

BEMBUS – MALI

Au Service de la Nation

« Le savoir est la plus grande des richesses : on le donne sans réussir à l'épuiser »

Bemba dit Bamba TRAORE

Enseignant Chercheur, économètre, gestionnaire de la politique économique

Tél : (00223) 69 - 50-23-20/ 76 - 43-95-33 mël : bbtraoremali@yahoo.fr

Farifoni – Maths

TSECO

Chapitres : 1 ; 2 ; 3 ; 4

Bamako, mai 2021.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
La raison	$R = \frac{U_n - U_p}{n - p}$	$q^{n-p} = \frac{U_n}{U_p}$
Le 1 ^{er} terme	$U_0 = U_n - n * R$ $U_1 = U_n - (n - 1) * R$	$U_0 = \frac{U_n}{q^n}$ ou $U_1 = \frac{U_n}{q^{n-1}}$
Somme	$S_n = \frac{(n-p+1)(U_n + U_p)}{2}$	$S_n = U_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$

X augmente de t%	X diminue de t%
$X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right)$	$X_{n+1} = X_n \left(1 - \frac{t}{100}\right)$

X augmente de A	X diminue de A
$X_{n+1} = X_n + A$	$X_{n+1} = X_n - A$

X augmente de t% puis on ajoute une constante A
$X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A$

X augmente de t% puis on ajoute une constante A
$X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A$

X augmente de t% puis on retranche une constante A
$X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right) - A$

Partie 1 : les puissances entières et rationnelles

a^p est dite la puissance entière ssi $p \in \mathbb{Z}$ exemple : 5^8

a^p est dite la puissance entière ssi $p \in \mathbb{Q}$ exemple : $5^{\frac{1}{3}}$

- Les nombres premiers :

Ce sont les nombres qui sont divisibles par 1 et le nombre lui-même. Par exemple 19 est premier : 19 est divisible par 19 et par 1.

Les nombres premiers sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 49 ...

- décomposition en produit de nombres premiers

$10 = 2 \times 5$	$0,21 = 21 \times 10^{-2} = 7 * 3 * 5^{-2} * 2^{-2}$	$64 = 2^6$
$25 = 5^2$	$20\,000 = 2 \times 10^4 = 2 * 5^4 * 2^4$	$1024 = 2^{10}$
$9 * 25 = 3^2 \times 5^2$	$30\,000\,000 = 3 * 10^7 = 3 * 5^7 * 2^7$	$2048 = 2^{11}$
$625 = 5^4$	$0,00007 = 7 * 10^{-5} = 7 * 5^{-5} * 2^{-5}$	$0,81 = 3^4 * 2^{-2} * 5^{-2}$

Exemples de décomposition en produits de puissances de nombres premiers

$625 = 5^4$; $25 = 5^2$; $9 = 3^2$; $4 = 2^2$; $27 = 3^3$ $125 = 5^3$; $16 = 2^4$ $0,081 = 81 * 10^{-3} = 3^4 * 2^{-3} * 5^{-3}$; $0,21 = 21 \times 10^{-2} = 3 * 7 * 2^{-2} * 5^{-2}$ $256 = 2^8$ $320 = 2^6 * 5$ $0,64 = 64 * 10^{-2} = 2^6 * 2^{-2} * 5^{-2}$ $0,064 = 64 * 10^{-3} = 2^6 * 2^{-3} * 5^{-3}$ $0,81 = 81 * 10^{-2} = 3^4 * 2^{-2} * 5^{-2}$; $121 = 11^2$	$81 = 3^4$ $147 = 3 * 7^2$ $25 = 5^2$ $1024 = 2^{10}$ $2048 = 2^{11}$ $0,00648 = 648 * 10^{-5} = 2^3 * 3^4 * 2^{-5} * 5^{-5}$ $34\,300\,000 = 343 * 10^5 = 7^3 * 2^5 * 5^5$ $0,326 = 326 * 10^{-3} = 2 * 163 * 2^{-3} * 5^{-3}$ $144 = 144 * 10^3 = 2^4 * 3^2 * 2^3 * 5^2$
---	--

Les opérations sur les puissances entières

* Produit d'un même nombre élevé à la puissance : $a^n * a^p = a^{n+p}$ avec $a \neq 0$

Application : $a^n * a^p = a^{n+p}$ avec $a \neq 0$		
$5^{-3} * 5^4 = 5^1 = 5$	$11^6 * 11^{-9} = 11^{-3} = \frac{1}{11^3}$	
$3^{-7} * 3^{-3} = 3^{-10}$	$10^6 * 11^{-7} = 11^{-1} = \frac{1}{11}$	

* Un nombre élevé à la puissance n puis à la puissance p : $(a^n)^p = a^{n*p}$ avec $a \neq 0$

Application : $(a^n)^p = a^{n*p}$ avec $a \neq 0$		
$(5^6)^3 = 5^{18}$	$11^6 * 11^{-9} = 11^{-3} = \frac{1}{11^3}$	$3^{-7} * 3^{-3} = 3^{-10}$

*

Retenons bien ceci :

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{m/n} ; \quad \sqrt{A^m} = A^{m/2} \quad A^x * A^y = A^{x+y} ; (A^x)^y = A^{xy} ; A^{-x} = \frac{1}{A^x} ;$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n} ; \quad (A * B)^n = A^n * B^n$$

Les naturels premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ...

Exercice 1 : puissances entières

Mettre les expressions sous la forme a^n (a étant un nombre premier et $\in \mathbb{Z}$) en utilisant les propriétés des puissances de manière astucieuse :

$A = 2^2 x 8^{-4}$	$D = 3^2 x 81$	$F = \frac{4^{-3} x 2^2 x 32^{-1}}{64^8 x 2^{-5}}$	$I = \frac{231 x 2^2 x 3^{-1}}{2079 x 3^5 x 4}$
$B = 9 x 3^4$	$E = 121^{-8} x 161\,051$	$G = \frac{7^{-6} x 49^2 x 2401}{5\,764\,801}$	$J = \frac{750 x 2^7 x 32^{-4}}{6\,000 x 2^7}$

Réponse 2 : $A = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$; $B = 3^6$; $D = 3^6$; $E = 11^{-16} x 11^5 = \frac{1}{11^{11}}$
 $F = 2^{-10}$; $G = 7^{-6}$; $I = 3^{-8}$; $J = 2^{-22}$.

Exercice 2 : puissances entières

Mettre les expressions sous la forme a^n (a étant un nombre premier et $\in \mathbb{Z}$) en utilisant les propriétés des puissances de manière astucieuse :

a.-) $(3^2)^7$	b.-) $((5^2)^7)^3$	c.-) $\frac{2^{10}}{2^7}$	d.-) $\frac{2^{10}}{2^{-3}}$	e.-) $5^2 x 5^{-3} x 5^2$
f.-) $(3^2)^7 x 3^{15}$	g.-) $(7^2)^4 x 7^{-9}$	h.-) $\frac{2^{-7}}{2^7}$	i.-) $\frac{2^{10} x 2^{-20}}{2^{15}}$	k.-) $\frac{3^{15} x 3^{-10}}{3^5}$

Réponse 2 : $A = 3^{14}$; $B = 5^{42}$; $C = 2^3$; $D = 2^{-13}$; $E = 5^1$

Exercice 3 :

1.- Déterminer les réels x et y vérifiant :

$$2^x * 4^y = \sqrt{2^{10}} \text{ et } \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2}$$

2.- Montrer que le nombre $C = \frac{2^{10} * 3^6 * 5^9 * 11^3 * 7^2}{49\,000 * 297}$ est un nombre naturel.

Solution 3 :

1.-on trouve x = 1 et y = 2.

2.-/ on trouve C = ...

Exercice 4 : puissance rationnelle

Mettre sous la forme de puissance rationnelle ou puissance entière d'un nombre réel :

$A = \left(3^{\frac{2}{7}}\right)^{\frac{7}{4}}$	$B = \left(\left(5^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{6}{11}}\right)^{\frac{77}{4}}$	$C = \frac{2^{\frac{6}{11}}}{2^{\frac{3}{5}}}$	$D = \frac{3^{\frac{3}{27}}}{2^{\frac{6}{13}}}$
$E = \sqrt[3]{2} x \sqrt[7]{2^{11}}$	$F = \sqrt[3]{5} x \sqrt[7]{5} x \sqrt{5}$	$G = \frac{2^{\frac{1}{7}}}{2}$	$H = \frac{(\sqrt[5]{7})^2}{(\sqrt[3]{7})^{\frac{3}{2}}}$
$I = \sqrt[3]{\sqrt{7}}$	$J = \sqrt[5]{3} x \sqrt[4]{\sqrt{3}}$	$K = \sqrt[7]{2^5} x 2^9$	$L = \frac{\sqrt[3]{5} x \sqrt{125}}{5^4 x \sqrt[7]{5}}$
$M = \sqrt[3]{64}$	$N = \sqrt[3]{125}$	$O = \sqrt[4]{16}$	$P = \sqrt[7]{2187}$
$Q = \sqrt{25 * 4}$	$R = \sqrt{2 * 8}$	$S = \sqrt{\sqrt{\frac{81}{256}}}$	$T = \sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{5}}}$
$U = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$	$V = \sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt{2}}}$	$W = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}}$	$X = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{4} x 2}{64 x 128}}$

Réponse 4 : $A = 2^{\frac{1}{2}}$; $B = 5^6$; $C = 2^{-\frac{3}{55}}$; $D = 2^{\frac{152}{91}}$; $E = 2^{\frac{40}{21}}$; $F = 5^{\frac{41}{42}}$;
 $U = 2^{\frac{1}{12}}$; $V = 2^{\frac{1}{50}}$; $W = 5^{\frac{1}{36}}$; $X = 2^{-\frac{10}{3}}$

Exercice 5 : 1.- Ecrire sous forme de produits de nombres premiers à la puissance entière ou rationnelle:

$A = \sqrt[3]{625} x \sqrt{125} x 5^3$	$D = \frac{0,081 x (0,21)^3 x 256}{320 x (0,64)^2}$	$H = \frac{0,064 x 730}{0,121 x 256 x 0,81}$
$B = \frac{25^6 x \sqrt[5]{25}}{\sqrt[4]{125}}$	$E = \frac{0,0144 x 1,25 x 216}{256 x 0,081}$	$I = \frac{490 x 510}{326 x 144}$
$C = \frac{81^3 x 25^2 x 121}{125 x 147}$	$G = 25^5 x \frac{1}{1024} x 81^3 x 2048$	$J = \frac{0,00648 x 34\,300\,000}{0,326 x 144\,000}$

Indication de solution 5:

$625 = 5^4$; $125 = 5^3$; $0,081 = 81 * 10^{-3} = 3^4 * 2^{-3} * 5^{-3}$; $0,21 = 21 x 10^{-2} = 3 * 7 * 2^{-2} * 5^{-2}$ $256 = 2^8$ $320 = 2^6 * 5$ $0,64 = 64 * 10^{-2} = 2^6 * 2^{-2} * 5^{-2}$ $0,064 = 64 * 10^{-3} = 2^6 * 2^{-3} * 5^{-3}$ $0,81 = 81 * 10^{-2} = 3^4 * 2^{-2} * 5^{-2}$; $121 = 11^2$	$81 = 3^4$ $147 = 3 * 7^2$ $25 = 5^2$ $1024 = 2^{10}$ $2048 = 2^{11}$ $0,00648 = 648 * 10^{-5} = 2^3 * 3^4 * 2^{-5} * 5^{-5}$ $34\,300\,000 = 343 * 10^5 = 7^3 * 2^5 * 5^5$ $0,326 = 326 * 10^{-3} = 2 * 163 * 2^{-3} * 5^{-3}$ $144 = 144 * 10^3 = 2^4 * 3^2 * 2^3 * 5^2$
--	--

Exercice 6 : .- Ecrire sous forme de produits de nombres premiers à la puissance entière ou rationnelle:

$A = \sqrt[3]{625} x \sqrt{125} x 5^3$	$D = \frac{0,081 x (0,21)^3 x 256}{320 x (0,64)^2}$	$G = \frac{0,09 x (0,11)^3 x 0,064}{648\,000}$
$B = \frac{25^6 x \sqrt[5]{25}}{\sqrt[4]{125}}$	$E = \frac{0,0144 x 1,25 x 216}{256 x 0,081}$	$H = \sqrt[3]{\frac{8 x 121}{1331 * 0,064}}$
$C = \frac{81^3 x 25^2 x 121 x 49}{125 x 147 x 11^2}$	$F = 25^5 x \frac{1}{1024} x 81^3 x 2048$	$I = \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{2}}{11\sqrt{2}}}$

Exercice 7 : Déterminer l'entier naturel n ou x dans les cas suivants :

$5^3 x 5^n = 5^{13}$	$\frac{1}{(64)^{x^2}} = (4^{-5})^{2x} * \frac{1}{(4^{-2})^4}$	$16^{x-2} = 2^3$
$3^8 x (3^n)^6 = 3^{20}$	$5^x = 15\,625 * \frac{1}{25^x}$	$27^{2x-1} = 2^{x^2}$
$(10^{3n})^3 x 10^{-7} = 10^7$	$81^x * 6561^2 = 27$	$100^{x^2} * 10000000^{-x} = 10^{15}$
$81^2 = (3^x)^2 * \frac{1}{(3^7)^x}$	$5439^{2x} = (49^x)^3 * \frac{1}{7}$	$9^x = 3^x * 729$

Solution 8 :

$$5^3 x 5^n = 5^{13} \rightarrow 5^{3+n} = 5^{13} \rightarrow 3 + n = 13 \rightarrow n = 10$$

$$3^8 x (3^n)^6 = 3^{20} \rightarrow 3^{8+6n} = 3^{20} \rightarrow 8 + 6n = 20 \rightarrow n = 2$$

$$(10^{3n})^3 x 10^{-7} = 10^7 \rightarrow 10^{9n-7} = 10^7 \rightarrow 9n - 7 = 7 \rightarrow n = \frac{14}{9} \notin \mathbb{N}$$

$$81^2 = (3^x)^2 * \frac{1}{(3^7)^x} \rightarrow 3^8 = 3^{2x-7x} \rightarrow 8 = 2x - 7x \rightarrow x = -\frac{8}{5} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{(64)^{x^2}} = (4^{-5})^{2x} * \frac{1}{(4^{-2})^4} \rightarrow 2^{-6x^2} = 2^{-20x} * 2^{16} \rightarrow -6x^2 + 20x - 16 = 0 \text{ on trouve qui n'est pas un entier naturel.}$$

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} (2^6)^{-x} * \frac{1}{(16)^y} = 4 \\ (13^{-x}) * \frac{1}{(169)^y} = \frac{1}{(13^3)^{-2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{(5^{-7})^y} * 25^{-5} \\ \frac{1}{(6^{-2})^x} * 6^y = 6^5 \end{cases}$$

Solution 9 : je mets à la forme $a^x = a^y$

$$\begin{cases} 2^{-6x} * 2^{-4y} = 2^2 \\ 13^{-x} * 13^{-2y} = 13^6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = 2 \\ -x - 2y = 6 \end{cases} \quad \text{on trouve } x = 2,5 \text{ et } y = -4,25$$

La solution est impossible car x et y doit être un entier naturel.

$$\begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y-5} \\ 6^{2x+y} = 6^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \text{on trouve } x = 30 / 17 \text{ impossible}$$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} (2^6)^{-x} * \frac{1}{(16)^y} = 4 \\ (13^{-x}) * \frac{1}{(169)^y} = \frac{1}{(13^3)^{-2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{(5^{-7})^y} * 25^{-5} \\ \frac{1}{(6^{-2})^x} * 6^y = 6^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (27)^x * \frac{1}{(81)^{-y}} = 3^{10} \\ 2^x * 4^y = \frac{1}{2^{-4}} \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{-x} * 4^y = \sqrt{2^{10}} \\ \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solution 10: Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (2^6)^{-x} * \frac{1}{(16)^y} = 4 \\ (13^{-x}) * \frac{1}{(169)^y} = \frac{1}{(13^3)^{-2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{-6x} * 2^{-4y} = 2^2 \\ 13^{-x} * 13^{-2y} = 13^6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = 2 \\ -x - 2y = 6 \end{cases}$$

On trouve $x = \dots\dots$ et $y = \dots\dots$ et l'ensemble solution $S = \{(x; y)\}$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{(5^{-7})^y} * 25^{-5} \\ \frac{1}{(6^{-2})^x} * 6^y = 6^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y} * 5^{-10} \\ 6^{2x} * 6^y = 6^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

On trouve $x = \dots\dots$ et $y = \dots\dots$ et l'ensemble solution $S = \{(x; y)\}$

$$\begin{cases} (27)^x * \frac{1}{(81)^{-y}} = 3^{10} \\ 2^x * 4^y = \frac{1}{2^{-4}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^{3x} * 3^{4y} = 3^{10} \\ 2^x * 2^{2y} = 2^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 + 4y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

On trouve $x = \dots\dots$ et $y = \dots\dots$ et l'ensemble solution $S = \{(x; y)\}$

$$\begin{cases} 2^{-x} * 4^y = \sqrt{2^{10}} \\ \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{-x} * 2^{2y} = 2^5 \\ 2^{3x} * 2^{-2y} = 2^{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

On trouve $x = \dots\dots$ et $y = \dots\dots$ et l'ensemble solution $S = \{(x; y)\}$

Exercice 11 :

- Montrer que le nombre $A = \frac{98^2 * 3^6 * 5^9 * 22^3}{49\,000 * 297}$ est un nombre naturel.
- Montrer que le nombre $B = \frac{7^2 * 3^2 * 121 * 144 * 100\,800}{41\,503 * 512}$ est un nombre naturel.
- Montrer que le nombre $C = \frac{13^3 * 2660 * 5^9 * 11^3}{3211 * 3}$ est un nombre naturel.

Solution 11 :

$$49\,000 = 7^2 * 10^3 = 7^2 * 5^3 * 2^3; \quad 297 = 3^3 * 11; \quad 98^2 = 7^4 * 2^2; \quad 22^3 = 2^3 * 11^3$$

$$A = \frac{98^2 * 3^6 * 5^9 * 22^3}{49\,000 * 297} = \frac{7^4 * 2^2 * 3^6 * 5^9 * 11^3 * 2^3}{7^2 * 5^3 * 2^3 * 3^3 * 11} = 2^2 * 3^3 * 5^6 * 7^2 * 11^2$$

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes

$$a) \frac{1}{8^{-x^2}} = 512^x * \frac{1}{64} \qquad b) 7^{x^2} * \frac{1}{2401^x} = 5764801$$

Réponses 12 :

$$a) \frac{1}{8^{-x^2}} = 512^x * \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{-3x^2} = 2^{9x} * 2^{-6} \Rightarrow -3x^2 = 9x - 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

on trouve $x = 1$ et $x = 2$ l'ensemble $S = \{1; 2\}$

$$b) 7^{x^2} * \frac{1}{2401^x} = 5764801 \Rightarrow 7^{x^2} * 7^{-4x} = 7^8 \Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

on trouve $x = -1,46$ ou $x = 5,46$ non éléments de $\mathbb{N}$. L'ensemble $S = \emptyset$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes

$$\begin{cases} 25^x * \frac{1}{5^{5y}} = 5 \\ \frac{1}{625^x} * 5^y = 5^7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4^x * 16^y = \frac{1}{2} \\ 3^{6y} * 81 = 27^x \end{cases}$$

Solution 13 :

$$\begin{cases} 25^x * \frac{1}{5^{5y}} = 5 \\ \frac{1}{625^x} * 5^y = 5^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x} * 5^{-5y} = 5 \\ 5^{-4x} * 5^y = 5^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -4x + y = 7 \end{cases}$$

On trouve $x = -34/22$ et $y = 9/11$ dans $\mathbb{N}$ l'ensemble $S = \emptyset$

$$\begin{cases} 4^x * 16^y = \frac{1}{2} \\ 3^{6y} * 81 = 27^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} * 2^{4y} = 2^{-1} \\ 3^{6y} * 3^4 = 3^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ -3x + 6y = -4 \end{cases}$$

On trouve $y = -11/22$ dans $\mathbb{N}$ l'ensemble $S = \emptyset$

Exercice 14 : résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes

1.-) Soit le nombre $k = \sqrt{2} \left[\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} \right]$

a.-) Développer les expressions suivantes : $A = (2 + \sqrt{3})^2$ et $B = (2 - \sqrt{3})^2$

b.-) En déduire que K est un entier naturel.

2.-) Déterminer le réel x dans les cas suivants :

a.-) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$ b.-) $(27)^{x+2} = 3^{5x+8}$ c.-) $9^x * 2^{2x} = 216^{-1}$

3.-) Sans calculatrice, simplifier la notation et écrire la réponse sous la forme a^n

a.-) $3^7 * (-3)^7 * \frac{1}{9^2} * \frac{1}{27^2}$ b.-) $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}$

Solution 14 :

1.-) a.-) $A = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

$B = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

b.-) $k = \sqrt{2} \left[\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} \right] = \sqrt{2} \left[\sqrt[4]{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^2} \right]$

$k = \sqrt{2} \left[\sqrt{(2 + \sqrt{3})} - \sqrt{(2 - \sqrt{3})} \right] \Rightarrow k^2 = 2 \left[(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{(4 - 3)} + (2 - \sqrt{3}) \right]$

$k^2 = 2 \left[(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{(4 - 3)} + (2 - \sqrt{3}) \right] = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = 2.$

2.-) Déterminer le réel x dans les cas suivants :

a.-) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2} \Rightarrow 3^{3x-3} = 3^x \Rightarrow 3x - 3 = x \Rightarrow x = 3/2$ solution $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

b.-) $(27)^{x+2} = 3^{5x+8} \Rightarrow 3^{3x+6} = 3^{5x+8} \Rightarrow 3x + 6 = 5x + 8$

$\Rightarrow x = -1$ solution $S = \{-1\}$

c.-) $9^x * 2^{2x} = 216^{-1} \Rightarrow 3^{2x} * 2^{2x} = 3^{-3} * 2^{-3} \Rightarrow 6^{2x} = 6^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -3/2$ solution $S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

3.-) Sans calculatrice, simplifier la notation et écrire la réponse sous la forme a^n

a.-) $A = 3^7 * (-3)^7 * \frac{1}{9^2} * \frac{1}{27^2} = \frac{-3^{14}}{3^{10}} = -3^4$

b.-) $B = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{10}$ c'est la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme 5 et de raison 5 : $S_n = X_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 5 \frac{5^{10} - 1}{5 - 1}$

Partie 2 : Rapport et Proportion

Ce qu'il faut savoir sur les proportions

A, B, C prop x, y, z alors	$\frac{A}{x} = \frac{B}{y} = \frac{C}{z} = k$ on trouve $A = x * k ; B = y * k ; C = z * k$
A, B, C inv prop x, y, z alors	$\frac{A}{\frac{1}{x}} = \frac{B}{\frac{1}{y}} = \frac{C}{\frac{1}{z}} \Rightarrow \frac{A}{y*z} = \frac{B}{x*z} = \frac{C}{x*y} = k$ on trouve $A = yz * k ; B = xz * k ; C = xy * k$
A, B, C prop (a, b, c) et prop (x, y, z)	$\frac{A}{a.x} = \frac{B}{b.y} = \frac{C}{c.z} = k$
La moyenne proportionnelle de a et b est le nombre réel x tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$	

Exercices de Réchauffements sur les proportions

1.-/. On fait un capital de 405 000F en trois capitaux proportionnels aux 2 ; 3 ; 4. Calculer les trois capitaux.

Réponse :

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{y} = \frac{C}{z} = k \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{405\,000}{9} = 45\,000 \text{ on trouve}$$

$$A = x * k = 2 * 45\,000 = 90\,000 ; B = 3 * 45\,000 = 135\,000 ; C = 4 * 45\,000 = 180\,000$$

2. On fait un capital de 130 000F en trois capitaux inversement proportionnels aux 2 ; 3 ; 4. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 60 000F ; B = 40 000F ; C = 30 000F.

$$\Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{A}{12} = \frac{B}{8} = \frac{C}{6} = \frac{130\,000}{26} = 5\,000 \text{ on trouve}$$

$$A = 12 * 5\,000 = 60\,000 ; B = 8 * 5\,000 = 40\,000 ; C = 6 * 5\,000 = 30\,000$$

3. On fait un capital de 196 000 F en trois capitaux proportionnels aux 2 ; 3 ; 4 et proportionnels aux 3 ; 5 ; 7. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 24 000F ; B = 60 000F ; C = 112 000F.

(A, B, C) DP (2, 3, 4) et DP (3, 5, 7) $\Rightarrow A, B, C$ prop (6, 15, 28)

$$\Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{15} = \frac{C}{28} = \frac{196\,000}{49} = 4\,000$$

4. On fait un capital de 772 000 F en trois capitaux proportionnels aux 2 ; 3 ; 4 et inversement proportionnels aux 3 ; 5 ; 7. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 280 000F ; B = 252 000F ; C = 240 000F.

(A, B, C) DP (2, 3, 4) et DP $(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}) \Rightarrow (A, B, C)$ DP $(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7})$

$$\Rightarrow (A, B, C) \text{ DP } (70; 63, 60) \Rightarrow \frac{A}{70} = \frac{B}{63} = \frac{C}{60} = \frac{772\,000}{193} = 4\,000.$$

5. On fait un capital de 60 000 F en trois capitaux proportionnels aux $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{5}{3}$ et inversement proportionnels aux $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{3}$. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 15 000F ; B = 20 000F ; C = 25 000F.

$(A, B, C) DP \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \frac{5}{3} \right)$ et $DP (7; 11; 3) \rightarrow (A, B, C) DP (3, 4, 5)$

$$\rightarrow \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{60\,000}{12} = 5\,000.$$

6. Trois capitaux proportionnels aux nombres 2 ; 5 et 7. Le 3^{ième} est égal à 1 400 000F, calculer les 2 premiers.

Réponses : 400 000F et 1 000 000F.

$$\rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{5} = \frac{C}{7} = k \rightarrow C = 7k = 1\,400\,000 \rightarrow k = 200\,000$$

7. On fait un capital de 39 900F en trois capitaux proportionnels aux 2 ; $\frac{1}{3}$; 4. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 12 600F ; B = 2 100F ; C = 25 200F

$$\rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{4} \rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{1} = \frac{C}{12} = \frac{39\,900}{19} = 2\,100$$

8. On fait un capital de 750 000F en trois capitaux inversement proportionnels aux 2 ; $\frac{1}{3}$; 4. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 100 000F ; B = 600 000F ; C = 50 000F

9. On fait un capital de 102 900 F en trois capitaux proportionnels aux 2 ; 3 ; 4 et proportionnels aux 3 ; 5 ; 7. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 12 600F ; B = 31 500F ; C = 58 800F

10. On fait un capital de 270 000 F en trois capitaux proportionnels aux $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{11}$ et inversement proportionnels aux 2 ; 3 ; 5. Calculer les trois capitaux.

Réponse : A = 123 750F ; B = 99 000F ; C = 47 250F

11. Trouver trois capitaux proportionnels aux 3 ; 5 ; 7 tels que le triple du second est égal à la somme des deux autres augmentée de 20 000F.

Réponse : C₁ = 12 000F ; C₂ = 20 000F ; C₃ = 28 000F

12. Partager 250 000F entre trois personnes proportionnelles a leurs salaires mensuels 200 000F ; 300.000F et 500 000F. Calculer la part de chacune.

Réponses : 50 000F ; 75 000F et 125 000F.

13. Trouver trois nombres X ; Y ; Z tels qu'ils sont proportionnels aux $\frac{5}{3}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{3}{7}$ et $2X - 3Y + Z = 245\,500$

Réponses :

$$(X; Y; Z) DP \left(\frac{5}{3}; \frac{6}{11}; \frac{3}{7} \right) \rightarrow DP (385; 126; 99) \rightarrow \frac{X}{385} = \frac{Y}{126} = \frac{Z}{99} = k$$

$$X = 385 k; Y = 126 k \text{ et } Z = 99 k.$$

$$2X - 3Y + Z = 245\,500 \rightarrow 2 * 385 k - 3 * 126 k + 99 k = 245\,500 \rightarrow k=500$$

$$\text{On trouve } X = 192\,500; Y = 63\,000; Z = 49\,500$$

14. Trouver trois nombres $X; Y; Z$ tels qu'ils sont inversement proportionnels aux $\frac{5}{3}; \frac{6}{11}; \frac{3}{7}$ et $2X + Y - Z = 6\,300$

Réponses :

$$(X; Y; Z) inv prop \left(\frac{5}{3}; \frac{6}{11}; \frac{3}{7} \right) \rightarrow DP \left(\frac{3}{5}; \frac{11}{6}; \frac{7}{3} \right) \rightarrow DP (54; 165; 210)$$

$$\frac{X}{54} = \frac{Y}{165} = \frac{Z}{210} = k \rightarrow X = 54 k; Y = 165 k \text{ et } Z = 210 k.$$

$$2X + Y - Z = 6\,300 \rightarrow 2 * 54 k + 165 k - 210 k = 6\,300 \rightarrow k=100$$

$$\text{On trouve } X = 5\,400; Y = 16\,500; Z = 21\,000$$

15. Trouver trois nombres $X; Y; Z$ tels qu'ils sont proportionnels aux $\frac{5}{7}; \frac{1}{11}; \frac{4}{3}$

$$\text{Et } (X + Y) * 2 = Z + 12\,800$$

Réponses :

$$(X; Y; Z) DP \left(\frac{5}{7}; \frac{1}{11}; \frac{4}{3} \right) \rightarrow DP (165; 21; 308) \rightarrow \frac{X}{165} = \frac{Y}{21} = \frac{Z}{308} = k$$

$$\rightarrow X = 165 k; Y = 21 k \text{ et } Z = 308 k.$$

$$(X + Y) * 2 = Z + 6000 \rightarrow (165 k + 21 k) * 2 = Z + 12\,800$$

$$2X + Y - Z = 6\,300 \rightarrow 2 * 54 k + 165 k - 210 k = 6\,300 \rightarrow k=200$$

$$\text{On trouve } X = 33\,000; Y = 4\,200; Z = 61\,600.$$

16. Trouver trois nombres $X; Y; Z$ tels qu'ils sont :

- proportionnels aux 2 ; 3 ; 5.
- Inversement proportionnels aux 7 ; 11 ; 13
- Proportionnels aux 10 ; 20 ; 30
- La somme des deux derniers dépasse le quintuple du 1^{er} de 815 000F.

Réponses :

$$(X; Y; Z) DP (2; 3; 5) DP \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13} \right) DP (10; 20; 30)$$

$$\rightarrow DP \left(\frac{2*10}{7}; \frac{3*20}{11}; \frac{5*30}{13} \right) \rightarrow DP (2860; 5\,460; 11\,550) \rightarrow \frac{X}{2860} = \frac{Y}{5\,460} = \frac{Z}{11\,550} = k$$

$$\rightarrow X = 2860 k; Y = 5460 k \text{ et } Z = 11\,550 k.$$

$$(Y + Z) - 5X = 815\,000 \rightarrow (5460 k + 11\,550 k) - 5 * 2860 k = 813\,000$$

$$\text{On trouve } X = 858\,000; Y = 1\,638\,000; Z = 3\,465\,000.$$

Exercice 17 :

1.-/ une gratification de 44 220 000F est partagée entre 4 ouvriers proportionnelle aux heures supplémentaires effectuées respectivement 2h 15mn ; 3h 20mn ; 5h et 6h 10mn.

Réponse : 5 940 000 ; 8 800 000F ; 13 200 000F et 16 280 000F.

2.-/ Trois personnes s'associent pour créer une entreprise. La 1^{ère} apporte 27 000€, la 2^{ème} 54 000 € et la 3^{ème} 81 000 €. A la fin de l'exercice, ils se partagent 9 000€ proportionnellement à leur apport initial. Combien le premier doit-il recevoir ?

Réponse 17

1.-/ 5 940 000 ; 8 800 000F ; 13 200 000F et 16 280 000F.

2.-/ 1 500€

Exercice 18:

La commune de Mandé prévoit dans son budget 25 000€ au titre des activités culturelles et sociales. La répartition doit s'effectuer ainsi :

- 10% sont attribués à la coopérative scolaire ;
- 24% du reste sont affectés à la caisse d'Entraide.
- Le reste est distribué entre 3 clubs de loisirs inversement proportionnel aux nombres d'années d'activités de chacun soit respectivement 4 ans, 3 ans et 1 an. Effectuer le détail de cette répartition.

Réponses 18:

10% de 25 000 = 2 500€ ; $24\% * (25\ 000 - 2\ 500) = 5\ 400\ €$; le reste final = 17 100 €

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{1}} \implies \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{12} = \frac{17100}{19} = 900$$

on trouve $A = 2700\ €$; $B = 3\ 600\ €$; $C = 10\ 800\ €$

Exercice 19 :

1.- A B C est un triangle. Quelles les mesures en degrés des angles du triangle si :

$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4} ?$$

2.- Calculer la moyenne proportionnelle des nombres $\sqrt{5} + 1$ et $\sqrt{5} - 1$;
34,876 et -2,425.

Réponses 19 :

$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4} = \frac{180}{9} = 20 \text{ alors l'angle } A = 40^\circ ; \text{ l'angle } B = 60^\circ \text{ et l'angle } C = 80^\circ$$

La moyenne proportionnelle des nombres $\sqrt{5} + 1$ et $\sqrt{5} - 1$ est le nombre réel

$$\text{positif } x \text{ tel que : } \frac{\sqrt{5}+1}{x} = \frac{x}{\sqrt{5}-1} \rightarrow x = \sqrt{(\sqrt{5}-1) * (\sqrt{5}+1)} = \sqrt{5-1} = 2$$

La moyenne proportionnelle des nombres 34,876 et -2,425 est le nombre réel positif

$$x \text{ tel que : } \frac{34,8756}{x} = \frac{x}{-2,425} \rightarrow x = \sqrt{(34,8756) * (-2,425)} \text{ impossible}$$

Exercice 20 :

On veut partager une somme d'argent en deux parts inversement proportionnelles à 6 et 11, mais en réalité on partage en deux parts directement proportionnelles à 6 et 11. La première part diminue de 640F. Quelle est la somme que l'on partage ?

Solution 20 :

Soient A et B les deux parts inversement proportionnelles à 6 et 11 tel que $A + B = S$

$$\frac{A}{\frac{1}{6}} = \frac{B}{\frac{1}{11}} \rightarrow \frac{A}{11} = \frac{B}{6} = \frac{S}{17} \text{ on a } A = \frac{11*S}{17} \text{ et } B = \frac{6*S}{17}$$

Soient A' et B' les deux parts proportionnelles à 6 et 11 tel que $A' + B' = S$

$$\frac{A'}{6} = \frac{B'}{11} = \frac{S}{17} \text{ on a } A' = \frac{6*S}{17} \text{ et } B' = \frac{11*S}{17}$$

La 1^{ère} diminue de 640 alors :

$$A - A' = 640 \rightarrow \frac{11*S}{17} - \frac{6*S}{17} = \frac{5S}{17} = 640 \rightarrow S = 2176$$

Exercice 21 :

Au cours d'une année, messieurs Coulibaly, Keita et Traoré salariés d'une entreprise ont travaillé respectivement 5, 8 et 12 mois.

Calculer le nombre de jours de congés rémunérés auquel peut prétendre chaque salarié sachant que ce nombre de jours de congé est proportionnel au nombre de mois de travail et que le nombre total des jours de congé alloués est de 50 jours.

Solution 21 :

Soient A, B, C les nombres respectifs de jours de congé DP à 5 ; 8 ; 12 tels que

$$A + B + C = 50 \quad \frac{A}{5} = \frac{B}{8} = \frac{C}{12} = \frac{50}{25} = 2$$

on trouve $A = 5*2 = 10$ jours ; $B = 8*2 = 16$ jours ; $C = 12*2 = 24$ jours

Exercice 22:

1.- Si l'on paie 18 m de tissu 900F, combien paiera-t-on 10 m ; 12 m ; 7,5 m ; 24 m de ce même tissu ?

2.- On doit réparer la cage d'un ascenseur qui dessert 6 étages et d'un appartement par étage. La dépense est de 21 420 F.

Combien paiera le propriétaire de chaque appartement sachant que la dépense est proportionnelle au numéro de l'étage ? (le rez-de-chaussée n'est pas compris dans les 6 étages).

Solution 22 :

1.- Je calcule le prix d'un mètre de tissu : $\frac{900 \text{ m}}{18} = 50 \text{ F}$ ce qui va nous aider à calculer pour : $10 \text{ m} * 50 \text{ F} = 500 \text{ F}$; $12 \text{ m} * 50 \text{ F} = 600 \text{ F}$; $7,5 \text{ m} * 50 = 375 \text{ m}$; $24 \text{ m} * 50 \text{ F} = 1200 \text{ F}$

2.- $\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{D}{4} = \frac{E}{5} = \frac{F}{6} = \frac{21\,420}{21} = 1\,020$

On trouve : $A = 1\,020 \text{ F}$; $B = 2\,040 \text{ F}$; $C = 3\,060 \text{ F}$; $D = 4\,080 \text{ F}$; $E = 5\,100 \text{ F}$; $F = 6\,120 \text{ F}$

Exercice 23 :

L'entreprise Touré à Bamako dispose d'une somme de 1 000 000F qu'elle décide de répartir de la façon suivante :

- 17,5% de cette somme seront affectés à la constitution du fonds de retraite ;
- Sur le reste 8% sont destinés aux œuvres sociales ;
- Et le reste est partagé entre 4 salariés A, B, C, D directement proportionnellement à leur ancienneté respectivement 5 ans, 2 ans, 15 ans, 8 ans.

1.- Effectuer le partage ;

2.- Le partage est remis en question par monsieur Touré qui envisage de tenir compte en plus de l'ancienneté du nombre de personnes en charge et du salaire mensuel de chacun

	A	B	C	D
Proportionnelle à l'ancienneté	5 ans	2 ans	15 ans	8 ans
Proport au nombre de personnes à charge	4	5	3	5
Inversement proportionnelle au salaire mensuel	200 000	200 000	300 000	160 000

Effectuer le partage.

Solution 23 :

1.- Le partage :

* La somme affectée au fonds de retraite = $1\,000\,000 * 17,5\% = 175\,000 \text{ F}$

Le reste = $1\,000\,000 - 175\,000 = 825\,000 \text{ F}$

* La somme destinée aux œuvres sociales : $825\,000 * 8\% = 66\,000 \text{ F}$

* La somme à partager entre les 4 salariés = $1\,000\,000 - 175\,000 - 66\,000 = 759\,000 \text{ F}$

DP aux 5 ans, 2 ans, 15 ans, 8 ans.

$\frac{A}{5} = \frac{B}{2} = \frac{C}{15} = \frac{D}{8} = \frac{759\,000}{30} = 25\,300$

La part de A = 126 500F ; de B = 50 600F ; de C = 379 500F ; de D = 202 400F

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahu Akbar

2.-

A, B, C, D Prop (5 ; 2 ; 15 ; 8) Prop (4 ; 5 ; 3 ; 5) Inv Prop (200 000; 200 000; 300 000; 160 000)

A, B, C, D Prop $\left(\frac{5 \cdot 4}{200\,000}; \frac{2 \cdot 5}{200\,000}; \frac{15 \cdot 3}{300\,000}; \frac{8 \cdot 5}{160\,000}\right)$ on simplifie par 10 000A, B, C, D Prop $\left(\frac{5 \cdot 4}{20}; \frac{2 \cdot 5}{20}; \frac{15 \cdot 3}{30}; \frac{8 \cdot 5}{16}\right)$ on réduit on même dénominateur et on rejette le dénominateur commun

A, B, C, D Prop (192 000; 96 000; 288 000; 480 000) on simplifie par 1 000

A, B, C, D Prop (192; 96; 288; 480) $\rightarrow \frac{A}{192} = \frac{B}{96} = \frac{C}{288} = \frac{D}{480} = \frac{759\,000}{1056} = 718,75$ La part de A = $192 \cdot 718,75 = \dots\dots\dots$ de B = $96 \cdot 718,75 = \dots\dots\dots$ De C = $288 \cdot 718,75 = \dots\dots\dots$ de D = $480 \cdot 718,75 = \dots\dots\dots$ **Exercice 24 :**a) Calculer x, y, z sachant que (x, y, z) DP (2 ; 5 ; 9) et $3x + 7y - z = 1\,920\,000$ b) Calculez a, b, c sachant que (a, b, c) IP''(3, 4, 6) et $2a - b + c = 1\,400\,000$ **Solution 24 :**1.- a) Calculer x, y, z sachant que (x, y, z) DP (2 ; 5 ; 9) et $3x + 7y - z = 1\,920\,000$ $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = k$ on trouve $x = 2 \cdot k$; $y = 5 \cdot k$; $z = 9 \cdot k$ $3x + 7y - z = 1\,920\,000 \rightarrow 3(2k) + 7(5k) - 9k = 32k = 1\,920\,000 \rightarrow k = 60\,000$ $x = 2 \cdot 60\,000 = 120\,000$; $y = 5 \cdot 60\,000 = 300\,000$; $z = 9 \cdot 60\,000 = 540\,000$ 1.- b) Calculez a, b, c sachant que (a, b, c) IP''(3, 4, 6) et $2a - b + c = 1\,400\,000$ $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = k$ on trouve $A = 3 \cdot k$; $B = 4 \cdot k$; $C = 6 \cdot k$ $2a - b + c = 1\,400\,000 \rightarrow 2(3k) - 4k + 6k = 8k = 1\,400\,000 \rightarrow k = 175\,000$ On trouve $A = 3 \cdot 175\,000 = \dots\dots\dots$ $B = 4 \cdot 175\,000 = \dots\dots\dots$ $C = 6 \cdot 175\,000 = \dots\dots\dots$ **Exercice 25 :**

Une gratification est partagée entre trois ouvriers proportionnellement à leurs âges : 28 ans ; 40 ans ; 30 ans et inversement proportionnelle au nombre d'enfants : 7 ; 4 et 15 enfants.

Sachant que le 1^{er} et le 2^{ème} touchent ensemble 322 000F, calculer la part de chaque ouvrier et le montant de la gratification.**Solution 25:** (A ; B ; C) DP (28 ; 40 ; 30) Inv prop (7 ; 4 ; 15)(A, B, C) prop $\left(\frac{28}{7}; \frac{40}{4}; \frac{30}{15}\right) \rightarrow (A, B, C) \text{ prop } (4; 10; 2)$ $\frac{A}{4} = \frac{B}{10} = \frac{C}{2} = k$ on trouve $A = 4 \cdot k$; $B = 10 \cdot k$; $C = 2 \cdot k$ 1^{er} et le 2^{ème} touchent 322 000F $\rightarrow A + B = 322\,000 \rightarrow 4k + 10k = 322\,000 \rightarrow k = 23\,000$ La part du 1^{er} ouvrier = $4 \cdot 23\,000 = 92\,000$; la part du 2^{ème} ouvrier = $10 \cdot 23\,000 = 230\,000$ La part du 3^{ème} ouvrier = $2 \cdot 23\,000 = 46\,000$

Exercice 26 :

Déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire dont la longueur et la largeur sont proportionnelles aux nombres 13 et 10 et sachant que le terrain mesure 9200 m de périmètre.

Solution 26 : Demi périmètre = $L + l$

$$\frac{L}{13} = \frac{l}{10} = \frac{L+l}{13+10} = \frac{9200/2}{23} = 200 \quad \text{on trouve } A = 13 \cdot 200 = 2\,600 ; B = 10 \cdot 200 = 2\,000$$

Exercice 27 :

Deux écoles se sont regroupées pour le transport scolaire. Le coût est de 600 000F par mois. Elles décident de supporter les $\frac{3}{4}$ des frais, le reste étant à la charge des élèves. Il y a 100 élèves dans la 1^{ère} école et 200 élèves dans la 2^{ème} école.

1.- Quel est le montant des frais supportés par les deux écoles ?

2.- Les deux écoles partagent le montant des frais proportionnellement au nombre d'élèves. Combien paye chacune des écoles ?

3.- Combien paye chaque élève ?

Solution 27 :

1.- Le montant des frais supportés par les deux écoles : $600\,000 \cdot \frac{3}{4} = 450\,000$ F

Le montant des frais à la charge des enfants = $600\,000 \cdot \frac{1}{4} = 150\,000$ F

2.- A et B proportionnels aux 100 et 200

$$\frac{A}{100} = \frac{B}{200} = \frac{150\,000}{300} = 500 \quad \text{on trouve } A = 50\,000 ; B = 100\,000$$

Exercice 28 :

Trois personnes remplissent ensemble une grille du LOTO de 28F. La 1^{ère} personne donne 9F, la 2^{ème} 11F et la 3^{ème} donne le reste. La grille rapporte 6479,20F. Effectuer un partage équitable.

Solution 28 :

La 1^{ère} personne donne 9F, la 2^{ème} 11F et la 3^{ème} donne $28 - 9 - 11 = 8$

$$\frac{A}{9} = \frac{B}{11} = \frac{C}{8} = \frac{6\,479,20}{28} = 231,4 \quad \text{on trouve } A = 9 \cdot 231,4 = \dots\dots\dots ; B = 11 \cdot 231,4 = \dots\dots\dots$$

$$C = 8 \cdot 231,4 = \dots\dots\dots$$

Exercice 29:

Quatre propriétaires doivent se partager 10 950F de charges de chauffage et d'ascenseur proportionnellement au numéro de l'étage où ils habitent et proportionnellement à la surface de leur appartement.

- X habite au 1^{er} étage un appartement de 80 m²
- Y habite au 2^{ème} étage un appartement de 60 m²
- Z habite au 2^{ème} étage un appartement de 70 m²
- W habite au 3^{ème} étage un appartement de 130 m²

Effectuer le partage des charges.

Solution 29 :

(A, B, C, D) prop (1 ; 2 ; 2 ; 3) Prop (80 ; 60 ; 70 ; 130) → (A, B, C, D) prop (80 ; 120 ; 140 ; 390)

$$\rightarrow \frac{A}{80} = \frac{B}{120} = \frac{C}{140} = \frac{D}{390} = \frac{10\,950}{730} = 15 \quad \text{on trouve } A = 80 \cdot 15 = \dots\dots\dots B = 120 \cdot 15 = \dots\dots\dots$$

$$C = 140 \cdot 15 = \dots\dots\dots D = 390 \cdot 15 = \dots\dots\dots$$

Exercice 30 :

Une prime de fin d'année est partagée entre quatre employés proportionnellement à leurs salaires soit : 6 400F ; 6 000F ; 5 600F ; 6 800F. La deuxième touche 1 350F.

Calculer la prime des trois autres personnes et le montant total de la prime.

Solution 30 :

$$\rightarrow \frac{A}{6\,400} = \frac{B}{6\,000} = \frac{C}{5\,600} = \frac{D}{6\,800} = k$$

on trouve $A = 6\,400k$; $B = 6\,000k$; $C = 5\,600k$; $D = 6\,800k$

La deuxième touche 1 350F $\rightarrow B = 6\,000k = 1\,350 \rightarrow k = 0,225$

La prime de la 1^{ère} $A = 6\,400 \times 0,225 = 1440$

La prime de la 2^{ème} $B = 6\,000 \times 0,225 = 1350$

La prime de la 3^{ème} $C = 5\,600 \times 0,225 = 1260$

La prime de la 4^{ème} $D = 6\,800 \times 0,225 = 1530$

Le montant total de la prime = $1\,440 + 1\,350 + 1\,260 + 1\,530 = \dots\dots\dots$

Exercice 31:

En fin d'année, un artisan décide de donner à ses trois apprentis, Amadou, Boubacar et Chiaka une gratification proportionnellement à leur âge, mais inversement proportionnelle au nombre de pièces mal fabriquées et au nombre d'heure d'absence pendant le mois. L'artisan dispose de 129 415. Combien donnera-t-il à chacun de ses apprentis ?

	Age	pièces ratées	heures d'absence
• Amadou :	17 ans et 8 mois	7	1
• Boubacar :	16 ans et 11 mois	2	5
• Chaka :	18 ans et 2 mois	1	3

Solution 31 :

(A ; B ; C) DP (212 mois ; 203 mois ; 218 mois) Inv Prop (7 ; 2 ; 1) Inv Prop(1 : 5 ; 3)

$$(A ; B ; C) DP \left(\frac{212}{7 \times 1} ; \frac{203}{2 \times 5} ; \frac{218}{1 \times 3} \right) \rightarrow (A ; B ; C) DP \left(\frac{212}{7} ; \frac{203}{10} ; \frac{218}{3} \right)$$

$$\rightarrow (A ; B ; C) DP (6360; 4263; 15\,260) \rightarrow \frac{A}{6\,360} = \frac{B}{4\,263} = \frac{C}{15\,260} = \frac{129\,415}{25\,883} = 5$$

Pour Amadou : $6\,360 \times 5 = 31\,800$ F. Pour Boubacar : $4\,263 \times 5 = 21\,315$ F

Pour Chaka : $15\,260 \times 5 = 76\,300$ F

Exercice 32 :

On veut partager une somme de 73 500FCFA entre trois ouvriers proportionnellement aux nombres 10 ; 14 et 18.

1.- Faites ce partage ;

2.- On diminue 284 FCFA du montant à partager et le reste est réparti proportionnellement à l'inverse de 5 ; 7 et 9. Déterminer la part de chacun.

3.- Si on partageait la somme de 73 500FCFA proportionnellement aux nombres : a-1 ; a et a+1, la dernière part dépassera la première de 1960 FCFA. Déterminer :

a.-/ La valeur de a

b.-/ Les valeurs des parts dans ce cas.

Solution 32:

1.-/ soient A ; B ; C les parts proportionnelles aux 10 ; 14 ; 18 tel que $A + B + C = 73\,500$

$$\frac{A}{10} = \frac{B}{14} = \frac{C}{18} = \frac{73\,500}{42} = 1\,750 \text{ on trouve } A = 17\,500\text{F} ; B = 24\,500\text{F} ; C = 31\,500\text{F}$$

2.-/ le reste = $73\,500 - 284 = 73\,216$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

$$\frac{A}{\frac{1}{5}} = \frac{B}{\frac{1}{7}} = \frac{C}{\frac{1}{9}} \rightarrow \frac{A}{63} = \frac{B}{45} = \frac{C}{35} = \frac{73\,216}{143} = 512$$

On trouve A = 32 256F ; B = 23 040F ; C = 17 920F

$$3.-/ \quad \frac{A}{a-1} = \frac{B}{a} = \frac{C}{a+1} = \frac{73\,500}{3a} = \frac{24\,500}{a}$$

La part de la 1 ^{ère} : $\frac{24\,500(a-1)}{a}$	$\frac{24\,500*(a+1)}{a} - \frac{24\,500(a-1)}{a} = 1\,960$
La part de la 1 ^{ère} : $\frac{24\,500(a-1)}{a}$	$\frac{49\,000}{a} = 1960$ on trouve a = 25
La part de la 2 ^{ème} : $\frac{24\,500*a}{a} = 24\,500$	La part de la 1 ^{ère} = 23 5720 F
La part de la 3 ^{ème} : $\frac{24\,500*(a+1)}{a}$	La part de la 2 ^{ème} = 24 500F
	La part de la 3 ^{ème} = 25 480 F

Exercice 33:

On veut partager une somme d'argent en deux parts de façon inversement proportionnelle à 6 et 11, mais en réalité on fait le partage en deux parts directement proportionnelle à 6 et 11. Ainsi une part a été diminuée de 640.

a.-) Quelle est la part qui a été diminuée ?

b.-) Quelle est la somme à partager ?

c.-) En déduire le montant de chaque part.

Solution 33 : Partage normal :

A, B inversement Proportionnel à 6 et 11 alors $\frac{A}{\frac{1}{6}} = \frac{B}{\frac{1}{11}} \rightarrow \frac{A}{11} = \frac{B}{6} = \frac{S}{17}$

on a : $A = \frac{11*S}{17}$ et $B = \frac{6*S}{17}$

Partage erroné : A', B' DP à 6 et 11 alors $\frac{A}{6} = \frac{B}{11} = \frac{S}{17}$ on a : $A' = \frac{6*S}{17}$ et $B' = \frac{11*S}{17}$

C'est la part A qui a été diminuée : A - A' est négatif

$$A - A' = \frac{11*S}{17} - \frac{6*S}{17} = 640 \rightarrow \text{on trouve } S = 2\,176 \text{ FCFA}$$

$$A = \frac{11*S}{17} = \frac{11*2176}{17} = 1\,408$$

$$B = \frac{6*S}{17} = \frac{6*2176}{17} = 768$$

3.- Pourcentages

Pourcentage direct $Montant = \frac{A * \text{taux}}{100}$

Le pourcentage est dit direct lorsqu'il s'applique à une quantité connue. Par exemple 20% de 1.000.000 est l'application du pourcentage direct. $Montant = \frac{1\,000\,000 * 20}{100} = \dots\dots\dots$

Pourcentage indirect $Montant = \frac{A * \text{taux}}{100 - \text{taux}}$

Le pourcentage est dit indirect lorsqu'il s'applique à une quantité inconnue. Par exemple un commerçant achète une marchandise à 24 000 FCFA et désire réaliser un bénéfice de 25% sur le prix de vente. Quel sera, dans ce cas, son bénéfice ?

$$\text{Bénéfice} = \frac{25 * 24.000}{100 - 25} = 8.000 \text{ FCFA}$$

Pourcentage en dedans $Montant = \frac{A * \text{taux}}{100 + \text{taux}}$

Le pourcentage est en dedans lorsque la quantité à laquelle le tant % est inférieur à la quantité connue on dira ainsi qu'on a tant % en dedans. Par exemple

Cas de TVA : Montant TTC = montant HT + TVA $\rightarrow TVA = \frac{\text{Montant TTC} * \text{taux}}{100 + \text{taux}}$

Cas des valeurs en douane : $V = \text{Prix d'achat PA} + \text{Droit de douane DD}$ ($DD = \alpha\% * PA$)

$$DD = \frac{\text{Valeur en douane} * \text{taux}}{100 + \text{taux}}$$

Pourcentage en dehors $Montant = \frac{A * \text{taux}}{100 - \text{taux}}$

Le pourcentage est en dehors lorsque la quantité à laquelle le tant % est supérieur à la quantité connue on dira ainsi qu'on a tant % en dehors. Par exemple le prix net d'une marchandise est de 2 125 000F après une remise de 15%. Calculer le montant de la remise.

$$\text{Remise} = \frac{\text{Net commercial} * \text{taux}}{100 - \text{taux}} = \frac{2\,125\,000 * 15}{100 - 15} = 375\,000 \text{ F}$$

Exemple 1 : le prix TTC d'une marchandise est de 1 628 400F. Calculer le montant de TVA :

a) TVA au taux de 15%

b) TVA au taux de 20%

c) TVA au taux de 18%.

Réponse : $TVA = \frac{\text{Montant TTC} * \text{taux}}{100 + \text{taux}}$

$$TVA = \frac{1\,628\,400 * 15}{100 + 15} \quad TVA = \frac{1\,628\,400 * 20}{100 + 20} \quad TVA = \frac{1\,628\,400 * 18}{100 + 18}$$

Exemple 2 : la valeur en Douane d'une marchandise est de 3 858 250 FCFA. Rappelons que la valeur en douane V est égale au prix d'achat PA majoré des droits de douane DD. Calculer le montant de ces droits de douane :

a) Le droit de douane sur la marchandise est de 10% du prix d'achat ;

b) Le droit de douane sur la marchandise est de 15% du prix d'achat ;

c) Le droit de douane sur la marchandise est de 22% du prix d'achat ;

Réponse : $DD = \frac{\text{Valeur en douane} * \text{taux}}{100 + \text{taux}}$

$$DD = \frac{3\,858\,250 * 10}{100 + 10}$$

$$DD = \frac{3\,858\,250 * 15}{100 + 15}$$

$$DD = \frac{3\,858\,250 * 22}{100 + 22}$$

Pourcentages successifs :

Sur un prix marqué PM on accorde des réductions de a% et b% et une majoration de c%. Quel est le prix de vente net ?

$$\text{Prix net} = PM \times \frac{100 - a}{100} \times \frac{100 - b}{100} \times \frac{100 + c}{100}$$

Exemple 4 : le prix fixé pour une marchandise est de 2 000 000 F. Le vendeur accorde des remises successives de 2% et 5% et une majoration de 10%. Calculer le net à payer par le client.

Solution :

$$\text{Prix net} = 2.000.000 \times \frac{100 - 2}{100} \times \frac{100 - 5}{100} \times \frac{100 + 10}{100} = \dots \dots \dots$$

Exemple 5 : des pourcentages aux réductions sur le poids

Le poids brut d'une marchandise est de 18.000kg, la tare est de 2%, le don 3% et la réfaction 1,5%. Calculer le poids net facturé ?

Solution 5 :

$$\text{Poids net} = 18.000 \times \frac{100 - 2}{100} \times \frac{100 - 3}{100} \times \frac{100 - 1,5}{100} \rightarrow \text{Poids net} = 16 854,138 \text{ kg}$$

Pourcentage par tranche :

Le pourcentage est dit par tranche lorsqu'il n'est pas directement appliqué sur un montant connu mais plutôt sur la valeur des tranches.

$$\alpha\% \text{ de la tranche } [A; B] \text{ est égal à : } \frac{\alpha * (B - A)}{100}$$

Exemple 6: Un fournisseur attribue en fin d'année une ristourne progressive à ses clients selon les données suivantes :

Montant des ventes	Taux
0 à 25 000	5%
25 000 à 50 000	10%
50 000 à 95 000	15%
95 000 à 100 000	20%

Quelle est la réduction accordée à un client auquel on a facturé 98 000F ?
Réponse : 5% (25 000 – 0) + 10% (50 000 -25 000) +
+ 15% (95 000 – 50 000) + 20% (98 000 – 95 000) = ...

Coefficient multiplicateur m

Le coefficient multiplicateur est le nombre qui permet de passer de la quantité connue à la quantité inconnue par une seule multiplication. Le coefficient multiplicateur $m = \frac{\text{Valeur d'arrivée VA}}{\text{Valeur de départ VD}}$

Taux de marge ou taux de marque TM

C'est le pourcentage de bénéfice sur le prix de vente.

$$\text{Taux de marque} = \frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} \times 100$$

$$\text{Prix de vente} = \frac{\text{Prix de Revient} * TM}{100 - TM} \times 100 \quad \text{avec PV} = \text{PR} + \text{B} \text{ et } \text{PR} = \text{PA} + \text{F}$$

Cas de fabricant → grossiste → détaillant → consommateur

→ Prix de revient PR = Prix d'achat PA + frais F

→ Bénéfice B = Prix de vente PV - Prix de revient PR

→ **Taux de marque** = $\frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} \times 100 \rightarrow PV = \frac{PR \times TM}{100 - TM} \times 100$

Chez le fabricant : le prix de vente du fabricant (PR + B) = prix d'achat (PA) du grossiste

Chez le grossiste : le prix de revient = PA + Frais → $PV = \frac{100 \times PR}{100 - TM}$ avec TM

« taux de marque »

Le prix de vente du grossiste = prix d'achat (PA) du détaillant

Chez le détaillant : le prix de revient = PA + Frais → $PV = \frac{100 \times PR}{100 - TM}$ avec

TM « taux de marque »

Exemple 6 :

Une marchandise revenant à 1 000 000 FCFA au fabricant est vendue par celui-ci à un grossiste en réalisant un bénéfice de 20% sur le prix de revient. Le grossiste supporte des frais représentant 15% du prix d'achat et vend la marchandise à un détaillant en appliquant un taux de marque de 60%.

Le détaillant supporte les frais de 2% du prix d'achat et vend la marchandise à un consommateur en appliquant un taux de marque de 25%.

Travail à faire : Calculer le prix de vente du détaillant au consommateur ;

Fabricant	PR = 1 000 000 FCFA → Bénéfice = 20% * 1 000 000 = 200 000 Prix de vente = 1 000 000 + 200 000 = 1 200 000
Grossiste	PR = 1 200 000 + 15% * 1 200 000 = 1 380 000 → $PV = \frac{100 \times PR}{100 - \text{taux de marque}} = \frac{100 \times 1\,380\,000}{100 - 60} = 3\,450\,000 \text{ F}$
Détaillant	PR = 3 450 000 + 3 450 000 * 2% = 3 519 000 → $PV = \frac{100 \times PR}{100 - \text{taux de marque}} = \frac{100 \times 3\,519\,000}{100 - 25} = 4\,692\,000 \text{ F}$

Série d'exercices sur les pourcentages

Exercice 34 :

1.-) Une baisse de 20% sur le prix d'un article est-elle compensée par une hausse de 20% ? Justifiez votre réponse.

Réponse : Soit P le prix : la baisse de 20% $\rightarrow P' = P - 20\% * P = 0,80 * P$ puis la hausse de 20% $\rightarrow P' + 20\% * P' = 1,20 * P' = 1,20 * (0,80P) = 0,96 * P$ soit une baisse de 4%.

Conclusion : Une baisse de 20% sur le prix d'un article n'est pas compensée par une hausse de 20% .

2.-) Le côté d'un carré augmente de 3% ; son périmètre augmente de quel pourcentage ?

Réponse : soit C le côté et P le périmètre : $P = C + C + C + C = 4 * C$

Si C augmente de 3% $\rightarrow C' = C + 0,03C = 1,03 * C$

Le périmètre $P' = 4 * C' = 4 * 1,03 C = 4,12 C$ soit une augmentation de 3%

$$\left(\frac{4,12 - 4}{4} = 0,03 = 3\% \right)$$

Exercice 35 :

1/ Ecrire les coefficients multiplicateurs associés aux augmentations suivantes : 30% ; 250%.

1/ Ecrire les coefficients multiplicateurs associés aux réductions suivantes : 45% ; 90%.

Solution 35:

Rappelons que le coefficient multiplicateur $m = \frac{\text{valeur d'arrivée } VA}{\text{valeur de départ } VD}$ et le taux de

croissance $T = \frac{VA - VD}{VD} * 100 = (m - 1) * 100$. Le taux T peut être positif (cas d'augmentation) ou négatif (cas de réduction).

$$T = (m - 1) * 100 \rightarrow m = \left(1 + \frac{T}{100} \right)$$

1/ Le m associé à l'augmentation de 30% est $m = \left(1 + \frac{T}{100} \right) = (1 + 0,30) = 1,30$

Le m associé à l'augmentation de 250% est $m = \left(1 + \frac{T}{100} \right) = (1 + 2,50) = 3,50$

2/ Le m associé à la diminution de 45% est $m = \left(1 - \frac{T}{100} \right) = (1 - .45) = 0,55$

Le m associé à la diminution de 90% est $m = \left(1 - \frac{T}{100} \right) = (1 - 0,90) = 0,10$

Exercice 36 :

Lors d'une élection, les candidats A, B, et C ont obtenu par rapport aux suffrages exprimés les pourcentages suivants : A : 32,4% ; B : 38,2% ; C : 29,4%.

1.- Sachant que le candidat B a obtenu 151 081 voix, quel est le nombre de voix obtenues par les autres candidats et quel est le nombre de suffrages exprimés ?

2.- Quel était le nombre d'électeurs inscrits sachant que le pourcentage des non votants et de bulletins nuls correspond à 20,9% du nombre des électeurs inscrits ?

Solution 36:

Candidats	Suffrages exprimés en %	Suffrages exprimés en nombre	
A	32,4%	128 142	
B	38,2%	151 081	
C	29,4%	116 277	
Total	100%	395 500	

On calcule d'abord le nombre de suffrages exprimés :

B -----→ 38,2% -----→ 151 081

Total-----→ 100 % -----→ X → $x = \frac{100 \cdot 151\,081}{38,2} = 395\,500$ électeurs

Nombre de suffrages exprimés pour A : $395\,500 \cdot 32,4\% = 128\,142$

Nombre de suffrages exprimés pour C : $395\,500 \cdot 29,4\% = 116\,277$

Retenons cette équation en matière d'élection :

Le nombre d'électeurs inscrits = nombre de suffrages exprimés + nombre de non votants + bulletins nuls → $I = SE + (NV + BN)$

Le pourcentage des non votants et de bulletins nuls = 20,9% du nombre des électeurs inscrits → $(NV + BN) = 20,9\% \cdot I$

On sait que le suffrage exprimé $SE = 395\,500$

$I = SE + (NV + BN)$ → $I = 395\,500 + 20,9\% \cdot I$ → on trouve $I = 500\,000$

Le nombre d'inscrit est de 500 000.

Exercice 37 :

Un représentant perçoit une prime mensuelle liée au chiffre d'affaires CA qu'il réalise. Le taux de cette prime est de 10% sur $[0 ; 50\,000]$; 8% sur $]50\,000 ; 100\,000]$; 6% sur $]100\,000 ; 200\,000]$ et 4% au-delà.

1.- Etablissez la fonction P qui associe la prime au CA (il s'agit d'une fonction affine par morceaux).

2.- Complétez le tableau suivant. Le pourcentage apparent d'une prime P est le rapport P/CA .

CA	80 000	96 000	120 000	180 000	200 000	360 000
Prime						
% apparent						

Solution 37:

Tranches	Taux	Prime
$[0 ; 50\,000]$	10%	$50\,000 \cdot 10\% = 5\,000$
$]50\,000 ; 100\,000]$	8%	$50\,000 \cdot 8\% = 4\,000$
$]100\,000 ; 200\,000]$	6%	$100\,000 \cdot 6\% = 6\,000$
200 000 et plus	4%	

Si X le chiffre d'affaire

si $X \in [0 ; 50\,000]$ $f(x) = 10\% \cdot (X - 0)$

si $X \in]50\,000 ; 100\,000]$ $f(x) = 8\% \cdot (X - 50\,000) + 5\,000$

si $X \in]100\,000 ; 200\,000]$ $f(x) = 6\% \cdot (X - 100\,000) + 5\,000 + 4\,000$

si $X \in [200\,000 ; +\infty[$ $f(x) = 4\% \cdot (X - 200\,000) + 5\,000 + 4\,000 + 6\,000$

2.- Le pourcentage apparent d'une prime P est le rapport P/CA.

CA	80 000	96 000	120 000	180 000	200 000	360 000
Prime	7 400	8 680	10 200	13 800	15 000	21 400
% apparent	9,25	9,04	8,5	7,67	7,5	5,94

Explications :

$$X = 80\,000 \rightarrow f(X) = 8\% * (80\,000 - 50\,000) + 5\,000 = 7\,400$$

$$X = 96\,000 \rightarrow f(X) = 8\% * (96\,000 - 50\,000) + 5\,000 = 8\,680$$

$$X = 120\,000 \rightarrow f(X) = 6\% * (120\,000 - 100\,000) + 5\,000 + 4000 = 10\,200$$

$$X = 180\,000 \rightarrow f(X) = 6\% * (180\,000 - 100\,000) + 5\,000 + 4000 = 13\,800$$

$$X = 200\,000 \rightarrow f(X) = 6\% * (200\,000 - 100\,000) + 5\,000 + 4000 = 13\,800$$

$$X = 360\,000 \rightarrow f(X) = 4\% * (360\,000 - 200\,000) + 5\,000 + 4000 + 6000 = 21\,400$$

Exercice 38 :

En 2012, le taux progressif de l'impôt sur le revenu est le suivant pour un célibataire :

Tranches	Taux
[0 ; 17 570]	0%
]17 570 ; 18 370]	5%
]18 370 ; 21 770]	9,6%
]21 770 ; 34 410]	14,4%
]34 410 ; 44 240]	19,2%
]44 240 ; 55 540]	24%
]55 540 ; 67 220]	28,8%
]67 220 ; 77 550]	33,6%
]77 550 ; 129 210]	38,4%
]129 210 ; 177 710]	43,2%
]177 710 ; 210 210]	49%
]210 210 ; 239 120]	53,9%
239 120 et +	56,8%

Travail demandé :

1.- Calculer l'impôt payé sur les revenus suivants :
52 800F ; 64 000F ; 31 200F ; 192 000F ;
500 000F.

2.- Ecrire la fonction I_1 qui à un revenu X compris entre 67 220F et 77 550F fait correspondre l'impôt associé.

3.- Ecrire la fonction I_2 qui à un revenu X compris dans la tranche] 177 710 ; 210 210] fait correspondre l'impôt associé.

Solution 38: Calculons le montant des impôts à payer :

Tranches	Taux	Impôt à payer	Cumul
[0 ; 17 570]	0%	$(17\,570 - 0) * 0\% = 0$	0,00
]17 570 ; 18 370]	5%	$(18\,370 - 17\,570) * 5\% = 40$	40,00
]18 370 ; 21 770]	9,6%	$(21\,770 - 18\,370) * 9,6\% = 326,4$	366,40
]21 770 ; 34 410]	14,4%	$(34\,410 - 21\,770) * 14,4\% = 1\,820,16$	2186,56
]34 410 ; 44 240]	19,2%	$(44\,240 - 34\,410) * 19,2\% = 1887,36$	4073,92
]44 240 ; 55 540]	24%	$(55\,540 - 44\,240) * 24\% = 2712$	6785,92
]55 540 ; 67 220]	28,8%	$(67\,220 - 55\,540) * 28,8\% = 3\,363,83$	10149,75
]67 220 ; 77 550]	33,6%	$(77\,550 - 67\,220) * 33,6\% = 3470,88$	13620,63
]77 550 ; 129 210]	38,4%	$(129\,210 - 77\,550) * 38,4\% = 19837,44$	33458,07
]129 210 ; 177 710]	43,2	$(177\,710 - 129\,210) * 43,2\% = 20952$	54410,07
]177 710 ; 210 210]	49	$(210\,210 - 177\,710) * 49\% = 15925$	70335,07
]210 210 ; 239 120]	53,9	$(239\,120 - 210\,210) * 53,9\% = 15582,49$	85 917,56
]239 120 et +	56,8		

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

1/ L'impôt payé sur le revenu de 52 800F

Il suffit de remarquer que 52 800F se trouve dans la tranche]44 240 ; 55 540] on aura]44 240 ; 52 800] au taux de 24% → l'impôt de cette tranche est de $(52\,800 - 44\,240) \times 24\% = 2\,054,4$.

L'impôt payé sur le revenu de 52 800F serait de : $2\,054,4 + 4\,073,92 = 6\,128,32$

Autre méthode de calculs : $(17\,570 - 0) \times 0\% + (18\,370 - 17\,570) \times 5\% + (21\,770 - 18\,370) \times 9,6\% + (34\,410 - 21\,770) \times 14,4\% + (44\,240 - 34\,410) \times 19,2\% + (52\,800 - 44\,240) \times 24\% = 6\,128,32$

1/ L'impôt payé sur le revenu de 64 000F

Il suffit de remarquer que 64 000F se trouve dans la tranche]55 540 ; 67 220] on aura]55 540 ; 64 000] au taux de 28,8% → l'impôt de cette tranche est de $(64\,000 - 55\,540) \times 28,8\% = 2\,436,48$.

L'impôt payé sur le revenu de 64 000F serait de : $2\,436,32 + 6\,785,92 = 9\,222,4$

Autre méthode de calculs : $(17\,570 - 0) \times 0\% + (18\,370 - 17\,570) \times 5\% + (21\,770 - 18\,370) \times 9,6\% + (34\,410 - 21\,770) \times 14,4\% + (44\,240 - 34\,410) \times 19,2\% + (55\,540 - 44\,240) \times 24\% + (64\,000 - 55\,540) \times 28,8\% = 9\,224,4$

1/ L'impôt payé sur le revenu de 31 200 F : $(31\,200 - 21\,770) \times 14,4\% + 366,4 = \dots\dots\dots$

Explication : il suffit de remarquer que 31 200F se trouve dans la tranche]21 770 ; 34 410] au taux de 14,4%. La valeur de tranche = $31\,200 - 21\,770$ et l'impôt = $(31\,200 - 21\,770) \times 14,4\% + \text{cumul}$

1/ L'impôt payé sur le revenu de 192 000F

Explication : il suffit de remarquer que 192 000F se trouve dans la tranche]177 210 ; 210 210] au taux de 49%. La valeur de tranche = $(192\,000 - 177\,210)$.

L'impôt = $(190\,000 - 177\,710) \times 49\% + \text{cumul } (54410,07) = \dots\dots\dots$

1/ L'impôt payé sur le revenu de 500 000F :

$(500\,000 - 239\,120) \times 56,8\% + \text{cumul } (85\,917,56) = \dots\dots\dots$

2.- Ecrire la fonction I_1 qui à un revenu X compris entre 67 220F et 77 550F fait correspondre l'impôt associé.

Tranches	Taux	Impôt à payer	Cumul
[0 ; 17 570]	0%	$(17\,570 - 0) \times 0\% = 0$	0,00
]17 570 ; 18 370]	5%	$(18\,370 - 17\,570) \times 5\% = 40$	40,00
]18 370 ; 21 770]	9,6%	$(21\,770 - 18\,370) \times 9,6\% = 326,4$	366,40
]21 770 ; 34 410]	14,4%	$(34\,410 - 21\,770) \times 14,4\% = 1\,820,16$	2186,56
]34 410 ; 44 240]	19,2%	$(44\,240 - 34\,410) \times 19,2\% = 1\,887,36$	4073,92
]44 240 ; 55 540]	24%	$(55\,540 - 44\,240) \times 24\% = 2\,712$	6785,92
]55 540 ; 67 220]	28,8%	$(67\,220 - 55\,540) \times 28,8\% = 3\,363,83$	10149,75
]67 220 ; X]	33,6%	$(X - 67\,220) \times 33,6\%$	

La fonction $I_1 = 10\,149,75 + (X - 67\,220) \times 0,336$

3.- Ecrire la fonction I_2 qui à un revenu X compris dans la tranche $] 177\ 710 ; 210\ 210]$ fait correspondre l'impôt associé.

Tranches	Taux	Impôt à payer	Cumul
$[0 ; 17\ 570]$	0%	$(17\ 570 - 0) * 0\% = 0$	0,00
$]17\ 570 ; 18\ 370]$	5%	$(18\ 370 - 17\ 570) * 5\% = 40$	40,00
$]18\ 370 ; 21\ 770]$	9,6%	$(21\ 770 - 18\ 370) * 9,6\% = 326,4$	366,40
$]21\ 770 ; 34\ 410]$	14,4%	$(34\ 410 - 21\ 770) * 14,4\% = 1\ 820,16$	2186,56
$]34\ 410 ; 44\ 240]$	19,2%	$(44\ 240 - 34\ 410) * 19,2\% = 1887,36$	4073,92
$]44\ 240 ; 55\ 540]$	24%	$(55\ 540 - 44\ 240) * 24\% = 2712$	6785,92
$]55\ 540 ; 67\ 220]$	28,8%	$(67\ 220 - 55\ 540) * 28,8\% = 3\ 363,83$	10149,75
$]67\ 220 ; 77\ 550]$	33,6%	$(77\ 550 - 67\ 220) * 33,6\% = 3470,88$	13620,63
$]77\ 550 ; 129\ 210]$	38,4%	$(129\ 210 - 77\ 550) * 38,4\% = 19837,44$	33458,07
$]129\ 210 ; 177\ 710]$	43,2%	$(177\ 710 - 129\ 210) * 43,2\% = 20952$	54410,07
$]177\ 710 ; X]$	49%	$(X - 177\ 710) * 49\%$	

La fonction $I_2 = 54\ 410,07 + (X - 177\ 710) * 0,49$

Exercice 39 :

Une somme de S francs envoyée par l'intermédiaire de « Orange Money » doit être répartie de la façon suivante : 10% de S sont donnés au Père ; 20% du reste à la Mère ; $\frac{1}{4}$ du nouveau reste à Souleymane puis 25% de ce qui reste à Dramane. Le reliquat est partagé entre les trois petits frères de proportionnellement à leurs âges : 4 ans ; 6 ans et 10 ans.

Sachant que le moins âgé a reçu 19926FCFA, déterminer :

1.-/ La valeur de S ;

2.-/ La somme reçue par chaque membre de la famille.

Solution 39 :

1.-/

Père	$10\% * S = 0,10 S$ le reste $S - 0,10 S = 0,90 S$
Mère	$20\% * 0,90 S = 0,20 * 0,90 = 0,18 S$ et le reste $0,90S - 0,18S = 0,72 S$
Soul	$\frac{1}{4} (0,72 S) = 0,18 S$ et le reste $0,72 S - 0,18 S = 0,54 S$
Dra	$25\% * 0,54 S = 0,135 S$ et le reste $0,54 S - 0,135 S = 0,405 S$
Trois petits frères	$0,405 S$ proportionnellement aux âges 4 ans ; 6 ans et 10 ans
	$\frac{A}{4} = \frac{B}{6} = \frac{C}{10} = \frac{0,405 S}{20} = 0,02025$
Benjamin touche 19 926 F	$0,02025 S * 4 = 0,081 S = 19\ 926 \rightarrow$ on trouve $S = 246\ 000F$.

2.-/ La somme reçue par chaque membre de la famille

Père	$10\% * 246\ 000 = 24\ 600$ le reste $246\ 000 - 24\ 600 = 221\ 400$
Mère	$20\% * 221\ 400 = 44\ 280$ et le reste $= 221\ 400 - 44\ 280 = 177\ 120$
Soul	$\frac{1}{4} (177\ 120) = 44\ 280$ et le reste $177\ 120 - 44\ 280 = 132\ 840$
Dra	$25\% * 132\ 840 = 33\ 210$ et le reste $132\ 840 - 33\ 210 = 99\ 630$
Trois petits frères	$99\ 630$ proportionnellement aux âges 4 ans ; 6 ans et 10 ans
	$\frac{A}{4} = \frac{B}{6} = \frac{C}{10} = \frac{99\ 630}{20} = 4\ 981,5$
Benjamin touche 19 926 FCFA ; le cadet touche 29 889 FCFA et le plus âgé touche 49 815 FCFA	

Exercice 40 :

Une marchandise revenant à 4 000 000 FCFA au fabricant est vendue par celui-ci à un grossiste en réalisant un bénéfice de 20% sur le prix de revient. Le grossiste supporte des frais représentant 5% du prix d'achat et vend la marchandise à un détaillant en appliquant un taux de marque de 20%.

Le détaillant supporte les frais de 200 000 FCFA et cède la marchandise à 8 125 000 FCFA.

Après avoir appliqué un taux de marque de $(x+5)\%$.

1.-/ Calculer x et le taux de marque du détaillant ;

2.-/ Quel est le taux de marque qui permet au détaillant de réaliser le même bénéfice ?

3.-/ Quel est le coefficient multiplicateur permettant de passer du prix de vente du fabricant au prix de vente du grossiste.

Solution 40 :

1.-/ rappelons que :

Prix de revient PR = prix d'achat PA + frais d'achat FA

$$\text{taux de marque} = \frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} * 100 \quad \Rightarrow PV = PR + B \quad \Rightarrow B = PV - PR$$

$$\Rightarrow PV = \frac{PR}{1 - \text{taux de marque}}$$

Fabricant	PR = 4 000 000 FCFA $\Rightarrow$ Bénéfice = $20\% * 4 000 000 = 800 000$ Prix de vente = $4 000 000 + 800 000 = 4 800 000$
Grossiste	PR = $4 800 000 + 5\% * 4 800 000 = 5 040 000$ $\Rightarrow PV = \frac{100 * PR}{100 - \text{taux de marque}} = \frac{5 040 000}{1 - 0,20} = 6 300 000$
Détaillant	PR = $6 300 000 + 200 000 = 6 500 000$ Prix de vente = 8 125 000 Bénéfice = $PV - PR = 8 125 000 - 6 500 000 = 1 625 000$
	$\text{taux de marque} = \frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} * 100 = \frac{1 625 000}{8 125 000} * 100 = x + 5$ $20 = x + 5$ on trouve $x = 15$ et le taux de marque = 20 %

2.-/ le taux de marque qui permet au détaillant

$$\text{taux de marque} = \frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} * 100 = \frac{1 625 000}{8 125 000} * 100 = 20\%$$

3.-/ Le coefficient multiplicateur permettant de passer du prix de vente du fabricant au prix de vente du grossiste :

$$m = \frac{8 125 000}{4 800 000} = 1,6927$$

Exercice 41 :

1.-/ Le prix d'un produit qui coûtait 5 000 000 FCFA a subi une hausse de 9% puis une baisse de 4%. Déterminer le prix actuel de ce produit.

2.-/ Un produit est vendu à 7 000 000 FCFA, prix TTC. Déterminer le montant de la TVA au taux de 18%.

Solution 41:

$$1.-/ \text{Prix actuel} = 5 000 000 * \frac{100+9}{100} * \frac{100-4}{100} = 5 232 000 \text{ F}$$

$$2.-/ \text{TVA} = \frac{7 000 000 * 18}{118} = 1 067 797$$

$$\text{TVA} = \frac{HT * 18}{100} = \frac{TTC * 18}{118} \text{ si le taux est de } 18\%$$

Exercice 42 :

1.-/ Une augmentation directe de 10% est-elle équivalente à deux augmentations successives de 3% et 7% ? justifiez votre réponse.

Réponse : non

- Augmentation de 10% est : $\frac{100+10}{100} = 1,10$

- Aug successive de 7% et 3% est : $\frac{100+7}{100} * \frac{100+3}{100} = 1,07 * 1,03 = 1,1021$

2.-/ Trente ouvriers ont creusé une tranchée en 72 heures. Combien de temps 12 de ces ouvriers auraient-ils mis pour effectuer le même travail ?

Réponse : $\frac{30}{72} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{72*12}{30} = 28,8 \text{ heures}$

3.-/ On augmente le côté d'un carré de 5%.

De quel pourcentage augmente le périmètre ?

De quel pourcentage augmente la surface ?

Réponse :

Le périmètre augmente de 5%.

La surface augmente de 10,25% $(1,05*1,05 - 1)$

4.-/ Dans une ville lors d'une élection, trois listes A, B, C sont en présence. Certains résultats en nombre de voix en % des suffrages exprimés sont donnés ci-dessous :

Listes	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	2 362	
Liste B		22%
Liste C	5 522	

Reproduire et compléter le tableau.

Réponse : soit x le nombre de voix obtenues par la liste B

La somme des % = 100% ce qui correspond au nombre de voix totales = 2 362 + x + 5 522 = 7 884 + x

X -----→ 22%

7 884 + X -----→ 100%

$\frac{x}{7\,884+x} = \frac{22}{100} \rightarrow 100x = 173\,448 + 22x \rightarrow x = 2\,224$

Listes	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	2 362	23%
Liste B	2 224	22%
Liste C	5 522	55%
Total	10 108	100%

5.-/ Dans une ville lors d'une élection, trois listes A, B, C sont en présence. Certains résultats en nombre de voix en % des suffrages exprimés sont donnés ci-dessous :

Listes	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	1 900 000	
Liste B		30%
Liste C	1 600 000	

Reproduire et compléter le tableau.

6.-/ Lors d'une enquête auprès des jeunes (18 à 25 ans), on a interrogé 700 garçons et 1 100 filles leur soirée du 31 décembre 2014 au 31 décembre 2015. On a obtenu les réponses suivantes :

- Pour les garçons : 4% ont passé le réveillon chez les parents ; 20% ont passé le réveillon au restaurant. Tous les autres ont passé le réveillon chez des amis.
- Pour les filles : 18% ont passé le réveillon chez les parents ; 30% ont passé le réveillon au restaurant. Tous les autres ont passé le réveillon chez des amis.

1°/ Reproduire et compléter le tableau suivant :

Sexes Réveillon	Garçons	Filles	Total
Chez leurs parents			
Au restaurant			
Chez des amis			
Total			

2°/ a) Calculer le % des garçons ayant passé le réveillon chez des amis

b) Calculer le % des filles ayant passé le réveillon chez des amis.

3°/ Calculer le nombre de jeunes ayant passé le réveillon chez leurs parents.

4°/ Il y a 20% des garçons et 30% des filles qui ont passé le réveillon au restaurant. Peut-on, en faisant la moyenne, affirmer que 25% des jeunes ont passé au restaurant ?

7.-/ Développer $(2 + \sqrt{2})^3$ et $(2 - \sqrt{2})^3$

En déduire la valeur exacte de $C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

8.-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt[3]{2x - 9} = 3$

9.-/ Soit a un réel strictement positif. Simplifier $D = \frac{\sqrt[3]{a^5 x} (\sqrt[4]{a^7})^2}{(a^2)^2 x \sqrt[5]{a^5} x \sqrt[5]{a^3}}$

10.-/ Simplifier au maximum B : $B = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{16} * \sqrt[3]{27}}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{108}}}$

Exercice 1 : BAC – 2016 / Mathématiques / TS éco

1°/ La population d'une ville était de 650 000 habitants début 2010 qui a augmenté de 8% la 1^{ère} année et de 10% l'année suivante. Quel a été le nombre d'habitants de cette ville en fin 2012 ?

2°/ La population de cette ville est passée de 650 000 en 2010 à 721 500 en 2013. Quel est le coefficient multiplicateur ? Quel est la taux d'évolution ?

3°/ Dans un aliment pour bébé, il a 75% de légumes dont 60% de carottes. Quel pourcentage de carottes dans cet aliment ?

Exercice BAC – 2014

1-/ Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles et 25% des filles sont des déplacées. Quelle est le pourcentage des filles déplacées dans ce lycée ?

Combien de filles déplacées cela représente-t-il si le lycée compte 225 élèves au total ?

2-/ Un boulanger qui fabrique 5 200 pains quotidiennement, sait que pendant les fêtes traditionnelles il doit augmenter sa production de 15% par jour. Calculer le nombre de pains qu'il aura fabriqué au bout d'une semaine de fêtes.

3-/ La robe de FADIMA mesurait 1,68m. Après le premier lavage, il mesurait 3% de moins et après le deuxième lavage, il mesurait 1,5% de moins. Calculer la longueur de cette robe après le deuxième lavage.

4-/ Dans chacun des trois cas ci-dessus, nommer le type de pourcentage utilisé.

Exemple :

Une somme S doit être partagée entre deux personnes proportionnelles aux nombres 2 et 5. L'agent chargé du partage se trompe. Il a effectué le partage en partie inversement proportionnelle aux mêmes nombres. Ainsi une personne a vu sa part diminué de 19 200F.

Laquelle a vu sa part diminué ? Quel est le montant à partager ? Quelles sont les parts des deux personnes ?

4.- Suite Arithmétique SA et suite géométrique SG

	Progression arithmétique 1 ^{er} terme U_p dernier terme U_n raison R	Progression géométrique 1 ^{er} terme U_p dernier terme U_n raison Q ($Q > 0$)
Formule U_n	$U_{n+1} = U_n + R$	$U_{n+1} = Q * U_n$
L'expression générale U_n	$U_n = U_p + (n - p) * R$	$U_n = U_p * Q^{n-p}$
La raison	$R = \frac{U_n - U_p}{n - p}$	$Q^{n-p} = \frac{U_n}{U_p}$
La somme S_n	$S_n = \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$	$S_n = U_p \frac{Q^{n-p+1} - 1}{Q - 1}$
A, B, C dans cet ordre	$A = A ; B = A + R ; C = A + 2R$ $2B = A + C$	$A = A ; B = A * Q ; C = A * Q^2$ $B^2 = A * C$
Insertion de k moyens entre a et b	$R = \frac{b-a}{k+1}$	$Q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$

Rappelons de la forme des intérêts composés comme une suite géométrique :

Valeur acquise au bout de n : $C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$

la suite C_n est géométrique de raison $q = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et de 1^{er} terme C_0

Rappelons de la forme des intérêts simples comme une suite arithmétique :

Valeur acquise au bout de n : $A_{n+1} = A_n + \frac{A_0 * t}{100}$ et $A_n = A_0 + \frac{A_0 * t * n}{100}$

la suite A_n est arithmétique de raison $r = \frac{A_0 * t}{100}$ et de 1^{er} terme A_0 .

Ce qu'il faut retenir de la suite arithmétique ?

- La raison $r = \frac{U_n - U_p}{n - p}$
- Le 1^{er} terme $U_0 = U_n - n * r$ ou $U_1 = U_n - (n - 1) * r$
- L'expression générale $U_n = U_0 + n * r$ ou $U_n = U_1 + (n - 1) * r$

Somme des n premiers termes d'une SA de 1^{er} terme U_p : $S_n = \frac{(n - p + 1)(U_n + U_p)}{2}$

Ce qu'il faut retenir de la suite géométrique ?

- La raison $\frac{U_n}{U_p} = q^{n-p}$
- Le 1^{er} terme : $U_0 = \frac{U_n}{q^n}$ ou $U_1 = \frac{U_n}{q^{n-1}}$
- L'expression générale : $U_n = U_0 * q^n$ ou $U_n = U_1 * q^{n-1}$

Somme des n premiers termes d'une S G : $S_n = U_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$

Détermination de U_{n+1} en fonction de U_n

X_0 augmente (diminue) de $t\%$: Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n $X_1 = X_0 + \frac{t}{100} * X_0 = X_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ $X_2 = X_1 + \frac{t}{100} * X_1 = X_1 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ $X_3 = X_2 + \frac{t}{100} * X_2 = X_2 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ $X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ C'est une suite géométrique de 1^{er} terme X_0 et de raison $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ alors $X_n = X_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$	X_0 augmente (diminue) de $t\%$ puis on ajoute A Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n $X_1 = X_0 + \frac{t}{100} * X_0 + A = X_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A$ $X_2 = X_1 + \frac{t}{100} * X_1 + A = X_1 \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A$ $X_3 = X_2 + \frac{t}{100} * X_2 + A = X_2 \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A$ $X_{n+1} = X_n \left(1 + \frac{t}{100}\right) + A \text{ avec}$ Soit la suite $W_n = X_n + K$ avec $K = \frac{A}{\frac{t}{100}}$ W_n est une SG $W_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) W_n$ $W_n = W_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$
Lorsque « U_0 » augmente de $t\%$ par an $\rightarrow U_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) U_n \rightarrow U_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right) U_0$ Lorsque « U_0 » augmente de $t\%$ par an + $A \rightarrow U_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) U_n + A$	

Suites avec des intérêts simples et composés

Intérêts simples : V_{n+1} en fonction de V_n 1^{ère} année : $V_1 = V_0 + \frac{V_0 * \text{taux}}{100}$ 2^{ème} année : $V_2 = V_1 + \frac{V_0 * \text{taux}}{100}$ 3^{ème} année : $V_3 = V_2 + \frac{V_0 * \text{taux}}{100}$ $n^{\text{ème}}$ année : $V_{n+1} = V_n + \frac{V_0 * \text{taux}}{100}$ C'est une suite arith de 1^{er} terme V_0 et de raison $R = \frac{V_0 * \text{taux}}{100}$ alors $V_n = V_0 + \frac{V_0 * t * n}{100}$	Intérêts composés : V_{n+1} en fonction de V_n 1^{ère} année : $V_1 = V_0 + \frac{V_0 * \text{taux}}{100} = V_0 \left(1 + \frac{\text{taux}}{100}\right)$ 2^{ème} année : $V_2 = V_1 + \frac{V_1 * \text{taux}}{100} = V_1 \left(1 + \frac{\text{taux}}{100}\right)$ 3^{ème} année : $V_3 = V_2 + \frac{V_2 * \text{taux}}{100} = V_2 \left(1 + \frac{\text{taux}}{100}\right)$ $n^{\text{ème}}$ année : $V_{n+1} = V_n \left(1 + \frac{\text{taux}}{100}\right)$ C'est une suite géo de 1^{er} terme V_0 et de raison $q = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ alors $V_n = V_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$
--	---

Applications des formules de la SA et la SG

Application 1 : En utilisant la formule $U_n = U_p + (n - p) * R$,

Soit U_n la suite arithmétique de raison R et de 1^{er} terme. On dispose de U_p et U_n .

- a) $U_5 = 95$ et $U_{30} = 220$ b) $U_{20} = 149$ et $U_{99} = 386$
 c) $U_7 = 77$ et $U_{20} = -40$ d) $U_{42} = 81$ et $U_{100} = -35$;
 e) $U_9 = 126$ et $U_{19} = 186$; f) $U_{22} = 134$ et $U_{201} = 492$
 g) $U_{20} = 149$ et $U_{99} = 386$ h) $U_7 = 77$ et $U_{20} = -40$
 i) $U_{42} = 81$ et $U_{100} = -35$ j) $U_9 = 126$ et $U_{19} = 186$

Calculer R , le 1^{er} terme U_0 et exprimer U_n en fonction de n

Indication de solution :

La raison $r = \frac{U_n - U_p}{n - p}$ et le 1^{er} terme $U_p = U_n - (n - p) * R$

$$U_5 = 95 \text{ et } U_{30} = 220 \rightarrow r = \frac{U_{30} - U_5}{30 - 5} = \frac{220 - 95}{30 - 5} = 5$$

$$U_p = U_n - (n - p) * R \rightarrow U_0 = U_5 - (5 - 0) * 5 = 95 - 5 * 5 = 70$$

L'expression générale U_n en fonction de n : $U_n = U_0 + n * R \rightarrow U_n = 70 + 5.n$

Application 2 : Insertion de k moyens arithmétiques entre a et $b \rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}$

Insérer 5 moyens arithmétiques entre 500 et 950.

$$\text{Solution : } r = \frac{b-a}{k+1} = \frac{950-500}{5+1} = 75 \rightarrow 500 ; 575 ; 650 ; 725 ; 800 ; 875 ; 950$$

Application 3 : En utilisant la formule de la SG $U_n = U_p * q^{n-p}$

Soit U_n la suite géométrique de raison Q et de 1^{er} terme. On dispose de U_p et U_n .

- a) $U_4 = 80$ et $U_{10} = 5120$ b) $U_2 = 12,8$ et $U_5 = 6,5536$
 c) $U_4 = \frac{90}{81}$ et $U_{10} = \frac{30}{19683}$ d) $U_{10} = \frac{25}{512}$ et $U_{20} = \frac{25}{522788}$

Calculer la raison « q », le 1^{er} terme U_0 et le terme général U_n en fonction de n

Indication de solution : la raison $q^{n-k} = \frac{U_n}{U_k}$ et le 1^{er} terme $U_p = \frac{U_n}{q^{n-p}}$

$$U_5 = 80 \text{ et } U_{10} = 5120 \rightarrow q^{10-4} = \frac{U_{10}}{U_4} = \frac{5120}{80} = 64 \rightarrow q = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$U_p = \frac{U_n}{q^{n-p}} \rightarrow U_0 = \frac{U_4}{q^{4-0}} = \frac{80}{2^4} = 5$$

$$\text{b.-) } U_2 = 12,8 \text{ et } U_5 = 6,5536 \rightarrow q^{5-2} = \frac{U_5}{U_2} = \frac{6,5536}{12,8} = 0,512 \rightarrow q = \sqrt[3]{0,512} = 0,8$$

$$U_p = \frac{U_n}{q^{n-p}} \rightarrow U_0 = \frac{U_2}{q^{2-0}} = \frac{12,8}{0,8^2} = 20$$

$$\text{c) } U_4 = \frac{90}{81} \text{ et } U_{10} = \frac{30}{19683} \rightarrow q^{10-4} = \frac{U_{10}}{U_4} = \frac{90/81}{30/19683} = 729 \rightarrow q = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$U_p = \frac{U_n}{q^{n-p}} \rightarrow U_0 = \frac{U_4}{q^{4-0}} = \frac{90/81}{3^4} = \frac{90}{6561} = \frac{90}{2187} = \frac{30}{729}$$

Soit U_n la suite arithmétique de raison R et de 1^{er} terme. On dispose de U_p et U_n .

a) $U_5 = 95$ et $U_{30} = 220$

Calcule U_0 et R

Calcule la somme S_n en fonction de n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Calcule la somme $S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{50}$

b) $U_{20} = 149$ et $U_{99} = 386$

Calcule U_0 et R

Calcule la somme S_n en fonction de n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Calcule la somme $S' = U_{20} + U_{21} + U_{22} + \dots + U_{120}$

c) $U_7 = 77$ et $U_{20} = -40$;

Calcule U_0 et R

Calcule la somme S_n en fonction de n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Calcule la somme $S' = U_{10} + U_{21} + U_{22} + \dots + U_{90}$

Note : utiliser la formule de la somme d'une SA $S_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2}$

Indication de solution

a.-) $U_5 = 95$ et $U_{30} = 220$ on calcule R et U_0 puis $U_n \rightarrow R = 5 \quad U_0 = 70$.

U_n en fonction de n : $U_n = U_0 + n * R \rightarrow U_n = 70 + 5.n$

$$\rightarrow S_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{(n+1)(70+70+5n)}{2} \rightarrow S_n = \frac{(n+1)(140+5n)}{2}$$

$$S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{50} = \frac{(n+1)(U_0+U_{50})}{2} = \frac{(50+1)(140+5 \times 50)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{(50+1)(140+5 \times 50)}{2} = 9\,945$$

b) $U_{20} = 149$ et $U_{99} = 386$ on calcule R et U_0 puis $U_n \rightarrow R = 3 \quad U_0 = 89$.

U_n en fonction de n : $U_n = U_0 + n * R \rightarrow U_n = 89 + 3.n$

$$\rightarrow S_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{(n+1)(89+89+3n)}{2} \rightarrow S_n = \frac{(n+1)(178+3n)}{2}$$

Calcule la somme $S' = U_{15} + U_{21} + U_{22} + \dots + U_{120}$

$$U_n = 89 + 3.n \rightarrow U_{15} = 89 + 3 \times 15 = 134$$

$$U_n = 89 + 3.n \rightarrow U_{120} = 89 + 3 \times 120 = 449$$

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2} \rightarrow S' = \frac{(120-15+1)(U_{120}+U_{15})}{2} = \frac{(120-15+1)(449+134)}{2} = 30\,899$$

Application 5 :

Un Capital 3 600 000F est divisée en trois parts en PA de raison 200 000F. Calculer les 3 parts.

Solution : soient A, B, C les trois parts en PA de raison $R = 200\ 000$

$$A = A ; \quad B = A + R ; \quad C = A + 2R \rightarrow A + B + C = 3\ 600\ 000$$

$$A + A + 400\ 000 + A + 800\ 000 = 3\ 600\ 000 \rightarrow \text{on trouve } A = 1\ 000\ 000F ;$$

$$B = 1\ 200\ 000 ; \quad C = 1\ 400\ 000F$$

Application 6 :

Un Capital 21 000 000F est divisée en trois parts en PA de raison R. Calculer les deux premiers capitaux sachant que la 3^{ème} part est égale à 7 500 000F.

Solution : soient A, B, C les trois parts en PA de raison R

$$A = A ; \quad B = A + R ; \quad C = A + 2R \rightarrow A + B + C = 21\ 000\ 000 \text{ et } C = 7\ 500\ 000$$

$$C = 7\ 500\ 000 \rightarrow A + 2R = 7\ 500\ 000 \rightarrow A = 7\ 500\ 000 - 2R$$

$$A + (A + R) + (7\ 500\ 000) = 21\ 000\ 000 \rightarrow 2A + R = 13\ 500\ 000 \rightarrow$$

$$\text{on remplace } A \text{ par } 7\ 500\ 000 - 2R \rightarrow \text{on trouve } R = 500\ 000$$

$$\text{Les trois parts : } A = 6\ 500\ 000F ; \quad B = 7\ 000\ 000F ; \quad C = 7\ 500\ 000F.$$

Application 7 :

Un Capital 14 000 000F est divisée en trois parts en PG de raison $q = 2$. Calculer les trois parts.

Solution : soient A, B, C les trois parts en PG de raison q

$$A = A ; \quad B = A * q ; \quad C = A * q^2 \rightarrow A + 2A + 4A = 7A = 14\ 000\ 000 \text{ on trouve } A = 2\ 000\ 000$$

$$B = 4\ 000\ 000F \text{ et } C = 8\ 000\ 000.$$

Application 8 :

Un matériel est acheté 168 080F. On désire l'amortir en 5 ans par des amortissements annuels formant une progression géométrique de raison 0,8. Calculer les différents amortissements.

Solution : soient A, B, C les trois parts en PG de raison 0,8

$$A = A ; \quad B = A * q = 0,8 * A ; \quad C = A * q^2 = 0,64 A ; \quad D = A * q^3 = 0,512 A ; \quad E = A * q^4 = 0,4096 A$$

$$\rightarrow A + 0,8 A + 0,64 A + 0,512 A + 0,4096 A = 168\ 080 \text{ on trouve } A = 50\ 000F.$$

$$B = 40\ 000 ; \quad C = 32\ 000 ; \quad D = 25\ 600 ; \quad E = 20\ 480.$$

Application 9 :

La production d'une entreprise en fonction du temps suit une progression arithmétique. La production de départ est égale 23 unités. Au bout de cinq ans cette production exprimée en unité est de 38. Déterminer l'augmentation annuelle de production en unité.

Solution : l'augmentation annuelle de production en unité veut dire la raison de la P A.

$$\text{En utilisant la formule } U_n = U_p + (n - p) * R \rightarrow P_5 = P_0 + (5 - 0) * R$$

$$\rightarrow 38 = 23 - 5R \rightarrow R = 3 \text{ unités}$$

Application 10 : On donne $\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n + 27}{4} \end{cases}$

1/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

2/ On pose $V_n = U_n + 9$

a.-) Montrer que V_n est une Suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

b.-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Solution

$$U_1 = \frac{7(13) + 27}{4} = \frac{59}{2} ; U_2 = \frac{7\left(\frac{59}{2}\right) + 27}{4} = \frac{467}{8} ; U_3 = \frac{7\left(\frac{467}{8}\right) + 27}{4} = \frac{3485}{32}$$

2/ On pose $V_n = U_n + 9 \rightarrow V_n$ est géométrique ssi $V_{n+1} = q V_n$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 9 = \frac{7U_n + 27}{4} + 9 = \frac{7U_n + 63}{4} = \frac{7}{4}(U_n + 9) = \frac{7}{4} V_n$$

V_n est une SG de raison $q = 7/4$ et de 1^{er} terme $V_0 = 13 + 9 = 22$

$$V_n = V_0 * q^n = 22 * (7/4)^n.$$

Application 11 :

Disposant d'un capital de 10 000F un investisseur étudie les offres de deux banques différentes.

- La Banque « A » propose un placement à intérêts simples au taux annuel de 3,5%.
- La Banque « B » propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 5%.
- La Banque « C » propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 2%. Les intérêts obtenus sont augmentés d'une prime annuelle de 170F intégrée au capital. Ainsi, les intérêts et la prime produisent des intérêts pour l'année suivante.

Partie A : Etude de l'offre de la banque A

On note, pour n entiers naturels, A_n le capital en FCA de l'investisseur au début de l'année n . ainsi, $A_0 = 10\,000$; $A_1 = 10\,350$ et $A_2 = 10\,700$

1.- La suite (A_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Exprimer A_n en fonction de n .

2.- Calculer le capital disponible au début de l'année 10.

Partie B : Etude de l'offre de la Banque B

On note, pour n entiers naturels, B_n le capital en FCA de l'investisseur au début de l'année n . ainsi, $B_0 = 10\,000$; $B_1 = 10\,500$; $B_2 = 11\,025$ et $B_3 = 11\,576,25$

1.- La suite (B_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Exprimer A_n en fonction de n .

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahu Akbar

2.- Calculer le capital disponible au début de l'année 10.

Partie C : Etude de l'offre de la Banque C

On note, pour n entiers naturels, C_n le capital en FCA de l'investisseur au début de l'année n . ainsi, $C_0 = 10\ 000$; $C_1 = 10\ 370$ et $C_2 = 10\ 747,4$

1.- La suite (C_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2.- Justifier, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 1,02 C_n + 170$

3.- Pour tout entier naturel n on pose $U_n = C_n + 8\ 500$

a) Calculer U_0 et U_1

b) Démontrer la suite (U_n) est géométrique et préciser sa raison.

c) Exprimer U_n en fonction de n et en déduire $C_n = 18\ 500 \times 1,02^n - 8500$

5.- Calculer le capital disponible au début de l'année 10.

6.- L'investisseur décide de placer son capital jusqu'au début de l'année 10. Déterminer parmi les deux banques A et B celle qui propose l'offre la plus intéressante.

Solution / Rappels :

Suite $A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 \dots$ est arithmétique ssi : $A_2 - A_1 = A_3 - A_2 = A_4 - A_3 = R$

Suite $A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 \dots$ est géométrique ssi : $A_2 / A_1 = A_3 / A_2 = A_4 / A_3 = Q$

Réponse partie A:

1.-/ $A_1 - A_0 = A_2 - A_1 = A_3 - A_2 = 350$ la suite est arithmétique de raison $R = 350$

$A_{n+1} = A_n + 350$ et $A_0 = 10\ 000 \rightarrow A_n = A_0 + n.R$

A_n en fonction de $n \rightarrow A_{10} = A_0 + 10.R = 10\ 000 + 350 n$

2.- le capital disponible au début de l'année 10

$\rightarrow A_{10} = A_0 + 10.R = 10\ 000 + 10 \times 350 = 13\ 500$

Réponse partie B : Rappels :

1.-/ $A_1 / A_0 = A_2 / A_1 = 1,05$ la suite est géométrique de raison $Q = 1,05$

$B_{n+1} = 1,05 \times B_n$ et $B_0 = 10\ 000 \rightarrow B_n = B_0 \cdot Q^n$

B_n en fonction de $n \rightarrow B_n = 10\ 000 \times (1,05)^n$

2.- Le capital disponible au début de l'année 10

$\rightarrow B_{10} = 10\ 000 \times (1,05)^{10} = 16\ 289 F.$

Réponse partie C : Rappels :

1.-/

$C_1 - C_0 \neq C_2 - C_1$ la suite n'est pas arithmétique

$C_1 / C_0 \neq C_2 / C_1$ la suite n'est pas géométrique

2.-/ Pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 1,02 C_n + 170$

$C_{n+1} = 1,02 C_n + 170 \rightarrow$ pour $n = 0$

$\rightarrow C_1 = 1,02 C_0 + 170 = 1,02 \times 10\ 000 + 170 = 10\ 370$

$$C_{n+1} = 1,02 C_n + 170 \rightarrow \text{pour } n = 1$$

$$\rightarrow C_2 = 1,02 C_1 + 170 = 1,02 \times 10\,370 + 170 = 10\,747,4$$

$$C_{n+1} = 1,02 C_n + 170$$

3.- Pour tout entier naturel n on pose $U_n = C_n + 8\,500$

a)

$$U_0 = C_0 + 8\,500 = 10\,000 + 8\,500 = 18\,500$$

$$U_1 = C_1 + 8\,500 = 18\,500 + 8\,500 = 27\,000$$

b) Démontrer la suite (U_n) est géométrique et préciser sa raison.

$$U_n \text{ est géométrique ssi } \frac{U_{n+1}}{U_n} = Q \rightarrow U_{n+1} = C_{n+1} + 8\,500 = 1,02 C_n + 170 + 8\,500$$

$$\rightarrow U_{n+1} = 1,02 C_n + 8\,670 = 1,02 [C_n + 8\,500] = 1,02 [U_n]$$

La suite U_n est géométrique de raison $Q = 1,02$ et de 1^{er} terme $U_0 = 18\,500$.

$$U_{n+1} = 1,02 U_n \text{ et } U_0 = 18\,500$$

c) Exprimer U_n en fonction de $n \rightarrow U_n = 1,02^n \times 18\,500$

$$U_n = C_n + 8\,500 \rightarrow C_n = U_n - 8\,500 = 18\,500 \times 1,02^n - 8\,500$$

$$C_n = 1,02^n \times 18\,500 - 8\,500$$

5.- Calculer le capital disponible au début de l'année 10.

$$C_n = 1,02^n \times 18\,500 - 8\,500 \rightarrow C_{10} = 1,02^{10} \times 18\,500 - 8\,500 = 14\,051$$

6.- L'investisseur décide de placer son capital jusqu'au début de l'année 10.

$$\rightarrow A_{10} = 13\,500 F \rightarrow B_{10} = 16\,289 F. \rightarrow C_{10} = 14\,051$$

La banque B est celle qui propose l'offre la plus intéressante.

Application 12 :

Une observation faite par un journal sur les abonnés : - de constater pour chaque année un taux de réabonnement voisin de 80% - ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés.

On note A_n le nombre d'abonnés après n années et on précise $A_0 = 10\,000$.

Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , $A_{n+1} = 0,8 A_n + 5\,000$

Solution : Les données du problème

Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , $A_{n+1} = 0,8 A_n + 5\,000$

Le nombre d'abonné initial est de 10 000 soit $A_0 = 10\,000$

La 1^{ère} année, le nbre d'abonné : $10\,000 \times 80\% + 5\,000 = 13\,000$ soit $A_0 \times 0,8 + 5\,000$

La 2^{ème} année, le nbre d'abonné : $13\,000 \times 80\% + 5\,000 = 15\,400$ soit $A_1 \times 0,8 + 5\,000$

La 3^{ème} année, le nbre d'abonné : $15\,400 \times 80\% + 5\,000 = 17\,320$ soit $A_2 \times 0,8 + 5\,000$

Ainsi de suite on aura $A_{n+1} = 0,8 A_n + 5\,000$

Application 13 :

Un artisan fabrique des jouets pour les fêtes de fin d'année. Il décide de reprendre la fabrication des jouets dès le mois de janvier en fabriquant 200 jouets et en augmentant tous les mois la production de 40 jouets. On désigne par P_n le nombre de jouets fabriqués le $n^{\text{ème}}$ mois ($n \in \mathbb{N}^*$). On donne $P_1 = 200$ correspondant à la production du mois de janvier.

Déterminez la relation entre P_{n+1} et P_n .

Solution :

Déterminons la relation entre P_{n+1} et P_n : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n + 40$

Application 14 :

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n .

c) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme. Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n .

Solution :

a) Le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 est : 50 500

Le nombre d'arbres qu'il aura en 2017 est : 50 975

b) Exprimons X_{n+1} en fonction de X_n :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{5}{100}X_n + 3\,000 = 0,95X_n + 3\,000$$

La suite (U_n) est définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$

Montrons que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme : $U_0 = 60\,000 - X_0 = 10\,000$

Exprimons U_n en fonction de n déduisons en X_n en fonction de n :

$$X_n = 60\,000 - 10\,000(0,95)^n$$

Application 15 :

On place le 01/01/2015 une somme de 1 000 FCFA l'intérêt annuel est 4%.

Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés de plus, tous les 1^{er} janvier à partir de 2016, on rajoute 100FCFA au capital.

Soit U_n la somme disponible à l'an 2015+n avec $n \geq 0$.

1.-/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2.-/ En posant $V_n = U_n + 2500$. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Solution :

1.-/
$$U_{n+1} = 1,04 U_n + 100$$

2.-/ $V_n = U_n + 2500. \rightarrow V_n = 1,04^n * 3\,500$

Application 16 :

Un concurrent sur le marché des calculatrices estime que, chaque année, ses efforts lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2015, il en a vendu 600 000.

On note U_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année 2015 + n. on a donc $U_0 = 600$.

1.- Montre, que pour tout entier n, $U_{n+1} = 1,05 U_n - 10$

2.- On pose $V_n = U_n - 200$.

a.- Montre que la suite (V_n) est géométrique. Donne sa raison et son premier terme V_0 .b.- Exprime V_n en fonction de n. En déduis l'expression de U_n en fonction de n.

c.- D'après ce modèle, combien de calculatrices cette entreprise vendra-t-elle en 2025 ?

Solution

1.- Montre, que pour tout entier n, $U_{n+1} = 1,05 U_n - 10$

2015 $\rightarrow U_0 = 600$

2016 $\rightarrow U_1 = U_0 + U_0 \times 0,05 - 10 = 1,05 U_0 - 10$

2017 $\rightarrow U_2 = U_1 + U_1 \times 0,05 - 10 = 1,05 U_1 - 10$

2018 $\rightarrow U_3 = U_2 + U_2 \times 0,05 - 10 = 1,05 U_2 - 10$

.....

2015 + n $\rightarrow U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,05 - 10 = 1,05 U_n - 10$

2.- On pose $V_n = U_n - 200$.

a.- Montre que la suite (V_n) est géométrique. Donne sa raison et son premier terme V_0 . V_n est une suite géométrique ssi $V_{n+1} = q V_n$

$V_n = U_n - 200 \rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 200 = 1,05 U_n - 10 - 200 = 1,05 U_n - 210$

$V_{n+1} = 1,05 U_n - 210 = 1,05 (U_n - 200) = 1,05 V_n$

$V_{n+1} = 1,05 V_n$

Alors V_n est géométrique de raison $q = 1,05$ et de $V_0 = 400$ b.- Exprime V_n en fonction de n. En déduis l'expression de U_n en fonction de n.

$V_n = 1,05^n \times 400 \rightarrow U_n = 1,05^n \times 400 + 200$

c.- D'après ce modèle, combien de calculatrices cette entreprise vendra-t-elle en 2025 ?

2025 = 2015 + 10 $\rightarrow U_{10} = 1,05^{10} \times 400 + 200 = 851,558$ milliers

Le nombre de calculatrices que cette entreprise vendra en 2025 est de : 851 558.

Série d'exercices sur les progressions

Exercice 17 :

1.- Les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30 sièges ; 32 sièges ; 34 sièges et ainsi de suite. De la 11^{ème} rangée à la 20^{ème} rangée chaque rangée est formée de 50 sièges.

Calculer le nombre total des sièges dans cette partie du stade.

Réponse : soient $U_1 ; U_2 ; U_3 ; \dots ; U_{20}$ les 20 rangées d'une partie d'un stade.

$U_1 = 30 ; U_2 = 32 ; U_3 = 34 ; U_4 = 36 ; U_5 = 38 \dots U_{10} = 48 ;$ somme = 390

$U_{11} = 50 ; U_{12} = 50 ; U_{13} = 50 ; U_{14} = 50 \dots U_{20} = 50 ;$ somme 500

Nombre total = 890 sièges

Exercice 18:

Une personne décide de placer un capital de 10 000 € qui apporte 8% d'intérêts composés par an. Le premier dépôt est effectué le 1^{er} janvier 2007. Les intérêts sont versés le 31 décembre de l'année en cours (les premiers intérêts seront versés le 31 décembre 2007). On appelle C_n le capital disponible, au 1^{er} janvier de l'année (2007 + n). Ainsi $C_0 = 10\,000$ €

a.- Calculer C_1 et C_2

Réponse : 10 800 € et 11 664 €

b.- Quelle est l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n

Réponse : $C_{n+1} = C_n (1,08)$

c.- En déduire que la suite C_n est une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Donner l'expression de C_n en fonction de n et C_0 .

Réponse : $q = 1,08 ; C_n = 10\,000 * 1,08^n$

d.- Quel sera le capital disponible au 1^{er} janvier 2018 ? (résultat arrondi à l'entier le plus proche).

Réponse : $C_{11} = 10\,000 * 1,08^{11} = 23\,316$ € .

Exercice 19 :

Un menuisier est embauché dans une entreprise et son salaire annuel est fixé à 840 000 FCFA. Il est augmenté de 3% à la fin de chaque année.

1.- Calculer son salaire annuel la 2^{ème} année, la 3^{ème} année et la 4^{ème} année.

2.- On désigne par U_n le salaire annuel de la n^{ème} année. Montrer que U_n est le terme de rang n d'une suite géométrique de 1^{er} terme $U_1 = 840\,000$ et dont on précisera la raison.

Déduisez-en l'expression de U_n .

3.- Sachant que l'ouvrier est entré dans l'entreprise à 24 ans, quel sera son salaire de la 36^{ème} année, lorsqu'il prendra sa retraite ?

4.- Au bout de combien d'années le salaire sera-t-il doublé ?

Solution :

1.- Son salaire annuel de la 1^{ère} année $U_1 = 840\,000 + 3\% \cdot 840\,000 = 840\,000 (1,03) = 865\,200$

Son salaire annuel de la 2^{ème} année

$$U_2 = 865\,200 + 3\% \cdot 865\,200 = 865\,200 (1,03) = 891\,156 = 840\,000 (1,03)^2 = 891\,156$$

Son salaire annuel de la 3^{ème} année

$$U_3 = 891\,156 + 3\% \cdot 891\,156 = 891\,156 (1,03) = 917\,890,68 = 840\,000 (1,03)^3 = 917\,890,68$$

$$\text{Son salaire annuel de la 4^{ème} année } U_4 = 917\,890,68 + 3\% \cdot 917\,890,68 = 917\,890,68 (1,03) = 945\,427,4004 \rightarrow 840\,000 (1,03)^4 = 945\,427,4004$$

2.- soit $U_0 = 840\,000$

$$U_1 = U_0 + 0,03U_0 = U_0 (1,03)$$

$$U_2 = U_1 + 0,03U_1 = U_1 (1,03) = U_0 (1,03)^2$$

$$U_3 = U_2 + 0,03U_2 = U_2 (1,03) = U_0 (1,03)^3$$

.....

$$U_n = U_0 (1,03)^n$$

$$3.- \text{Son salaire annuel de la 36^{ème} année } U_{36} = U_0 (1,03)^{36} = 840\,000 (1,03)^{36} = 2\,434\,554$$

4.- Au bout de combien d'années le salaire sera-t-il doublé ?

$$U_n = U_0 (1,03)^n = 2U_0 \rightarrow (1,03)^n = 2 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,03} = \frac{0,30103}{0,01284} = 23,44 \text{ ans soit 23 ans 5 mois et 10 jours.}$$

Exercice 20 :

La somme des trois premiers termes d'une suite arithmétique est 12, leur produit est 48. Déterminer ces trois termes.

Solution :

Rappelons que $U_1 ; U_2 ; U_3$ sont en P.A. de raison « r » ssi :

- $U_1 = X ; U_2 = X + r ; U_3 = X + 2r$.
- Connaissant la valeur de U_2 on aura : $U_1 = U_2 - r$ et $U_3 = U_2 + r$
- $2 \cdot U_2 = U_1 + U_3$

$$\text{Somme des 3 termes : } U_1 + U_2 + U_3 = 12 \rightarrow X + X + r + X + 2r = 12 \rightarrow X + r = 4$$

$$\text{On peut noter } U_2 = 4 \text{ car } X + r = U_2 \text{ on aura } U_1 = 4 - r \text{ et } U_3 = 4 + r$$

$$\text{Produit des 3 termes : } U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 = 48 \rightarrow (4 - r) \cdot 4 \cdot (4 + r) = 48 \rightarrow$$

$$(4 - r)(4 + r) = 12 \rightarrow 4^2 - r^2 = 12 \rightarrow r = 2 \text{ ou } -2.$$

$$\text{Pour } r = 2 \rightarrow U_1 = 4 - r = 4 - 2 = 2 ; U_2 = 4 \text{ et } U_3 = 4 + r = 4 + 2 = 6$$

$$\text{Pour } r = -2 \rightarrow U_1 = 4 - r = 4 + 2 = 6 ; U_2 = 4 \text{ et } U_3 = 4 + r = 4 - 2 = 2$$

Exercice 21 : Déterminer une suite arithmétique telle que $r = -2$ et

$$\text{Somme } S_{80} = 1\,296$$

Solution 21 :

Rappelons qu'une suite arithmétique de raison « r » est définie par :

- Le 1^{er} terme U_0 ou U_1 ou U_p
- Le terme général $U_n = U_p + (n - p) * r$
- La somme $S_n = \frac{n-p+1}{2} (U_p + U_n) = \frac{n-p+1}{2} (2U_p + (n - p) * r)$

$r = -2$ et Somme $S_{80} = 1\,296$ prenons U_1 comme le 1^{er} terme de la suite.

- Le terme général $U_n = U_1 + (n - 1) * (-2)$
- La somme $S_{80} = \frac{80-1+1}{2} (2U_1 + (80 - 1) * (-2)) = 1\,296 \rightarrow U_1 = ?$

$$40 * (2U_1 - 158) = 1\,296 \rightarrow U_1 = 95,2$$

$$\text{La suite arithmétique } \begin{cases} U_1 = 95,2 \\ U_n = U_1 + (n-1)*r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = 95,2 \\ U_n = 95,2 - 2(n-1) \end{cases}$$

Exercice 22 :

1/ Déterminer le 1^{er} terme et la raison d'une suite arithmétique décroissante telle que ses trois premiers termes vérifient : $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 98$ et $U_1 - U_2 + U_3 = 4$.

2/ Calculer U_{10} et S_{10} .

Solution 22 :

Rappelons que $U_1 ; U_2 ; U_3$ sont en P.A. de raison « r » ssi :

- $U_1 = X ; U_2 = X + r ; U_3 = X + 2r$.
- Connaissant la valeur de U_2 on aura : $U_1 = U_2 - r$ et $U_3 = U_2 + r$
- $2*U_2 = U_1 + U_3$

$U_1 ; U_2 ; U_3$ sont en P.A. de raison « r » ssi : $U_1 = X ; U_2 = X + r ; U_3 = X + 2r$.

Suivant l'équation : $U_1 - U_2 + U_3 = 4$. $\rightarrow$ on remplace $U_1 ; U_2 ; U_3$ par leur valeur : $(X) - (X + r) + (X + 2r) = 4 \rightarrow$ on trouve $X + r = 4 \rightarrow X = 4 - r$ ce qui va nous permettre de noter : $U_1 = 4 - r ; U_2 = 4$ et $U_3 = 4 + r$.

Suivant l'équation $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 98 \rightarrow (4 - r)^2 + (4)^2 + (4 + r)^2 = 98$

$\rightarrow 16 - 8r + r^2 + 16 + 16 + 8r + r^2 = 98 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 5$ ou $r = -5$ puisque la progression est décroissante je choisirai pour $r = -5$.

Je calcule $X = 4 - r = 4 - (-5) = 9$

La réponse à la question 1 : 1^{er} terme $U_1 = 9$ et la raison $r = -5$

2/ Calculer U_{10} et S_{10}

Rappelons l'expression générale U_n d'une S.A. de 1^{er} terme $U_1 = 9$ et de raison $r = -5$ est : $U_n = U_1 + (n-1)*r \rightarrow U_{10} = U_1 + (10 - 1)*r = 9 + 9*(-5) = -36$. $U_{10} = -36$

Rappelons la somme S_n d'une S.A. de 1^{er} terme $U_1 = 9$ et de raison $r = -5$ est :

$$S_n = \frac{n}{2} (U_1 + U_n) \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} (U_1 + U_{10}) = 5 (9 - 36) = -135$$

Exercice 23 : On considère la suite géométrique définie par : $U_1 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$.

Calculer U_{10} et S_{10} .

Solution :

Rappelons l'expression générale U_n d'une S.G. de 1^{er} terme $U_1 = 3$ et de raison

$$q = \frac{1}{2} \text{ est: } U_n = U_1 * q^{(n-1)} \Rightarrow U_n = 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow U_{10} = 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 3 * \frac{1}{512} = \frac{3}{512} \quad \boxed{U_{10} = 3/512}$$

Rappelons la somme S_n d'une S.G. de 1^{er} terme $U_1 = 3/512$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ est:

$$S_n = U_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3}{512} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \dots\dots\dots$$

Exercice 24 :

On considère la suite numérique W_n définie par :

$$W_1 = 3 ; W_{n+1} = \frac{1}{3}W_n + \frac{4}{3} \text{ avec } \geq 1.$$

1/ Soit U_n la suite définie par : $U_n = W_n - 2$ pour tout entier naturel n non nul.

Montrer que la suite U_n est une suite géométrique.

2/ Calculer $S_n = \sum_1^n U_i$ en déduire $S'_n = \sum_1^n W_i$

Solution 24 :

1/ Rappelons qu'une suite U_n est géométrique ssi : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ constante réelle.

$$\text{Calculons } U_{n+1} = W_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}W_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}W_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(W_n - 2) = \frac{1}{3} * U_n$$

$$U_0 = W_1 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} * U_n \text{ alors } U_n \text{ est une S G de raison } 1/3 \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } U_0 = 1$$

Rappelons la somme S_n d'une S.G. de 1^{er} terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 1/3$ est:

$$S_n = U_0 * \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \Rightarrow S_n = 1 * \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1} = 3 * \frac{\left(\frac{1-3^{n+1}}{3^{n+1}}\right)}{-2} = \frac{-3}{2}(3^{-n} - 1)$$

Nous savons que : $U_n = W_n - 2 \Rightarrow \sum_1^n U_i = \sum_1^n W_i - 2$ alors

$$S'_n = \sum_1^n W_i = \sum_1^n U_i + 2 = \frac{-3}{2}(3^{-n} - 1) + 2$$

Exercice 25 :

En janvier N la production d'une entreprise est de 370 unités. Face à la demande pressante de la clientèle l'entreprise décide d'augmenter sa production mensuelle de 20 unités supplémentaires chaque mois.

On note P_n la production du n^{ème} mois après janvier N.

1/ a) déterminer $P_0 ; P_1 ; P_2 ; P_3$.

b) Calculer $P_{n+1} - P_n$. En déduire la nature de la suite P_n .

c) Exprimer le terme général P_n en fonction de n . en déduire la valeur P_{20} .

2/ cette entreprise a une capacité de production limitée à 1 010 unités.

a) Pendant combien de temps pourrait-elle maintenir son effort de production ?

b) Quelle aura été sa production totale pendant toute cette période ?

Solution :

1/ a) déterminer

- $P_0 = 370$ unités ;
- $P_1 = P_0 + 20 = 370 + 20 = 390$
- $P_2 = P_1 + 20 = P_0 + 2 \cdot 20 = 370 + 2 \cdot 20 = 410$
- $P_3 = P_2 + 20 = P_0 + 3 \cdot 20 = 370 + 3 \cdot 20 = 430$
-
- $P_n = P_0 + n \cdot 20$

1/ b) Calculer $P_{n+1} - P_n$. En déduire la nature de la suite P_n .

$$P_n = P_0 + n \cdot 20 \text{ et } P_{n+1} = P_0 + (n+1) \cdot 20$$

$P_{n+1} - P_n = P_0 + (n+1) \cdot 20 - P_0 - 20 \cdot n = 20$ alors P_n est une suite arithmétique de raison $r = 20$ et de 1^{er} terme $P_0 = 370$.

Rappelons que la suite U_n est :

- arithmétique ssi : $U_{n+1} - U_n = r$ (constante réelle)
- géométrique ssi : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ (constante réelle).

1/ c) Exprimer le terme général P_n en fonction de n . en déduire la valeur P_{20} .**Rappelons :** le terme général d'une suite arithmétique : $U_n = U_0 + n \cdot r$

$$P_n = P_0 + n \cdot r \rightarrow P_n = 370 + 20n \rightarrow P_{20} = 370 + 20 \cdot 20 = 770$$

2/ La capacité de production limitée à 1 000 unités $\rightarrow P_n = 1\,010$

a) Le temps qu'elle pourra maintenir son effort de production

$$P_n = 370 + 20n = 1\,010 \rightarrow n = 32 \text{ mois}$$

b) La production totale pendant toute cette période :

$$S_n = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{n+1}{2} (P_0 + P_n)$$

$$S_{31} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{32} = \frac{32+1}{2} (370 + 1\,000) = 22\,605 \text{ unités}$$

Exercice 26 :Soit U_n une suite arithmétique telle que : $U_{15} = 35$ et $U_{52} = 109$ 1.- Déterminer le 1^{er} terme U_0 et raison r de cette suite.2.- Exprimer U_n en fonction de n 3.- Etudier le sens de variation de la suite U_n 4.- Calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ Et $S' = U_7 + U_8 + \dots + U_{20}$ **Solution 26 :****Rappelons :**Le terme général d'une S.A de 1^{er} terme U_p et de raison r est : $U_n = U_p + (n-p) \cdot r$ **1.- Le 1^{er} terme est noté U_0**

$$U_n = U_p + (n-p) \cdot r \rightarrow U_{15} = U_0 + (15-0) \cdot r = 35 \rightarrow \boxed{U_0 + 15r = 35}$$

$$U_n = U_p + (n-p) \cdot r \rightarrow U_{52} = U_0 + (52-0) \cdot r = 109 \rightarrow \boxed{U_0 + 52r = 109}$$

La résolution des deux équations donne : $U_0 = 5$ et $r = 2$
2.- U_n en fonction de $n \rightarrow U_n = U_0 + n \cdot r \rightarrow U_n = 5 + 2n$ 3.- Le sens de variation de la suite $U_n = 5 + 2n > 0$ alors U_n est croissante.**Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar**

$$4.- S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2} (5 + 5 + 2n) = \frac{(n+1)(10+2n)}{2}$$

$$\text{Et } S' = U_7 + U_8 + \dots + U_{20}$$

$$\text{Rappelons que } U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n = \frac{n-p+1}{2} (U_p + U_n)$$

$$S' = U_7 + U_8 + \dots + U_{20} = \frac{20-7+1}{2} (U_7 + U_{20}) = 7(19 + 45) = 2\,177$$

$$\text{Les éléments de calculs : } U_7 = 5 + 2 \cdot 7 = 19 \text{ et } U_{20} = 5 + 2 \cdot 20 = 45$$

Exercice 27 :

Trouvez cinq nombres X, Y, Z, T, V qui sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique vérifiant : $X + Y + Z + T + V = 60$ et $T + V = 42$.

Réponses : Rappelons, X, Y, Z, T, V en P. A de raison r ssi :

$$X = X ; Y = X + r ; Z = X + 2r ; T = X + 3r ; V = X + 4r$$

Remplaçons les dans les deux équations :

$$X + Y + Z + T + V = 60 \rightarrow X + X + r + X + 2r + X + 3r + X + 4r = 60 \rightarrow \boxed{5X + 10r = 60}$$

$$T + V = 42 \rightarrow X + 3r + X + 4r = 42 \rightarrow \boxed{2X + 7r = 42}$$

On forme un système : $5X + 10r = 60$ et $2X + 7r = 42$ on trouve $r = 6$ et $X = 0$

Les cinq capitaux $X = 0 ; Y = 6 ; Z = 12 ; T = 18 ; V = 24$.

Exercice 28 :

Trouvez quatre nombres X, Y, Z, T qui sont les termes consécutifs d'une suite géométrique croissante vérifiant : $X + Y + Z + T = 45$ et $\frac{T}{Y} = 4$.

Réponses : Rappelons, X, Y, Z, T en P. G de raison q ssi :

$$X = X ; Y = X \cdot q ; Z = X \cdot q^2 ; T = X \cdot q^3$$

Remplaçons les dans les deux équations :

$$\frac{T}{Y} = \frac{X \cdot q^3}{X \cdot q} = q^2 = 4 \rightarrow q = 2$$

$$X + Y + Z + T = 45 \rightarrow X + X \cdot q + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 = 45 \rightarrow X + 2X + 4X + 8X = 45 \rightarrow X = 3$$

$$X = 3 \quad Y = 6 \quad Z = 12 \quad T = 24$$

Exercice 29 :

Cinq frères discutent de leurs âges. Le frère aîné remarque que leurs âges sont en progression arithmétique et la somme des âges est 90 ans. Le frère cadet remarque que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année de naissance de leur maman, à savoir 1980. Trouvez l'âge des cinq frères.

Réponse : Rappelons, X, Y, Z, T, V en P. A de raison r ssi :

$$X = X ; Y = X + r ; Z = X + 2r ; T = X + 3r ; V = X + 4r$$

Remplaçons les dans les deux équations :

$$X + Y + Z + T + V = 90 \rightarrow X + X + r + X + 2r + X + 3r + X + 4r = 90 \rightarrow X + 2r = 18$$

$$\rightarrow X = 18 - 2r$$

$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 + V^2 = 1980 \Rightarrow X^2 + (X+r)^2 + (X+2r)^2 + (X+3r)^2 + (X+4r)^2 = 1980$
remplaçons X par $18 - 2r$: $(18 - 2r)^2 + (18 - r)^2 + (18)^2 + (18 + r)^2 + (18 + 2r)^2 = 1980$

$\Rightarrow (324 - 72r + 4r^2) + (324 - 36r + r^2) + 324 + (324 + 36r + r^2) + (324 + 72r + 4r^2) = 1980 \Rightarrow 10r^2 = 360 \Rightarrow$ la raison $r = 6$ et $X = 18 - 2r = 18 - 2 \cdot 6 = 6$

Les âges : 6 ans ; 12 ans ; 18 ans ; 24 ans ; 30 ans.

Exercice 30 :

La suite U_n est définie par $U_0 = 7$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n+6}{5}$, $n \geq 1$.

1.- Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .

2.- On considère la suite V_n définie par $V_n = U_n - 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n . En déduire la nature de la suite V_n dont on déterminera les éléments caractéristiques.

b) Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n

3.- Calculer :

$S_n = \sum_{i=0}^n V_i$; $S'_n = \sum_{i=0}^n U_i$; et $S = V_8 + V_9 + \dots + V_{50}$

Réponses :

$U_0 = 7$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n+6}{5}$, $n \geq 1$.

1.- Calculer $U_1 = \frac{2U_0+6}{5} = \frac{2 \cdot 7 + 6}{5} = 4$

$U_2 = \frac{2U_1+6}{5} = \frac{2 \cdot 4 + 6}{5} = 2,8$

$U_3 = \frac{2U_2+6}{5} = \frac{2 \cdot 2,8 + 6}{5} = 2,32$

2.- V_n définie par $V_n = U_n - 2$.

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{2U_n+6}{5} - 2 = \frac{2U_n+6-10}{5} = \frac{2U_n-4}{5} = \frac{2}{5}(U_n - 2) = \frac{2}{5}V_n \Rightarrow V_{n+1} = \frac{2}{5}V_n$

alors la suite V_n est géométrique de raison $q = 2/5$ et 1^{er} terme $V_0 = U_0 - 2 = 5$

b) Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n

le terme général d'une suite géométrique est : $V_n = q^n \cdot V_0$

$V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n V_0 = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$

On sait que $V_n = U_n - 2 \Rightarrow U_n = V_n + 2 \Rightarrow U_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$

3.- Calculer :

$S_n = \sum_{i=0}^n V_i = V_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 5 \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{5}-1} = \frac{-25}{3} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 \right)$

$S'_n = \sum_{i=0}^n U_i = \frac{-25}{3} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 \right) + 2(n+1)$

$S = V_8 + V_9 + \dots + V_{50} = V_p \cdot \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1} = V_8 \cdot \frac{q^{50-8+1}-1}{q-1}$

$$S = V_8 * \frac{q^{50-8+1}-1}{q-1} = 5. \left(\frac{2}{5}\right)^8 \left[\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{43}-1}{\left(\frac{2}{5}\right)-1} \right] = \dots\dots\dots$$

Exercice 31:

Une personne reçoit 200 000F en héritage. Le 1^{er} janvier 2014, elle place cette somme à intérêts simples au taux de 7,25%.

1.- De quelle somme disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2015 ?

2.- On désigne par U_n la somme dont elle dispose le 1^{er} janvier de l'année (2014 + N).

a) Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n . En déduire la nature de la suite U_n dont on donnera les éléments caractéristiques.

b) Exprimer U_n en fonction de n. Calculer U_{40} .

3.- Calculer la somme totale que cette personne disposera t - elle dans son compte le 1^{er} janvier 2054.

Réponses : Rappelons la formule de valeur acquise à intérêts simples $VA_n = C + \frac{C \cdot \text{taux} \cdot n}{100}$ avec « n » le nombre d'année.

1.- elle disposera le 1^{er} janvier 2015 la somme de : $200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100} = 214\,500F$

2.- a) Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n .

La valeur de 2015 : $U_1 = 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100} = 214\,500$

La valeur de 2016 : $U_2 = 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 2}{100} = \left(200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100}\right) + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100}$

$U_2 = U_1 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100} \Rightarrow U_2 = U_1 + 14\,500$

La valeur de 2017 :

$U_3 = 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 3}{100} = \left(200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 2}{100}\right) + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100}$

$U_3 = U_2 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100} \Rightarrow U_3 = U_2 + 14\,500$

La valeur de 2018 :

$U_4 = 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 4}{100} = \left(200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 3}{100}\right) + \frac{200\,000 \cdot 7,25 \cdot 1}{100}$

$\Rightarrow U_4 = U_3 + 14\,500$

.....

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n + 14\,500$

2.- b) Exprimer U_n en fonction de n. Calculer U_{40} .

$U_{n+1} = U_n + 14\,500$ est une SA de raison $r = 14\,500$ et de 1^{er} terme $U_0 = 200\,000$

Le terme général $U_n = U_0 + nr \Rightarrow U_n = 200\,000 + 14\,500 \cdot n$

Je calcule $U_{40} = 200\,000 + 14\,500 \cdot 40 = 780\,000$

3.- La somme totale le 1^{er} janvier 2054 $n = 2054 - 2014 = 40$

$U_0 = 200\,000$ et $U_{40} = 200\,000 + 40 \cdot 14\,500 = 780\,000$

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

$$S_{40} = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{40} = \frac{40+1}{2} (20\,000 + 780\,000) = 16\,400\,000$$

Exercice 32:

A.- Soit la suite U_n définie par la donnée de son 1^{er} terme $U_0 = 14\,000$ et par la relation, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,04 \cdot U_n + 200$

1.- Calculer U_1 et U_2

2.- Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n + 5\,000$

2.- a) Calculer V_0

2.- b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n , en déduire que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.

2.- c) Exprimer V_n en fonction de n

2.- d) En déduire que $U_n = 19\,000 \cdot 1,04^{n-1} - 5\,000$

B.- On suppose que U_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2002 + n$, n étant un entier naturel.

1.- Calculer le salaire annuel arrondi l'unité, de la personne en 2010.

2.- a) résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation d'inconnue x : $1,04^x \geq \frac{33}{19}$

2.- b) A partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2002.

Solution :

A.- $U_0 = 14\,000$ et $U_{n+1} = 1,04 \cdot U_n + 200$

1.- Calculer

$$U_1 = 1,04 \cdot U_0 + 200 = 1,04 \cdot 14\,000 + 200 = 14\,750$$

$$U_2 = 1,04 \cdot U_1 + 200 = 1,04 \cdot 14\,750 + 200 = 15\,550,4$$

2.- $V_n = U_n + 5\,000$

$$a) \text{ Calculer } V_0 = U_0 + 5\,000 = 14\,000 + 5\,000 = 19\,000$$

b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n ,

$$V_n = U_n + 5\,000 \rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} + 5\,000 = 1,04 \cdot U_n + 200 + 5\,000 = 1,04 \cdot U_n + 5\,200$$

$$\rightarrow V_{n+1} = 1,04 \cdot U_n + 5\,200$$

$$V_n \text{ est une suite géométrique ssi : } \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1,04U_n + 5\,200}{U_n + 5\,000} = \frac{1,04(U_n + 5\,000)}{(U_n + 5\,000)} = 1,04$$

$$V_{n+1} = 1,04 V_n \text{ avec } V_0 = 19\,000 \text{ et la raison } q = 1,04$$

2.- b) Son terme général est $V_n = (1,04)^n \cdot 19\,000$

$$2.- c) V_n = 1,04 \cdot U_n + 5\,200 \rightarrow U_n = \frac{V_n - 5\,200}{1,04}$$

$$\text{En déduire } \rightarrow U_n = \frac{(1,04)^n \cdot 19\,000 - 5\,200}{1,04} \text{ alors } U_n = 19\,000 \cdot (1,04)^{n-1} - 5\,000$$

B.- U_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2002 + n$

1.- Calculer le salaire annuel arrondi l'unité, de la personne en 2010.

$$V_n = 1,04 \cdot U_n + 5\,200 \rightarrow U_n = \frac{V_n - 5\,200}{1,04} \text{ on a } U_0 = 13\,269,23$$

$$\text{Le salaire en 2010 (2002 + 8) est de } U_8 = \frac{V_8 - 5\,200}{1,04} = \frac{26\,008,812 - 5\,200}{1,04} = 20\,000$$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

2.- a) résoudre dans R, l'inéquation d'inconnue x : $1,04^x \geq \frac{33}{19}$

Rappelons que : $A^x = B$ alors $x = \frac{\log B}{\log A}$; $A^x \geq B$ alors $x \geq \frac{\log B}{\log A}$

$$1,04^x \geq \frac{33}{19} \rightarrow x \geq \frac{\log B}{\log A} = \frac{\log(\frac{33}{19})}{\log(1,04)} = \frac{0,23976}{0,017033} = 14,1 \text{ la solution : } S = [14,1; +\infty[$$

2.- b) le salaire annuel aura : $U_n = 2 U_0$ avec $U_0 = 13\,269,23$

$$U_n = 2 U_0 = 2 \times 13\,269,23 = 26\,538,46$$

On sait que $U_n = \frac{V_n - 5\,200}{1,04}$ et V_n est une S G et son terme général est

$$V_n = (1,04)^n * 19\,000 \text{ alors le terme général de } U_n : U_n = \frac{(1,04)^n * 19\,000 - 5\,200}{1,04}$$

$$U_n = 2 U_0 = 26\,538,46 \rightarrow U_n = \frac{(1,04)^n * 19\,000 - 5\,200}{1,04} = 26\,538,46 \rightarrow 1,04^n = \frac{32\,800}{19\,000}$$

$$\rightarrow n = \frac{\log 1,73}{\log 1,04} = \frac{0,237}{0,0170} = 14 \text{ ans}$$

C'est à partir de 2016 que le salaire annuel de cette personne aura doublé par rapport à celui de 2002.

Exercice 33 :

Le 1^{er} janvier 2002, Mr Coulibaly a placé 5 000 FCFA à intérêts composés au taux annuel de 3%. On note C_n le capital de Mr Coulibaly disponible au 1^{er} janvier de l'année 2002 + n.

1.- a) Calculer C_1 et C_2

1.- b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et montrer que C_n peut s'écrire :

$$C_n = 1,03^n * 5\,000.$$

2.- Au 1^{er} janvier 2010, Mr Coulibaly aura besoin d'une somme de 7 000 FCFA

2.- a) Le capital disponible au 1^{er} janvier 2010 sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ?

2.- b) A quel taux minimal Mr Coulibaly aurait-il dû placer son capital le 1^{er} janvier 2002 pour disposer d'au moins 7 000 FCFA au 1^{er} janvier 2010 ?

Solution :

Rappelons la formule des intérêts composés :

$$\text{Valeur acquise de la 1^{er} année : } C_1 = C + \frac{C*t}{100} = C \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$\text{Valeur acquise de la 2^{ème} année : } C_2 = C_1 + \frac{C_1*t}{100} = C_1 \left(1 + \frac{t}{100}\right) = C \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$$

$$\text{Valeur acquise de la 3^{ème} année : } C_3 = C_2 + \frac{C_2*t}{100} = C_2 \left(1 + \frac{t}{100}\right) = C \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$$

.....

$$\text{Valeur acquise de la n^{ème} année : } C_n = C \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \text{ ou } C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

1.- a) le Capital $C = 5\,000$ et le taux $t = 3\%$ calculons C_1 et C_2

$$C_1 = C + \frac{C*t}{100} = 5\,000 + \frac{5\,000*3}{100} = 5\,150$$

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 * t}{100} = 5\,150 + \frac{5\,150 * 3}{100} = 5\,304,5$$

1.- b) C_{n+1} en fonction de C_n

$$C_1 = C \left(1 + \frac{3}{100}\right)^1 ; C_2 = C_1 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^1 ; C_3 = C_2 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^1 \dots C_n = 1,03 * C_{n-1}$$

Ainsi $C_{n+1} = 1,03 * C_n$ on peut affirmer que C_n est une suite géométrique de raison et le terme général serait de $C_n = 1,03^n * C \rightarrow C_n = 1,03^n * 5\,000$

2.- Au 1^{er} janvier 2010, Mr Coulibaly aura besoin d'une somme de 7 000 FCFA

2.- a) 2010 (2002 + 8) alors on calcule $C_8 = 1,03^8 * 5\,000 = 9\,255$ FCFA

Le capital disponible au 1^{er} janvier 2010 égal à 9 255 FCFA. Il sera suffisant pour subvenir à cette dépense de 7 000 FCFA.

$$2.-b) C_8 = 5\,000 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 = 7\,000 \rightarrow \frac{t}{100} = \left(\frac{7\,000}{5\,000}\right)^{1/8} - 1 \Rightarrow \text{taux} = 0,043 = 4,3\%$$

Il dû placer son capital le 1^{er} janvier 2002, au taux de 4,3%, pour disposer d'au moins 7 000 FCFA au 1^{er} janvier 2010.

Exercice 34 :

Au 1^{er} janvier 2004, Moussa place 10 000 FCFA à un taux de 3%. Au 1^{er} janvier 2004 Souleymane place 9 000 FCFA à un taux de 4%. Les deux placements se font à intérêts composés.

On note U_n (respectivement V_n) le capital dont dispose Moussa (respectivement Souleymane) au 1^{er} janvier de l'année 2004 + n.

1.- Quel est le capital pour chacun au 1^{er} janvier 2005 ?

2.- Déterminer la nature des suites U_n et V_n

3.- Exprimer les termes U_n et V_n en fonction de n

4.- Au bout de combien d'années le placement de Souleymane sera-t-il plus rentable que celui de Moussa.

Solution :

Rappelons de la forme des intérêts composés comme suite :

Valeur acquise au bout de n : $C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$

la suite C_n est géométrique de raison $q = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et de 1^{er} terme C_0

Rappelons de la forme des intérêts simples comme suite :

Valeur acquise au bout de n : $A_{n+1} = A_n + \frac{A_0 * t}{100}$ et $A_n = A_0 + \frac{A_0 * t * n}{100}$

la suite A_n est arithmétique de raison $r = \frac{A_0 * t}{100}$ et de 1^{er} terme A_0 .

Les données du problème

	Moussa	Souleymane
	Capital $U_0 = 10\,000$	Capital $V_0 = 9\,000$
	Taux : 3%	Taux = 4%
	Intérêts composés	Intérêts composés
1/	Le capital au 01/01/2005 : $U_1 = 10\,000 + \frac{10\,000 * 3}{100} = 10\,300$	Le capital au 01/01/2005 : $V_1 = 9\,000 + \frac{9\,000 * 4}{100} = 9\,360$
2/	$U_{n+1} = 1,03 * U_n$ Un est géométrique de raison 1,03 et de 1 ^{er} terme $U_0 = 10\,000$	$V_{n+1} = 1,04 * V_n$ Un est géométrique de raison 1,04 et de 1 ^{er} terme $V_0 = 9\,000$
3/	$U_n = 10\,000 * 1,03^n$	$V_n = 9\,000 * 1,04^n$
4/	$V_n > U_n \Rightarrow 9\,000 * 1,04^n > 10\,000 * 1,03^n \Rightarrow \left(\frac{1,04}{1,03}\right)^n = \frac{10\,000}{9\,000} \Rightarrow$ $n = \frac{\log\left(\frac{10000}{9000}\right)}{\log\left(\frac{1,04}{1,03}\right)} = \frac{0,4575}{0,004196} = 109 \text{ ans}$	

Exercice 35 :

Une observation faite par un journal sur les abonnés : - de constater pour chaque année un taux de réabonnement voisin de 80% - ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés.

On note A_n le nombre d'abonnés après n années et on précise $A_0 = 10\,000$.

1.- Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , $A_{n+1} = 0,8 A_n + 5\,000$

2.- Soit U_n la suite définie, pour tout entier naturel n , $U_n = 25\,000 - A_n$

a) En exprimant U_{n+1} en fonction de U_n , montrer que un est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

b) Exprimer U_n en fonction de n . en déduire que : $A_n = 25\,000 - 15\,000 * 0,8^n$

c) Déterminer la limite de la suite A_n

3.- a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $25\,000 - 15\,000 * 1,08^x > 22\,000$

3.- b) En déduire le nombre d'années nécessaire pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

Solution : Les données du problème

1.- Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , $A_{n+1} = 0,8 A_n + 5\,000$

Le nombre d'abonné initial est de 10 000 soit $A_0 = 10\,000$

La 1^{ère} année, le nombre d'abonné serait de : $10\,000 * 80\% + 5\,000 = 13\,000$ soit $A_0 * 0,8 + 5000$

La 2^{ème} année, le nombre d'abonné serait de : $13\,000 * 80\% + 5\,000 = 15\,400$ soit $A_1 * 0,8 + 5000$

La 3^{ème} année, le nombre d'abonné serait de : $15\,400 * 80\% + 5\,000 = 17\,320$ soit $A_2 * 0,8 + 5000$

Ainsi de suite on aura $A_{n+1} = 0,80 \cdot A_n + 5\,000$

2.- $U_n = 25\,000 - A_n$

a) En exprimant U_{n+1} en fonction de U_n ,

$$U_{n+1} = 25\,000 - A_{n+1} = 25\,000 - (0,8 A_n + 5\,000) = -0,8 A_n + 20\,000 \\ = 0,8 (-A_n + 25\,000)$$

$U_{n+1} = 0,8 U_n$ alors U_n est une S G de raison $q = 0,8$ et de 1^{er} terme $U_0 = 15\,000$

$$U_0 = 25\,000 - A_0 = 25\,000 - 10\,000 = 15\,000$$

b) U_n en fonction de n : $U_n = 0,8^n \cdot 15\,000$

$$U_n = 25\,000 - A_n \rightarrow A_n = 25\,000 - U_n = 25\,000 - 0,8^n \cdot 15\,000$$

c) Déterminer la limite de la suite A_n

Limite $A_n = 25.000$ car la limite à l'infini de $0,8^n = 0$.

Exercice 36 :

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$.

1-/ a-/ Calculer r_1 et r_2 .

b-/ Justifier que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$.

2-/ Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$

a-/ Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b-/ Pour tout entier naturel n , exprimer (S_n) en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

c-/ La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.

d-/ Déterminer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.

e-/ Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.

Solution 36 :

Soit $C_0 = 2\,500\,000$ F cfa , le placement de Mme TOURÉ au taux d'intérêt composé annuel de 10 %.

1° Déterminons l'avoir de Mme TOURÉ :

• <u>en 2011</u> Soit C_1 l'avoir de Mme TOURÉ en 2011 $C_1 = C_0 + \frac{10}{100}C_0 = 1,1C_0 = 2\,500\,000 \times 1,1$ $= 2\,750\,000.$ $C_1 = 2\,750\,000$ F cfa	• <u>en 2012</u> Soit C_2 l'avoir de Mme TOURÉ en 2012 $C_2 = C_1 + \frac{10}{100}C_1 = 1,1C_1 = 2\,750\,000 \times 1,1 = 3\,025\,000$ $C_2 = 3\,025\,000$ F cfa
• <u>En 2013</u> Soit C_3 l'avoir de Mme TOURÉ en 2013 $C_3 = C_2 + \frac{10}{100}C_2 = 1,1C_2 = 3\,025\,000 \times 1,1 = 3\,327\,500$ $C_3 = 3\,327\,500$ F cfa	

2° Soit U_n le montant que Mme TOURÉ aura au bout de n années.

Exprimons U_n en fonction de n .

L'avoir de Mme TOURÉ au bout de $(n+1)$ années : $U_{n+1} = U_n + \frac{10}{100}U_n = 1,1U_n$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison

$q = 1,1$ et de premier terme $U_0 = 2\,500\,000$

et par conséquent $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = 2\,500\,000 (1,1)^n$

Exercice 37 :

Un artisan fabrique des jouets pour les fêtes de fin d'année. Il décide de reprendre la fabrication des jouets dès le mois de janvier en fabriquant 200 jouets et en augmentant tous les mois la production de 40 jouets. On désigne par P_n le nombre de jouets fabriqués le $n^{\text{ème}}$ mois ($n \in \mathbb{N}^*$). On donne $P_1 = 200$ correspondant à la production du mois de janvier.

1°/ Calculez P_2 et P_3 respectivement les productions de février et de mars.

2°/ Déterminez la relation entre P_{n+1} et P_n .

3°/ Exprimez P_n en fonction de n

4°/ Combien de jouets l'artisan fabriquera-t-il le mois de décembre ?

5°/ Une commande de 5000 jouets a été faite auprès de l'artisan jusqu'au mois de décembre. Pourra-t-il honorer cette commande ?

Solution 37 :

Augmentation de 40 jouets tous les mois

P_n le nombre de jouets fabriqué le nièmes mois ($n \in \mathbb{N}^*$)

$P_1 = 200$ Correspond à la production du mois de Janvier

1°/ Calculons P_2 et P_3 respectivement les productions de Février et Mars :

$$P_2 = P_1 + 40 = 240 \text{ jouets}$$

$$P_3 = P_2 + 40 = 280 \text{ jouets}$$

2°/ Déterminons la relation entre P_{n+1} et P_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n + 40$$

3°/ Exprimons P_n en fonction de n :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n + 40$ alors P_n est une SA de raison $r = 40$ et de premier terme $P_1 = 200$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = P_1 + (n - 1)r = 200 + (n - 1) \times 40 = 40n + 160$$

4°/ Le nombre de jouets fabriqué en Décembre est :

$$P_{12} = 40 \times 12 + 160 = 640$$

Le mois de Décembre l'artisan fabriquera 640 jouets

5°/ L'artisan pourra-t-il honorer une commande de 5 000 jouets en Décembre ?

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_{12} = \frac{12}{2} (P_1 + P_{12}) = 6(200 + 640) = 5040 \text{ jouets}$$

De Janvier à Décembre, il aura fabriqué 5 040 jouets alors il pourra honorer la commande.

Exercice 38 :

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année (2015 + n)

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n .

2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.

b) Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?

d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure

Solution 38 :

1°/ a) -Le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 est : 50 500

-Le nombre d'arbres qu'il aura en 2017 est : 50 975

b) Exprimons X_{n+1} en fonction de X_n : $X_{n+1} = X_n - \frac{5}{100}X_n + 3\,000 = 0,95X_n + 3\,000$

2°/ La suite (U_n) est définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrons que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme :

$$U_0 = 60\,000 - X_0 = 10\,000$$

b) Exprimons U_n en fonction de n déduisons en X_n en fonction de n : $X_n = 60\,000 - 10\,000(0,95)^n$

c) Le nombre d'arbres fruitiers dans 20ans est : $X_{20} = 56\,415,14 \approx 56\,415$

d) Calculons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [60\,000 - 10\,000(0,95)^n] = 60\,000 ; (|0,95| < 1) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^n = 0$$

Pour une longue durée le nombre d'arbres ne dépasse pas 60 000 pieds.

Exercice 39 :

On place le 01/01/2015 une somme de 1 000 FCFA l'intérêt annuel est 4%.

Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés de plus, tous les 1^{er} janvier à partir de 2016.

Soit U_n la somme disponible à l'an 2015+n avec $n \geq 0$.

1.-/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2.-/ quelle est la nature la suite U_n dont on précisera la raison et le premier terme.

3.-/ Calculer U_n en fonction de .

4.-/ Indiquer à partir de quelle année le capital initial aura doublé

Solution :

D'après les données du problème nous rappelons que : l'intérêt annuel $I = C * \frac{t}{100}$ et la somme disponible $SD = C + \text{Intérêt}$

La somme initial $U_0 = 1\,000$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2016 : 2015 +1

$$U_1 = 1\,000 + 1000 * 0,04 = 1,04 * 1000 = 1\,040 \text{ ou } \boxed{U_1 = 1,04 U_0}$$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2017 : 2015 +2

$$U_2 = 1\,040 + 1\,040 * 0,04 = 1,04 * 1040 = 1\,081,6 \text{ ou } \boxed{U_2 = 1,04 U_1}$$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2018 : 2015 +3

$$U_3 = 1\,081,6 + 1\,081,6 * 0,04 = 1\,124,864 \text{ ou } \boxed{U_3 = 1,04 U_2}$$

.....

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2015 +n : $\boxed{U_{n+1} = 1,04 U_n}$

2.-/ $U_{n+1} = 1,04U_n$, U_n est une suite géométrique ssi $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1,04$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

3.-/ Calculer U_n en fonction de n :

L'expression générale d'une suite géométrique est :

$$U_n = q^n * U_0 = 1,04^n * 1\,000$$

4.-/ Indiquer à partir de quelle année le capital initial aura doublé

$$U_n = 2 * U_0 \Rightarrow 1,04^n * 1\,000 = 2 * 1\,000 \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,04)} = \frac{0,6931}{0,03922} = 17,67 \text{ ans soit } 17 \text{ ans et } 8 \text{ mois}$$

Note : $A^x = B$ alors $x = \frac{\log B}{\log A}$ ou $x = \frac{\ln B}{\ln A}$

Exercice 39 :

On place le 01/01/2015 une somme de 1 000 FCFA, à la fin de chaque année on rajoute un intérêt annuel de 100F.

Soit U_n la somme disponible à l'an 2015+n avec $n \geq 0$.

1.-/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2.-/ quelle est la nature la suite U_n dont on précisera la raison et le premier terme.

3.-/ Calculer U_n en fonction de n .

4.-/ Indiquer à partir de quelle année le capital initial aura doublé

Solution :

La somme initial $U_0 = 1\,000$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2016 : 2015 +1

$$U_1 = 1\,000 + 100 = 1\,100 \text{ ou } \boxed{U_1 = U_0 + 100}$$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2017 : 2015 +2

$$U_2 = 1\,100 + 100 = 1\,200 \text{ ou } \boxed{U_2 = U_1 + 100}$$

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2018 : 2015 +3

$$U_3 = 1\,200 \text{ ou } \boxed{U_3 = U_2 + 100}$$

.....

- La somme disponible au 1^{er} janvier 2015 +n : $\boxed{U_{n+1} = 1,04 U_n}$

2.-/ $U_{n+1} = U_n + 100$, U_n est une suite arithmétique $U_{n+1} - U_n = 100$

Le 1^{er} terme = 1 000 et la raison = 100.

3.-/ Calculer U_n en fonction de n :

L'expression générale d'une suite arithmétique est : $U_n = U_0 + n * r = 1\,000 + 100 n$

4.-/ Indiquer à partir de quelle année le capital initial aura doublé

$$U_n = 2 * U_0 \Rightarrow 1\,000 + 100 * n = 2 * 1\,000 \Rightarrow n = 10 \text{ ans}$$

Exercice 40 :

On place le 01/01/2015 une somme de 1 000 FCFA l'intérêt annuel est 4%.

Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés de plus, tous les 1^{er} janvier à partir de 2016, on rajoute 100 FCFA au capital.

Soit U_n la somme disponible à l'an 2015+n avec $n \geq 0$.

1.-/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2.-/ En posant $V_n = U_n + 2500$. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3.-/ Calculer V_n en fonction de . en déduire U_n en fonction de .

4.-/ Indiquer à partir de quelle année le capital initial aura doublé

Solution :

$$1.-/ \quad \boxed{U_{n+1} = 1,04 U_n + 100}$$

$$2.-/ \quad V_n = 1,04 U_n.$$

Exercice 41 :

On économise 80 000 FCFA en janvier 2015, puis 130 000 FCFA le mois suivant puis 180 000 FCFA le mois suivant ainsi de suite en économisant chaque mois 50 000 FCFA de plus que le mois précédent.

1.-/ Combien aura-t-on économisé en 13 mois ?

2.-/ Le but est d'acheter une maison qui coûte 13 000 000 FCFA. A la fin de quel mois pourra-t-on acheter la maison ?

Solution :

$$1.-/ \text{ on aura économisé en 13 mois } = U_1 + U_2 + \dots + U_{13}$$

On remarque c'est une suite arithmétique de raison $r = 50\,000$

$$U_{n+1} = U_n + 50\,000 \text{ avec } U_1 = 80\,000$$

$$\text{L'expression } U_n = U_1 + (n-1) * 50\,000 \rightarrow U_{13} = 80\,000 + (13-1) * 50\,000 = 680\,000$$

$$\text{La somme } S_n = \frac{(n)(U_1+U_n)}{2} \rightarrow S_{13} = \frac{(13)(80\,000+680\,000)}{2} = 4\,940\,000$$

2.-/ Le but est d'acheter une maison qui coûte 13 000 000 FCFA :

$$S_n = \frac{(n)(U_1+U_n)}{2} = 13\,000\,000 \text{ avec } U_1 = 80\,000 ; U_n = 80\,000 + (n-1) * 50\,000$$

$$S_n = \frac{(n)(80\,000+80\,000+(n-1)*50\,000)}{2} = 13\,000\,000$$

$$\rightarrow 160\,000 n + 50\,000 n^2 - 50\,000 n = 26\,000\,000 \rightarrow 5 n^2 + 11 n - 2\,600 = 0$$

$$\Delta = 11^2 + 4 * 5 * 2600 = 52\,121 \text{ on trouve } n = 21,73 \text{ mois soit 21 mois et 22 jours.}$$

