

Limites-Continuités-Derivabilités-Derivées

Limites en un point x_0

1 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$$\begin{aligned} & a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ & e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; \quad f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; \end{aligned}$$

Limites à l'infinie

2 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

$$\begin{aligned} & a- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}; \quad b- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}; \quad c- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}; \quad d- \\ & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ & e- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x} - 5}; \quad f- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}; \quad g- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{2x - 2} \\ & h- \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Limites et asymptotes(les branches infini)

4 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

$$\begin{aligned} & a- f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}; b- f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}; c- f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}; d- f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1} \\ & e- f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}; f- f(x) = \frac{\sqrt{-x + 2}}{-x^2 + 2x - 1}; g- f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

Continuité en un point x_0

5 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ; \quad \text{b- } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \text{ et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{c- } \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ si } x \in]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \text{d- } \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ et } x_0 =$$

2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty ; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in]-1 ; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \text{ si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

a) Déterminer a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$

b) Pouvez-vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité

6

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

7

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} ; \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

a- Déterminer les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g .

b- Vérifier que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

8 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$

- 1) Déterminer son ensemble de définition Dg .
- 2) Montrer que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h .
- 3) Montrer que h est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

8 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$a - \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & \text{et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ; \quad b - \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$c - \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} & \text{si } x \in]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad d - \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$e - \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \in]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [3 ; +\infty[\end{cases}$$

Dérivabilité et condition de faisabilité

9 Déterminer les réels a , et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

$$a - \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad b - \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$c - \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$c- \begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue au point -1 ?

Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point -1 .

Application de la dérivée

10

Déterminer une équation de la tangente en $M_0(x_0; f(x_0))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ et $x_0 = -2$; b) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $x_0 = 3$

11

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$

g) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2}$

12

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Prouver que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

a) Dresser le tableau de signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$ en y plaçant le réel 1

b) En déduire pour tout $x \geq 1$ une écriture de $f(x)$ sous le symbole de la valeur absolue.

1) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 3$. Que dira-t-on pour la dérivabilité de f au point 3 ?

b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut-on conclure quant à la dérivabilité de f en 1 ?

2) a) Etudier le signe de f' sur chacun des intervalles sur lequel f est dérivable.

b) Préciser les ordonnées de chaque extremum de f .

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f .