

Série d'exercices sur les fonctions numériques en TSEco (2018 – 2019)

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer les limites de ces fonctions aux bornes de leurs domaines de définition.

1) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

3) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$

4) $g(x) = \frac{4}{x^2+x-6}$

5) $g(x) = \frac{x+2}{(x+3)^2}$

6) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x$

7) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

8) $h(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$

9) $h(x) = \frac{\sqrt{-9x^2+18+3x}}{3x-1}$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x^2 - 2x + 11)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x^2 - 2x + 11)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-3x+1}{2x^2+9}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x+1}{2x^2+9}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+7}{x^4+3x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2+5x-12}{(x-2)(x+3)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Exercice 3 :

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $g(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x^2} + (5x - 8)^4$ et $h(x) = \sqrt{x^4 - 6x + 1}$

b) $f(x) = (2x^3 - 3)\sqrt{4x + 8}$; $g(x) = \frac{x^2+x-6}{2x-1}$; $h(x) = \frac{2}{3x+4}$ et $f(x) = (4x - 9)^5$

c) $h(x) = (-x + 1)^6(-2x + 3)^5$ et $g(x) = \frac{\sqrt{2x+7}+5}{x-2}$

2. Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe (C_f) admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

a) $f: x \mapsto \frac{3x^2-2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto \frac{2-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) f est – elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui donner son prolongement par continuité en 1.

Exercice 5 :

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a ; b et c sont des réels.

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Déterminer les réels a ; b et c sachant que f admet 1 pour extrémum en $x = 0$ et -3 pour extrémum en $x = 2$.
- 3) Étudier la fonction f . Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1 ; 0]$; une solution unique β dans $[0 ; 1]$ et une solution unique γ dans $[2 ; 3]$.

4) Tracer la courbe (Cf) de f .

B. Soit la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1. Montrer que f est continue sur.
2. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4; 5]$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

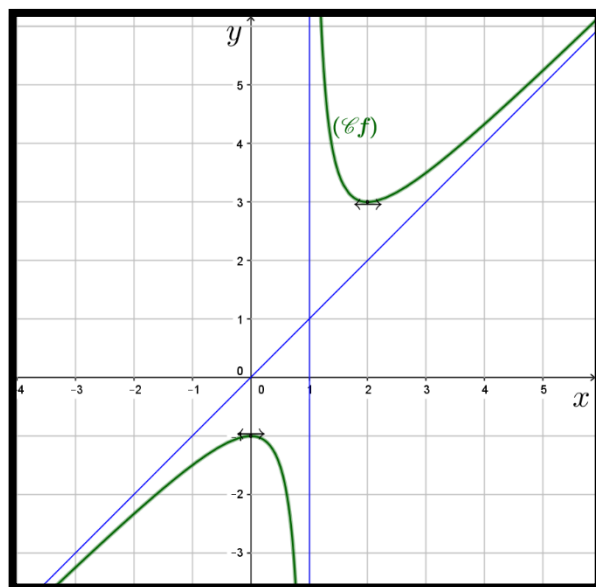
Exercice 6 :

Soit f la fonction de courbe représentative ci – contre :

On donne $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ où a , b , c et d sont des réels.

À partir des informations sur le graphique, répondre aux questions suivantes :

- 1) Donner la valeur de d .
- 2) Donner l'ensemble de définition (Df) de f .
- 3) Donner les limites de f aux bornes de (Df).
- 4) La courbe de f admet – elle un centre de symétrie ? Si oui, donner ce point.
- 5) Donner les équations des asymptotes à la courbe de f .
- 6) Donner les extrémums de la courbe de f .
- 7) Donner explicitement la fonction f .



Exercice 7 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+1}$ où α et β sont des réels.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Déterminer les réels α et β sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
4. Déterminer les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
5. Montrer que la courbe (Cf) de f admet une droite asymptote oblique (D) .
6. Étudier la position de (Cf) par rapport à l'asymptote oblique (D) .

7. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
8. Étudier le signe $f(x)$ suivant les valeurs de x .
9. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (Cf) au point d'abscisse $x = 0$.
10. Montrer que le point $I(-1 ; -1)$ est centre de symétrie de (Cf).
11. Calculer $f(3)$; $f(-3)$ et $f^{-1}(4)$.
12. Tracer la courbe (Cf), la droite (D) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 8 :

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

- 1) Compléter le tableau ci – dessus.
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 3) Calculer $f''(x)$.
- 4) Déterminer les réels a , b et c en utilisant les données du tableau de variation de f .
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (On précisera la méthode).
- 6) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 7) Représenter (Cf).

Exercice 9 :

Le coût moyen de production d'une quantité q est donnée par : $C_{m_0}(q) = \frac{C(q)}{q}$; le coût marginal de production d'une quantité q est donné par : $C_{m_a}(q) = C(q+1) - C(q)$.

Une entreprise produit des objets en quantité q dans un régime de concurrence parfaite.

Le coût de production en milliers de francs de la quantité q est : $C(q) = q^2 + 100q + 100$.

Le prix de vente p par unité lorsque la quantité produite est q est : $p(q) = 2q^2 - 4q + 300$.

On suppose que $q \leq 100$.

- 1) Calculer en fonction de q , le coût moyen C_{m_0} de production.
Déterminer la production q_0 qui rend le coût moyen minimum.
- 2) Calculer le coût marginal à partir de la définition ; puis à partir de la dérivée du coût total. Quelles remarques peut – on faire ? Vérifier que pour $q = q_0$ le coût moyen est égal au coût marginal obtenu à partir de la dérivée. Peut – on généraliser ce résultat ?
- 3) Calculer, en fonction de q le revenu global puis le bénéfice réalisé.
Déterminer la production q_1 qui rend le revenu maximum.

Déterminer la production q_2 qui rend le bénéfice maximum.

Exercice 10 :

Partie A : Soit C la fonction définie sur $[0 ; 300]$ par : $C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

- 1) a) Calculer $C'(x)$; où C' désigne la dérivée de C .
b) Établir le tableau des variations de C' sur $[0 ; 300]$ et en déduire son signe.
- 2) On rapporte le plan d'un repère orthogonal (unités : 1cm pour 50 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 750 000 unités sur l'axe des ordonnées).
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de C . On note A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 10.
 - a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A.
 - b) À l'aide des variations de C' , préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
- 3) Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$ et (T) .

Partie B : Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction $C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

On rappelle que le coût marginal est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire ; on choisit comme modélisation de ce coût marginal : $C_m(x) = C'(x)$.

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole ; ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant le prix de vente unitaire p et la demande x (en unités) est : $p(x) = \frac{-45}{8}x^2 + 2750$ (autrement dit quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$).

- 1) Calculer la recette totale $R(x)$ pour x objets.
- 2) On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire ; on modélise cette recette marginale par : $r_m(x) = R'(x)$ où R' désigne la fonction dérivée de R . Pour quelle valeur de la recette marginale est – elle égale au coût marginal ?
- 3) Montrer que le bénéfice pour la fabrication et la vente x unités est donné par :
$$B(x) = \frac{x^3}{30} + \frac{75}{8}x^2 + 250x.$$
- 4) a) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .
b) En déduire que le bénéfice est maximum quand la recette marginale est égale au coût marginal. Que vaut alors ce bénéfice maximum ?

Exercice 11 :

Le coût, en euro, de x bouquets réalisés par un fleuriste est exprimé par la fonction suivante :

$$C(x) = 0,1x^2 - x + 490 \text{ pour } x \text{ réel positif.}$$

Soit $C_m(x)$ le coût moyen de x bouquets en euro par bouquet.

- 1) Étudier le sens de variation de C sur $[0 ; +\infty [$
- 2) Exprimer le coût moyen $C_m(x)$ par bouquet en fonction de x
- 3) Étudier le sens de variation de C_m .
- 4) Quel est le nombre de bouquets à réaliser pour que le coût moyen par bouquet soit minimal ?