

BEMBUS MALI

Au service de la nation

« Le savoir est la plus grande des richesses : on le donne sans réussir à l'épuiser »

Bemba dit Bamba TRAORE

Enseignant Chercheur, économètre, gestionnaire de la politique économique

Tél : (00223) 69 - 50-23-20/ 76 - 43-95-33 mël : bbtraoremali@yahoo.fr

Manuel de 50 exercices et corrigés

Je m'exerce en Mathématique Tome 2 T.S. éco

Les études de fonction

« La photocopie tue les documents, qu'il soit payé par Allahou »

"Nulle œuvre humaine n'est parfaite"

"Bismillahi Wa Bi Hourmati Cheick Mohamed Laraby RAA"

Prix : 1 000 FCFA

Bamako, avril 2015.

Farifoni 1 : Limites et dérivée

Exercice 1 : Calculer les limites

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x^2+2x+1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4}}{\sqrt{3x^2-7}}$
$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{8-x}-1}{3-\sqrt{x+2}}$	$\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{4x-2a}}{x-a^2}, a>0.$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{1-3x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-7x+6}{1-5x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-7x+6}{2x^3-x^2+x}$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3-7x+6}{1-5x^2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3-4-7x+6}}{2x\sqrt{x+3}}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3-4-7x+6}}{2x\sqrt{x+3}}$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x}$
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-5}{x^2+x-6}$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{x^2+x-6}$	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{x^2+x-6}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+x-6}{ x+3 }$	$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+x-6}{ x+3 }$

Réponse :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \quad \text{Réponse } \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4}}{\sqrt{3x^2-7}} \quad \text{réponse } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{4x-2a}}{x-a^2} \quad \text{Réponse } \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{1-3x} \quad \text{Réponse } -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-7x+6}{2x^3-x^2+x} \quad \text{Réponse } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3-4-7x+6}}{2x\sqrt{x+3}} \quad \text{Réponse } -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \quad \text{Réponse } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \quad \text{Réponse } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x} \quad \text{Réponse : } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-5}{x^2+x-6} \quad \text{Réponse } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{x^2+x-6} \quad \text{Réponse } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{x^2+x-6} \quad \text{Réponse } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} \quad \text{Réponse } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+x-6}{|x+3|} \quad \text{Réponse } 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+x-6}{|x+3|} \quad \text{Réponse } -5$$

$(ax)' = a ; (x^n)' = n \cdot x^{n-1} ; (a)' = 0 ; \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} ; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; (\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $(e^x)' = e^x \quad \left(\frac{1}{x^n} = x^{-n}\right)' = -n \cdot x^{-n-1}$		
Exercices	Reponses	
$f(x) = 3x^2 - 7x + 2$	$f'(x) = 6x - 7$	
$f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	
$f(x) = \frac{1}{x^5} + 6x^4 + x$	$f'(x) = -5x^{-6} + 24x^3 + 1$	
$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$	$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	
$f(x) = \ln(x) + e^x$	$f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$	
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} ; (u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1} ; (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} ; \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$		
$f(x) = \frac{3x+2}{7x-1}$	On pose $u = 3x + 2 \Rightarrow u' = 3$; $v = 7x - 1 \Rightarrow v' = 7$ de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ alors $f'(x) = \frac{3(7x-1) - 7(3x+2)}{(7x-1)^2} = \frac{-17}{(7x-1)^2}$	
$f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2-1}$	On pose $u = x^2 - x + 3 \Rightarrow u' = 2x - 1$; $v = x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x$ de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ alors $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-1) - (2x)(x^2-x+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{\dots\dots\dots}{(x^2-1)^2}$	
$f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$	On pose $u = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow u' = 6x - 4$ de la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $f'(x) = \frac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+1}}$	
$f(x) = 5x + 6 + \frac{2}{x-3}$	On pose $u = x - 3 \Rightarrow u' = 1$ de la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ $f'(x) = 5 - \frac{2}{(x-3)^2}$	
$f(x) = (2x^2 - x + 3)^7$	On pose $u = 2x^2 - x + 3 \Rightarrow u' = 4x - 1$ de la formule $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1} \quad f'(x) = 7 \cdot (4x - 1)(2x^2 - x + 3)^6$	

Exercice 3 : Réchauffement sur la dérivée première de forme

$(a \cdot x^n)' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$	$(a \cdot x)' = a$
$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (a^{-n})' = -n \cdot a^{-n-1}$	$(\sqrt[n]{a^p})' = (a^{p/n})' = \frac{p}{n} a^{p/n-1}$
$(a)' = 0$	

1.- $f(x) = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x + 3$ la dérivée $f'(x) = 20x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 1$

2.- $f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 5x + 20$ la dérivée $f'(x) = -5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5$

3.- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ on transforme $f(x) = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ on sait que $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$

La dérivée $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-3} - 3x^{-4} = \frac{-1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

4.- $f(x) = \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}$ on transforme $f(x) = x^{1/2} - 5 \cdot x^{1/3}$ on sait que $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

La dérivée $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - 5 \cdot x^{-2/3}$

5.- $f(x) = 7x^3 + \frac{2}{x^4} + 4x^5 - x + 3$ la dérivée $f'(x) = 21x^2 - 8x^{-5} + 20x^4 - 1$

Exercice 4 : Réchauffement sur la dérivée première de formes

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
---	-------------------------------------

1.- $f(x) = (5x + 3)^2$ la dérivée $f'(x) = (2)(5)(5x + 3)^1 = 10(5x + 3)$

2.- $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$ la dérivée $f'(x) = (4)(2x - 2)(x^2 - 2x + 3)^3$

3.- $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 7x)} = (3x^2 - 7x)^{-1}$ la dérivée $f'(x) = (-1)(6x - 7)(3x^2 - 7x)^{-2}$
 $f'(x) = \frac{7-6x}{(3x^2-7x)^2}$

4.- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$ Calculer $f'(x)$? C'est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ on pose $u = 4x - 5$
 alors $u' = 4$ et $v = 1 - x \Rightarrow v' = -1$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{4(1-x) - (-1)(4x-5)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$

5.- $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x-1}$ Calculer $f'(x)$? C'est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ on pose $u = x^2 - 5x$
 alors $u' = 2x - 5$ et $v = 3x - 1 \Rightarrow v' = 3$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(2x-5)(3x-1) - (3)(x^2-5x)}{(3x-1)^2} = \frac{-17x+20}{(3x-1)^2}$

Exercice 5 :**Réchauffement sur les limites aux bornes du domaine de définition**

1.- $f(x) = 6x - 5$

Est définie sur $\mathbb{R}$, (les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$), $Df =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x) = +\infty$$

Dérivée $f'(x) = 6$

2.- $f(x) = -x^3 + x^2 - 5x$

Est définie sur $\mathbb{R}$, (les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$), $Df =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - 5x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

Dérivée $f'(x) = -3x^2 + 2x - 5$

3.- $f(x) = |x| + 2$

Est définie sur $\mathbb{R}$, (les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$), $Df =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (+x) = +\infty$$

Rappelons que :

- la valeur absolue de $x = -x$ si x tend vers $-\infty$
- la valeur absolue de $x = +x$ si x tend vers $+\infty$

4.- $f(x) = \sqrt{x-2}$

Est définie ssi $x - 2 \geq 0$, (les fonctions irrationnelles $\sqrt{g(x)}$ sont définies ssi $g(x) \geq 0$), $Df = [2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-2}) = 0$$

Dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ (la dérivée est la forme $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

5.- $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Est définie ssi $9 - x^2 \geq 0$, ($9 - x^2 = (3-x)(3+x)$ les deux racines sont -3 et 3. Le signe du trinôme est le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire entre les deux racines), $Df = [-3; 3]$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{9-x^2}) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +3} f(x) = \lim_{x \rightarrow +3} (\sqrt{9-x^2}) = 0$$

Dérivée $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$ (la dérivée est la forme $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

6.- $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$

Est définie ssi $2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ (les fonctions rationnelles $\frac{h(x)}{g(x)}$ sont définies ssi $g(x) \neq 0$), $Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x-3}{2-x} \right) = \frac{2-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-3}{2-x} \right) = \frac{2-3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{2-x} \right) = \frac{x}{-x} = -1$$

Dérivée $f'(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$ (la dérivée est la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$)

Etude de signe du dénominateur

$-\infty$	2	$+\infty$
+	-	

$$7.- f(x) = \frac{3-2x^2}{4x^2-x+1}$$

Est définie ssi $4x^2 - x + 1 \neq 0$ n'est pas factorisable alors $\forall x \in \mathbb{R}$ alors

$$Df =]-\infty; +\infty[\neq \emptyset$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3-2x^2}{4x^2-x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{4x^2} \right) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Dérivée } f'(x) = \frac{(-2x)(4x^2-x+1) - (8x-1)(3-2x^2)}{(4x^2-x+1)^2} \quad \left(\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right)$$

$$8.- f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^3-10x^2+31x-30}$$

Est définie ssi $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3; x \neq 2 \text{ et } x \neq 5$

$$Df =]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; 5[\cup]5; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-7x+10}{x^3-10x^2+31x-30} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)(x-2)(x-5)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{(x-3)} \right) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2-7x+10}{x^3-10x^2+31x-30} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)(x-2)(x-5)} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{(x-3)} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{(x-3)} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{(x-3)} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Etude signe du dénominateur

$-\infty$	2	3	5	$+\infty$
-		+	-	+

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-7x+10}{x^3-10x^2+31x-30} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^3} \right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$9.- f(x) = \frac{x^2-2x}{-x^2+3x-2}$$

Est définie ssi $-x^2 + 3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 2$

$$Df =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2-2x}{-x^2+3x-2} \right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-2x}{-x^2+3x-2} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-2x}{-x^2+3x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{-(x-1)} \right) = \frac{2}{-1} = -2$$

Etude signe du dénominateur

$-\infty$	1	2	$+\infty$
-		+	-

$$10.- f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+x-6} \quad (x+3)(x-2)$$

Est définie ssi $x^2 + x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \text{ et } x \neq 2$

$$Df =]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{-2x^2}{x^2+x-6} \right) = \frac{-18}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{-2x^2}{x^2+x-6} \right) = \frac{-18}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-2x^2}{x^2+x-6} \right) = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-2x^2}{x^2+x-6} \right) = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2} \right) = -2$$

Etude signe du dénominateur

$-\infty$	-3	2	$+\infty$
+		-	+

Farifoni 2 : Limites et continuité

Exercice 6 :

Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{x^2 - 5x + 25}}{2x - 10} & \text{si } x \neq 5 \\ 2m - 3 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = 5$.

Solution 3 :

$f(x)$ est continue au point x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{5 - \sqrt{5^2 - 5 \cdot 5 + 25}}{2 \cdot 5 - 10} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée}$$

Pour lever l'indétermination on rend rationnel le numérateur

$$\frac{5 - \sqrt{x^2 - 5x + 25}}{2x - 10} = \frac{25 - x^2 + 5x - 25}{(2x - 10)(5 + \sqrt{x^2 - 5x + 25})} = \frac{-x(x - 5)}{2(x - 5)(5 + \sqrt{x^2 - 5x + 25})} = \frac{-x}{2(5 + \sqrt{x^2 - 5x + 25})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x}{2(5 + \sqrt{x^2 - 5x + 25})} = \frac{-5}{2(5 + 5)} = \frac{-1}{4}$$

$f(x)$ est continue au point 5 ssi $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2m - 3 = \frac{-1}{4} \rightarrow m = 13/8$

Exercice 7 :

Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 3x + 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ m^2 - 3m - 19 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = -2$.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée, levons l'indétermination}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 1) = -1$$

$f(x)$ est continue au point x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$m^2 - 3m - 19 = -1 \rightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \rightarrow (m - 6)(m + 3) = 0$$

On trouve $m = -3$ ou $m = 6$.

Exercice 8 : Déterminer le réel m pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x \neq +2 \\ m - 3 & \text{si } x = +2 \end{cases}$$

Soit continue en $x_0 = +2$.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$f(x)$ est continue au point x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$m - 3 = \frac{3}{2} \rightarrow 2m - 6 = 3 \rightarrow m = 9/2$$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahou Akbar

Fonction logarithme népérien $\ln x$

1.- Définition :

La fonction logarithme népérien a d'abord été fabriquée pour simplifier les calculs fastidieux des ingénieurs et des physiciens avant l'invention des calculatrices et ordinateurs.

La fonction logarithme népérien est aujourd'hui définie, - soit comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, - soit comme primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

La fonction logarithme népérien est notée $f(x) = \ln x$.

Sa fonction réciproque est notée $f(x) = e^x$. Ce qui veut dire que : $\ln e^u = u$ ou $e^{\ln u} = u$

Exemple : $f(x) = \ln e^x$, avec « e^x » la fonction exponentielle de x ,

Calculer si possible à partir de vos calculatrices $f(0); f(1); f(2); f(-1); f(-2)$

Réponse :

$f(0) = \ln e^0 = 0$, le candidat doit retenir que $\ln e^u = u$. ($\ln e^a = a$)

$f(1) = \ln e^1 = 1$, $f(2) = \ln e^2 = 2$; $f(-1) = \ln e^{-1} = -1$; $f(-2) = \ln e^{-2} = -2$

2.- domaine de définition

La fonction logarithme népérien ($\ln u$) est définie ssi $u > 0$. En d'autres termes $\ln$ d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

Limites aux bornes : retenons bien ceci		
$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \ln 0 = -\infty$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \ln(+\infty) = +\infty$	$\lim_{u \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+u}{u}\right) = 1$
$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} = \infty$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$	

Exemple : Retrouvez le domaine de définition, les limites aux bornes et la dérivée première

$f(x) = \ln x$, $f(x) = \ln \frac{1}{x}$; $f(x) = \ln(x^2)$; $f(x) = \ln |x|$;

Réponse :

$f(x) = \ln x$ est définie ssi $x > 0 \rightarrow Df =]0; +\infty[$

Les limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 0 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

La dérivée première : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln \frac{1}{x}$ est définie ssi $\frac{1}{x} > 0$ et $x \neq 0 \rightarrow Df =]0; +\infty[$

Les limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(0) = -\infty$

La dérivée première : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ alors $f'(x) = \frac{-1}{x}$

$f(x) = \ln x^2$ est définie ssi $x^2 > 0 \rightarrow Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Les limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(0) = -\infty$

La dérivée première : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

$f(x) = \ln |x|$ est définie ssi $|x| > 0 \rightarrow Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Les limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(0) = -\infty$

La dérivée première : $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

- $x^2 > 0$: on sait que le carré est toujours positif ce qui revient à dire $x \neq 0$
- $|x| > 0$: on sait que la valeur absolue est toujours positive ce qui revient à dire $x \neq 0$

3.- Opérations sur ln

- * ln d'un nombre négatif ou nul n'existe pas
- * ln d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif. Ex : $\ln(0,5) = -0,69$
- * ln d'un nombre compris supérieur à 1 est positif. Ex : $\ln(2) = 0,69$
- * ln d'un produit est égal à la somme de ln . Ex : $\ln(2 * 5) = \ln 2 + \ln 5$
- * ln d'un rapport est égal à la différence de ln . Ex : $\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln 2 - \ln 5$
- * Retenons bien ceci : $\ln(A^n) = n \ln A$ Ex : $\ln(x^8) = 8 \ln x$

Exemple 1 :

$f(x) = \ln x$, calculer si possible à partir de vos calculatrices $f(1); f(2); f(3)$

Réponse 1 :

$f(1) = \ln 1 = 0$ le candidat doit retenir que ln de 1 = 0.

$f(2) = \ln 2 = 0,69$ le candidat doit retenir que ln d'un nombre > à 1 est positif

$f(3) = \ln 3 = 1,0986$ le candidat doit retenir que ln d'un nombre > à 1 est positif

Exemple 2 :

$f(x) = \ln x$, calculer si possible à partir de vos calculatrices $f(0); f(-1); f(-2)$

Réponse 2 :

$f(0) = \ln 0 \nexists$ le candidat doit retenir que ln de 0 n'existe pas= 0.

$f(-1) = \ln(-1) \nexists$ le candidat doit retenir que ln d'un nombre négatif n'existe pas

$f(-2) = \ln(-2) \nexists$ le candidat doit retenir que ln d'un nombre négatif n'existe pas

Exemple 3 : Simplifier les écritures de chacun des nombres

$$A = \ln \sqrt{3456} + \ln 36 - \ln\left(\frac{81}{256}\right) + \ln \sqrt{108}, B = \ln\left(\frac{5625}{128}\right) + \frac{3}{2} \ln \sqrt{30} - 3 \ln\left(\frac{1}{1600}\right)$$

Réponses : Je décompose en produit de nombres premiers : 2 ; 5 ; 7 ; ...

$$3456 = 2^7 * 3^3; 81 = 3^4; 256 = 2^8; 108 = 2^2 * 3^3; 5625 = 5^4 * 3^2; 128 = 2^7; 1600 = 2^5 * 5^2; 30 = 2 * 3 * 5$$

$$A = \ln(2^7 * 3^3)^{1/2} + \ln(2^2 * 3^2) - \ln\left(\frac{3^4}{2^8}\right) + \ln(2^2 * 3^3)^{1/2}$$

$$A = \frac{7}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 + 2 \ln 3 - 4 \ln 3 + 8 \ln 2 + \frac{2}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 = 15,5 \ln 2 + 2,5 \ln 3$$

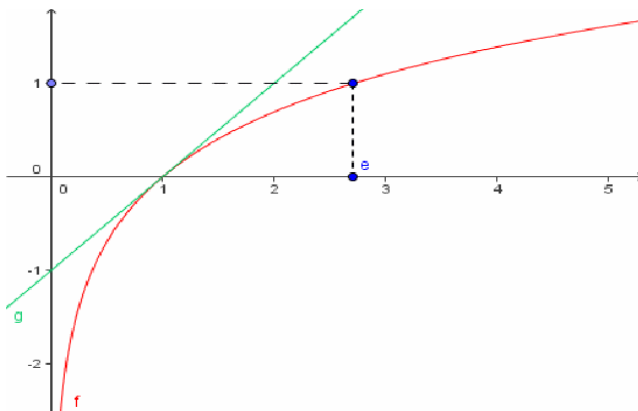
$$B = \ln\left(\frac{5^4 * 3^2}{2^7}\right) + \frac{3}{2} \ln(2 * 3 * 5)^{1/2} - 3 \ln\left(\frac{1}{2^5 * 5^2}\right)$$

$$B = 4 \ln 5 + 2 \ln 3 - 7 \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{3}{4} \ln 5 + 15 \ln 2 + 6 \ln 5$$

$$B = 10,75 \ln 5 + 2,75 \ln 3 + 14,75 \ln 2$$

4.- Variations et courbe

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ car sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle
- La tangente au point de coordonnées $(1, 0)$ a pour coefficient directeur $\ln'(1)=1$; son équation réduite est $y=x-1$
- L'équation $\ln x=1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ cette solution est un irrationnel que l'on note e
- tracé de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et de la tangente au point de coordonnées $(0; 1)$



5.- Résoudre une équation avec $\ln$

*** les équations de type : $A^x = B \Rightarrow x = \frac{\ln B}{\ln A}$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $5^x = 20$; $6^x = 1$; $2^{x-1} = 9$; $7^{2x-3} = 5$

Réponse :

$$5^x = 20 \Rightarrow x = \frac{\ln 20}{\ln 5} = \frac{2,9957}{1,6094} = 1,86 \Rightarrow S = \left\{ \frac{\ln 20}{\ln 5} \right\}$$

*** les équations de type : $\ln u = A \Rightarrow u = e^A$**

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln x = 2$; $\ln(x-1) = 1$; $\ln(x^2 + 1) = 1$

Réponse :

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow S = \{e^2\}$$

$$\ln(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 + 1\}$$

$$\ln(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = e^1 \Rightarrow S = \{e^1 - 1\}$$

Ex : rappelons que Un capital C placé à intérêt composé au taux i acquiert au bout de n années la valeur $C_n = C(1+i)^n$

1.- Un capital 15 000F au taux 10% acquiert au bout de n années la valeur de 24 157,65F. Calculer la durée n .

* les équations de type : $a (\ln x)^2 + b (\ln x) + c = 0$

On pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et l'équation devient : $a X^2 + b X + c = 0$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0$	$6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 = 0$
$4(\ln(x+1))^2 - 19 \ln(x+1) - 5 = 0$	$(\ln(x-2))^2 + 4 \ln(x-2) - 5 = 0$

Réponse :

$(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0$ On pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ alors : $X^2 - X - 6 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2 \rightarrow x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 ; x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Pour $x = -2$ on $\ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$

Pour $x = 3$ on $\ln x = 3 \rightarrow x = e^3$ l'ensemble solution $S = \{e^{-2}; e^3\}$

$6(\ln x)^2 - 19(\ln x) + 10 = 0$ On pose $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ alors : $6X^2 - 19X + 10 = 0$

$$\Delta = (-19)^2 - 4(6)(10) = 121 = 11^2 \rightarrow x_1 = \frac{19-11}{12} = \frac{2}{3} ; x_2 = \frac{19+11}{12} = \frac{5}{2}$$

Pour $x = \frac{2}{3}$ on $\ln x = \frac{2}{3} \rightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$

Pour $x = \frac{5}{2}$ on $\ln x = \frac{5}{2} \rightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$ l'ensemble solution $S = \{e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{5}{2}}\}$

$$4(\ln(x+1))^2 - 19 \ln(x+1) - 5 = 0$$

On pose $X = \ln(x+1)$ alors : $4X^2 - 19X - 5 = 0$ on trouve $x = -\frac{1}{4}$ ou $x = 5$

Pour $x = -\frac{1}{4}$ on $\ln(x+1) = -\frac{1}{4} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{4}} - 1$

Pour $x = 5$ on $\ln x = 5 \rightarrow x = e^5$ l'ensemble solution $S = \{e^{-\frac{1}{4}} - 1; e^5\}$

$$(\ln(x-2))^2 + 4 \ln(x-2) - 5 = 0$$

On pose $X = \ln(x-2)$ alors : $X^2 + 4X - 5 = 0$ on trouve $x = -5$ ou $x = 1$

Pour $x = -5$ on $\ln(x-2) = -5 \rightarrow x = e^{-5} + 2$

Pour $x = 1$ on $\ln(x-2) = 1 \rightarrow x = e^1 + 2 \rightarrow S = \{e^{-5} + 2; e^1 + 2\}$

* Système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases} \quad \text{on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \quad \begin{cases} a X + b Y = c \\ a' X + b' Y = c' \end{cases}$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = -5 \\ 8 \ln x - 2 \ln y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 5 \ln(1-x) + \ln(2+y) = 58 \\ \ln(1-x) - 3 \ln(2+y) = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = 1 \\ 3 \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$
--	---	--

Solution : 2 et 3 10 et 8 1 et 0

$$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = -5 \\ 8 \ln x - 2 \ln y = 10 \end{cases} \quad \text{on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \quad \begin{cases} 2X - 3Y = -5 \\ 8X - 2Y = 10 \end{cases}$$

On trouve $X = 2$ et $Y = 3$

Pour $X = 2 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$. Pour $Y = 3 \rightarrow \ln y = 3 \rightarrow y = e^3$

L'ensemble solution $S = \{(e^2; e^3)\}$

$$\begin{cases} 5 \ln(1-x) + \ln(2+y) = 58 \\ \ln(1-x) - 3 \ln(2+y) = -14 \end{cases} \rightarrow X = \ln(1-x) \text{ et } Y = \ln(2+y) \rightarrow \begin{cases} 5X + Y = 58 \\ X - 3Y = -14 \end{cases}$$

On trouve $X = 10$ et $Y = 8$

Pour $X = 10 \rightarrow \ln(1 - x) = 10 \rightarrow x = 1 - e^{10}$.

Pour $Y = 8 \rightarrow \ln(2 + y) = 8 \rightarrow y = e^8 - 2$

L'ensemble solution $S = \{(1 - e^{10}; e^8 - 2)\}$

$$\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = 1 \\ 3 \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \text{ on pose } X = \ln x \text{ et } Y = \ln y \rightarrow \begin{cases} X - 2Y = 1 \\ 3X + Y = 3 \end{cases}$$

On trouve $X = 1$ et $Y = 0$

Pour $X = 1 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e^1$. Pour $Y = 0 \rightarrow \ln y = 0 \rightarrow y = 1$

L'ensemble solution $S = \{(e^1; 1)\}$

6.- Résoudre une équation avec $\ln$ et e

* les équations de type :

$$\ln u = A \rightarrow u = e^A \text{ et } e^u = A \rightarrow u = \ln A$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^x = 5 \rightarrow x = \ln 5 ; \quad e^{x-3} = 1 \rightarrow x = \ln 1 + 3 = 3 ; \quad e^{2x-1} = 8 \rightarrow x = \frac{\ln 8 + 1}{2}$$

* les équations de type : $a(e^x)^2 + b(e^x) + c = 0$

On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ et l'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

Ex : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$	$6e^{2x} - 19e^x + 10 = 0$
$4e^{2x+2} - 19e^{x+1} - 5 = 0$	$e^{2x-4} + e^{(x-2)+\ln 4} - 5 = 0$

Réponse :

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$ On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ alors : $X^2 - X - 6 = 0$

On trouve $X = -2$ (rejet) ou $X = 3$ (accepte)

Pour $X = 3$ on $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$ l'ensemble solution $S = \{\ln 3\}$

$6e^{2x} - 19e^x + 10 = 0$ On pose $X = e^x$ avec $X > 0$ alors : $6X^2 - 19X + 10 = 0$

On trouve $X = 2/3$ ou $X = 5/2$

Pour $x = \frac{2}{3}$ on $e^x = \frac{2}{3} \rightarrow x = \ln \frac{2}{3}$

Pour $x = \frac{5}{2}$ on $e^x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \ln \frac{5}{2}$ l'ensemble solution $S = \{\ln \frac{2}{3}; \ln \frac{5}{2}\}$

$4e^{2x+2} - 19e^{x+1} - 5 = 0$ On pose $X = e^{x+1}$ alors : $4X^2 - 19X - 5 = 0$

on trouve $x = -\frac{1}{4}$ (rejet) ou $x = 5$

Pour $x = 5$ on $\rightarrow x = \ln 5 - 1$ l'ensemble solution $S = \{\ln 5 - 1\}$

$e^{2x-4} + e^{(x-2)+\ln 4} - 5 = 0$

On pose $X = e^{x-2}$ alors : $X^2 + 4X - 5 = 0$ on trouve $x = -5$ (rejet) ou $x = 1$

Pour $x = 1$ on $\rightarrow x = 2 \rightarrow S = \{2\}$

7.- Dérivée / primitive / limite de « ln et e »

	Logarithme népérien	Exponentiel
Dérivée	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(e^u)' = u' e^u$
Primitive	$\int \frac{u'}{u} = \ln u$	$\int u' e^u = e^u$
Limite		

*

Limites aux bornes de ln : retenons bien ceci

$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \ln 0 = -\infty$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \ln(+\infty) = +\infty$	$\lim_{u \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+u}{u}\right) = 1$
$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} = \infty$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$	

*

Limites aux bornes de e^x : retenons bien ceci

$\lim_{u \rightarrow 0} (e^u) = e^0 = 1$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = e^\infty = \infty$	$\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = e^{-\infty} = 0$
$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} = \infty$	$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$	

Exemple 1 Calculer la dérivée première et en déduire le tableau de variation

$$f(x) = \ln x \quad f(x) = e^x \quad f(x) = \ln(1-x) \quad f(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = \ln 5x \quad f(x) = e^{7x} \quad f(x) = \ln(3x+5) \quad f(x) = e^{1-6x}$$

Solution :

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

x	0	$+\infty$
F'(x)		+
F(x)	$-\infty$	$+\infty$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

x	$-\infty$	$+\infty$
F'(x)		+
F(x)	0	$+\infty$

Exercice :

A.- Calculez la fonction dérivée des fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3} \text{ (1pt)} \quad g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9.$$

B.- Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} \quad (1\text{pt}); \quad B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64. \quad (1\text{pt})$$

Corrigé de l'exercice :

A.- Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x + 3) - x^2 + 1}{(x + 3)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2}$$

$$g(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - 9 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x + 7$$

B.- Simplification :

$$A = e^{\ln 4} + \ln e^3 + \ln e^{-5} - e^{\ln 2} = 4 + 3 - 5 - 2 = 0; \quad A = 0$$

$$B = \ln 2^5 - \ln 8 + \ln 32 - \ln 64 = \ln 2^5 - \ln 2^3 + \ln 2^5 - \ln 2^5 = 5 \ln 2 - 3 \ln 2 + 5 \ln 2 - 6 \ln 2 = \ln 2; \quad B = \ln 2$$

Les études de fonction

Exercice 1 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$

- 1.-) a) Déterminer le domaine de définition de f
- b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition
- 2.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe
- b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)

Corrigé de l'exercice :

$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ alors $Df =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{Dérivée } f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Extremum } f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{6-\sqrt{52}}{-4} = 0,30 ; x_2 = \frac{6+\sqrt{52}}{-4} = -3,30$$

Asymptote verticale A V: il n'y a pas car le Df = $\mathbb{R}$

Asymptote horizontale AH: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ alors $Y = 0$ est AH

Asymptote oblique AO : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty$ pas d'existence AO

Tableau de variation

x	$-\infty$	-3,30	0,30	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	0	-0,30	3,30	0

Exercice 2 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$

- 1.-) a) Déterminer le domaine de définition de f
- b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition
- 2.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe
- b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)

Corrigé de l'exercice :

$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 - 1 \neq 0$ alors $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty ;$$

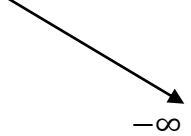
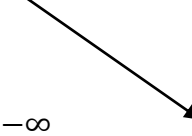
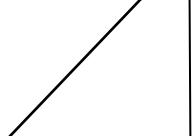
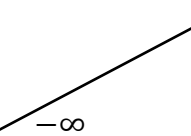
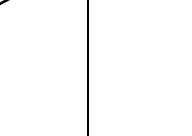
$$\text{Dérivée } f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{Extremum } f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$$

Asymptote verticale A V: $x = -1$ et $x = 1$ car le Df = $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Asymptote horizontale AH: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ alors $Y = 1$ est AH

Asymptote oblique AO : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty$ pas d'existence AO

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	1 	$+\infty$ 	$-\infty$ 	$+\infty$ 	1 

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour tout x par

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans repère orthogonal ($O ; \vec{i}, \vec{j}$)

1-/ Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe

2-/ Dresser le tableau de variation de f

3-/ Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

4-/ Construire (C) et (T) dans le même repère.

Corrigé de l'exercice :

Soit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$

1°) Calculons $f'(x)$ et étudions son signe

$$f'(x) = 2x^2 + 2x - 4.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (a = 2; b = 2; c = -4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(2)(-4) = 36 = 6^2$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{4} = -2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{4} = 1.$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+

$$\forall x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[\quad f'(x) \geq 0 ; \quad \forall x \in [-2; 1] \quad f'(x) \leq 0.$$

2°) Dressons le tableau de variation de f

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}x^3 \right) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}x^3 \right) = +\infty$$

$$f(-2) = \frac{2}{3}(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) + 1 = \frac{23}{3} = 7,66 ; \quad f(1) = \frac{2}{3}(1)^3 + (1)^2 - 4(1) + 1 = -\frac{4}{3} = 1,33$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\frac{23}{3}$		$-\frac{4}{3}$	

3°) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

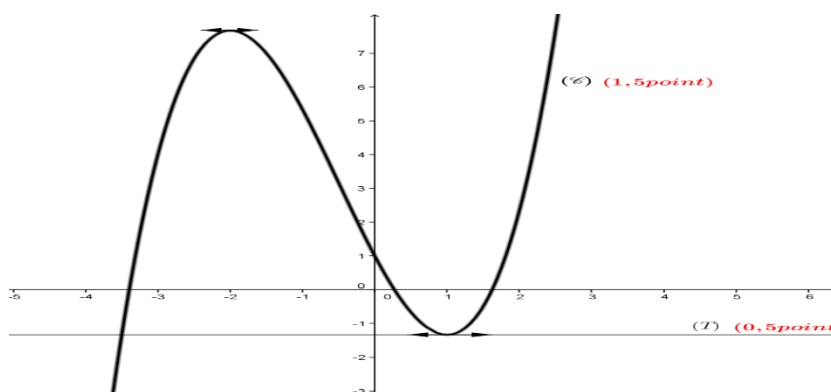
$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = 2 + 2 - 4 = 0 ; \quad f(1) = -\frac{4}{3} \text{ Donc } (T): y = -\frac{4}{3}.$$

4°) Construisons (C) et (T) dans un repère orthonormé :

Tableau de valeur de $f(x)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-9,6	4	7,6	5,3	1	-1,3	2,3



Exercice 4 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 2}$

1.-) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition

2.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe

b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)

Exercice 5 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

1.-) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition

2.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe

b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)

Exercice 6 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2-x}{x-5}$

1.-) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition

2.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe

b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels}$$

Trouvez les réels a , b et c tels que :

- La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points 1 et 5
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $x_0 = 3$

Solution

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe en x_0 alors $f(x_0) = 0$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 0 \rightarrow a + b + c = 0$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe en x_0 alors $f(x_0) = 0$

$$f(5) = a(5)^2 + b(5) + c = 0 \rightarrow 25a + 5b + c = 0$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est tangente horizontale au point x_0 alors $f'(x_0) = 0$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(3) = 2 \cdot a \cdot (3) + b = 0 \rightarrow 6a + 3b = 0$$

On aura un système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 6a + 3b = 0 \end{cases} \text{ on trouve } a = -1; b = 6 \text{ et } c = -5 // f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels

Trouvez les réels a , b et c tels que :

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admette au point $A(1; 3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

Solution

La courbe $\mathcal{C}_f$ admette au point $A(1; 3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 : $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$

$$f(1) = a + b + c = 3 \quad ; \quad f'(1) = 2a + b = 1$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = a + b = 0$$

On aura un système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 2a + b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ on trouve } a = 1; b = -1 \text{ et } c = 3 /// f(x) = x^2 - x + 3$$

Exercice 9 :

Soit la fonction f définie par son tableau des variations ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$ -2 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 2 $\nearrow$ $+\infty$		

F est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels

1.- Soit f' la dérivée de f . calculer $f'(x)$

2.- Trouver les coefficients réels a, b et c en utilisant les données ci-dessus.

3.- Montrer que la courbe C_f , représentative de f , admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x + 1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

4.- Etudier la position de C_f par rapport à D ;

5.- Construire la courbe C_f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1; 4\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 5x + 4}$$

1-) a) Justifier l'ensemble de définition de f ;

b) déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1; 4\}$ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-4}$

2.-) a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe

b) En déduire le sens de variation de f sur $]1; 4[$

3) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1; 4[$ et en donner une interprétation graphique.

4) Tracer la représentation graphique de f sur $]1; 4[$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm. (on tracera les tangentes aux points d'abscisse 2 et 3).

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^2} \text{ et } C \text{ sa courbe représentative.}$$

1-) a) Calculer $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$

b) En justifiant que $x^2 + x + 2$ est strictement positif pour tout x de $]0; +\infty[$, étudier les variations de f et préciser l'extremum de f .

2-) a) Montrer que C admet une asymptote verticale ;

b) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C . étudier la position relative de C et D .

3-) dans un repère orthogonal d'unité 2 cm, construire avec soin D et C.

4-) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

b) donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

Exercice 12 :

Les courbes seront tracées dans un repère orthogonal d'unité 2 cm.

1.- Tracer la courbe P représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - x.$$

2.- On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$

Montrer que $P(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$.

En déduire une factorisation de $P(x)$ et le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

3.- On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x - 1}$ et C sa courbe représentative.

a-) Montrer que $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^2}$, où $f'(x)$ est la dérivée de f. En déduire les variations de f.

b-) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en -1.

c-) Dresser le tableau de variation de f.

4-) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}] -1; +\infty[$, on peut écrire $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+1}$ où a est un réel que l'on déterminera

b-) déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x) - g(x)$.

c-) En déduire la position relative de C et P

d-) Tracer la courbe C sur le même repère que P.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \end{cases}$

1/ Quel est le domaine de définition de f ? montrer que 1 est la seule valeur de $\mathbb{R}$ non atteinte par f.

2/ soit $\bar{f}$ la restriction de f suivante :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \bar{f} : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \end{cases}$$

Montrer que $\bar{f}$ est bien définie, bijective et calculer sa réciproque.

4/ Une entreprise fabrique un article existant déjà et dont le prix moyen est de 100F. Une étude montre que la fabrication de chaque article lui reviendra à 80F. Les coûts fixes de production sont de 300 000F par an. Si le prix de vente est P (en F), on estime qu'on vendra un nombre d'articles égal à $200\,000 - 800P$.

Deux stratégies de vente sont possibles.

a/ Fixer le prix $P = 85F$ pour affaiblir la concurrence ;

b/ Fixer le prix P tel que le bénéfice soit maximum.

Calculer, dans les deux cas, le bénéfice au bout d'un an.

Problème :

A// Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1- a-/ Déterminez les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

b-/ Calculez $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de φ . (1,5pt)

2-/ Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifiez que $1,79 < \alpha < 1,80$

3-/ En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

B// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$ Leurs

courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

1-/ Déterminez les domaines de définition de f et de g puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2-/ Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0 ; 1)$ une tangente commune (T). Donnez une équation cartésienne de (T).

3- a-/ Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction définie

dans la partie A

b-/ Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c-/ En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

4- a-/ Déterminez une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b-/ Déterminez les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c-/ Déduire une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.

d-/ Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) et

les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$

NB : Les tracés de (C_f) et (C_g) ne sont pas demandés

Corrigé du Problème :

A// $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1-/ a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$; $y = -1$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

b) Calcul de $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x + 1)$$

$$\boxed{\varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 + x)}$$

Signe de $\varphi'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} e^{-x} > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(-x^2 + x)$

Le tableau de signe

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-

si $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$

si $x \in [0; 1]$, $\varphi'(x) \geq 0$

Le tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$\frac{3}{e}-1$	-1	

2-/ $\varphi(0) = 0$ d'où 0 est solution

φ est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ d'où φ est bijective de $[1; +\infty[$ vers $]-1; -1 + \frac{3}{e}]$ d'où il existe $\alpha \in [1; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(1,79) = 9,610^{-4} > 0$ et $\varphi(1,80) = -0,001 < 0$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires $1,79 < \alpha < 1,80$

3/ le signe de φ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$\varphi(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

B-// $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

1-/ $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

2-/ Montrons que C_f et C_g admettent au point $A(0; 1)$ une tangente commune (T)

$f(0) = 1$ et $g(0) = 1$; $A \in C_f \cap C_g$

Le document est vendu au prix coûtant. La photocopie tue les documents. Allahu Akbar

$$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x + 1)$$

$$f'(x) = e^{-x}(-2x + 1)$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$ soit $\begin{cases} f(0) = g(0) = 1 \\ f'(0) = g'(0) = 1 \end{cases}$ donc C_f et C_g admettent une tangente commune en A et $(T): y = x + 1$ est l'équation de cette tangente.

$$\begin{aligned} 3/a) f(x) - g(x) &= (2x + 1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)[e^{-x}(x^2+x+1)-1]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

b) le signe de $f(x) - g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	α	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+	+	+
$\varphi(x)$	+	+	0	+	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

$$\forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup]\alpha; +\infty[, f(x) - g(x) < 0$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \alpha \right], f(x) - g(x) \geq 0$$

C) Position relative des courbes C_f et C_g

Pour tout $x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup]\alpha; +\infty[, (C_f)$ est en dessous de (C_g)

Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right[\cup]0; \alpha[, (C_f)$ est au dessus de (C_g)

(C_f) et (C_g) se coupent en $\left\{ \left(-\frac{1}{2}; 0 \right), (0; 1), \left(\alpha; \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1} \right) \right\}$

4- a) $G(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

b) $F'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = e^{-x}(-ax + a + b)$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$F(x) = (-2x - 3)e^{-x}$$

C) Une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = F(x) - G(x)$

$$H(x) = (-2x - 3)e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 [f(x) - g(x)] dx = [H(x)]_{-\frac{1}{2}}^0 = H(0) - H\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 - \ln 1 - (-2e^{\frac{1}{2}} - \ln \frac{3}{4}) = 0,0096$

L'aire est **0,0096 Ua**

Applications économiques

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$. Par $f(x) = x^2 + 50x + 2000$

1.-) a) Calculer $f(0)$; $f(10)$; $f(50)$; et $f(100)$

b) Etudier les variations de f

2.-) Cette fonction modélise le coût de fabrication (en francs) de x objets.

a.-) Calculer le coût marginal C_m du soixantième objet (on pourra approximer le coût marginal par la dérivée du coût de fabrication).

b.-) Montrer que l'accroissement du coût marginal est proportionnel à l'accroissement du nombre d'objets fabriqués.

3.-) a) Exprimer la fonction de coût moyen donnée par : $CM(x) = \frac{f(x)}{x}$

b.-) Résoudre l'inéquation : $CM(x) - (x + 50) \leq 15$

en déduire la quantité à partir de laquelle le coût moyen de fabrication de x objets est presque égal (à 15F près) à la somme de 50F de plus 1F par objet fabriqué.

c.-) Etudier le comportement du coût moyen lorsque l'on fabrique une très grande quantité d'objets.

4.-) Dans un même repère orthogonal bien choisi représenter le coût marginal et le coût moyen de cette fabrication.

Exercice 2 : pour une production de q objets manufacturés, le coût de production est

$$C(q) = q^2 - 26q + 225$$

a) Etudier les variations de C sur $[0 ; 30]$.

b) Soit CM le coût moyen unitaire. Etudier et représenter CM sur $[0 ; 30]$. (On précise que $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$)

c) Chaque objet est vendu 12F. déterminer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q . établir le tableau de variation de B . pour quelle valeur de q le bénéfice est maximal ?

Exercice 3 :

Le coût moyen de production d'une entreprise est une fonction de la quantité q produite

$$C_M(q) = 6q^2 - 150q + 8\,000$$

1/ Déterminer la quantité q qui minimise le coût moyen puis trouver la valeur du coût moyen minimum.

2/ déterminer la fonction coût total de production et la fonction coût marginal de production.

3/ le prix de vente unitaire étant de 7 550F, déterminer la fonction profit et en déduire le profit maximum de l'entreprise.

Exercice 4 :

1/ connaissant le coût marginal d'une unité produite x : $CMa = x^2 - 11x + 10$. Trouver le coût total et le coût moyen si les coûts fixes sont de 60.

2/ Si le revenu marginal est $RMa = -4x^2 + 42x - 20$, déterminer le revenu total et la fonction de demande.

3/ Déterminer la quantité qui maximise la profit total, en déduire le profit total.

Exercice 5 :

Le coût moyen de production d'une entreprise est une fonction de la quantité q produite
 $C_M(q) = 6q^2 - 150q + 8\,000$

1/ Déterminer la quantité q qui minimise le coût moyen puis trouver la valeur du coût moyen minimum.

2/ déterminer la fonction coût total de production et la fonction coût marginal de production.

3/ le prix de vente unitaire étant de 7 550F, déterminer la fonction profit et en déduire le profit maximum de l'entreprise.

Exercice 6 :

Un fabricant de postes de radio produit q postes par semaine à coût total de : $\left(\frac{q^2}{25} + 3q + 100\right)$

francs. Il est en régime de monopôle et la demande de son marché est

$q = 75 - 3p$, où p est le prix d'un poste.

1/ Trouver le nombre de postes que ce fabricant doit produire par semaine pour maximiser son bénéfice.

2/ Quel est le bénéfice maximum ? Quel est le prix de monopole ?

3/ Pour ce prix de monopôle, calculer l'élasticité de la demande par rapport au prix. Que signifie-t-elle ?

Exercice 7 :

La population d'une nouvelle ville est donnée par la formule : $P(t) = \frac{40(t+5)^2}{t^2+100}$ où t est le temps écoulé depuis 1970 (exprimé en années) et $P(t)$ est le nombre d'habitants (exprimé en millions).

On se propose d'étudier l'évolution de cette population :

A- Etude de fonction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(x+5)^2}{x^2+100}$

- 1.-) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe
- b.-) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremums)
- 2.-) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

B.- Etude de la population

- 1.-) Préciser le réel k tel que $P(t) = k * f(t)$, pour $t \in \mathbb{R}]0; +\infty[$,
- 2.-) a) Déduire de la partie A, le tableau complet des variations de P sur $]0; +\infty[$.
- b.-) En déduire l'année pour laquelle la population de cette ville sera maximale.
- c.-) Interpréter par une phrase la limite de P en $+\infty$.
- 3.-) On rappelle que le rythme de croissance d'une population $P(t)$ est assimilé à la dérivée de la fonction P par rapport au temps t .

Calculer le rythme de croissance de cette population en 1980 et celui à prévoir en 2040.

- 4.-) Représenter cette population dans un repère orthogonal bien choisi (on fera apparaître dans les résultats obtenus aux questions précédentes).

Exercice 8 : Le coût total de production d'un bien fabriqué par une entreprise est donné, en francs, par : $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q$, q est la quantité du bien produit (q divisible). C est la courbe représentative du coût total.

- 1.-) Déterminer la quantité q_0 pour laquelle le coût moyen est minimum.
- 2.-) Montrer que la tangente à C au point d'abscisse q_0 passe par l'origine.
- 3.-) a) vérifier que, pour tout réel x :

$$x^3 - 30x^2 + 300x - 2000 = (x - 20)(x^2 - 10x + 100)$$

- b.-) déterminer une équation de la tangente à la courbe C passant par le point $A(10 ; 0)$. En donner une interprétation.

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

SESSION : JUIN 2014

ÉPREUVE DE : *Mathématiques*

I.

SÉRIES : *TSEco*

DURÉE : 3 heures

COEF : 3

Le sujet est composé de trois exercices tous obligatoires. Il comprend une seule page. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (4 points)

Mme Touré place 2 500 000 Fcfa en 2010 dans une banque au taux d'intérêt composé annuel de 10%.

1-/ Déterminer l'avoir de Mme Touré dans son compte en 2011 (au bout d'une année) ; en 2012 (au bout de deux ans); en 2013 (au bout de trois ans).

2-/ Soit U_n le montant que Mme Touré aura au bout de n (nest le nombre d'années écoulées après 2010). Exprimer U_n en fonction de n .

Exercice 2 (8 points)

Le tableau suivant donne les dépenses en millions de francs cfa des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1999.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépenses y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1-/ Dessiner le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec pour unités graphiques, 1cm pour un rang en abscisse, 1cm pour 200 millions de francs en ordonnée.

2-/ Déterminer un ajustement affine de la série par la méthode de MAYER.

3-/ En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision des dépenses pour l'année 2005.

Exercice 3 (8 points)

1-/ Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles et 25% des filles sont des déplacées. Quelle est le pourcentage des filles déplacées dans ce lycée ?

Combien de filles déplacées cela représente-t-il si le lycée compte 225 élèves au total ?

2-/ Un boulanger qui fabrique 5 200 pains quotidiennement, sait que pendant les fêtes traditionnelles il doit augmenter sa production de 15% par jour. Calculer le nombre de pains qu'il aura fabriqué au bout d'une semaine de fêtes.

3-/ La robe de FADIMA mesurait 1,68m. Après le premier lavage, il mesurait 3% de moins et après le deuxième lavage, il mesurait 1,5% de moins. Calculer la longueur de cette robe après le deuxième lavage.

4-/ Dans chacun des trois cas ci-dessus, nommer le type de pourcentage utilisé.

EXERCICE 1 | **4 Points**

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an.

On note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$, $r_0 = 40\,000$.

1° a) Calculons r_1 et r_2

$$\bullet \quad r_1 = r_0 - \frac{5}{100}r_0 + 200 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)r_0 + 200 = 0,95 \times 40\,000 + 200 = 38\,200 \text{ . Soit}$$

$r_1 = 38\,200 \text{ tonnes}$	0,25 point
--------------------------------	------------

$$\bullet \quad r_2 = r_1 - \frac{5}{100}r_1 + 200 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)r_1 + 200 = 0,95 \times 38\,200 + 200 = 36\,490 \text{ . Soit}$$

$r = 36\,490 \text{ tonnes}$	0,25 point
------------------------------	------------

b) Justifions que $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$

On a: $r_{n+1} = r_n - \frac{5}{100}r_n + 200 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)r_n + 200 = 0,95 r_n + 200$. Donc

$r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$	0,5 point
----------------------------	-----------

2° Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$.

a) Démontrons que (S_n) est une suite géométrique.

$$S_n = r_n - 4\,000$$

$$S_{n+1} = r_{n+1} - 4\,000 = 0,95 r_n + 200 - 4\,000 = 0,95 r_n - 3\,800 = 0,95 \left(r_n - \frac{3\,800}{0,95}\right)$$

$$\text{Soit } S_{n+1} = 0,95 (r_n - 4\,000) = 0,95 S_n \text{ . Donc}$$

(S_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $S_0 = r_0 - 4\,000 = 36\,000$	1 point
---	---------

b) Exprimons S_n en fonction de n et déduisons r_n en fonction de n .

$$S_n = S_0 \times q^n = 36\,000 (0,95)^n$$

$S_n = 36\,000 (0,95)^n$	0,5 point
--------------------------	-----------

On sait que $S_n = r_n - 4\,000$, donc $r_n = S_n + 4\,000$. Soit

$r_n = 36\,000 (0,95)^n + 4\,000$	0,5 point
-----------------------------------	-----------

c) Diminution de la quantité de déchets rejetée d'une année à l'autre.

On a $r_{n+1} - r_n = 36\,000 (0,95)^n (0,95 - 1) < 0$, alors la suite (r_n) est strictement décroissante, donc

la quantité de déchets diminue d'une année à l'autre	1 point
--	---------

d) Déterminons la limite de la suite (r_n) .

On sait que $r_n = S_n + 4\,000$ et $q = 0,95 \in]0; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ et par conséquent

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 4\,000$	0,5 point
---	-----------

e) Calculons une estimation, en tonnes près, de la quantité de rejets en 2011.

On a : $2007 + 4 = 2011$, donc $r_4 = 36\,000 (0,95)^4 + 4\,000 = 33\,322,225$.

la quantité de rejets en 2011 est estimée à 33 322 tonnes	0,5 point
---	-----------

EXERCICE 2 | **5 Points**

1° Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles et 25% des filles sont des déplacées.

- Déterminons le pourcentage des filles déplacées

Le pourcentage des filles déplacées est : $\frac{55}{100} \times \frac{25}{100} \times 100 = 13,75\%$. Le pourcentage des filles déplacées est 13,75% (1 pt)

- Nombre de filles déplacées si le lycée compte 225 élèves au total.

$$N = 225 \times \frac{25}{100} \times \frac{55}{100} = 30,9375. \text{ On prend } N = 31 \quad (1\text{pt})$$

2° Un boulanger qui fabrique 5200 pains quotidiennement, sait que pendant les fêtes il doit augmenter de 15% sa production.

Calculons le nombre de pains qu'il aura fabriqué au bout d'une semaine. La production

quotidienne sera $P_1 = P_0 + \frac{15}{100} P_0 = 1,15P_0 = 1,15 \times 5200 = 5980$

Le nombre de pains fabriqués au bout d'une semaine est $5980 \times 7 = 41860$ (1,5pt)

3° Soit $l = 1,68$ m, la longueur de la robe de Fadima.

Calculons la longueur de cette robe après le deuxième lavage.

- Soit l_1 la longueur de la robe après le 1^{er} lavage

$$l_1 = l - \frac{3}{100} l = 0,97 l = 0,97 \times 1,68 = 1,6296. \text{ Soit } l_1 = 1,62 \text{ m} \quad (0,5\text{pt})$$

- Soit l_2 la longueur de la robe après le 2^e lavage

$$l_2 = l_1 - \frac{1,5}{100} l_1 = 0,985 l_1 = 0,985 \times 1,6296 = 1,605156. \text{ Soit}$$

$l_2 = 1,60 \text{ m}$	0,5 point
------------------------	-----------

Remarque : $l_2 = l \times (1 - \frac{3}{100})(1 - \frac{1,5}{100}) = 1,68 \times 0,97 \times 0,985 = 1,60516$

4° Type de pourcentage utilisé dans chacun des cas :

1-Pourcentage de pourcentage. 2-Pourcentage additif . 3- Pourcentage d'évolution	1 point
--	---------

EXERCICE 3 | **5 Points**

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par : $C_m(q) = 4 + (0,2 q^2 - 2q)e^{-0,2q}$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1° La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2 e^{-0,2q}.$$

Vérifions que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur $[1 ; 20]$.

$$C_T(q) = 4q - q^2 e^{-0,2q}$$

C_T est dérivable sur $[1 ; 20]$ et $\forall q \in [1 ; 20], C'_T(q) = 4 - (2q e^{-0,2q} - 0,2 e^{-0,2} \times q^2)$

$$C'_T(q) = 4 + (0,2 q^2 - 2q) e^{-0,2q} = C_m(q).$$

$C'_T(q) = C_m(q)$, donc C_T est une primitive de C_m sur $[1 ; 20]$	1 point
---	---------

2° la fonction coût moyen, est la fonction définie sur $[1 ; 20]$ par $C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$

a) Vérifions que $C_M(q) = 4 - q e^{-0,2q}$

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q} = \frac{q(4 - q e^{-0,2q})}{q} = 4 - q e^{-0,2q}. \text{ Donc}$$

$C_M(q) = 4 - q e^{-0,2q}$	0,5 point
----------------------------	-----------

b) Déterminons la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M

$$C_M(q) = 4 - q e^{-0,2q}$$

$$C'_M(q) = -(e^{-0,2q} - 0,2 q e^{-0,2q}) = -e^{-0,2q} + 0,2 q e^{-0,2q} = (0,2 q - 1) e^{-0,2q} . \text{ Donc}$$

$C'_M(q) = (0,2 q - 1) e^{-0,2q}$	1 point
-----------------------------------	---------

c) La production mensuelle q_0 , pour laquelle l'entreprise a un coût moyen minimal.

$$C'_M(q) = (0,2 q - 1) e^{-0,2q}$$

$\forall q \in [1; 20]; e^{-0,2q} > 0$ donc le signe de $C'_M(q)$ est celui de $0,2q - 1$.

Posons $0,2q - 1 = 0$.

$$0,2q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = 5$$

q	1	5	20
$C'_M(q)$	-	0	+

C_M admet un minimum en $q = 5$. Donc

$q_0 = 5$ tonnes	1 point
------------------	---------

$$C_M(5) = 4 - 5 e^{-0,2 \times 5} = 4 - 5 e^{-1} = 2,16060 ; C_m(5) = 4 + (0,2 \times 25 - 10) e^{-1} \approx 0,50515$$

Ce coût moyen minimal est environ 2 160, 60 F CFA	0,75 point
---	------------

La valeur du coût marginal est environ 505,15 F CFA	0,75 point
---	------------

EXERCICE 4 5 Points

Le prix d'un article augmente régulièrement sur le marché depuis maintenant quinze ans. On observe les résultats suivants sur les huit dernières années :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépenses y_i	1650	1725	1740	1750	1825	1850	1950	1960

1° Traçons le nuage de points associé à cette série statistique.

Unités graphiques : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses ; 2cm pour 100 F sur l'axe des ordonnées gradué à partir de 1 600 F.

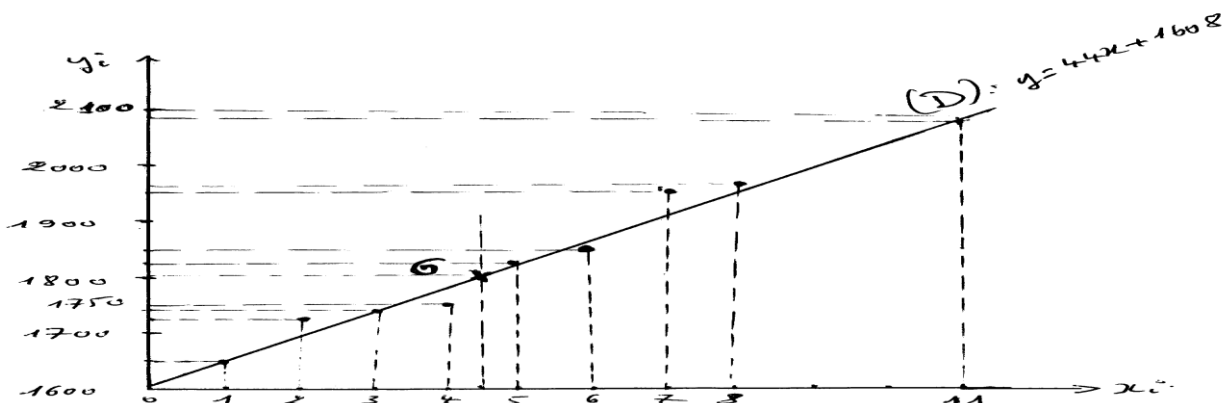
BAC 2014 - SÉRIE T.S.Eco - CORRIGÉ

Figure 2

Unités graphiques :

1 cm pour une année sur l'axe des abscisses .

2 cm pour 100 F sur l'axe des ordonnées gradué à partir de 1 600 F.



Je m'exerce en mathématique au BAC TSéco Bemba B TRAORE 76 43 95 33/69 50 23 20
2° a) Déterminons les coordonnées du point moyen G et plaçons G.

$$x_G = \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4,5$$

$$y_G = \bar{y} = \frac{1650+1725+1740+1750+1825+1850+1950+1960}{8} = 1806,25$$

donc

G (4,5 ; 1806,25) et plaçons G	1 point
----------------------------------	---------

b) déterminons une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

Soit D : $y = ax + b$, la droite d'ajustement affine.

On a : $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ($G \in D$)

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{68875}{8} - (4,5 \times 1806,25) = 231,25.$$

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{204}{8} - 4,5^2 = 5,25.$$

Alors $a = \frac{231,25}{5,25} = 44,04 \approx 44$ et $b = 1806,25 - 44 \times 4,5 = 1608,25 \approx 1608$. Donc

D a pour équation : $y = 44x + 1608$	1 point
--------------------------------------	---------

b) traçons D

Tracé de D (voir figure 2)	0,5 point
----------------------------	-----------

3° On considère que cette droite permet un ajustement de la série statistique valable jusqu'en 2022.

a) Estimons, à l'aide du graphique, le prix moyen annuel de l'article en 2017.

L'année 2017 correspond au rang $x = 11$, la lecture graphique donne environ $y = 2092$.

le prix moyen annuel de l'article en 2017 est estimé à 2 092 F	0,5 point
--	-----------

b) le prix de l'article atteindra-t-il 2400 F avant 2022 ? Justifions la réponse.

L'année 2022 correspond au rang $x = 16$.

Pour $x = 16$, $y = 44 \times 16 + 1608 = 2312 < 2400$. Donc

le prix de l'article n'atteindra pas 2 400 F avant 2022	1 point
---	---------

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

SESSION : JUIN 2014

ÉPREUVE DE : *Mathématiques*

II.

SÉRIES : *TSEco*

DURÉE : 3 heures

COEF : 3

Le sujet est composé de quatre exercices tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2 (*Vérifiez que les pages sont au complet*). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 _____ (5 points)

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année (2007 + n). On a alors $r_0 = 40\,000$.

1-/ a-/ Calculer r_1 et r_2 . (0,5pt)

b-/ Justifier que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$. (0,5pt)

2-/ Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$

a-/ Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)

b-/ Pour tout entier naturel n , exprimer (S_n) en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$. (1 pt)

c-/ La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier. (1 pt)

d-/ Déterminer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini. (1 pt)

e-/ Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011. (0,5pt)

Exercice 2 _____ (5 points)

1-/ Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles et 25% des filles sont des déplacées. Quelle est le pourcentage des filles déplacées dans ce lycée ? (1 pt)

Combien de filles déplacées cela représente-t-il si le lycée compte 225 élèves au total ? (1 pt)

2-/ Un boulanger qui fabrique 5 200 baguettes de pain quotidiennement, sait que pendant les fêtes traditionnelles il doit augmenter sa production de 15% par jour. Calculer le nombre de baguettes qu'il aura fabriqué au bout d'une semaine de fêtes. (1 pt)

3-/ La robe de FADIMA mesurait 1,68m. Après le premier lavage, il mesurait 3% de moins et après le deuxième lavage, il mesurait 1,5% de moins. Calculer la longueur de cette robe après le deuxième lavage. (1 pt)

Exercice 3 _____ (5 points)

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1-/ La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$C_T(q) = 4q - q^2e^{-0,2q}$. Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1 ; 20]$. (1 pt)

2-/ La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

a-/ Vérifier que $C_M(q) = 4 - qe^{-0,2q}$. (0,5 pt)

b-/ Déterminer la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M . (1 pt)

c-/ Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonne) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? (1 pt)

Quel est ce coût ? Pour cette production q_0 , quelle est la valeur du coût marginal ? (1,5 pt)

Exercice 4 _____ (5 points)

Le prix d'un article augmente régulièrement sur le marché depuis maintenant quinze ans. On observe les résultats suivants sur les huit dernières années :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix y_i en francs	1 650	1 725	1 740	1 750	1 825	1 850	1 950	1 960

1-/ Tracer le nuage de points associé à cette série statistique dans un repère d'unités graphiques. (1 pt)

1 cm pour une année sur l'axe des abscisses ;

2 cm pour 100 F sur l'axe des ordonnées (graduer l'axe des ordonnées à partir de 1 600 F).

2-/ a-/ Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer dans le repère précédent. (1 pt)

b-/ Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés : les coefficients de l'équation seront arrondis à l'unité. (1 pt)

c-/ Tracer cette droite d'ajustement dans le repère de la question 1-/. (0,5 pt)

3-/ On considère que cette droite permet un ajustement de la série statistique valable jusqu'en 2022.

a-/ Estimer, à l'aide du graphique, le prix moyen annuel de l'article en 2017. (0,5 pt)

b-/ Le prix de l'article atteindra-t-il 2400 F avant 2022 ? Justifier la réponse. (1 pt)

BAC 2014 - SERIE T.S.Eco - CORRIGÉ

SUJET 1

EXERCICE 1 4 Points

Soit $C_0 = 2\,500\,000$ F cfa, le placement de Mme TOURÉ au taux d'intérêt composé annuel de 10 %.

1° Déterminons l'avoir de Mme TOURÉ :

- en 2011

Soit C_1 l'avoir de Mme TOURÉ en 2011

$$C_1 = C_0 + \frac{10}{100}C_0 = 1,1C_0 = 2\,500\,000 \times 1,1 = 2\,750\,000.$$

$C_1 = 2\,750\,000$ F cfa	1 point
---------------------------	---------

- en 2012

Soit C_2 l'avoir de Mme TOURÉ en 2012

$$C_2 = C_1 + \frac{10}{100}C_1 = 1,1C_1 = 2\,750\,000 \times 1,1 = 3\,025\,000$$

$C_2 = 3\,025\,000$ F cfa	1 point
---------------------------	---------

- En 2013

Soit C_3 l'avoir de Mme TOURÉ en 2013

$$C_3 = C_2 + \frac{10}{100}C_2 = 1,1C_2 = 3\,025\,000 \times 1,1 = 3\,327\,500$$

$C_3 = 3\,327\,500$ F cfa	1 point
---------------------------	---------

2° Soit U_n le montant que Mme TOURÉ aura au bout de n années.

Exprimons U_n en fonction de n .

L'avoir de Mme TOURÉ au bout de $(n+1)$ années : $U_{n+1} = U_n + \frac{10}{100}U_n = 1,1U_n$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison

$q = 1,1$ et de premier terme $U_0 = 2\,500\,000$	0, 5 point
---	------------

et par conséquent $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = 2\,500\,000 (1,1)^n$	0, 5 point
-----------------------------	------------

EXERCICE 2 8 Points

Le tableau suivant donne les dépenses en millions de francs cfa des ménages en produits informatiques de 1990 à 1999.

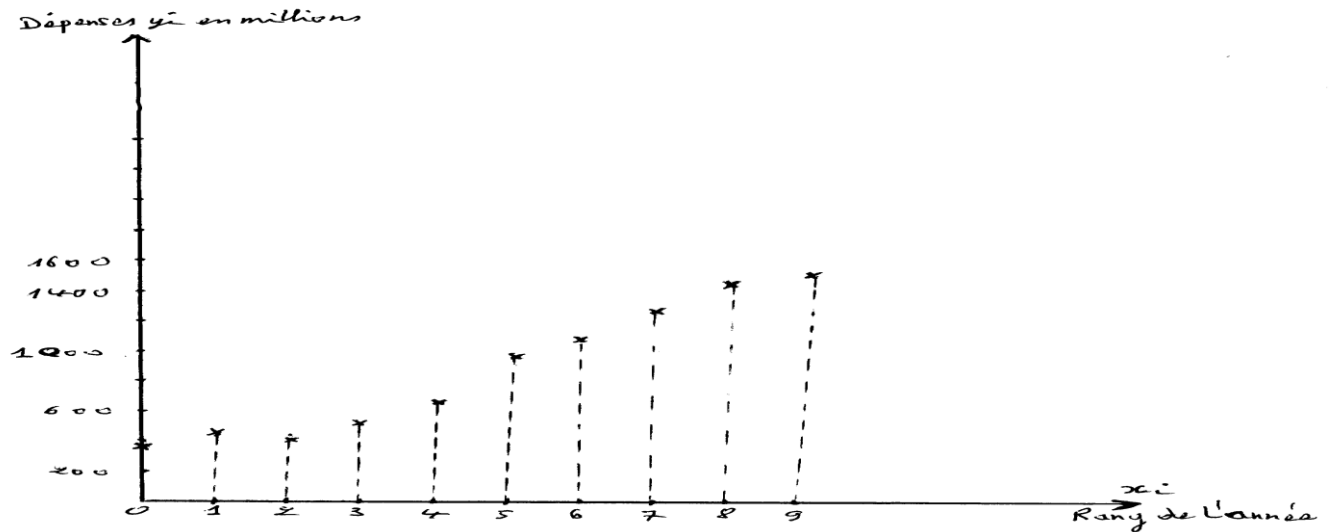
Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépenses y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1° Dessinons le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$

1cm pour un rang en abscisse

1cm pour 200 millions de francs en ordonnée.

Figure 1
 Unités graphiques : 1 cm pour un rang en abscisse , 1 cm pour 200 millions de francs en ordonnée.



2° Déterminons la droite d'ajustement par la méthode de MAYER.

Soit E_1 le sous nuage formé des 5 premiers points du nuage

TOTAL

x_i	0	1	2	3	4	10
y_i	398	451	423	501	673	2446

Soit G_1 le point moyen de E_1

$$x_{G_1} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{et} \quad y_{G_1} = \frac{2446}{5} = 489,2 \quad \text{donc}$$

$G_1 (2 ; 489,2)$	1 point
-------------------	---------

Soit E_2 le sous nuage formé des 5 derniers points du nuage

TOTAL

x_i	5	6	7	8	9	35
y_i	398	451	423	501	673	6235

Soit G_2 le point moyen de E_2

$$x_{G_2} = \frac{35}{5} = 7 \quad \text{et} \quad y_{G_2} = \frac{6235}{5} = 1247 \quad , \text{ donc}$$

$G_2 (7 ; 1247)$	1 point
------------------	---------

Soit $\Delta : y = ax + b$, la droite d'ajustement affine.

$$\text{On a : } \begin{cases} G_1 \in \Delta \\ G_2 \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 489,2 = 2a + b \\ 1247 = 7a + b \end{cases}$$

On obtient $a = 151,56$ et $b = 186,08$. Donc la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode de MAYER a pour équation :

$y = 151,56x + 186,08$	2 points
------------------------	----------

3° Prévision des dépenses pour l'année 2005.

L'année 2005 correspond au rang

$x = 15$	0,5 point
----------	-----------

Pour $x = 15$, $y = 151,56 \times 15 + 186,08 = 2\,459,48$

La prévision des dépenses en 2005 est estimée à 2 459,48 millions	0,5 point
---	-----------

EXERCICE 3 | **8 Points**

1° Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles et 25% des filles sont des déplacées.

- Déterminons le pourcentage des filles déplacées

$$\text{Le pourcentage des filles déplacées est : } \frac{55}{100} \times \frac{25}{100} \times 100 = 13,75 \%$$

Le pourcentage des filles déplacées est : 13,75 %	1 point
---	---------

- Nombre de filles déplacées si le lycée compte 225 élèves au total.

$$N = 225 \times \frac{25}{100} \times \frac{55}{100} = 30,9375$$

On prend

N= 31	1 point
-------	---------

2° Un boulanger qui fabrique 5200 pains quotidiennement, sait que pendant les fêtes il doit augmenter de 15% sa production.

Calculons le nombre de pains qu'il aura fabriqué au bout d'une semaine.

Soit $P_0 = 5200$, nombre de pains fabriqués le premier jour

$$P_1 = P_0 + \frac{15}{100} P_0 = 1,15 P_0 \text{ le nombre de pains au } 2^{\text{ème}} \text{ jour.}$$

$$\text{Soit } P_{n+1} = P_n + \frac{15}{100} P_n = 1,15 P_n \text{ le nombre de pains au bout de } (n+1) \text{ jours.}$$

(P_n) est une suite géométrique de raison

$q = 1,15$ et de premier terme $P_0 = 5200$	1,5 point
---	-----------

Soit N le nombre de pains fabriqués au bout d'une semaine.

$$N = P_0 + P_1 + \dots + P_6 = P_0 \frac{1 - (1,15)^7}{1 - 1,15} = 5200 \frac{1 - (1,15)^7}{1 - 1,15}.$$

Soit $N = 57\,547,35$

N= 5748	1 point
---------	---------

3° Soit $l = 1,68$ m, la longueur de la robe de Fadima.

Calculons la longueur de cette robe après le deuxième lavage.

- Soit l_1 la longueur de la robe après le 1^{er} lavage

$$l_1 = l - \frac{3}{100} l = 0,97 l = 0,97 \times 1,68 = 1,6296. \text{ Soit}$$

$l_1 = 1,62$ m	1,5 points
----------------	------------

- Soit l_2 la longueur de la robe après le 2^e lavage

$$l_2 = l_1 - \frac{1,5}{100} l_1 = 0,985 l_1 = 0,985 \times 1,6296 = 1,605156. \text{ Soit}$$

$l_2 = 1,60$ m	1 point
----------------	---------

$$\text{Remarque : } l_2 = l \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) \left(1 - \frac{1,5}{100}\right) = 1,68 \times 0,97 \times 0,985 = 1,60516$$

4° Type de pourcentage utilisé dans chacun des cas :

1- Pourcentage de pourcentage. 2-Pourcentage successif. 3- Pourcentage d'évolution	1 point
--	---------