

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

x	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de x pour la quelle f n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

x	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

c) **Propriété 3 :**

Si k est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty \quad (\text{le signe de } \infty \text{ dépend du signe du zéro et du signe de } k).$$

2) **Opération sur les limites**

a) **Somme :**

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) **Produit :**

f	l	$l = 0$	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \cdot g$	$l \cdot l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) **Quotient:**

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' = 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$\pm \infty$ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

NB :

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; 0 \cdot \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}.$$

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et $f \circ g$ leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne.

Si : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et si $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une fonction f , la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Exemple

Calculer la limite des fonctions suivantes :

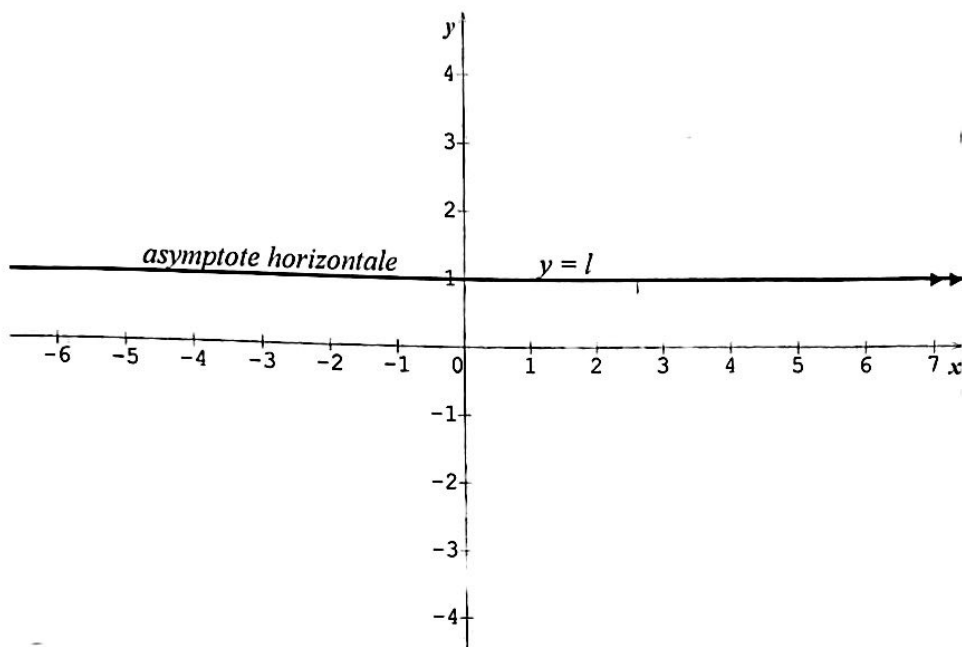
$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2} \end{array}$$

Solution

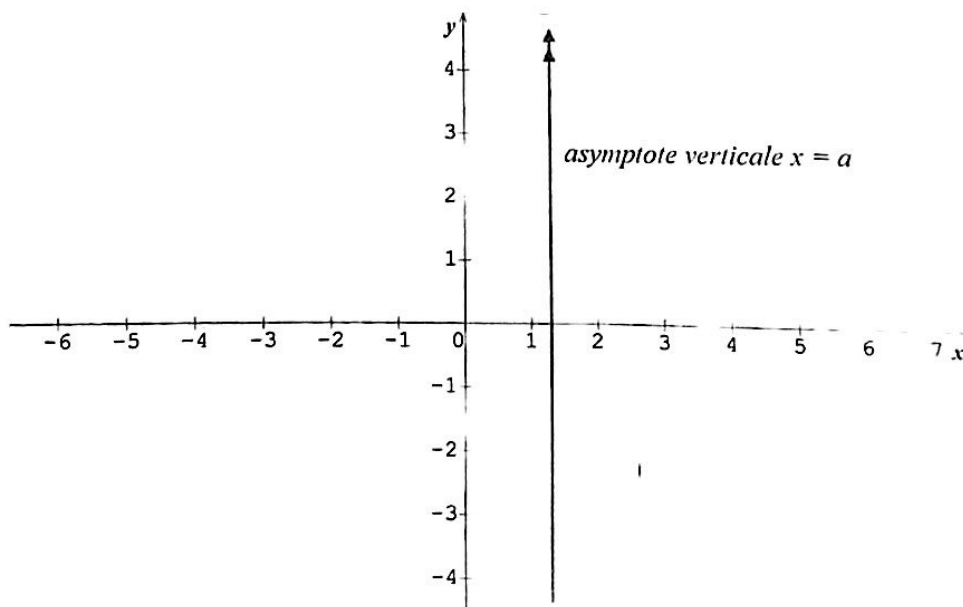
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$$



- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (alors la droite d'équation $x = a$) est asymptote verticale à la courbe représentative de f .



- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la combe représentatives de f).

