

EXERCICES FONCTIONS NUMÉRIQUES : T. S. Eco 2014-2015

Exercice 01 :

- 1) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2; \quad g(x) = \frac{2x+1}{3x-1}; \quad h(x) = \frac{x-3}{x^2-7x+10}$$

- 2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{3x + 8}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 10}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x}{x^2 + x + 5}$

- 3) Calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1;$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)^3$

c) $f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 5}$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x - 1}$

Exercice 02 :

- 1) Etudier la continuité de f en x_0 :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x} ; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 5 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

- 2) On donne $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

- a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

- b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 et donner son prolongement par continuité.

- 3) On donne $g(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}$

- a) Déterminer le domaine de définition D_g de g .

- b) g est elle prolongeable par continuité en $x_0 = 2$? Si oui définir son prolongement.

Exercice 03 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4; 5]$

- 3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près par balayage.

Exercice 04 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

soit (C) la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto -x^3 + 3x + 1.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

- 3) Calculer f' de f .

- 4) Dresser le tableau de variation de f .

- 5) Préciser les extremums relatifs.

- 6) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

7) compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

8) Construire (C) et ses asymptotes.

EXERCICE 05

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 8}{x - 3}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique **0,5cm**).

- Déterminer le domaine de définition D_f de f et calculer les limites en ses bornes. En déduire l'équation de l'asymptote verticale (Γ) à (C).
- Montrer que $\forall x \in D_f; f(x) = 2x + \frac{8}{x-3}$.
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C).
 - Préciser la position de (Δ) par rapport à (C).
- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- Montrer que le point $I(3; 6)$ est centre de symétrie de (C).
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$.
- Construire (Δ), (C) le repère.

EXERCICE 06

le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

soit (C) la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}.$$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Soit (D) la droite d'équation $y = x - 3$.
 - Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \neq -2; f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$
 - Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C).
 - Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).
- calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
- Construire (C) et ses asymptotes.

Exercice 07:

Pour un produit donné, q étant la quantité produite, on désigne par $C(q)$ le coût de production ; C la fonction coût ;

☞ $C_{ma}(q)$ le coût marginal au niveau q : $C_{ma}(q) = C(q + 1) - C(q)$.

☞ $C_{mo}(q)$ le coût unitaire moyen : $C_{mo}(q) = \frac{C(q)}{q}$

Une entreprise fabrique un produit P . La fonction coût C est définie par

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 200$, ($C(x)$ est le coût ou prix de revient en FCFA d'une quantité x de produit P).

- 1) Étudier la fonction C sur l'intervalle $[0, 10]$.
- 2) Calculer le coût marginal $C_{ma}(x)$ au niveau de x : $C_{ma}(x) = C(x+1) - C(x)$. Étudier la fonction C_{mo} sur l'intervalle $[0, 10]$.
- 3) Comparer C_{ma} et la dérivée C' de la fonction C .
- 4) Étudier la fonction C' sur l'intervalle $[0, 10]$. Étudier la position relative des courbes C_{ma} et C .
- 5) Sachant que le produit P est vendu à 9 000 FCFA l'unité, exprimer en fonction de x le bénéfice B réalisé en supposant que toute la production est vendue sur le marché.
- 6) Déterminer la production x qui procure un bénéfice maximum.

Exercice 08: Extrait de composition MTE 2010.

Un artisan fabrique des objets qu'il vend à 3900f l'unité. Le coût de production d'une quantité q d'objet est $C(q) = q^3 - 40q^2 + 400q$ avec $q \in [0 ; 90]$.

- 1) Déterminer la fonction coût moyen $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ et la fonction coût marginal $C_m(q) = C'(q)$; $q \in [0 ; 90]$.
- 2) Etudier les variations de $C(q)$ et $C_M(q)$ sur $[0 ; 90]$.
- 3) Pour quelle quantité q le coût moyen C_M est-il au plus bas ?

Dans ces conditions, calculer le coût marginal C_m .

- 4) Calculer en fonction de q la recette $R(q)$ puis le bénéfice $B(q)$. Etudier les variations de $B(q)$.
- 5) Quels conseils d'économistes donnerez-vous à l'artisan pour minimiser sa perte et maximiser son bénéfice. Illustrer cela par un graphique dans un repère orthogonal.

Exercice 09: Extrait de composition MTE 2013.

- 1) Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un nombre réel compris entre 0 et 20 et que le coût de production $f(x)$ exprimé en milliers de francs est donné par : $f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$.
- 2) On note C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé
- 3) $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unités graphiques : 1cm pour deux produits sur l'axe des abscisses ;
- 4) 1cm pour 100.000F sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Étude du coût de production.

- 1°) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $I = [0 ; 20]$.
- 2°) Tracer la courbe C , en précisant les tangentes aux quatre points d'abscisses : 0 ; 10 ; 15 et 20.

Partie B : Étude du bénéfice en fonction de la production.

On suppose que toute la production est vendue à un prix de 84 000F par unité. La recette totale g (exprimée en milliers de francs) est alors définie sur I par : $g(x) = 84x$.

Le bénéfice total $h(x)$ est donc donné par : $h(x) = g(x) - f(x)$

- 1°) a) Étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle I .
- b) Interpréter le résultat en terme de bénéfice.

2°) a) Étudier les variations de la fonction ***h*** sur l'intervalle ***I***.

b) En déduire la quantité X_m assurant à l'entreprise un bénéfice maximum.

Calculer alors la valeur exacte de $h(X_m)$. Donner une valeur décimale approchée de $h(X_m)$ à 10^{-2} près et la valeur du bénéfice $h(X_m)$ exprimée en francs, et arrondie à l'unité la plus proche.

EXERCICE 10

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$		-1	-5	

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

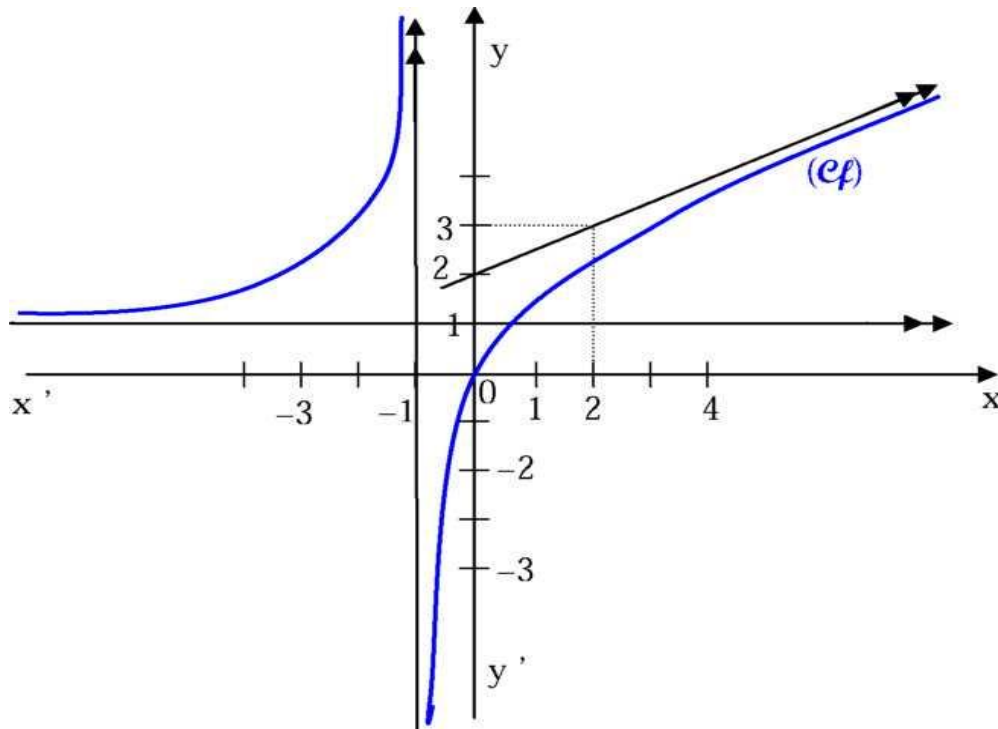
- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer $f'(x)$.
- 3) Déterminer les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f .
- 4) Montrer que la restriction g de f à $[0 ; +\infty[$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (on précisera la méthode).
- 6) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 1.
- 7) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie par sa représentation graphique (C_f) ci-dessous.

A partir des renseignements fournis par la courbe (C_f) de f . Déterminer :

- 1) Le domaine de définition D_f de f .
- 2) Les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) une équation de chacune des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- 4) le tableau de variation de f .



EXERCICE 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$ et soit (C) sa courbe.

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point $x = 0$;
- 3) Quel est le coefficient directeur de la tangente (T)
- 4) Tracer la courbe (C) de f .
- 5) Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

EXERCICE 13

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x}$, où a, b et c sont des réels.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Déterminer les constantes $a ; b ; c$ pour que (C) passe par les points $A(1 ; -2)$; $B(-4 ; 8)$ et admette au point $x = 2$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

II. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-4}{x}$.

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) Pressier les équations des asymptotes à (C) .
- 3) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ) .
- 4) Montrer que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe (C) .
- 5) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.
- 1) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 + (3 - m)x - 4 = 0$.