

Exercices d'entraînement : TSECO 2017 / 2018

Puissances entières et rationnelles

Exercice 1 :

1. Utilise les identités remarquable pour calculer sans calculatrice :

$$A = 32 \times 28 ; \quad B = 1003 \times 997 ; \quad C = 10005^2.$$

2. Calculer sans machine

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}; \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}; \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}; 125^{\frac{-1}{3}}; 16^{\frac{-3}{3}}; \left(3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

3. Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombre premiers :

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \quad B = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} ; \quad C = \frac{(-5^3) \times (-8)^3 \times (-9)^2}{(15)^2 \times (12)^4} ;$$

$$D = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64} ; \quad E = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4} ; \quad F = \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$$

$$G = \frac{\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{a^{-2}b^3c^4}}{\frac{3(a^{-1}b^{-2}c)^2}{ac^2}} ; \quad H = \frac{\left(\frac{a^4b^{-4}}{(a^{-2}b^3)^{-2}}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-2}b^3)^4}{a^8b^{-10}}\right)^{-2}}$$

Exercice 2 :

1. Exprimer les expressions suivantes sous la forme a^n .

$$\frac{1}{a} ; \sqrt[3]{a} ; \sqrt{a^3} ; \frac{(a^2)^3}{\sqrt{a}} ; \sqrt{(a^3)^2} ; \frac{1}{a^2 \times a^5} ; a\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}.$$

2. Simplifie les expressions suivantes

$$A = \frac{\sqrt[3]{32} \times \sqrt{675}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{425}} ; \quad B = \frac{\sqrt[3]{9} \times 2 \times \sqrt{3}}{3^4 \sqrt{3}} ; \quad C = \frac{15\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot (\sqrt[4]{9})^3}{(\sqrt{\sqrt{3}})^2} ; \quad D = \frac{27^{-\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{(\sqrt[5]{243})^2}$$

3. Démontrer les égalités suivantes :

$$a^{\circ}) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4,5} ; \quad b^{\circ}) \sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = 1 ; \quad c^{\circ}) \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -2 ;$$

$$d^{\circ}) (\sqrt{3}-\sqrt{2})^5 \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})^7 = 5+2\sqrt{2} \quad e^{\circ}) (\sqrt{5}-\sqrt{6})^{13} \times (\sqrt{5}+\sqrt{6})^{11} = 2\sqrt{30}-11.$$

$$f^{\circ}) \quad \left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right)^2 = 2(a+b) \quad \text{pour } a > b \geq 0.$$

Exercice 3 : Simplifier le plus possible les écritures suivantes (rendre rationnel le dénominateur) :

$$A = (-2x^3y^2)^5 \left(\frac{x^7}{8y^3} \right)^{-2}; \quad I = \left(\frac{2a}{3} - \frac{5a}{2} \right)^2 - \left(\frac{4a^2}{9} + \frac{25a^2}{4} \right);$$

$$J = a^4 \times b^2 \times c^{-3} \times a^{-2}; \quad K = \frac{a^3 \times b^5 \times c}{a^2 \times b^7}; \quad L = \frac{a^3 \times b^2 \times (ab)^{-4} \times (bc)^2}{(abc)^{-2} \times a^3 \times b}.$$

Application : calculer :

- J et K pour $a = -4, \quad b = 1, \quad c = 2.$
- L pour $a = -4, \quad b = 2, \quad c = -5.$

Exercice 4 :

1. trouver l'entier naturel x telque :

$$a^{\circ}) \quad 2^{2x-8} = 1; \quad b^{\circ}) \quad \frac{1}{2^x} = 4^2; \quad c^{\circ}) \quad 3^x = 27 \times 9; \quad d^{\circ}) \quad 3 \times 27 = \frac{9}{3^{6x}}; \quad e^{\circ}) \quad 5 \times 5^x = \frac{125}{5^{-9}};$$

$$f^{\circ}) \quad ((2 \times 3)^3)^x = 6^9; \quad g^{\circ}) \quad 243 = 3^{2x-3}; \quad h^{\circ}) \quad 2^x = 4\sqrt{2}; \quad i^{\circ}) \quad 2^x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{64}};$$

$$j^{\circ}) \quad 5^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{125}}; \quad k^{\circ}) \quad 3^x \sqrt{3} = 9; \quad l^{\circ}) \quad 2^x \times \sqrt[3]{64} = 32; \quad m^{\circ}) \quad 4^x = 0,25;$$

$$n^{\circ}) \quad 4^x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \quad o^{\circ}) \quad 4^x = 2^7; \quad p^{\circ}) \quad 3^x = \sqrt[5]{3}; \quad q^{\circ}) \quad 3^x = \sqrt[4]{243}; \quad r^{\circ}) \quad a^x = a\sqrt{a};$$

$$s^{\circ}) \quad a^x = \frac{a}{\sqrt[5]{a^2}}; \quad t^{\circ}) \quad \sqrt{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\left(a^{\frac{2}{3}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} = a^x$$

$$3^{2x} = 9^3; \quad 2^{4-x} = 1; \quad 5^x \cdot 25 = 125; \quad 7^x = 343; \quad (2^2)^{3x} = 4^6; \quad 5 \cdot 5^{x-3} = 25;$$

$$8^x = 4^x \cdot 2; \quad 3^x \cdot 27 = 9^{10}; \quad (4^2)^x = 16^3; \quad 5^{2x-6} = 1; \quad \frac{y^x}{y^7} = y^2$$

$$(7^x)^{x+2} = (7^5)^3; \quad 3^{x^2} \cdot (3^{-2})^x = 27 \cdot 9^6; \quad 25 \cdot (5^{-2x})^x = \frac{5^2}{25^4}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1^{\circ}) \quad x^6 = 64; \quad 2^{\circ}) \quad x^5 = 243; \quad 3^{\circ}) \quad x^6 = -7^{12}; \quad 4^{\circ}) \quad x^3 = -8; \quad 5^{\circ}) \quad (x+2)^{10} = \sqrt{2};$$

$$(x^4 - 2)^3 + 2 = 0; \quad 7^{\circ}) \quad y^8 + 1 = 33; \quad 8^{\circ}) \quad (x^4 - 2)^4 + 2 = 0$$

Exercice 5 : calculer les nombres réels suivants :

$$A = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}; \quad B = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; \quad C = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}; \quad D = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}; \quad E = \frac{1 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}};$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{2}{4} - \frac{4}{5}}; \quad G = \frac{\frac{\frac{8}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{4}{5} + \frac{2}{3}}}{\frac{9}{4} + 1} \div \frac{\frac{6}{7} + 2}{\frac{6}{7} + 2}; \quad H = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{5}}{4 + \frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5} - \frac{6}{7}}{\frac{7}{5} + \frac{3}{7}}; \quad I = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}} \div \frac{2 + \frac{5}{6}}{2 - \frac{5}{6}};$$