

Exercice 1 :

I) U_1 ; U_n ; r et S_n désignant respectivement le premier terme, le n ième terme, la raison et la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.

Calculer :

- 1) U_n et S_n , connaissant $U_1 = 7$; $n = 120$; $r = 5$
- 2) U_1 et S_n connaissant $U_n = 326$; $n = 72$; $r = 2$
- 3) r et S_n connaissant $U_1 = 397$; $U_n = 64$; $n = 1000$
- 4) n et U_n , connaissant $U_1 = 50$; $r = -4$; $S_n = 330$
- 5) n et r , connaissant $U_1 = -3$; $U_n = 6$; $S_n = 285$
- 6) U_1 et U_n , connaissant $n = 54$; $r = 4$; $S_n = 270$.

II) Calculer dans le cas suivant d'une suite géométrique :

- 1) U_n et S_n , connaissant $U_1 = 2$; $q = 3$; $n = 5$
- 2) q et S_n , connaissant $U_1 = 162$; $U_n = 32$; $n = 5$
- 3) U_1 et S_n , connaissant $U_n = 54$; $q = 3$; $n = 4$
- 4) U_1 et U_n , connaissant $q = 0,5$; $n = 7$; $S_n = 571,5$
- 5) n et q , connaissant $U_1 = 48$; $U_n = 243$; $S_n = 633$.

Exercice 2 :

Soit la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_n = \frac{2}{3}U_{n-1} + 2$

- a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
- b) Tracer les droites d'équation $yy = \frac{2}{3}x + 2$ et $y = x$.
- c) Représenter graphiquement les termes de la suite (U_n).
- d) Quel semble être le sens de variation de cette suite ? Et sa limite ?

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$

- 1) Calculer u_n pour $0 \leq n \leq 5$.
- 2) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- 3) Montrer que (u_n) est majorée par 2.

Exercice 4 :

1) (U_n) est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases} \quad (\forall n \geq 0)$$

- a) Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .
- b) Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite numérique (U_n) ?
- 2) On admet que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 2$.

a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{4-U_n^2}{3+U_n}$

b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

Exercice 5 :

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$

- a) Calculer w_1 ; w_2 et w_3
 - b) S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?
 - c) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de cette suite ?
- Démontrer cette conjecture.

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? Géométrique ?
- 2) On définit la suite (v_n) par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
- 3) Montrer que $v_{n+1} - v_n$ est une constante. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique, puis donner une expression de v_n en fonction de n .
- 4) Calculer u_{50}

Exercice 7 :

La suite (d_n) est définie par :
$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + (d_n)^2} \end{cases}$$

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite.

- 2) Vérifier que tous les termes d_n sont positifs.
- 3) Vérifier que la suite (d_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.
- 4) On pose $u_n = (d_n)^2$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
- 5) En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- 6) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{n} < d_n < n$. En déduire la limite de la suite (d_n) .

Exercice 8 :

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que $v_{10} = 384$; $v_{14} = 6144$.

- a) Déterminer la raison q de cette suite et son premier terme v_0 .
- b) Calculer $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_7$

Exercice 9 :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$$

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

- 1) Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$.
 - 2) Construire les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
 - 3) Utiliser la construction pour conjecturer le sens de variation de (U_n) .
- Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_n = U_n - 8, \forall n \in \mathbb{N}$
- 4) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
 - 5) Exprimer V_n puis U en fonction de n .
 - 6) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de (U_n) .

Exercice 10 :

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = 0,5U_n + 0,25$.

- 1) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
- 2) On définit la suite (W_n) par : $W_n = V_n - 0,5$.

a) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire en fonction de n les expressions de W_n puis de U_n .

3) Préciser le sens de variation des suites (W_n) et (U_n) .

4) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k = W_0 + W_1 + \dots + W_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 11 :

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 1} \end{cases} \quad (\forall n \geq 0)$$

Et soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$.

- 1) Calculer U_1 et U_2 .
- 2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprimer V_n et U_n en fonction de n . quelle est la nature de la suite (U_n) ?
- 4) On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n et en déduire la nature de la suite (S_n) .

Exercice 12 :

On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies de la manière

suivante :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases} \quad (\forall n \geq 1) \text{ et } V_n = \frac{U_n}{n} \quad (\forall n \geq 1)$$

- 1) Calculer U_2 , U_3 et U_4 .
- 2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
- 3) En déduire les expressions de V_n et U_n en fonction de n .
- 4) Calculer $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{59049}$.

Exercice 13 :

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n} \end{cases}$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 = x + 1$

2) Soient α , β les racines de l'équation (E) tels ($\alpha > \beta$).

On donne : $T_n = \frac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$. Montrer que (T_n) est une suite géométrique à caractériser.

3) Exprimer (T_n) et (U_n) en fonction de n .

4) En déduire que (U_n) converge, puis déterminer sa limite l (l est le nombre d'or)

Exercice 14 :

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = -10 \text{ et } v_0 = 20 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 0,7u_n + 0,8v_n \\ v_{n+1} = 0,8u_n + 0,7v_n \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

1) a) Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .

b) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles arithmétiques ? géométriques ?

2) a) Montrer que la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = u_n + v_n$ est géométrique.

b) En déduire le terme général de (a_n) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

3) a) Montrer que la suite (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = u_n - v_n$ est géométrique.

b) En déduire le terme général de (b_n) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?

4) Déduire des questions précédentes les termes généraux de (u_n) et (v_n)

5) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 15 :

(U_n) est la suite définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}$

1) Calculer U_1 et U_2 .

2) (V_n) est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = \sqrt{2}U_n - n$

Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

3) Calculer V_n puis U_n en fonction de n . Etudier la convergence de la suite (U_n) .

Calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 16 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$

1) Etablir un tableau de valeurs de la suite pour n variant de 0 à 9.

2) Déterminer la fonction f telle que : $U_{n+1} = f(U_n)$

Tracer la représentation graphique en «chemin» de la suite (U_n) . Donner une conjecture de la limite éventuelle de la suite (U_n) .

Résoudre l'équation $f(x) = x$. Faire apparaître la solution sur le graphique

3) On pose $V_n = U_n - 4$. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique

4) Exprimer (V_n) en fonction de n et en déduire que $U_n = 4 + \frac{4}{2^n}$.

5) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

6) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 17 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

b) Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante

c) Soit la somme $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$. Prouver que $S_n = -\ln(n+1)$.

d) En déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 18 :

1) Soit n un entier naturel

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\ln(7^n \cdot x) = 2n$

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\ln(7^n \cdot U_n) = 2n$

a) Calculer U_0 et U_1 .

b) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison

3) La suite (U_n) admet-elle une limite ?

4) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier $n > n_0$; $U_n > 100$.

Exercice 19 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = e^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4 .

2) On pose $V_n = \ln U_n - 2$

a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

3) En déduire la limite de (U_n) et (V_n) .

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par : $U_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x) dx$

Exprimer U_n en fonction de n .

3) Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ?

Calculer la limite un lors que n tend vers $+\infty$

4) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

a) Calculer S_1 , S_2 et S_3 puis exprimer S_n en fonction de n .

b. Calculer la limite S_n lors que n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 :

Calculer les trois termes consécutifs, a , b et c d'une suite arithmétique tel que :

$$a) \begin{cases} a + b + c = 9 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a \times b \times c = \frac{80}{3} \end{cases} \text{ et la suite est décroissante}$$

$$c) \begin{cases} a + b + c = 15 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{33}{40} \end{cases} \text{ et la suite est décroissante}$$

Exercice 22 :

1) Soit une suite géométrique décroissante (v_n) telle que :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 3 + \sqrt{2} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ Calculer } v_1, v_2 \text{ et } v_3$$

2) Calculer les trois termes consécutifs a, b et c d'une suite géométrique telle que :

$$a) \begin{cases} a + b + c = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 13 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} a + b + c = 19 \\ a \times b \times c = 216 \end{cases}$$

Exercice 23 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$

1) Dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; I ; J)$ étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) .

2) (V_n) est la suite définie par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n élément de $\mathbb{N}^*$, $U_n \neq -1$

b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_1 .

c) Exprimer (V_n) en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

d) En déduire la limite de la suite (U_n) .

e) Etudier les variations et la convergence de la suite (W_n) définie par :

$$\begin{cases} W_1 = 3 \\ W_{n+1} = \frac{5W_n + 3}{W_n + 3} \end{cases}$$

Exercice 24 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

- 1) a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
- 2) a) En déduire en utilisant la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
b) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- 3) On constate, que pour tout n appartient à $\mathbb{N}$, V_n est strictement positif et on pose : $W_n = \ln(V_n)$
Démontrer que (W_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme W_0 et la raison
- 4) a) Exprimer W_n en fonction de n
b) Calculer la somme $s_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$
c) Pour quelle valeur de n a-t-on : $W_n = -\ln 27^2 - \ln 9$?

Exercice 25 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = e^a U_n + 1$

- 1) Déterminer la valeur de a pour que la suite (U_n) soit arithmétique
- 2) Déterminer dans ce cas la somme $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ puis la limite de S_n .
- 3) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a > 0$
a) Calculer U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 .
b) Démontrer par récurrence que : $U_n = 1 + e^a + e^{2a} + e^{3a} + \dots + e^{(n-1)a}$
- 4) On pose : $V_n = U_n - \frac{1}{1-e^a}$.
a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
b) Exprimer V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .
- 5) Etudier le sens de variation puis la convergence de (U_n) .

Exercice 26 :

PARTIE A : Soit f et g deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \text{ et } g(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$$

- 1) Etablir les variations de f et g sur $[0; +\infty[$.
- 2) En déduire un encadrement de $\ln(1+x)$.

PARTIE B : On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombre réel définie par :

$$U_1 = \frac{3}{2} \text{ et } U_{n+1} = U_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1- Montrer que $U_n > 0$ pour tout entier naturel n non nul

2- Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\ln(U_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$3- \text{ On pose : } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \text{ et } T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}.$$

Montrer que : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(U_n) \leq S_n$

4) Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

5) Etude de la convergence de la suite (U_n) .

- a) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante
- b) En déduire que U_n est convergente. Soit l sa limite
- c) En déduire un encadrement de l

Exercice 28 :

En 2020, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution

démographique, a permis d'établir que chaque année, 8% des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.

On note U_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville de l'année $2020 + n$; on a donc $U_0 = 40$.

1) Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2021? 2022 ? et 2023 ?

2) Justifie que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,92U_n + 4$

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 50$

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprime v_n en fonction de n . En déduis que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 - 10 \times 0,92^n$

4) Étudie la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice 29 :

Soit (U_n) $n \in \mathbb{N}$; la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = (1+i)U_n \end{cases}$$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 .

2) Exprimer U_n en fonction de n

3) Pour quelles valeurs de n , la suite (U_n) est-elle :

a) un nombre réel ?

b) un nombre imaginaire pur ?

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^5 = U_2$

5) Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a) Calculer S_n en fonction de n .

b) Déterminer n pour que : $S_n = 4 + 6i$

Exercice 30:

Soit (Z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par : $Z_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)Z_n$

1) Trouver le module et un argument de Z_1 ; Z_2 ; Z_3 ; Z_4 et Z_5 .

2) Pour tout entier naturel n , on pose : $\Delta_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a) Calculer Δ_{n+1} en fonction de Δ_n

b) Démontrer que Δ_n est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison

c) Calculer Δ_n en fonction de n et en déduire l'entier n_0 tels que lorsque $n \geq n_0$; $\Delta_n < 10^{-2}$

Exercice 31 :

On considère les points M_n d'affixes Z_n tels que : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$, où n est un entier naturel

1) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de n et Z_0

Donner Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et trigonométrique

2) Placer les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 et (unité graphique : 4cm)

3) Déterminer la distance de OM_n en fonction de n

4) a) Démontrer que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout entier naturel n

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$. Déterminer L_n en fonction de n , puis la limite de L_n .

Exercice 32 :

Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2020. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Le loyer initial est de 1000 euros et le locataire s'engage à occuper la maison six années complètes.

Contrat 1 : Augmentation annuelle de 10%. On note U_0 le loyer annuel pour 2020, U_n le loyer annuel pour l'année $(2020 + n)$.

a) Calculer U_{n+1} en fonction de U_n .

b) En déduire U_n en fonction de n .

c) Calculer U_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Contrat 2 : Augmentation annuelle de 110 euros.

On note V_0 le loyer annuel pour 2020, V_n le loyer annuel pour l'année $(2020 + n)$.

a) Calculer V_{n+1} en fonction de V_n .

b) En déduire V_n en fonction de n .

c) Calculer V_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?