

Exercices Fonctions TS-ECO

Exercice1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f
- b) Déterminer les limites aux bornes de D_f .
- c) Calculer la fonction dérivée f' de f .
- d) Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f
- e) Dresser le tableau de variation de f .
- f) Préciser les extremums à la courbe de f .
- g) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
- h) Représenter la courbe (Cf) de f dans un repère orthogonal $(0, j)$.

Exercice2 : Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f .
2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montre qu'il existe trois réels a , b et c telle que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
- 4) Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (Cf).
- 5) Déterminer la position de (Cf) par rapport à l'asymptote (D)
- 6) Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.
- 7) Dresse le tableau de variation de f .
- 8) Trace la courbe (Cf) dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.

Exercice3 : On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$$

- 1.- Détermine le domaine de définition de f .
- 2.- Détermine trois nombres réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 3.- Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de f . Déduis - en les équations des asymptotes.
- 4.- Calcule $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .
- 5.- Etudie le signe de $f'(x)$. Déduis-en le sens de variations de f .

6.- Construis la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; i ; j)$ avec $OI = 2 \text{ cm}$ et $OJ = 1 \text{ cm}$.

7.- Calcule l'aire en Cm^2 de la portion du plan comprise entre la courbe de f , l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Exercice4 : Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$ où $x > 0$. Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite x en hectolitres.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $] 0 ; + \infty [$.

2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 0,5x$.

3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est-il minimum ?

4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.

5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

Exercice5 : Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = -3x^2 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1) a- Calculer $B'(x)$. En déduire le tableau de variations de B sur $[1 ; 10]$.

b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.

2) a- Résoudre l'équation $B(x) = 0$. En déduire les points morts de la production.

b-Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$. En déduire la marge de bénéfice de la production.

Exercice6 : On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

- 1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.
- 2) a- Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b- Justifier que la population est croissante.
- 3) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$).
Echelle : 1 cm $\rightarrow$ 10 ans sur l'axe des abscisses
1 cm $\rightarrow$ 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Exercice7 : Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par :

$$C(x) = x^3 - 48x + 600$$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.
- 2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donnée par :
 $B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $x \in [3 ; 10]$.
(On rappelle que $R(x) - C(x) = B(x)$).
- 3) Calculer $B'(x)$ où désigne la fonction dérivée de B .
- 4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3 ; 10]$.

Dresser le tableau de variation de la fonction B .

- 5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montrer qu'il existe $\alpha \in] 3 ; 7[$ et $\beta \in] 7 ; 10[$ tel que $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.

b- Calculer $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles $(x) < 0$.

7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

Exercice8 : Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA. On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction f est définie sur $[1 ; 45]$ par :

$$f(x) = x^2 - 60x + 1250.$$

1) Justifier que le coût de production total $C(x)$ pour x kg de truffes est donné, en FCFA, par : $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$..

2) Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réaliser par ce producteur pour x kg de truffes conditionnés et vendus.

3) a) Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[1 ; 45]$.

b) Pour quelles quantité de truffes de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

Exercice9 : Une entreprise de visserie, produit des boulons. On note x la quantité produite en milliers. Les dépenses de production en francs sont données par la relation :

$$f(x) = 5 x^2 + 300 x + 1\,000 .$$

1.-) Justifier que $(x) = 5 [(x - 30)^2 - 700]$

2.-) Etudier les variations de f (tableau de variation)

3.-) Représenter graphiquement f .

4.-) Les boulons sont vendus à 2 500F le millier. La recette exprimée en francs est donnée par : $(x) = 2\,500x$.

- a.-) Exprimer le bénéfice B1 en fonction de x
- b.-) Etudier les variations de B1 ;
- c.-) Pour quelle quantité le bénéfice est maximal ?

5.-) On suppose que le prix de vente de x milliers de boulons est donné par :

$$p(x) = 300 - 5x$$

- a.-) Détermine le bénéfice B2 en fonction de x

Exercice10 : Un artisan produit des articles, le coût de production de x articles est donné en milliers de FCFA par $C(x) = x + 3$; ; (par exemple le coût de production d'un article vaut $C(1) = 4$ en milliers de FCFA soit $4 \times 1000 = 4\,000$ FCFA. La recette totale (produit de la vente) est représentée par : $R(x) = x^2 - 6x + 9$ avec $1 \leq x \leq 15$. Par exemple la vente d'un article rapporte $R(1) = 4$ en milliers de FCFA soit $4 \times 1000 = 4000$ FCFA.

On admet que tout ce qui est produit est vendu.

Le profit ou le gain de l'artisan est calculé à l'aide de la fonction suivante :

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

1. Exprimer la fonction numérique P en fonction de x.
2. Calculer le coût de production de 2 ; 5 et 9 articles ainsi que la recette de leur vente.
3. Calculer P(1) et P(15) puis étudier les variations de P.
4. Dresser le tableau de variation de P.
5. A partir de la production de combien d'articles l'artisan réalise-t-il un bénéfice ?
6. En déduire la quantité qui maximise le gain de l'artisan puis ce gain.

Exercice 11: Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois.

On estime le coût de fabrication de q bibliothèques est :

$$C(q) = 10q^3 + 5000q + 20000$$

Chaque bibliothèque est vendue à 32 000 FCFA.

- 1) a°) Déterminer le coût de fabrication de 12 bibliothèques.
b°) L'ébéniste dégagne-t-il des bénéfices pour la fabrication et la vente de 12 bibliothèques ?
- 2) On appelle $B(q)$ le bénéfice en FCFA obtenu par la fabrication et la vente de q bibliothèques.

a°) Montrer que $B(q) = -10q^3 + 27000q - 20000$.

b°) Etudier les variations de B sur l'intervalle $[10 ; 40]$.

c°) Dresser le tableau de variations de B sur l'intervalle $[10 ; 40]$.

d°) En déduire le nombre de bibliothèques que l'ébéniste doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 12 :

On se propose d'étudier les effets du volume de la récolte mondiale d'un produit agricole sur les prix atteints par ce produit. Par la suite, x désigne la quantité récoltée en millions de tonnes. La recette totale en millions de FCFA est donnée par la fonction R définie sur $[0 ; +\infty[$ par $R(x) = -0,4x^2 + 8x$.

1. Etudier la fonction R et la représenter graphiquement

2. L'ensemble des charges totales (entraînées par la récolte) est donné par la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 25 + x$

a) Déterminer les points d'intersection de cette droite avec la parabole précédente représentant la recette totale.

b) Déterminer graphiquement la zone correspondant à un gain.

3. Déterminer la fonction B du bénéfice et la représenter graphiquement.

4. En déduire la valeur de x pour laquelle le bénéfice atteint son maximum. Quel est ce bénéfice maximum ?

Exercice 13 : Le coût total de fabrication exprimé en FCFA de x objets est donné par la fonction : $CT(x) = 200 + 100x - 0,01x^2$

1. a- Calculer le coût total de 100 objets puis 101 objets.

b- En déduire l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire au centième près.

2. a- Déterminer le coût moyen CM de cette entreprise.

b- Calculer la dérivée du coût moyen.

c- En déduire la quantité qui minimise le coût moyen. Quelle est la valeur ce coût moyen ?

3. Déterminer le coût marginal Cm de deux manières différentes : $Cm(x) = CT'(x)$ et $Cm(x) = CT(x+1) - CT(x)$. 4. On donne Prix=80 FCFA. Exprimer en fonction de x le bénéfice B. 5. Etudier les variations de la fonction Bénéfice B(x) puis représenter-la graphiquement. 6. Quelle est la quantité qui maximise ce bénéfice ? En déduire alors le bénéfice maximal.