

Travaux Encadrés

CHAPITRE 1 : PUISSANCES ENTIÈRES ET RATIONNELLES

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (2a^3b^2c)^4$$

$$B = \left(\frac{1}{2}x^7\right)(8x^8)$$

$$C = \frac{(2x^4)(5x^6)}{(10x^2)^4}$$

$$D = (9y^6)(3y^5)^{-3}$$

$$E = \left(\frac{a^5b}{2a^7b^2}\right)^{-3}$$

$$F = \left(\frac{(2x^3y^2)^2}{z^2}\right)^2 \left(\frac{z^2}{x^4y}\right)^4$$

Exercice 2

Simplifier et calculer :

$$1) 6^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{3}}$$

$$2) \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$$

$$3) \frac{3^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{6}}{\sqrt{2}}$$

$$4) \sqrt{\left(4a^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$5) \sqrt{(\sqrt{7} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$$

$$6) \frac{16\sqrt[3]{9} \cdot 3\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{9})^3}{(5\sqrt[3]{3})^2}$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) 2x^6 = 128$$

$$2) x^5 + 243 = 0$$

$$3) x^6 = -7^{12}$$

$$4) (x^4 + 2)^{10} = 2$$

$$5) (x^4 - 2)^4 + 2 = 0$$

Exercice 4

La masse moyenne M en kg d'une femme dont la taille en cm est h est donnée par $M = 0,0097h^{1,7}$.

a) Calculer la taille d'une femme pesant 60 kg.

b) Que devient la taille lorsque la masse d'une personne de 1,70 m augmente de 10% ?

CHAPITRE 2 : RAPPORTS ET PROPORTIONNALITÉS

Exercice 5

Quatre dactylos ont mis 8 heures pour taper un rapport de 160 pages.

Combien de temps mettraient six dactylos pour taper ce même rapport ?

Exercice 6

Pour tapisser une chambre, il faut 71 rouleaux et demi de papier peint, de 60 cm de large. Combien faudra-t-il acheter de rouleaux de même longueur, mais de 75 cm de large, pour tapisser cette même pièce ?

Exercice 7

8 poules pondent 8 œufs en 8 jours. Combien pondent 4 poules en 4 jours ?

Exercice 8

Pour remplir un biberon de 210 ml, on utilise du lait en poudre et de l'eau. Sachant qu'une cuillère-mesure de lait se dissout dans 30 ml d'eau, combien de mesures utilise-t-on ?

Exercice 9

On considère le tableau suivant :

Masse de la viande (kg)	1	0,5	x	0,440
Prix de la viande (F CFA)	1600	800	1248	y

1. À l'aide de la 2^{ème} et de la 3^{ème} colonne, montrer que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

2. Déterminer le coefficient de proportionnalité k .
Que représente-t-il ?

3. Déterminer à l'aide du coefficient de proportionnalité la masse x , en kg, pour une viande coûtant 1248 F CFA.

4. Déterminer à l'aide du coefficient de proportionnalité le prix y à payer, en F CFA, pour 440 g de viande.

Exercice 10

Un garagiste a réalisé un bénéfice de 120 000 F.

Il en conserve les $\frac{3}{4}$, et partage le reste entre ses 4

Employés en parts directement proportionnelles à leurs

Anciennetés : 2 ans, 7 ans, 9 ans et 12 ans.

Calculer la part de chaque employé.

Exercice 11

Sur le plan cadastral, un terrain rectangulaire a pour dimensions 12 mm et 18 mm. Ce terrain, dans la réalité, a une aire de 54 ares. Déterminer la longueur et la largeur réelle de ce terrain ainsi que l'échelle du plan cadastral.

Exercice 12

Sur une carte, la distance "à vol d'oiseau" entre A et B est de 72 mm, celle entre A et C est de 30 mm. Calculer l'échelle de la carte sachant que le triangle ABC est rectangle en A et que la distance réelle entre B et C s'établit à 39 kilomètres.

Exercice 13

Partager 33 200 francs en trois parts a, b et c :

- 1) proportionnelles à 4, 5 et 7.
- 2) inversement proportionnelles à 4, 5 et 7.

CHAPITRE 3 : POURCENTAGES

Exercice 14

Une coopérative ristourne à ses membres le 9 % de leurs achats annuels. Monsieur Durand a reçu, pour l'année 1994, une participation aux bénéfices de 64125 F. Quel a été le total de ses achats en 1994 ?

Exercice 15

Un lot de chemises est vendu avec une remise de 24 % sur le prix marqué. La facture indique comme montant de la remise 120000 F CFA. Retrouver le prix initial du lot.

Exercice 16

Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles, et 25% des filles ont les yeux bleus. Quel est le pourcentage de filles aux yeux bleus dans ce lycée ? Combien d'élèves cela représente-t-il si le lycée compte 225 élèves au total ?

Exercice 17

Aux Jeux Olympiques de Rome (1960), les sportifs maliens (particulièrement brillants à l'époque) ramenèrent en tout et pour tout 5 médailles. Aux jeux Olympiques de Sydney, ils en ont ramené 38. Cela représente quelle évolution, en pourcentage ?

Exercice 17

Le prix de l'essence dans une grande surface est de 10560 F alors qu'il est de 14200 F dans une station essence. Calculer le taux d'augmentation entre la station et la grande surface.

Exercice 18

En juillet 2003, un camping accueillait 650 vacanciers. Le responsable assiste à une hausse de 7 % de sa clientèle depuis juillet 2002. Quel était le nombre de campeurs en juillet 2002 ?

Exercice 18

Dans une assemblée, il y a 40% d'hommes dont 30% ont plus de 60 ans. Quel est le pourcentage des au moins sexagénaires de cette assemblée ?

Exercice 19

Abstentions 47%. Suffrages exprimés : 92%. Le candidat est élu avec 52% des voix. Quel pourcentage de l'électorat a-t-il voté pour le vainqueur ?

Exercice 20

Un épicier dispose de 48 kilogrammes de fruits qu'il veut vendre au prix de 15 francs le kilo. Il s'aperçoit alors que 12 % des fruits sont invendables. A combien doit-il fixer le prix du kilo de fruits pour que son chiffre d'affaires demeure inchangé ? (arrondir au centime le plus proche).

Exercice 21

Un Directeur d'agence veut distribuer une prime à ses trois salariés A, B et C. 30 % du montant global de cette prime est répartie équitablement entre A, B et C et le reste proportionnellement à l'ancienneté de chacun, soit 4 ans pour A, 5 ans pour B et 11 ans pour C. C a touché au total 3 73450 F. Calculer le montant global des trois primes, ainsi que la prime de A et de B.

Exercice 22

Un propriétaire veut vendre trois parcelles de terrain proportionnellement à leur surface. L'aire de la première parcelle représente 80 % de l'aire de la seconde parcelle, qui elle-même est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire de la troisième parcelle. Ce propriétaire espère ainsi retirer, au prix de 350 francs le mètre carré, une somme totale de 1 155 000 francs. Exprimer, en ares, l'aire de chaque parcelle, ainsi que son prix.

Exercice 23

A la ligne "Loisirs et Culture", une commune dispose d'un budget qui est réparti de la façon suivante :

- 25 % de cette somme est consacrée au financement de deux manifestations : le festival de bandes dessinées bénéficie de 60 % de cette somme tandis que le rallye pédestre culturel obtient les 40 % restants.
- 75 % de cette somme est à répartir entre trois associations A, B et C proportionnellement à leur nombre d'adhérents : A compte 120 adhérents, B 90 adhérents et C 240 adhérents. Détailler l'ensemble des subventions sachant que l'association B a reçu 15 000 francs.

Exercice 24

Suite à un déménagement, le loyer d'une famille baisse de 18%. Sachant que son loyer était de 580000 F par mois. Déterminer :

- a) la diminution du montant du loyer ;
- b) le prix actuel du loyer.

Exercice 25

Un livre vaut 6000 F hors taxe. Le taux de TVA est de 18%.

1. Déterminer le montant de la TVA.
2. En déduire le prix du livre taxe comprise.

Travaux Encadrés

CHAPITRE 4 : PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE

Exercice 26 _____

On définit la suite U telle que $U_n = -5n^2 - 1$

- 1) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3
- 2) Montrer que $U_{n+1} - U_n < 0$
- 3) Placer les points (n, U_n) puis les joindre.

Exercice 27 _____

On définit la suite (U_n) par $U_n = 3n - 2$

- a) Prouver que la suite (U_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera
- b) Représenter graphiquement la suite (U_n) (on pourra se limiter aux six premiers termes).

Exercice 28 _____

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = 5 - 2n$

- 1) Calculer U_0, U_1 et U_2
- 2) Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 3) Que vaut U_{100} ?

Calculer la somme des 101 premiers termes.

Exercice 29 _____

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme

$$U_1 = 1 \text{ et de raison } q = -2$$

- a) Calculer U_2, U_3 et U_4
- b) Calculer U_{20}
- c) Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{20}$

Exercice 30 _____

On considère la suite (U_n) définie

$$\text{par } \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2

2) La suite (U_n) est-elle arithmétique, géométrique ?

4) On considère la suite $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

- a) Calculer V_0, V_1 et V_2 puis démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
- b) Exprimer U_n en fonction de n .
- c) Exprimer U_n en fonction de V_n
- d) Que vaut U_{10} ?

Exercice 31 _____

La suite (U_n) est arithmétique de raison r , on sait

$$\text{que } U_{50} = 406 \text{ et } U_{100} = 806$$

- a) Calculer la raison r et U_0
- b) Calculer la somme $S = U_{50} + U_{51} + \dots + U_{100}$

Exercice 32 _____

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 1999 + 2000$$

$$S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + \dots + 9998 + 9999$$

Exercice 33 _____

1) Soit U_1, S_n, r et S désignant respectivement le 1^{er} terme, le $n^{\text{ème}}$ termes, la raison et la somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer :

- a) U_n et S_n si $U_1 = 7, n = 120$ et $r = 5$
- b) r et S_n si $U_1 = 397, U_n = 64$ et $n = 1000$

c) n et r si $U_1 = -3, U_n = 6$ et $S_n = \frac{57}{2}$

2) Soit U_1, S_n, q et S désignant respectivement le 1^{er} terme, le $n^{\text{ème}}$ termes, la raison et la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique.

Calculer :

- a) U_n et S_n si $U_1 = 2, n = 5$ et $q = 3$
- b) U_1 et U_n si $q = \frac{1}{2}, n = 7$ et $S_n = \frac{1143}{2}$
- c) n et q si $U_1 = 48, U_n = 243$ et $S_n = 63$

Exercice 34 _____

1) Soit u une suite arithmétique telle que

$$u_6 = 7, u_{10} = 4$$

Calculer u_{20}

2) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que :

$$\begin{cases} u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 236 \\ u_4 + u_6 = 6 \end{cases}$$

Calculer u_0 et la raison r

Exercice 35

Soit (u_n) une suite géométrique telle que

$$v_1 = 6, v_4 = 48$$

a) Calculer v_{15}

b) Calculer u_1, u_2 et u_3 sachant que

$$u_1 u_3 = \frac{4}{9} \text{ et } u_1 + u_2 + u_3 = \frac{19}{9}$$

c) Calculer la valeur exacte de

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{38}}$$

Exercice 36

On dispose d'un capital de 1900000 Fcfa en 2012. On place ce capital sur un compte à intérêts composés de 3% par an.

- 1) Calculer le capital obtenu au bout d'un an.
- 2) Calculer le capital obtenu au bout de 7 ans.
- 3) De quel pourcentage a augmenté le capital ces 7 années ?
- 4) Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital de 4000000 Fcfa ?

Exercice 37

Le Lycée SALAMA décide de verser à ses professeurs une prime annuelle de 5000 F CFA. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 20% par rapport à l'année précédente. On note (U_n) la suite des primes avec $U_1 = 5000$

1) Calculer U_2 puis U_3 (c'est-à-dire la prime versée par le Lycée la 2^{ème} année et la 3^{ème} année).

2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n

En déduire la nature de la suite (U_n)

Un professeur de Mathématique compte rester 20 ans dans le Lycée à partir du moment où est versée

3) Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année

(c'est-à-dire U_{20})

4) Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 ans

(c'est-à-dire $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$)

Exercice 38

1) x, y et z sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 9 et la somme des carrés est 59.

2) x, y, z sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.

Exercice 39

Soient a, b, c, d et e 5 termes consécutifs d'une suite

arithmétique telles que $\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$

1) Exprimer a, b, d et e en fonction de c et r .

2) Déterminer a, b, c, d et e .

Exercice 40

1) On considère une progression arithmétique de premier terme 1, de dernier terme 99 et de raison 2. Combien de termes existent entre le premier et le dernier ?

2) On insère 5 moyens géométriques entre 2 et 1458. Déterminer la raison de cette progression et préciser le 4^{ème} terme.

Exercice 41

1) Un informaticien signe un contrat de maintenance sur 10 ans. La valeur initiale est de 1000000 F CFA. Il est envisagé de l'augmenter de 100000 F CFA par an. Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

2) L'informaticien signe un autre contrat de maintenance sur 10 ans. Le montant de début du contrat est de 1000000 F CFA et il est prévu une augmentation de 8% par an.

Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

3) Lequel des deux (2) contrats est le plus profitant pour l'informaticien ?

Travaux Encadrés

CHAPITRE 5 : FONCTIONS NUMÉRIQUES, PRIMITIVE, INTÉGRATION ET FONCTIONS SPÉCIALES

Exercice 42

On définit la fonction polynôme f par

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$$

- Calculer $f(2)$
- Factoriser f
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$
- Étudier le signe de f suivant les valeurs de x .
- En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$

Exercice 43

Déterminer le domaine de définition de la fonction f puis l'écrire sous forme d'intervalle ou réunion d'intervalle dans les cas suivants :

- $f(x) = x^2 + x + 2$
- $f(x) = -x^3 + 3x - 1$
- $f(x) = \frac{3x+1}{-x+4}$
- $f(x) = x + 1 + \frac{2}{1-x}$
- $f(x) = x + \frac{1}{2x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$
- $f(x) = \frac{4x^2-6x+3}{6-2x}$

Exercice 44

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 6x^2 + x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 6x^2 + x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x+5}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x+5}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+x+1}{2x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2+x-1}{x-1}$

Exercice 45

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$

Exercice 46

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 donné dans les cas suivants :

- $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ et $x_0 = 1$
- $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$ et $x_0 = 2$

Exercice 47

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = 12$
- $g(x) = -2x + 5$
- $h(x) = -x^2 - 3x - 2$
- $i(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$
- $j(x) = \frac{x^2+x+1}{2x-1}$
- $k(x) = \frac{3x+1}{x+5}$
- $l(x) = -x + 2 - \frac{3}{3x+1}$
- $m(x) = \frac{1}{4}(6x^3 - x - 1)^3$
- $n(x) = (2x + 3)(-7x^2 + x - 8)$
- $p(x) = -1 + \frac{2}{x}$

Exercice 48

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f (D_f)
- Déterminer les limites aux bornes de D_f .
- Prouver que la courbe (C) de f admet la direction de OJ pour branche parabolique.
- Calculer la fonction dérivée f' de f .
- Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Préciser les extremums à la courbe de f .
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
- Représenter la courbe (C) de f dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 49

Étudier et représenter les fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 + x - 2$
- $f(x) = -2x^2 - x + 3$
- $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
- $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$
- $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$
- $f(x) = \frac{-x^2-3x+1}{1-2x}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$

Exercice 50

1) Soit f une fonction polynôme du second degré de courbe représentative (C) dans un repère orthogonal définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer les réels a, b et c si (C) passe par $A(0; -3)$ et que le sommet de la parabole soit $B(-1; -4)$

2) Déterminer une fonction polynôme du 1^{er} degré f telle que $f(1) = 7$ et $f(0) = 5$

3) Trouver un polynôme du second degré tel que

$$g(0) = 3; g(-2) = 1; g(1) = 10.$$

Exercice 51

On considère la fonction f sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$ de courbe représentative (C) dans un repère orthogonal.

1) Trouver les limites aux bornes du domaine

2) Prouver que la droite d'équation $(\Delta): y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C) de f .

3) Étudier la position de (Δ) par rapport à (C).

5) Vérifier que $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$

6) Étudier les variations de f et son dresser son tableau de variation.

8) Construire la courbe (C).

Exercice 52

Déterminer les nombres a et b pour que l'hyperbole (C) définie par $g(x) = \frac{ax+2}{x+b}$ admette la droite $x = -2$ pour asymptote verticale et $y = -1$ pour asymptote horizontale.

Exercice 53

Dessiner l'allure de la courbe (C) de la fonction numérique f de la variable x définie par son tableau de variation ci après.

On précise que :

(C) coupe (OI) en $A(-1,0)$ et $B(\frac{1}{2}, 0)$ et (OJ) en $C(0,1)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	
$f(x)$	$-\infty$		1	$-\infty$	

Exercice 54

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

telle que $f(0) = 2, f(-2) = -2, f'(0) = f'(-2) = 0$

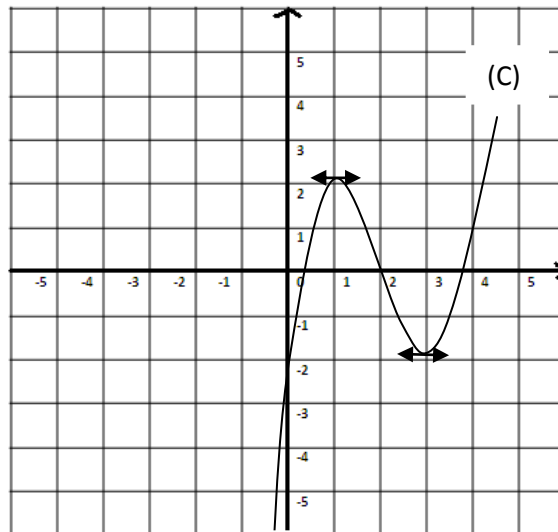
a) Trouver D_f

b) Calculer $f'(x)$

c) Vérifier que $a = b = c = 1$

Exercice 55

On définit la fonction f par sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Trouver $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Préciser les extremums à la courbe (C) de f

d) Trouver les coordonnées du (des) point(s) d'intersection

de la courbe (C) avec l'axe des abscisses et des ordonnées.

Exercice 56

Déterminer une primitive de fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

a) $f(x) = -2x + 1$ b) $g(x) = 3x^2 - 4x$

c) $h(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x^2}$ d) $k(x) = -3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

e) $m(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$

f) $n(x) = \frac{x+2}{3}$ g) $p(x) = x(x^2 + 1)^2$ h) $q(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

i) $r(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ j) $s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

k) $t(x) = \frac{1}{x^3}$ l) $u(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$

m) $v(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^6} + 6$

n) $w(x) = (3x + 4)(3x^2 + 8x)^4$

Exercice 57

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + 1 - \frac{8}{(x-2)^2}$ sur $]2, +\infty[$

b) $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 58

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

b) En déduire la primitive F de f sur $]0, 1[$ vérifiant $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

Exercice 59

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2}$$

1) Prouver que pour tout $x \neq 1$, f peut s'écrire

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels que}$$

l'on déterminera.

2) Trouver une primitive de f sur son domaine de définition

Exercice 60

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 (x+4)dx \quad B = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$C = \int_1^2 \frac{3dx}{\sqrt{x}} \quad D = \int_0^1 (2x+3)(x^2+3x-5)dx$$

$$E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad F = \int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3} dx$$

$$G = \int_1^2 \frac{3-x}{x^2-6x+1} dx \quad H = \int_{-1}^1 \left(x+7+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) dx$$

$$I = \int_0^1 x^2 dx \quad J = \int_2^6 (|x-5| + 2) dx$$

$$K = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx \quad L = \int_2^5 dx$$

$$M = \int_{-1}^1 (2x^2 - 1)dx \quad N = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2+7)^2} dx$$

Exercices 61

On considère sur $I =]2, +\infty[$ la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$

2) Trouver une primitive de f

3) En déduire $A = \int_{-1}^1 f(x)dx$

Exercices 62

On considère la fonction F définie par $F(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ de courbe représentation (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer la dérivée F' de la F .

b) Résoudre l'équation $F(x) = 1$

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$ c) Trouver le domaine de définition de g

d) Déterminer une primitive G de g qui vérifie $G(2) = 0$

Exercice 63

Déterminer en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 3$, la droite (D) d'équation réduite $y = 2x - 3$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ puis faire un dessin.

Exercice 64

On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2$ et $g(x) = x^2$, de courbes représentatives (C) et (C') dans un repère orthonormé.

1) Construire les deux courbes dans le même repère.

2) Étudier la position relative de (C) et de (C') .

3) Calculer en unité d'aire, l'aire du domaine fermé compris entre les deux courbes

Exercice 65

Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \ln \sqrt{e} + \ln \left(\frac{1}{e} \right)$ b) $B = \ln(0,1) + \ln(1,7)$

c) $C = \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ d) $F = 2e^2 - \ln \left(\frac{1}{e^{-2}} \right)$

e) $D = e^{3 \ln 2} - e^{(\ln 2 + \ln 5)} + 2 \ln(\ln e)$

f) $E = 2 \ln \left(\frac{1}{e} \right) + \ln e^2 - 2e^{\ln \left(\frac{1}{3} \right)}$

Exercice 66

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x-1) + 2$ b) $g(x) = \ln(1-2x) + \frac{3}{x}$

c) $h(x) = \frac{x+1}{\ln x-1}$ d) $h(x) = e^{x-1} + x^2 + 1$

e) $m(x) = \frac{1+4x}{e^{x+1}}$ f) $n(x) = 3x + \frac{x}{e^{x+2}}$

Exercice 67

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+\ln x}{x} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln x}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^x}{2x^2} \right)$

Exercice 68

1) Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ b) $g(x) = (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$

c) $h(x) = e^{3x} - 2e^{-x}$ d) $k(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

2) Calculer $f(e)$, (1) , $h(0)$ et $k(-1)$ **Exercice 69**Soit f la fonction définie sur $] -\infty, \frac{3}{2} [$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{4x - 6}$$

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{4x - 6}$$

2) En déduire une primitive de f une $] -\infty, \frac{3}{2} [$ **Exercice 70**1) Déterminer une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = (3x^2 + 2)e^{(x^2+2x)}$ 2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - f(x)$ a) Calculer une primitive de g sur $\mathbb{R}$ b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$ **Exercice 71**

Après avoir précisé les contraintes résoudre :

a) $\ln(5x - 3) = 2$

b) $\ln(2x + 2) + \ln(x - 3) = \ln(x + 5)$

c) $2(\ln x)^2 + 3 \ln x - 2 = 0$ d) $\ln(x^2) = (\ln x)^2$

e) $e^{2x-4} \leq 3$ f) $\ln(-3x + 2) < \ln 3$

g) $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$ h) $\ln \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)^2$

i) $\frac{e^{2x}-2}{e^{-x}} = -1$ j) $2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0$

k) $\ln(x + 5) + \ln(x - 1) < \ln(5x + 7)$

Exercice 72

Résoudre les équations et inéquation suivants :

a) $3^{2x-1} = 27$ b) $5^{x^2-1} = 125$ c) $7^{x-1} \geq 1$ d) $(0,1)^x = 10$

Exercice 73Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} \ln x + \ln y^2 - 1 = 0 \\ \ln x - \ln y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^{3x-4} \cdot e^{y-2x} = e^2 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \ln(x + 3) + 3 \ln(4 - y) = 4 \\ 5 \ln(x + 3) - 3 \ln(4 - y) = -11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2e^x - e^y = -2 \\ 4e^x + e^y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$

Exercice 74Le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{-x+2}{x+1} \right) \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative}$$

a) Étudier le signe de $U(x) = \frac{-x+2}{x+1}$ En déduire l'ensemble de définition D_f de f b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et

préciser les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

c) 1) Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe pour tout $x \in D_f$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 75

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{x-1} - 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2) Étudier les variations de f .

3) Étudier l'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OI) et l'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OJ) .

4) Construire $(\mathcal{C})$

Exercice 76

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x-4}{x} e^x$$

a) Étudier les limites de f en $-\infty, 0^-, 0^+$ et $+\infty$

b) Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe

c) En déduire le tableau de variation de f (on précisera la valeur exacte des éventuels extremums).

d) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point d'abscisse $x_0 = 2$

e) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f (on pourra se placer sur l'union $[-2, 0[\cup]0, 5]$).

Exercice 77

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln(x+1)$ de courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g

2) a) Calculer les limites de g aux bornes de D_g

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.

3) a) Calculer la dérivée f' de f .

b) En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variation

4) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$

5) Construire la courbe $(\mathcal{C})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$.

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 5 \approx 1,6$

Exercice 78

Étudier et représenter les fonctions définies par :

a) $f(x) = 3xe^x - 2$ b) $g(x) = 2 \ln x + 3$

c) $h(x) = e^{-x+3}$ d) $k(x) = x \ln x - 2$

Exercice 79

On considère le polynôme P définie par

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

1) Calculer $P(-1)$ et trouver une factorisation de P

2) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

3) Résoudre les équations $e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^x = 6$ et

$$(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - 5 \ln x = 0$$

4) Résoudre les inéquations

$$(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - 5 \ln x < 0$$

Exercice 80

On nomme fonction exponentielle de base a , la fonction définie par $a^x = e^{x \ln a}$ ayant les mêmes propriétés que la fonction exponentielle de base e .

Soit la fonction f telle que $f: x \mapsto 3^{x+2}$

Étudier et représenter f .

Exercice 81

Soit la fonction f telle que $f(x) = x^{0,3} (\ln x)^2$.

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Trouver les limites aux bornes de ce domaine

3. Étudier les variations de f .

4. Terminer l'étude de f puis construire sa courbe représentative.

Travaux Encadrés

CHAPITRE 6 : DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Exercice 82

Un centre de loisirs accueille 100 enfants. Deux sports sont proposés : le Foot Ball, et le Tennis

- A la question : Aimez-vous le Foot Ball ?
60 enfants lèvent la main.
- A la question : Aimez-vous le Tennis ?
45 enfants lèvent la main.
- A la question : Aimez-vous le Tennis et le Foot Ball ?
18 enfants lèvent la main.

Déterminer le nombre d'enfants qui :

- a) aiment le Foot Ball seulement.
- b) aiment le Tennis seulement.
- c) n'aiment ni le Foot Ball, ni le Tennis.

Exercice 83

Sans utiliser la calculatrice, calculer: a) $6!$ b) A_6^3 c) C_5^3 d) 2^7 e) A_n^2

Exercice 84

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $C_n^2 = C_{n+2}^1$ b) $15 - 3n = A_n^2$ c) $A_n^4 = 42 \cdot A_n^2$ d) $A_n^3 = 90n$ e) $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$ f) $C_n^2 = 6$

Exercice 85

Une urne contient 7 boules noires, 5 boules rouges, et 2 boules blanches indiscernable au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

- a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
- b) Quel est le nombre de probabilités d'avoir :
 - 1) 3 boules de couleurs différentes
 - 2) 3 boules de même couleurs
 - 3) Au moins une boule blanche
 - 4) Au plus deux boules rouges
 - 5) Aucune boule noire

Exercice 86

Une urne contient sept jetons rouges portant le numéro 3, cinq jetons noirs portant le numéro 2 et trois jetons verts portant le numéro 1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

- a) Déterminer le nombre de tirages possibles
- b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants
 - i) Les deux jetons tirés sont de même couleur
 - ii) La somme des points marqués sur les jetons est égale à 4
 - iii) La somme des points marqués sur les jetons est paire
 - iv) La somme des points marqués sur les jetons est égale à 2.

Exercice 87

Un informaticien désordonné dispose de 25 *DVD* enregistrables. Il a enregistré des fichiers sonores sur 5 d'entre eux, des fichiers texte sur 6 *DVD* et des images sur 7 *DVD*. Les autres *DVD* sont vierges. L'informaticien choisit simultanément 3 *DVD*.

- a) Combien de tirages distincts peut-il effectuer
- b) Quelle est la probabilité de tirer 3 *DVD* contenant des fichiers sonores ?
- c) Quelle est la probabilité de tirer 2 *DVD* contenant des fichiers texte et 1 *DVD* contenant des images ?
- d) Quelle est la probabilité de tirer au moins un *DVD* vierge ?

Exercice 88

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 5 cartes. Ces 5 cartes forment une main.

- 1) Dénombrer les mains contenant :
 - a) Un AS
 - b) Un carreau
 - c) Exactement deux AS et un Trèfle
- 2) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) $A = \text{« on a au moins 3 Piques et 2 Cœurs »}$
 - b) $B = \text{« on a une main de 5 cartes de même couleur »}$.
 - c) $C = \text{« on a une main comportant exactement deux AS »}$

Exercice 89

a) En étudiant une population, on a remarqué que durant un mois 40% des individus sont allés au cinéma 25% sont allés au théâtre et 12,5% sont allés au cinéma et au théâtre. Calculer la probabilité que durant un mois, un individu :

- 1) aille au cinéma ou au théâtre.
- 2) n'aille pas au cinéma.
- 3) n'aille ni au cinéma ni au théâtre.
- b) Lors d'un cercle de qualité, six personnes sont invitées à s'asseoir autour d'une table ronde. Combien peut-on dénombrer de dispositions différentes de ces personnes, les unes par rapport aux autres ?
- c) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « STATISTIQUE » ?

Exercice 90

Pour accéder à une banque de données, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres sur votre minitel. Combien de mots de passe de 4 lettres distinctes peut-on créer. (Un mot de passe n'a pas nécessairement un sens).

Exercice 91

Une urne contient 5 boules noires, 6 boules rouges et 4 vertes. On tire successivement sans remise 5 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants:

- A « les 5 boules tirées sont noires »
- B « les 5 boules tirées sont de la même couleur »
- C « on a obtenu 3 boules noires et 2 boules rouges »
- D « on n'a obtenu aucune boule verte »
- E « on a obtenu 5 boules vertes »

Exercice 92

Un coffre contient 3 pièces de monnaie noires, 2 pièces rouges et 5 pièces blanches. On tire successivement et avec remise 3 pièces. Calculer la probabilité que :

- les 3 pièces tirées soient rouges
- les 3 pièces tirées sont de couleurs différentes
- l'on obtient 2 pièces noires et une pièce rouge.

Exercice 93

On considère les événements A, B et C définis sur une même épreuve et on se donne les quantités :

$$P(A) = 0,30, \quad P(B) = 0,25, \quad P(C) = 0,25$$

$$P(A \cap B) = 0,075, \quad P(B \cap C) = 0,15, \quad P(A \cap B \cap C) = 0,08$$

1) Calculer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(A | B), P(B | A) \text{ et } P(A \cap B | C)$$

2) Vérifier l'indépendance de A et B et de B et C

Exercice 94

Lors de la négociation d'un Contrat, un Directeur Commercial a 3 chances sur 5 d'obtenir un bénéfice de 10000 F et 40% de chances de laisser une perte de 20000 F.

- 1) Préciser la loi de probabilité de la variable aléatoire associée.
- 2) Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire
- 3) Calculer sa variance et en déduire son écart-type
- 4) Donner une interprétation à l'espérance mathématique.

Exercice 95

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6, l'un est rouge, l'autre est blanc. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A : Obtenir exactement un 1 B : Obtenir au moins un 1 C : Le plus petite des deux numéros est 4.

Exercice 96

La probabilité pour qu'un élève de TSECO12 passe au Bac est de 40%. Calculer pour un groupe d'exercice de cinq élèves, la probabilité pour :

- a) qu'aucun ne passe
- b) qu'un et un seul passe
- c) que deux passent
- d) qu'au moins deux passent

Exercice 97

Afin de mettre en évidence le réchauffement de l'atmosphère (Effets de Serre), on a mesuré la température moyenne annuelle de la planète. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la température (en degré Celsius) depuis 1974.

Année x_i	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Température y_i : (°C)	19,12	19,70	19,62	20	20,60	20,88	20,92

a) Représenter le nuage de point $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour origine (1970 ; 19) et comme unités graphiques 1cm pour 2 ans sur l'axe des abscisses et 5 cm pour un degré sur l'axe des ordonnées.

b) On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 le point moyen des quatre derniers.

1) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 et tracer la droite $(G_1 G_2)$ sur le graphique.

2) Déterminer une équation de la droite $(G_1 G_2)$.

On considère que cette droite réalise un bon ajustement du nuage.

c) Si la tendance se confirme, déterminer :

1) La température aura l'on peut prévoir en 2010.

2) En quelle année la température aura dépassé 22°C ?

Exercice 98

Le gérant d'un hypermarché, disposant d'un potentiel de 28 caisses enregistreuses, à fait réaliser une statistique sur le temps moyen (en minutes) d'attente d'un client à la caisse.

On note x_i le nombre de caisses ouvertes ; y_i le temps moyen d'attente correspondant. On suppose qu'il y a toujours au moins 4 caisses ouvertes.

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_i	12,25	12	11,5	11,75	10	10	9,75	9	8,25	8

- 1) a)** Construire dans un repère orthogonal le nuage de point associé à ce tableau statistique, c'est-à-dire l'ensemble $M_i(x_i, y_i)$ (prendre 1 cm pour une caisse et 1 cm pour une minute d'attente)
- b)** Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.
- 2) a)** Calculer coordonnées du point moyen G_1 associé aux 5 premiers points du tableau puis celles du point moyen G_2 associé aux 5 derniers points et construire G_1 et G_2 sur le même graphique que G
- b)** Tracer $(G_1 G_2)$.
- c)** Déterminer une équation de la droite $(G_1 G_2)$.
- d)** G appartient-il à la droite $(G_1 G_2)$?
- 3)** En utilisant l'ajustement affine obtenue en **2) c)** déterminer :
- a)** Le temps moyen d'attente d'un client à la caisse lorsque 20 caisses sont ouvertes.
- b)** Le nombre de caisse à ouvrir pour que le temps moyen d'attente d'un client à une caisse soit 3 minutes.
- c)** Retrouver graphiquement les résultats des questions **3) a)** et **3) b)**.

Exercice 99

Le relevé suivant fournit les notes de 10 élèves de la TSECO12 au Lycée Monseigneur dans les devoirs de Maths et d'Anglais :

Maths(x)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Anglais(y)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Cette série étant ajustable par ajustement linéaire.

- Déterminer $Cov(x, y)$, $Var(x)$, $Var(y)$, σ_x et σ_y
- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables.

CHAPITRE 7 : ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS

Exercice 100

Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss le système $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = -1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}$$

Exercice 101

Trois employés ont respectivement 18, 12 et 9 années de service. Leurs salaires hebdomadaires respectifs sont 21600F, 14400 et 9600F. Ils doivent se partager une somme de 1440F proportionnellement à leurs nombres d'années de service et proportionnellement aux inverses de leurs salaires. Trouver les trois parts.

Exercice 102

Résoudre et discuter suivant les valeurs de m dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} mx + y + z = m + 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + my = m - 1 \end{cases}$$