

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSEco

2017 - 2018

Fonctions Logarithmes népériens :

Exercice 1 :

1. Calculer la valeur exacte de chacun des nombre suivants :

$$A = \ln(e^2); B = \ln\left(\frac{1}{e^3}\right); C = \ln(\sqrt{e}); D = \ln\left(\frac{e^4}{\sqrt{e}}\right); E = \ln(e^2\sqrt{e}); F = \ln(\sqrt{e})^3.$$

2. Ecrire sous forme de $\ln K$ chacun des nombres suivants :

$$G = 3 \ln 2 + \ln 4 - \ln 7; H = \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 9 - 2 \ln 5; I = \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1).$$

3. Simplifie le réel : $M = e^{\ln 4} + e^{-\ln 4} + e^{-2 \ln 4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \ln(5 - 2x) = 0; b) \ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5); c) (\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$$

$$d) e^{-x-4} - 6 = 0; e) e^{2x} - 4e^x + 3 = 0; f) e^x - 10e^{-x} = 3;$$

$$g) 3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}; h) e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0;$$

$$i) 2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0; j) 6(\log x)^2 + 7 \log x - 3 = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \ln(5x^2 + 6x + 1) > 0; b) \ln(x^2 - 10x + 9) > \ln(3x - 27); c) \ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0;$$

$$d) 2(\ln 2x)^2 - 5 \ln 2x - 3 \leq 0; e) \ln(x + 5) + \ln(x + 4) \leq \ln(x + 13);$$

$$f) e^{x-6} - 1 > 0; g) e^{x+2} < 8; h) e^{2x} - e^x - 12 > 0; i) e^x - 5 - 6e^{-x} \geq 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes équations suivantes :

$$a) \begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}; b) \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}; c) \begin{cases} x + y = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}; d) \begin{cases} 4^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \cdot 8^y = 4^{y-1} \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}; f) \begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}; g) \begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}; h) \begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases};$$

Exercice 3 :

I. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$.

1) Calculer $P(1)$ puis écrire $P(x)$ sous forme de produit de facteurs de degré 1.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) En déduire la solution dans $\mathbb{R}$ de : $P(x) \leq 0$.

4) En déduire les solutions des équations suivantes :

$$\triangleright 2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8 \ln x + 15 = 0.$$

$$\triangleright 2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0.$$

$$\triangleright 2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8 \ln x + 15 \leq 0$$

II. 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.

2) En déduire la résolution des équations suivantes :

$$a) 9^x - 3^{x+1} - 10 = 0; b) 4^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0; c) (\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0.$$

III. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

- 5) Vérifie que $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(x + 3)$.
- 6) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 7) Déduis en les solutions des équations suivantes :
 - a) $\ln 2x - \ln 3 = \ln(1 + x^2) - \ln(4 - x^2)$
 - b) $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$.
 - c) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0$.

Problème 1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + (\ln x)^2$$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Calculer $f'(x)$ puis Dresser le tableau des variations de f .
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse e .
- 4) Tracer (T) et (C) dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$ □

Problème 2 :

Partie 1 : Étude de fonction :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par, $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$ de courbe représentative (C) dans le repère orthonormé d'unité 2cm.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
- 2) a) Déterminer le signe de $(1 - t)(t - 2)$.
b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$
- 3) a) On note f' la dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{5(3 - 2 \ln x)}{x}$$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

- 4) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
- 5) Tracer la courbe (C) de f .

Partie 2 : Applications économiques.

Une boulangerie fabrique et revend des baguettes de pains. $f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en centaines de milliers de francs qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de baguettes de pains, pour x compris entre 1 et 10. f désignant la fonction étudiée dans la partie 1

- 1) Déterminer à une baguette près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
- 2) Interpréter concrètement le résultat de la question 2 de la partie 1. Comment le lit-on sur le graphique ?
- 3) Cette boulangerie veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 100000F. Combien baguettes de pains doit-elle fabriquer ? Justifier sa réponse.

Problème 3:

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C défini sur $[0; 10]$ par : $C(x) = x + \frac{4}{x+1}$.

Le but du problème est d'étudier le coût total C_T et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen. Les coûts sont exprimés en centaines de milliers de francs.

A. Étude de C_T .

La fonction C_T est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Vérifier que :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x + 1).$$

B. Étude d'une fonction auxiliaire f .

On considère la fonction f , définie sur $[0 ; 10]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8 \ln(x + 1)$.

Montrer que la fonction dérivée f' de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

1) Dresser le tableau de variations sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

En déduire que f s'annule pour une valeur α unique de $]0 ; 10[$.

Vérifier que 1,712 est la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de α . On admettra que

2) En déduire le signe de f sur $[0 ; 10]$.

C. Étude du coût moyen C_m .

La fonction C_m est définie sur $]0 ; 10]$ par : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$.

1) Calculer la dérivée C'_m de C_m . Vérifier que l'on peut écrire : $C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$. Où f la fonction auxiliaire introduite dans la partie B.

2) Étudier le sens de variation de C_m sur $]0 ; 10]$.

Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ?

Problème 4 : extrait de Bac 2014 TSEco

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1- La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$C_T(q) = 4q - q^2e^{-0,2q}$. Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1 ; 20]$. (1 pt)

2-/ La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

a-/ Vérifier que $C_M(q) = 4 - qe^{-0,2q}$. (0,5 pt)

b-/ Déterminer la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M . (1 pt)

c-/ Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonne) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? (1 pt)

Quel est ce coût ? Pour cette production q_0 , quelle est la valeur du coût marginal ? (1,5 pt)

Problème 5 : Bac STG 2014

A//

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par $f(x) = 2\ln(x+1) + 1$.

1-/ On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

a-/ Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; 15]$. (1,5pt)

b-/ Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 15]$. (1pt)

2-/ Recopiez et complétez le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir au dixième) : (2pts)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$			3,2		4,2	4,6	4,9	5,2			5,8		6,1	6,3		

3-/ Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (unité :1cm). (1pt)

4-/ Soit (D) la droite d'équation $y = 0,8x$. Tracer la droite (D) dans le repère précédent. (0,5pt)

B//

Une entreprise fabrique des pièces pour avions. On note x le nombre de pièces fabriquées par mois ($0 \leq x \leq 15$).

Chaque mois, les coûts de production, exprimés en millions de francs CFA, sont donnés par :

$$f(x) = 2\ln(x+1) + 1.$$

Le prix de vente d'une pièce est 0,8 million de francs CFA.

1-/ Si l'entreprise vend x pièces, déterminer la recette exprimée en millions de francs CFA. (1pt)

2-/ Vérifier que le bénéfice mensuel est : $B(x) = 0,8x - 1 - 2\ln(x+1)$. (1pt)

3-/ Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$, puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise réalise un bénéfice. (1pt)

4-/ En justifiant graphiquement la réponse, donner le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice. (1pt)