

Exercice 2 : Limite en infini

Déterminer les limites ci-dessous :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x+1) ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-4x)(x+1) ; \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2x-1} \right) \\ e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{5+\frac{1}{x}} \right) ; \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^3-2x} \right) ; \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x^2+2x+\frac{3}{2x+1} \right) \\ d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{5-3x} \right) ; \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3x-1}{2x+1} \right) ; \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3-2x}{x^2-4x+7} \right) \\ g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4} \right) ; \quad h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2-3}{5-3x^2} \right) ; \quad i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2 : Limite en un point

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2+2}{x} \right) ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6} \right) ; \quad c) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \sqrt{3-2x} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3-2x}{2x^2-3x+1} \right) ; \quad e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+x}} \right) ; \quad f) \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(5x+3-\frac{2}{x-4} \right) \\ g) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2x-1} \right) ; \quad h) \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-2}{3-x} \right) ; \quad i) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \left(\frac{4-x}{3-2x} \right) \\ j) \lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{(x-5)(7-x)}{2x-10} \right) ; \quad k) \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{\sqrt{8-2x}} \right) ; \quad l) \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{3x^2+4x-4}{2x+4} \right) \\ m) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{-x+2} ; \quad n) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} ; \quad o) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+5}{x^2-x-2} ; \\ p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x} ; \quad q) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} ; \end{aligned}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1} ; \quad s) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$$

Exercice 3 : Limites à l'infinie

Calculer les limites suivantes à l'infinie :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2} ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+1} ; \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x} ; \\ d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}} ; \\ f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} ; \quad g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2} \\ h) \lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} ; \end{aligned}$$

Exercice 4 : Domaine de définition et limites

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, puis calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\begin{aligned} a) f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 ; \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1 ; \quad f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2+1} \\ c) f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-3} ; \quad d) f(x) = \frac{x^3-2x^2+3x-1}{x^2-4} ; \quad e) f(x) = \frac{x-3}{x^2+5x+6} \\ f) f(x) = \sqrt{x-2} ; \quad g) f(x) = \sqrt{2x^2-3x-5} ; \quad h) f(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Exercice 5 : Limites aux borne de l'ensemble de définition

Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous

$$a) f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2} ; \quad b) f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6} ;$$

$$c) f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x} ; d) f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$e) f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} ; f) f(x) = \frac{\sqrt{-x + 2}}{-x^2 + 2x - 1} ;$$

$$g) f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} ; h) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Exercice 6 : Continuité en un point

Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \text{ et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} \text{ si } x \in]1 ; 3] \end{cases} ;$$

$$d) \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} \text{ et si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice 7 : Application de la dérivée

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} ; b) f(x) = (-x^2 + 2x)^3$$

$$c) f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1} ; d) f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1) ;$$

Exercice 8 : Etude des fonctions

Problème 1 :

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera. On déterminera les intersections de la courbe (C) de f avec les axes de coordonnées.
- 3) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Problème 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f .
- 3) Déterminer les réels $a ; b$ et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
b- Déterminer la position de la courbe C_f et de la droite (D) .
- 5) Montrer que le point $I\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .
- 6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2
- 7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse nul.
- 8) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .
- 9) Construire la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

Problème 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

- 1) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 2) Etudier la fonction f .
- 3) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) .
- 4) Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D) .
- 5) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.
- 6) Montrer que le point $I(1 ; 0)$ est centre de symétrie de (C_f) .
- 7) Tracer la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Problème 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe C_f .
- 3) Déterminer la position de C_f par rapport à Δ (l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées) dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.
- 4) Construire C_f .

Problème 5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x-3}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f puis les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Montrer que la courbe (C) de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux

voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

- 3) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) .
- 4) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point E d'abscisse 1.
- 5) Etudier le sens de variation de f et construire (C) dans un repère orthonormé.
- 5) Démontrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

Problème 6 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^4-12x^3+50x^2-84x+46}{x^2-6x+9}$

- 1) Trouver les réels a ; b ; c ; d tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f de f on ait : $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{(x-3)^2}$.
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) Montrer que la parabole (P) d'équation : $y = x^2 - 6x + 5$ est asymptote à la courbe (C_f) de f .
- 4) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (P) .
- 5) Tracer (P) et (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Problème 7 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$. On désigne par (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Trouver les réels a ; b et c tels que pour tout x de D_f : $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$
- 3) Etudier les limites de f puis son sens de variation.
- 4) Montrer que le point I de (C_f) d'abscisse $x = 0$ est centre de symétrie de (C_f) .
- 5) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .

6) Etudier la position de (C_f) par rapport à (T) .

7) Calculer $f(0,5)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ puis tracer (C_f) .

Problème 8 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

d'unité graphique 1 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de D_f de f .

2) Trouver les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$.

3) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera.

4) Déterminer les limites de f ; calculer sa dérivée $f'(x)$ puis dresser son tableau de variation.

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

6) Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique (D) .

7) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x = -1$.

8) Tracer la courbe (C_f) .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$. Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 1 cm).

1) Déterminer les réels a ; b ; c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3x^2+1}$.

2) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les limites de f .

3) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.

4) Dresser le tableau de variation de f .

5) Montrer que la courbe (C) de f admet une droite (D) asymptote que l'on déterminera.

6) Etudier la position relative de (C) par rapport à son asymptote (D) .

7) Montrer que (C) admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées.

8) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = 0$.

10) Tracer (D) ; (T) et la courbe (C) de f .

Exercice 9 : Fonction dans la Pratique

Problème 1 :

Le coût moyen de production d'une quantité q est donné par : $C_{m_0}(q) = \frac{C(q)}{q}$.

Le coût marginal de production d'une quantité q est donné par :

$$C_{m_a}(q) = C(q+1) - C(q)$$

Une entreprise produit des objets en quantité q dans un régime de concurrence parfaite.

Le coût de production en milliers de francs de la quantité q est :

$$C(q) = q^2 + 100q + 100.$$

Le prix de vente p par unité lorsque la quantité produite est q est :

$$p(q) = 2q^2 - 4q + 300. \text{ On suppose que } q \leq 100.$$

1) Calculer en fonction de q . Le coût moyen : C_{m_0} de production. Déterminer la production q_0 qui rend le coût moyen minimum.

2) Calculer le coût marginal à partir de la définition ; puis à partir de la dérivée du coût total. Quelles remarques peut-on faire ?

Vérifier que pour $q = q_0$ le coût moyen est égal au coût marginal obtenu à partir de la dérivée.

Peut-on généraliser ce résultat ?

3) Calculer, en fonction de q le revenu global puis le bénéfice réalisé.

Déterminer la production q_1 qui rend le revenu maximum.

Déterminer la production q_2 qui rend le bénéfice maximum.

Problème 2 :

Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5 ; 60]$. On admet que toute la production est vendue chaque mois.

On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1) Calculer $C'_m(x)$ puis en déduire le tableau de variation de $C_m(x)$.

2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

Problème 3 :

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

2) a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

b) Justifier que la population est croissante.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.

b) En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.

4) a) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b) En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;

5) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$).

Echelle : 1 cm $\rightarrow$ 10 ans sur l'axe des abscisses

1 cm $\rightarrow$ 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Problème 4 :

Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.

2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donnée par :

$$B(x) = -x^3 + 147x - 600 \text{ avec } x \in [3 ; 10]. \text{ (On rappelle que } R(x) - C(x) = B(x)).$$

3) Calculer $B'(x)$ où désigne la fonction dérivée de B .

4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3 ; 10]$.

Dresser le tableau de variation de la fonction B .

5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montrer qu'il existe $\alpha \in]3 ; 7[$ et $\beta \in]7 ; 10[$ tel que $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.

b- Calculer $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur desquelles $(x) < 0$.

7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

Problème 5 :

Soit C la fonction définie sur $[0 ; 300]$ par $f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

- 1) a) Calculer $C'(x)$; où C' désigne la dérivée de C .
b) Etablir le tableau des variations de C' sur $[0 ; 300]$ et en déduire son signe.
- 2) On rapporte le plan d'un repère orthogonal (unités 1 cm pour 50 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 750 000 unités sur l'axe des ordonnées). On note (C_f) la courbe représentative de C .
On note A le point de (C_f) d'abscisse 10.
a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A .
b) A l'aide des variations de C' , préciser la position de (C_f) par rapport à (T) .
- 3) Représenter graphiquement (C_f) et (T) .

Problème 6 :

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût, exprimé en milliers de francs, de la production journalière de x sacs est donné par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x.$$

- 1) a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
b) En déduire le sens de variation de f .
- 2) Le plan est muni d'un repère orthonormé tel que :
- 1 cm représente 1 sac en abscisse ;
- 1 cm représente 40 000 francs en ordonnées.

a) Compléter le tableau des valeurs suivantes :

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$										

- b) construire la représentation graphique (C_f) de f .
- 3) On suppose que toute la production est vendue au prix de 140 000 F l'unité. La recette journalière, exprimée en milliers de francs est donnée par $g(x) = 14x$.
« B) Vérifier que pour tout x de $[0 ; 10]$; $h(x) = -x(x - 1)(x - 6)$.
- 4) a) Construire sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g .
b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
c) Retrouver le résultat précédent par calcul.

Problème 7 :

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.

Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$

La courbe représentative de la fonction C , notée (C_T) , est donnée en annexe ci-dessous.

- 1) Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$
Trace sur le graphique joint en annexe, la courbe (D) représentative de la fonction R .
- 2) Par lecture graphique, détermine :

a) les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer

la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;

b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

3) Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction

B définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $B(x) = R(x) - C(x)$

a) Calcule $B(x)$

b) En déduis le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.

c) Montre que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 15]$ on a

$$B'(x) = \frac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x+4)^2}$$

d) Étudie les variations de la fonction B .

e) En déduis le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

4) Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C .

Vérifie que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

Annexe

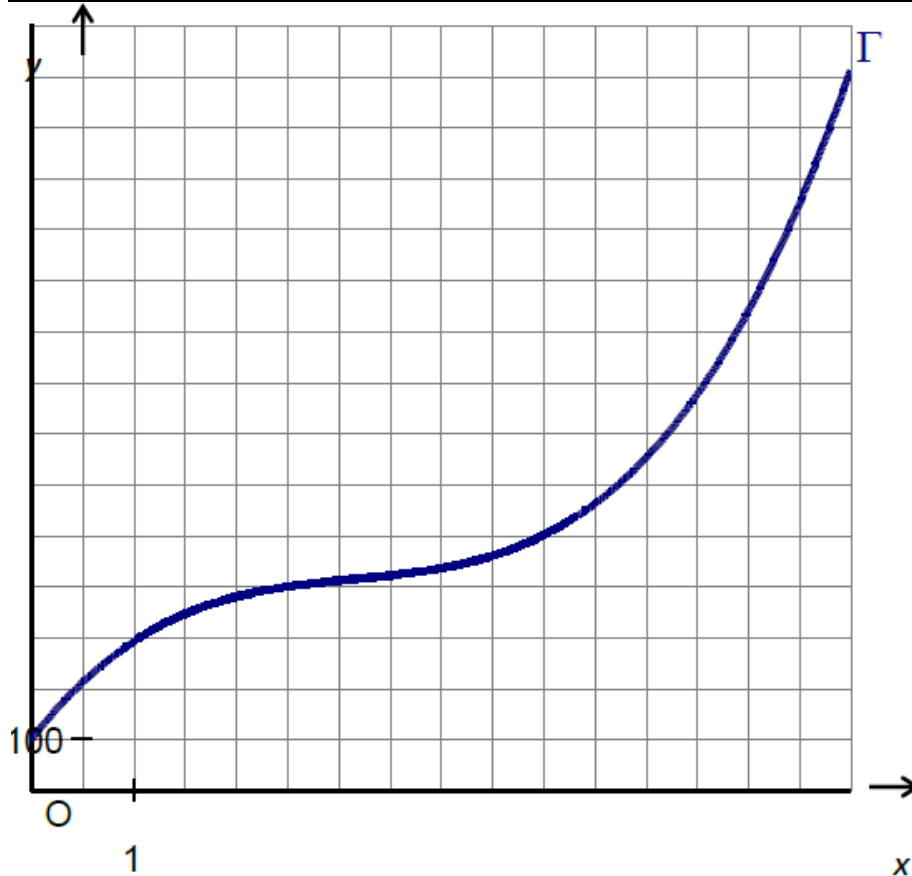


Problème 8 :

Soit la fonction f définie pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = x^3 - 19x^2 + 130x + 100$. La fonction f modélise sur l'intervalle $]0 ; 16]$

la fonction coût total de production, en euro, d'un produit. Sa représentation graphique sur cet intervalle, notée Γ , est donnée ci-dessous.



Pour tout x dans l'intervalle $]0 ; 16]$, le quotient $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$ est appelé coût moyen de production de x kilogrammes de produit.

1) Pour x dans l'intervalle $]0 ; 16]$, soit A le point d'abscisse x de la représentation graphique (Γ) de la fonction f .

Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$$

2) L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production.

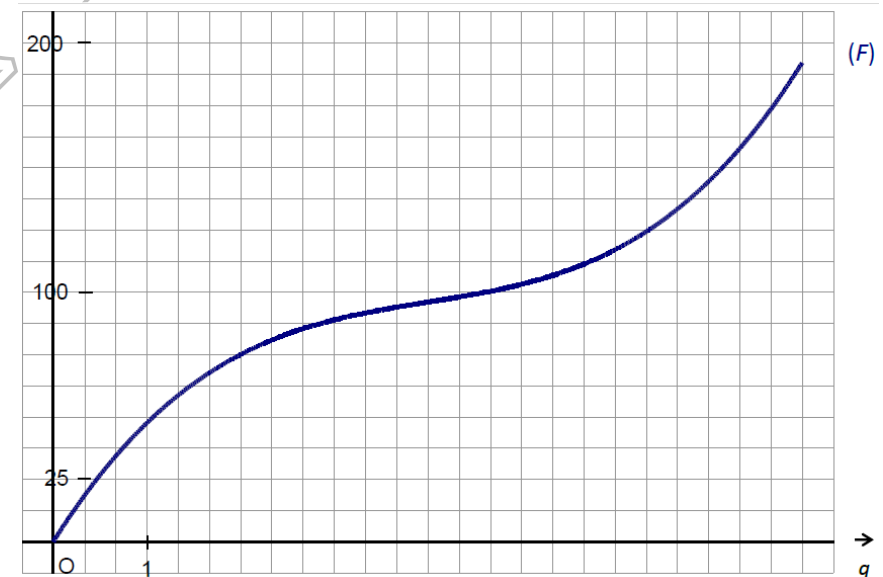
a) Par lecture graphique indiquer la valeur de x qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

b) On note C' la dérivée de la fonction $x \mapsto C_M(x)$. Calculer et vérifier que pour x dans l'intervalle $]0 ; 16]$: $C'(x) = \frac{(x-10)(2x^2+x+10)}{x^2}$

c) Etudier les variations de la fonction sur $]0 ; 16]$: $x \mapsto C_M(x)$. En déduire la valeur de x qui minimise le coût moyen

Problème 9 :

Le coût total de fabrication d'un produit est donné par $C(q) = \frac{q^3}{3} - 6q^2 + 40q$ pour $q \in [0 ; 12[$ où q représentent le nombre de milliers d'unités fabriquées et $C(q)$ le coût de fabrication en centaines d'euros. La courbe (F) représentative de la fonction coût total est donnée par :



1) On rappelle que le coût unitaire moyen est donné par $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ pour $q \neq 0$.

a) Exprimer en fonction de q le coût unitaire moyen.

b) Calculer le nombre d'unités à fabriquer pour que le coût unitaire moyen soit minimal.

2) On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire. On modélise ce coût marginal par $C_m(q) = C'(q)$ où C' est la dérivée de C .

a) Exprimer en fonction de q le coût marginal.

b) Vérifier que pour q_0 , le coût marginal est égal au coût unitaire moyen.

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (F) au point A d'abscisse 9. La tracer sur le graphique ci-dessus

4) On suppose que l'entreprise vend toute sa production. Pour $q \in]0 ; 12]$ le bénéfice en centaines d'euros, pour la production et la vente de q milliers d'unités est : $B(q) = -\frac{q^3}{3} + 2q^2 + 21q$.

a) Calculer le nombre d'unités à produire pour que l'entreprise soit rentable.

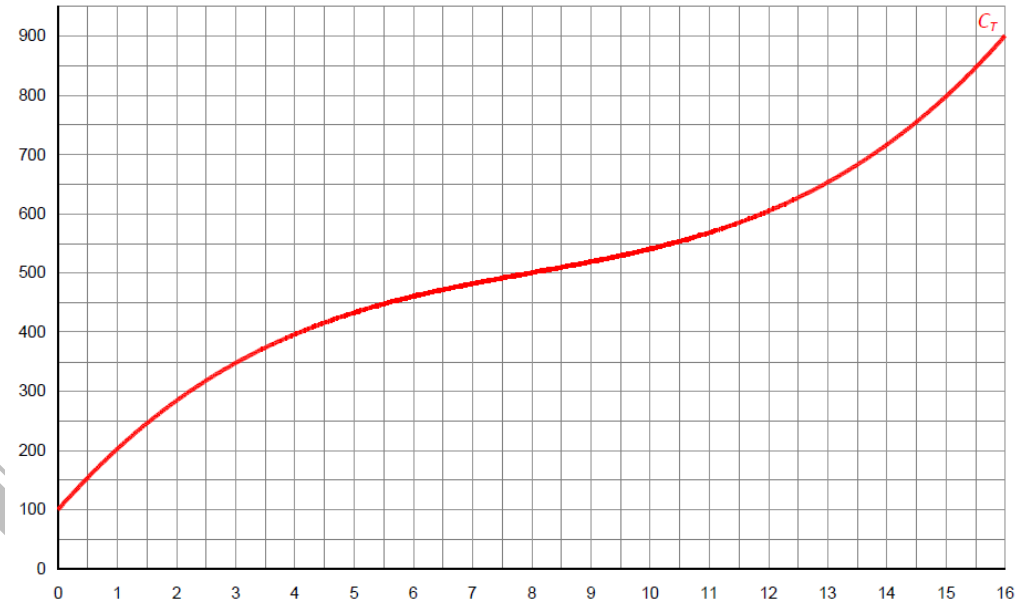
b) Déterminer le nombre d'unités à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum. Que vaut ce bénéfice maximal ?

Problème 10 :

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $]0 ; 16[$ par : $f(x) = 0,5x^3 - 12x^2 + 114x + 100$.

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en euro, de x centaines d'articles fabriqués par jour.

Sa représentation graphique sur cet intervalle, notée C_T , est donnée par :



1) La recette totale en euros pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R(x) = 100x - 3x^2$.

a) Tracer sur le graphique joint la courbe G représentative de la fonction R .

b) Par lecture graphique, déterminer :

- l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice ;
- la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

2) Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0 ; 16[$ par :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

a) Calculer $B'(x)$.

b) Etudier les variations de la fonction B .

c) En déduire la production x_0 (arrondie à l'article près) pour laquelle le bénéfice est maximal. Quel est ce bénéfice maximal arrondi à l'euro près.

Problème 11 :

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (unités : 0,1 cm).

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle I .

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f .

3) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 20$ est asymptote à C . Donner une équation de l'autre asymptote à C . Calculer les ordonnées des points de la courbe C d'abscisses respectives : 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 50 ; 80 ; 100 ; 160.

On donnera les résultats sous forme de tableau

4) Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes.

Partie B

Une entreprise fabrique pendant un intervalle de temps donné une quantité x d'un certain objet. Les charges de cette entreprise pour fabriquer les x objets sont donnés en euros, par : $C(x) = x^2 - 20x + 400$, où $x > 0$.

1) Les charges moyennes unitaires notées $C_m(x)$ sont définies par : $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Déterminer, en utilisant la première partie, la quantité d'objets à fabriquer pour avoir des charges moyennes unitaires minimales.

2) Chaque objet fabriqué est vendu 100 euros. Déterminer le bénéfice $B(x)$ de cette entreprise en fonction de x . Déterminer x pour que ce bénéfice soit maximal.