

Situations sur les fonctions numériques TSeco

Fonctions économiques.

Situation 1

Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5 ; 60]$.

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- 1) Calcule $C'_m(x)$ puis en déduis le tableau de variation de $C_m(x)$.
- 2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est-il minimum ?

Situation 2

La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

- 1) Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ puis en déduis le tableau de variation de f . Donne une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
- 2) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

La production totale sur les cinq années est donnée par $\int_0^5 f(t)dt$. Calcule la production totale.

Situation 3

Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

- 1) Calcule $B'(x)$. En déduis le tableau de variations de B sur $[1 ; 10]$.
- 2) Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Précise la valeur de ce bénéfice.

Situation 4

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

- 1) Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.
- 2) a- Calcule la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b- Justifie que la population est croissante.
- 3) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
a- En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b- En déduis une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Echelle : $1 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ ans}$ sur l'axe (ox) et $1 \text{ cm} \rightarrow 10.000 \text{ habitants}$ sur l'axe (oy) .

Situation 5

Une entreprise produit un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x est exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, Détermine la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.

2) Montre que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donné par : $B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $x \in [3 ; 10]$.

3) Calcule $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .

4) Etudie le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3 ; 10]$. Dresse le tableau de variation de la fonction B .

5) En déduis le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montre qu'il existe $\alpha \in]3 ; 7[$ et $\beta \in]7 ; 10[$ tel que : $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.

b- Calcule $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduis les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles : $B(x) < 0$.

6) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

Situation 6

Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de x milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour $1 \leq x \leq 4$;

$$C(x) = 2x - \sqrt{x}$$

1) Montre que, pour tout réel x de $[1 ; 4]$, on a : $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduis le sens de variation du coût total C sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

Situation 7

Le coût total de fabrication exprimé en FCFA de x objets est donné par la fonction :

$$C_T(x) = 200 + 100x - 0,01x^2.$$

1) a- Calcule le coût total pour 1000 objets puis 1001 objets.

b- En déduis l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire au centième près.

2) a- Exprime en fonction de x la différence entre $C_T(x + 1) - C_T(x)$ représentant l'augmentation du coût total de fabrication d'un objet supplémentaire, sachant que l'on a fabriqué x objets.

b- Calcule la dérivée $C'_T(x)$ de fabrication $C_T(x)$.

3) On pose $C_m(x) = C'_T(x)$

Calcule l'erreur commise $E(x)$ tel que $E(x) = C'_T(x) - C_m(x)$.

4) Le prix unitaire d'un objet est estimé à 200.

a- Exprime la recette $R(x)$ en fonction de x .

a- Etudie les variations du bénéfice $B(x)$.

Situation 8

La société EDM désire mesurer la satisfaction journalière d'un client à partir d'une « fonction de satisfaction » f , définie sur l'intervalle $[1 ; 30]$ par $f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640$ où t désigne la durée en jour de consommation.

On appelle f' la dérivée de la fonction f comme la fonction « envie ».

On dit qu'il y a « envie » lorsque f' est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ».

- 1) Quelle est la consommation du client en kilowatt du 1^{er} juin au 21 juin ?
- 2) Détermine les intervalles d'envie ; de rejet.
- 3) On désigne par $S = \int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire de la zone éclairée par la lumière quand il fait nuit. Détermine cette aire en cm^2 puis en m^2 .

Situation 9

L'entreprise « Diarra » fabrique et commercialise chaque jour un nombre x d'objets. Le cout unitaire de fabrication d'un objet est fonction du nombre d'objet fabriqués. Ce cout unitaire est déterminé par la fonction : $f(x) = x^2 - 108x + 4\,580$ pour $x \in [0,100]$.

- 1°) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.
- 2°) Dresser le tableau de variation de f .
- 3°) Détermine le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer chaque jour pour minimiser le cout de fabrication unitaire.
- 4°) Détermine le cout total $C_T(x)$ de fabrication.
- 5°) L'entreprise vent 6 500 f chaque objet. On appelle $R(x)$ la recette obtenue par la vente de x objets et $B(x)$ le bénéfice réalisé.

$$\text{Vérifier que } B(x) = -x^3 + 108x^2 + 1\,920x$$

- 6°) Calculer $B'(x)$ et étudier le signe de $B'(x)$.

En déduire les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,100]$.

- 7°) Déterminer pour quelle valeur de x , l'entreprise « N'Diaye » réalise un bénéfice maximal. Calculer alors ce bénéfice.

Situation 10

Une usine fabrique des lampes électriques. Le cout total en centaine de dollars, lié à cette fabrication dépend de la quantité x de dizaine de lampes fabriqué.

IL s'exprime par la relation $C_T(x) = 0,2x^2 - x + 80$

- 1)
 - a) Calculer le montant des coûts fixes
 - b) Calculer le coût de fabrication de 100 lampes.
 - c) Calculer le nombre des lampes fabriquées pour un coût de 36000\$
- 2)
 - a) Trouver en fonction de x , la fonction du coût moyen $C_M(x)$.
 - b) Calculer $C_M(5)$. Interprète économiquement le résultat.
- 3)
 - a) Trouver en fonction de x , la fonction du coût marginal $C_m(x)$.
 - b) Calculer $C_m(25)$. Interprète économiquement le résultat.
- 4) Déterminer le nombre des lampes que l'entreprise doit produire pour obtenir un coût moyen minimal. Trouver le coût moyen minimal.