
- 3) Résous le système par la méthode du pivot de Gauss. (3 pt)
- 4) L'organisateur voulait une recette de 1 200 000 F avec le même nombre de billets et la même condition. Combien de billets « adulte » aurait-il fallu vendre ? (2 pt)

Sujets type BAC

Terminale Sciences Économiques

Trois sujets de 3 heures sur 20 points couvrant
l'ensemble du programme (UA1, UA2, UA3)

Sujet type BAC n° 1

Terminale Sciences Économiques — Partages et pourcentages · Statistique à deux caractères · Logarithme et fonctions économiques

Durée : 3 heures · Coefficient 2 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Partage et pourcentages

Une ONG remet 3 600 000 F à une association de parents d'élèves de Koulikoro. 15 % de cette somme sont réservés aux frais de fonctionnement. Le reste est partagé entre trois écoles proportionnellement à leurs effectifs (200, 300 et 400 élèves) et inversement proportionnellement aux subventions qu'elles ont déjà reçues dans l'année (1, 3 et 2 millions de francs).

- 1) Calcule le montant des frais de fonctionnement et la somme à partager. (1 pt)
- 2) Calcule la part de chaque école. (2,5 pt)
- 3) Si les frais de fonctionnement n'avaient été que de 12 %, de quel pourcentage la part de la deuxième école aurait-elle augmenté ? (1,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Statistique à deux caractères

Le chiffre d'affaires annuel y (en millions de francs) d'une entreprise de transport de Sikasso est donné selon le rang x de l'année (rang 1 pour 2019).

Rang x	1	2	3	4	5	6
y	15	18	22	24	29	32

- 1) Représente le nuage de points et le point moyen G . (1,5 pt)
- 2) Calcule $V(x)$, $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire (on donne $V(y) \approx 34,56$). Conclue. (1,5 pt)
- 3) Détermine la droite de régression de y en x et estime le chiffre d'affaires en 2026. (2 pt)

Problème (10 points) — Logarithme et fonctions économiques

Partie A — Étude d'une fonction. Soit g la fonction définie sur $[1 ; 20]$ par $g(x) = x - 4 \ln x + 6$.

- 1) Calcule $g'(x)$, étudie son signe et dresse le tableau de variations de g . (1,5 pt)
- 2) Calcule le minimum de g (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2}). (1 pt)

Partie B — Application économique. Une huilerie de Koutiala produit x centaines de litres d'huile d'arachide par semaine ($1 \leq x \leq 20$). Le coût moyen d'une centaine de litres est $g(x)$, en centaines de milliers de francs, et la centaine de litres est vendue 1 000 000 F.

- 3) Déduis de la partie A la production qui minimise le coût moyen et ce coût moyen en francs. (1 pt)
- 4) Montre que le coût total est $C(x) = x^2 - 4x \ln x + 6x$ et que le bénéfice est $B(x) = -x^2 + 4x \ln x + 4x$. (1 pt)
- 5) Calcule $B'(x)$ puis $B''(x)$. Montre que B' est décroissante sur $[2; 20]$ et que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2; 20]$; vérifie que $8,2 < \alpha < 8,3$. On admet que $B'(x) > 0$ sur $[1; 2]$. (2,5 pt)
- 6) Déduis-en le sens de variation de B , la production qui rend le bénéfice maximal et une valeur approchée de ce bénéfice. (1 pt)

Partie C — Valeur moyenne.

- 7) À l'aide d'une intégration par parties, montre que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$. (1 pt)
- 8) Calcule la valeur moyenne du coût moyen g sur $[1; e]$ (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2}). (1 pt)

Sujet type BAC n° 2

Terminale Sciences Économiques — Suites numériques ·
Probabilités et loi binomiale · Exponentielle et intégrale

Durée : 3 heures · Coefficient 2 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Suites numériques

Une radio communautaire de Kita comptait 1 000 auditeurs réguliers en janvier 2025. Chaque mois, elle perd 10 % de ses auditeurs, mais en gagne 300 nouveaux. On note u_n le nombre d'auditeurs n mois après janvier 2025 ; ainsi $u_0 = 1\,000$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 300$.

- 1) Calcule u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? (1 pt)
- 2) Soit $v_n = u_n - 3\,000$. Montre que (v_n) est géométrique ; précise sa raison et son premier terme. (1,5 pt)
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n . Calcule u_{10} . (1,5 pt)
- 4) Vers quelle valeur tend u_n ? À partir de quel mois la radio dépassera-t-elle 2 900 auditeurs ? (1 pt)

Exercice 2 (5 points) — Probabilités

Une huilerie conditionne de l'huile en bidons de 5 litres. 10 % des bidons sont mal remplis. Un contrôleur prélève au hasard 5 bidons ; on assimile ce prélèvement à 5 tirages indépendants avec remise. X désigne le nombre de bidons mal remplis.

- 1) Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres. (1 pt)
- 2) Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ (à 10^{-3} près). (1,5 pt)
- 3) Le lot est refusé si le contrôleur trouve au moins 2 bidons mal remplis. Calcule la probabilité que le lot soit refusé. (1,5 pt)
- 4) Calcule $E(X)$ et interprète. (1 pt)

Problème (10 points) — Exponentielle et intégrale

Partie A. Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = 10xe^{-0,2x}$.

- 1) Montre que $f'(x) = (10 - 2x)e^{-0,2x}$ et dresse le tableau de variations de f sur $[0; 20]$. (2 pt)
- 2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0. (1 pt)
- 3) Recopie et complète le tableau de valeurs (à 10^{-1} près) pour $x \in \{0; 2; 4; 5; 6; 8; 10; 15; 20\}$, puis trace (T) et la courbe de f . (2 pt)
- 4) Vérifie que $F(x) = (-50x - 250)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0; 20]$. (1 pt)

Partie B. Une unité de séchage de mangues de Sikasso traite x tonnes de mangues par mois ($0 \leq x \leq 20$). Son bénéfice mensuel, en centaines de milliers de francs, est $f(x)$.

- 5) Détermine la quantité qui rend le bénéfice maximal et ce bénéfice en francs (à 1 000 F près). (1 pt)
- 6) Détermine graphiquement, puis à la calculatrice (à 10^{-2} près), les quantités pour lesquelles le bénéfice dépasse 1 500 000 F. (1,5 pt)
- 7) Calcule le bénéfice moyen $\frac{1}{10} \int_0^{10} f(x) dx$ lorsque la quantité traitée varie de 0 à 10 tonnes (valeur exacte et valeur approchée en francs). (1,5 pt)

Sujet type BAC n° 3

Terminale Sciences Économiques — Système linéaire · Dénom-
brement et variable aléatoire · Fonction rationnelle et intégrale

Durée : 3 heures · Coefficient 2 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (4 points) — Système d'équations linéaires

Au marché de Médine, trois clientes achètent du mil, du maïs et du sorgho au même prix du kilogramme : la première achète 1 kg de chaque céréale et paie 1 200 F ; la deuxième achète 2 kg de mil, 1 kg de maïs et 3 kg de sorgho et paie 2 600 F ; la troisième achète 1 kg de mil, 3 kg de maïs et 2 kg de sorgho et paie 2 300 F.

- 1) Traduis la situation par un système en notant x , y , z les prix du kilogramme de mil, de maïs et de sorgho (en centaines de francs), puis écris-le sous forme matricielle. (1,5 pt)
- 2) Résous le système par la méthode du pivot de Gauss et donne les prix. (2,5 pt)

Exercice 2 (6 points) — Dénombrement et variable aléatoire

Lors de la kermesse d'un lycée, un jeu consiste à tirer simultanément 3 jetons d'un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Le ticket coûte 500 F. Le joueur gagne 3 000 F si les trois numéros sont pairs, 1 000 F si exactement deux numéros sont pairs, et rien sinon.

- 1) Calcule le nombre de tirages possibles. (1 pt)
- 2) Calcule la probabilité de chacun des événements : « 3 numéros pairs », « exactement 2 numéros pairs ». (2 pt)
- 3) X est le gain algébrique du joueur (gain moins prix du ticket). Donne la loi de X et calcule $E(X)$. Le jeu est-il favorable au lycée ? (2 pt)
- 4) Quel devrait être le prix du ticket pour que le jeu soit équitable ? (1 pt)

Problème (10 points) — Fonction rationnelle, asymptotes et intégrale

Partie A. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en 1 et en $+\infty$. (1 pt)
- 2) Montre que $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x - 1}$. Déduis-en que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) dont tu donneras les équations, et précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (2 pt)
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)

- 4) Trace $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé. (1 pt)
- 5) Calcule l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $(\mathcal{C})$, l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$. (1,5 pt)

Partie B. Une fabrique de sandales de Kayes produit x centaines de paires par semaine ($1,5 \leq x \leq 10$). Le coût moyen d'une paire est $f(x)$ milliers de francs. Chaque paire est vendue 4 000 F.

- 6) Quelle production minimise le coût moyen ? Quel est ce coût minimal ? (1 pt)
- 7) L'entreprise fait un profit lorsque le prix de vente est supérieur au coût moyen. Résous l'inéquation $f(x) < 4$ et conclus. (1,5 pt)