

T.D sur les puissances entières et rationnelles

Exercice 1

1-Mets sous forme d'une seule fraction irréductible les expressions suivantes.

$$A = \frac{4}{\frac{5}{2} + \frac{1}{e}} ; B = \frac{\frac{2}{3} + 4}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} ; C = \frac{\frac{2}{3} + 4}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} ; D = \frac{5}{12} - \frac{9}{8} + \frac{13}{18} + \frac{71}{72} ; E = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times 5^3$$

$$F = \frac{1 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} ; G = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}} \times \frac{2 - \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} \times \frac{1}{19} ; H = \frac{7}{9} \times \frac{2 - \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}}{2 + \frac{1}{3}} ; I = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{5}}{-3 + \frac{3}{10}} \div \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{3} + \frac{3}{10}}$$

$$J = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^3} ; K = \frac{a}{b^2 c^5} + \frac{b^2}{a^4 c} - \frac{c^3}{a^2 b^5} ; L = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} ; M = \frac{2a}{b^3 c^2} + \frac{3b}{a^2 b^2}$$

$$N = \frac{1}{a^2 b^5} + \frac{1}{a^3 b^3} ; P = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

2- Ecris les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers.

$$A = \frac{8^3 \times 7^3 \times 5^4}{7^5 \times 5^3 \times 2^6} ; B = \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} \times \frac{216}{625} ; C = \frac{2^7 \times 6^5 \times 3^{10}}{18^4 \times 12^3} ; D = \frac{18^3 \times 3^4 \times 15^2}{12^5 \times 4^3 \times 6^3} ;$$

$$E = \frac{81^3 \times 25^2 \times 121}{125 \times 147} ; F = \frac{12^4 \times 45^3 \times 70^{-3}}{60^3 \times 18^3 \times 75^4} ; G = \frac{320 \times 120^{-1} \times 1500^{-1}}{480^{-2} \times 15^5} ; H = \frac{(0,07)^2 \times 5^4 \times 64}{7^3 \times 5^3 \times 8^3} ;$$

$$I = \left(\frac{8^3 \times 5^2 \times 7^4}{3^3 \times 4^5 \times 35^4}\right)^{-3} ; J = \frac{(-2)^7 \times (-6)^5 \times (-3)^{10}}{18^4 \times (-12)^4} ; K = \frac{[5^3 \times (-2)^{-2}]^4}{8} ; L = \frac{(0,008)^2 \times 144 \times 24^5}{32^2 \times 10^{-6}} ;$$

$$M = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64} ; N = \frac{(5^3 \times 11^{-5})^3}{(11^5 \times 5^{-3})^2} \times \left[\frac{(11 \times 5)^2}{5^2 \times 11^4}\right]^3 ; P = \frac{(0,008)^2 \times 144 \times 2560}{0,036 \times 2,16 \times 64} ;$$

$$Q = \frac{0,81 \times 10^{-2} \times 6,25 \times 0,003}{45 \times 0,0012 \times 15^{-1}} ; R = \frac{0,081 \times (0,21)^3 \times 256}{320 \times (0,64)^2} ; S = \frac{471625 \times (0,0081)^5 \times 1365}{86328125 \times (0,00144)^4} .$$

Exercice 2

1-Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \left(\frac{3}{4}\right)^{17} \times \frac{8^{11}}{9 \times 3^{15}} ; B = \frac{[(0,1)^{-3}]^3}{0,000001 \times 10^{-3}} ; C = 2x^7 \cdot x^8 \cdot [(x^2)^{-5}]^3 ; D = \left(\frac{a^5 b}{2a^7 b^2}\right)^{-3}$$

$$E = \frac{1}{6} a^5 (-3a^{-7}) (2a^2) ; F = 2x^4 y^{-6} \left(\frac{1}{4} x^{-3} y^2\right) (6x^{-1} y^3) ; G = (-2x^3 y^2)^5 \left(\frac{x^7}{8y^3}\right)^{-2}$$

$$H = \left[\frac{(2x^2 y^2)^2}{z^2}\right]^3 \times \left(\frac{z^2}{x^4 y^{-1}}\right)^4 ; I = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times (ab)^3 \times \frac{1}{c^4} ; G = \left(\frac{2x^3 y^2}{z^2}\right) \left(\frac{z^2}{x^4 y}\right)^4$$

$$K = \frac{\left(\frac{a^4 \times b^{-4}}{a^{-2} \times b^3}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-3} \times b^2)^3}{a^8 \times b^{-10}}\right)^{-2}} ; L = \frac{\left[\frac{a^4 b^{-4}}{(a^{-2} b^3)^{-2}}\right]^3}{\left[\frac{4(a^{-3} b^2)^3}{a^2 b^{-10}}\right]^{-2}} ; M = \frac{\frac{2a^4 b^4 (c^{-1})^3}{a^{-2} b^3 c^4}}{\frac{3(a^{-1} b^{-2} c)^2}{ac^2}} ;$$

$$N = \left(\frac{x^2}{2^5}\right)^3 \times (2^{-3} x^2)^{-2}$$

2-Utilise les produits remarquables pour transformer les expressions suivantes.

$$A = x^4 + 2x^2 y^3 + y^6 ; B = z^6 - 2z^3 t^8 + t^{16} ; C = 2r - 1 - r^2$$

3-Détermine l'entier relatif x dans les cas suivants.

$$(10^{3x})^3 \times 10^{-2} = 10^7 ; (16807)^x \times (7^x)^{25} = 1 ; 7^{5x+6} = 117649 ; 8^{4-x} = 1$$

$$3^{4x+4} = 81^3 \quad ; \quad 25^{x+1} = 125^4 \quad ; \quad (7^x)^3 = 1 \quad ; \quad (7^x)^3 = 343 \quad ; \quad 25^{2x} = 125$$

$$3x^6 - 2187 = 0 \quad ; \quad 5^x \times 25 = 125 \quad ; \quad 2^{x+4} = 64 \quad ; \quad 3^{12} = 9^{3x} \quad ; \quad 12^x = \frac{6^{-2} \times 4^5}{3^{-5} \times 2^2}$$

$$\frac{13^{x-4}}{13} = 169 \quad ; \quad \frac{8^{x+3}}{2^{2x-1}} = 256 \quad ; \quad 49^4 \times \frac{1}{(117649)^x} = 49 \quad ; \quad (121)^x \times \left(\frac{1}{11}\right)^2 = 11^{10}$$

4-Calculer la valeur numérique de $A = \frac{(a^2+b^3+c) \times a^3 c^2}{(ab)^4 (c^2 a)^2 bc}$ pour $a = 2$; $b = 6$; $c = 12$.

Exercice 3

1-Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$5^{5x+1} = 625 \quad ; \quad x^3 = -8 \quad ; \quad x^6 = -7^{12} \quad ; \quad x^5 = 243 \quad ; \quad 2^{x+4} = 16^2 \quad ; \quad x^3 + 27 = 0$$

$$x^{-6} = 8^2 \quad ; \quad x^6 = 15625 \quad ; \quad 32 + 4x^3 = 0 \quad ; \quad 27^{2x-1} = 3^{x^2} \quad ; \quad 2x^3 - 16 = 0$$

$$2x^5 + 486 = 0 \quad ; \quad 3^{3x+4} = 243^2 \quad ; \quad 3^{3x+4} = 81^2 \quad ; \quad 9^{x^2-1} \times 81^{x+1} = 1$$

$$81^2 = (3^x)^2 \times \frac{1}{(3^7)^x} \quad ; \quad \frac{1}{64x^2} = (4^{-5})^{2x} \times \frac{1}{(4^{-2})^4} \quad ; \quad \frac{81^x \times 6561}{81^2 \times (3^x)^2 \times (3^{-7})^x} = 3^{11}$$

2-Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants

$$\begin{cases} 2^x \times 4^y = \sqrt{2}^{10} \\ \frac{8^x}{4^y} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 64^x \times 8^y = 4 \\ (3^{-4})^{-2x} \times 81^y = (3^4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2^6)^{-x} \times \frac{1}{16^y} = 4^7 \\ (13^{-x})^2 \times \frac{1}{169^y} = \frac{1}{(13^3)^{-2}} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{(5^{-7})^y} \times 25^{-5} \\ \frac{1}{(36^{-2})^x} \times 6^y = 6^5 \end{cases}$$

3-Soient a, b, c trois nombres réels.

a) Développe $(a + b + c)^3$.

b) Démontre que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

4-La masse moyenne M en kg d'une femme dont la taille h en cm est donnée par l'expression suivante : $M = 0,0097h^{1,7}$.

a) Calcule la taille d'une femme pesant 60kg.

b) Que devient la taille lorsque la masse d'une personne de 1,7m augmente de 10% ?

Exercice 4

1-Trouve trois nombres réels a, b, c tels que

$$\frac{3}{a} = \frac{1 + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3}} \quad ; \quad b = \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} \quad ; \quad c = 14a - 12b$$

2-Compare les réels $A = \sqrt{18}(\sqrt{18} - \sqrt{50})$ et $B = \sqrt{8}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$

3-Vérifie que : $\sqrt{1 - \frac{12}{13}} \times \sqrt{1 + \frac{12}{13}} \in \mathbb{Q}$; $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{8}} \in \mathbb{N}$; $\frac{\sqrt[5]{248832}}{\sqrt[3]{216}} \in \mathbb{N}$;

$$27^{\frac{1}{3}} \times \frac{\sqrt{81}}{3^3} = 1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sqrt{7} - 2 = \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$$

$$1 - \sqrt{a} = \frac{1-a}{1+\sqrt{a}} \quad ; \quad a - \sqrt{a} = \frac{a(a-1)}{a+\sqrt{a}}$$

4-Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ les expressions suivantes :

$$3\sqrt{20} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180} + 4\sqrt{405} \quad ; \quad 7\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{175} - 3\sqrt{700}$$

5-Ecris le plus simplement possible les réels suivants :

$$\sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243} ; \sqrt[15]{243} + 2(\sqrt[6]{3})^2 ; (\sqrt{5} - \sqrt{3})^4 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})^4 ;$$

$$\sqrt[3]{2^5} \times (\sqrt[4]{2^3})^2 \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125} ; \sqrt[3]{625} \times \sqrt{125} \times 5^3 ; \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}} ;$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{4096}} ; 2^3 \times \sqrt[5]{4^2} \times \sqrt[3]{8^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} ; \frac{\sqrt[3]{32} \times \sqrt{675}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{405}} ; \frac{\sqrt[3]{8 \times 5^2}}{(2\sqrt{5})^3} ; \frac{25^6 \times \sqrt[5]{25}}{\sqrt[4]{125}} ; \frac{\sqrt{3 \times 2 \times 5 \times 3}}{\sqrt[5]{27 \times 6}} ; \frac{\sqrt[3]{9} \times (\sqrt[4]{\sqrt{9}})^2}{\sqrt{\sqrt{3}}} ; \frac{\sqrt[5]{4} \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} \right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} \right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}} ; \frac{\sqrt[16]{9} \cdot \sqrt[3]{9} (\sqrt{\sqrt{9}})^3}{(\sqrt[5]{\sqrt{3}})^2} ; \frac{\sqrt[15]{3} \cdot \sqrt[3]{9} (\sqrt[4]{9})^3}{(\sqrt{\sqrt{3}})^2} ; \frac{(\sqrt[4]{2^6 \times 3^{25} \times 5^4})^3}{\sqrt[3]{2^6 \times 3^5 \times 5^9}} ; \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{4} \times (\sqrt[3]{\sqrt{4}})^2}{\sqrt[6]{\sqrt{2}}} ; \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{6}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{5^4} \cdot \sqrt[9]{5^6} \cdot \sqrt{5}}{5^6 \sqrt{5^3}} ; \frac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3} ; \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4}} ; \frac{\sqrt{2a^3b^3}}{\sqrt{72ab^2}} \times \frac{2\sqrt{18b}}{\sqrt{2}} ; \sqrt{(\sqrt[3]{x^2})^6} ; \frac{\sqrt[11]{4^{33}} \times \sqrt[7]{2^{21}}}{\sqrt[4]{8^{12}} \times \sqrt[6]{7^{12}}} ; \frac{5}{\sqrt[7]{5^2}}$$

$$\sqrt[5]{7^2} \times \sqrt[6]{7^2} ; \sqrt[5]{\sqrt{4}} \times \sqrt{\sqrt[6]{4}} ; \frac{\sqrt{4} (\sqrt[3]{\sqrt{4}})^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

Exercice 5

1-Calculer $A = \sqrt{7 + \frac{16}{8} + \frac{35}{2} - \frac{6}{4}}$; $B = \sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$; $C = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

2-Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$\sqrt[3]{x} = 8 ; x^3 + 27 = 0 ; \sqrt[5]{x} = 125 ; (1-x)^{\frac{1}{3}} = -2 ; (1+4x)^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$(x+2)^{10} = \sqrt{2} ; (x^4 - 2)^4 + 2 = 0 ; (x^4 + 2)^5 + 2 = 0 ; \sqrt[10]{x+2} = \sqrt{2}$$

3-Remplace le point d'interrogation par la valeur numérique adéquate.

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{?} ; \sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[?]{675} ; \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[?]{?} ; \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[6]{b^5} = \sqrt[?]{a^?b^?}$$

$$25^? = 125 ; (\sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a})^2 = a^? \sqrt[?]{a^5} ; \frac{\sqrt[6]{aa^7}}{\sqrt{a}} = a ; \frac{\sqrt[7]{a^2}}{a^?} = \sqrt[3]{a} ; \frac{\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{8^{12}} \times \sqrt[6]{2^2}} = a^? \sqrt[?]{a}$$

4-Exprime sous forme de puissance de 2 les nombres suivants :

$$A = \sqrt[6]{(32)^{-12}} ; B = (\sqrt[5]{1024})^{\frac{1}{4}} ; C = \frac{64^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{2}{3}}}$$

5-On donne les réels A et B tels que :

$$A = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} \text{ et } B = \frac{\sqrt{20 - \sqrt{320}} - \sqrt{12 + \sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

✍ Vérifie que $A = \frac{1}{2}$ et $B = -2$.

6-On pose : $X = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ et $Y = \frac{\sqrt{20 - \sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$. Vérifie que : $4X - Y = 0$.

7-a) Développe $(2 + \sqrt{2})^3$ et $(2 - \sqrt{2})^3$ puis en déduis une simplification de

$$E = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

b) Développe $(2 + 3\sqrt{5})^2$ et $(2 - 3\sqrt{5})^2$ puis en déduis une expression simple de $F = \sqrt{49 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{49 - 12\sqrt{3}}$.