

## PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES TS.ECO

**UA1 : Unité d'Apprentissage du premier trimestre****Chapitre I :** Puissances entières et rationnelles**Chapitre II :** Rapports et Proportions**Chapitre III :** Pourcentages**Chapitre IV :** Progression arithmétique et géométrique**UA2 : Unité d'Apprentissage du deuxième trimestre****Chapitre V :** Limites, continuités, dérivées**Chapitre VI :** Primitive d'une fonction**Chapitre VII :** Intégrales**Chapitre VIII :** Fonction logarithme népérienne**Chapitre IX :** Fonction exponentielle**UA3 : Unité d'Apprentissage du troisième trimestre****Chapitre X :** Statistiques**Chapitre XI :** Dénombrements-Probabilité**Chapitre XII :** Algèbres linéaires**UA1: Unité d'Apprentissage du premier trimestre****CHAPITRE I : PUISSANCES ENTIÈRES ET RATIONNELLES****I- Rappels et compléments des propriétés dans  $\mathbb{R}$** **1) Ensemble des entiers naturels**L'ensemble des entiers naturels est noté :  $\mathbb{N}$  tel que :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots + \infty\}$ **NB :**L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté  $\mathbb{N}^*$  tel que :  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \dots + \infty\}$ **2) L'ensemble des entiers relatifs**L'ensemble des entiers relatifs est noté :  $\mathbb{Z}$  tel que :  $\mathbb{Z} = \{-\infty \dots -2 ; 0, 1, 2, 3, 4, \dots + \infty\}$ .**NB :**L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté :  $\mathbb{Z}^+$  tel que :  $\mathbb{Z}^+ = \{0 ; +1 ; \dots + \infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté :  $\mathbb{Z}^-$  tel que :  $\mathbb{Z}^- = \{-\infty \dots -2; -1 \dots 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{-\infty \dots -2; -1 \dots +1; +2; \dots +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}_+^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1; +2; \dots +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}_-^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-\infty \dots -2; -1\}$$

### 3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$  tel que :  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

### 4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme :  $\sqrt{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\pi$  ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté :  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbb{R} = \{-\infty; -\sqrt{2}; \frac{-3}{2}; -2; 0; 1; 2; \sqrt{2}; \frac{3}{2}, \dots +\infty\}.$$

**RETENONS :**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

## II- Puissances entières – Puissances rationnelles

1°) Définition : La puissance nième d'un nombre réel  $a$  est un produit de  $n$  facteur tous égaux :  $a^n = a \times a \times a \times a \dots \times a$  ( $n$  fois). On dit que  $a$  est la base,  $n$  est l'exposant

La racine nième d'un nombre réel positif  $a$  est le nombre réel  $r$  dont la puissance la puissance nième est égale :  $R = \sqrt[n]{a} \rightarrow R^n = a$ .

2°) Propriété : Pour tout réels  $a$  et  $b$  non nuls et pour tous entiers  $n$  et  $m$  non nuls

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^0 = a^0 = 1$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**Application n°1 :** simplifier les écritures

$$a^8 \cdot a^{-5} \quad a^{-8} \cdot a^{14}, \quad (a^{-2})^3 \quad ; \quad (a^{-5})^{-n}; \quad a^{2n-9} \cdot a^{n+12}$$

**Application n°2 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $(3x^{-1})^3 = 9.3x^{-2}$  ; b)  $27x^{+2} = 3^{5x+8}$  ; c)  $(3x^{-1})^3 = 1$

**Application n°3 :**

1°) Simplifier le plus possible des écritures :

$A = (a^2.b^3).(ab^2)^5$  ,  $B = (34x.y^2)^2 / (x^3.y^3)^2$

2°) Calculer

$2^{-5}.2^8.2^{-2} \quad 10^{31}.10^{26}.10^{-27}$

**Résoudre** dans  $\mathbb{R} \quad 2^{3x+1}=1$

**Simplifiez** les expressions suivantes :

a)  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt{\sqrt[6]{4}}$       b)  $\frac{(\sqrt[4]{a^7})2\sqrt[4]{a^5}}{(a^2)(\sqrt[5]{a^2})(\sqrt[2]{a^2})}$

### Exercice d'application

1) Calculer les nombres réels suivants à l'aide d'une puissance entière.

$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6}$  ;  $B = \left( \frac{(8^6 \times 5^4 \times 7^8)^{\frac{1}{2}}}{3^3 \times 4^5 \times 4^6} \right)^3$  ;  $C = \frac{((5)^3 \times (-2^{-1})^2)^4}{8}$

2) Soit  $a$  un nombre entier naturel.

Déterminer l'entier  $a$  satisfaisant aux conditions indiquées :

$2^{4+a} = 64$  ;  $3^{12} = 9^{3a}$  ;  $7^{4-a} = 1$  ;  $5^a \times 25 = 125$  ;  $(7^a)^3 = 1$  ;  $\frac{13^{a-4}}{13} = 169$

3) Ecrire sous forme de puissance rationnelle les expressions suivantes :

$\sqrt[3]{32}$  ;  $\frac{5}{\sqrt[7]{5^2}}$  ;  $\sqrt[4]{7^3} \times \sqrt[6]{7^9}$  ;  $\frac{\sqrt[11]{4^3} \times \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[4]{8^3} \times \sqrt[6]{7^2}}$

4) Mettre sous forme  $a\sqrt{b}$  les expressions suivantes :

$A = 7\sqrt{20} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{5}$  ;  $B = 2\sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24} + 3\sqrt{96}$

5) Rendre rationnelle le dénominateur des fractions suivantes :

$\frac{3}{\sqrt{7}}$  ;  $\frac{5}{\sqrt{3}+1}$  ;  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$  ;  $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+2}$  ;  $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+5}$  ;  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}}$  ;  $\frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}-\frac{5}{2}}$

6) On pose :  $x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$  ;  $y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

Vérifier que :  $4x - y = 0$

## CHAPITRE II : RAPPORTS ET PROPORTIONS

**A°) proportionnalité :**

Une proportion est une égalité entre deux ou plusieurs rapports. La proportion est l'égalité de deux rapports  $a/x = b/y$

Quatre nombres a, b, c, d forment une proportion ssi :  $a/b = c/d$

**1°) grandeur directement proportionnelle**

a) Définition : Les grandeurs x, y, z sont proportionnelles aux nombres a, b, c si et seulement et si :  $x/a = y/b = z/c = k$  ou k est appelé le coefficient de proportionnalité.

b) Propriété : Si les grandeurs x, y, z sont proportionnelles aux nombres a, b, c alors nous avons  $x/a = y/b = z/c = x+y+z/a+b+c = k$  Dans ce cas  $x = ak$   $y = bk$   $z = ck$

NB : cette propriété est aussi valable pour la soustraction.

**Application n° 1 :** Déterminer x, y, z tels que leur somme est 5 100 et qu'ils sont directement proportionnels aux nombres 2, 3 et 5.

Réponse :  $x = 1\,020$   $y = 1\,530$   $z = 2\,550$

**Application n°2 :** un champ rectangulaire a pour périmètre 240 m. Calculer la longueur et la largeur sachant que leur mesure est proportionnelle à 7 et 5. Réponse :  $L = 70$  m  $l = 50$  m

**2°) Grandeurs inversement proportionnelles**

Les grandeurs x, y, z sont inversement proportionnelles aux nombres a, b et c tous non nuls si et seulement si x, y, z sont directement proportionnelles à  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  et  $\frac{1}{c}$

**Application n°3 :** Un chef d'entreprise veut partager 287 000 entre trois employés inversement proportionnelles aux nombres 2 ; 3 et 7. Calculez la part de chaque employé.

Réponse :  $x = 147\,000$   $y = 98\,000$  et  $z = 42\,000$

**Application n°4 :** Un chef d'entreprise veut partager 79 300 entre trois employés inversement proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 7. Calculez la part de chaque employé.

Réponse :  $x = 36\,400$  ;  $y = 27\,300$   $z = 15\,600$

**Application n°5 :** le directeur des ressources humaines de l'entreprise COURTS PRIVE LA SATISFACTION veut partager 43 384 entre trois bons élèves de TS.ECO inversement proportionnelles aux 3 7 ; 11 2 et 5 3 . Calculez la part de chaque élève. Réponse :  $x = 2\,484$   $y = 31\,416$   $z = 9\,520$

3°) Partage erroné : Le partage erroné veut dire qu'il y'a un quiproquo dans le partage.

**Exemple :** Soit une somme S à partager entre trois personnes proportionnelles aux nombres a, b et c. L'opérateur chargé du partage se trompe et effectue le partage de façon

inversement proportionnels aux nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Ainsi une personne aura sa part augmentée ou diminuée.

Soit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les parts dans le partage normal

Soient  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

Laquelle a vu sa part diminuée ou augmentée ?

### La 1ère personne

Si  $x' - x > 0$  alors sa part a augmentée

Si  $x' - x < 0$  alors sa part a diminué

Si  $x' - x = 0$  alors sa part reste inchangée.

### La 2ième personne

Si  $y' - y > 0$  alors sa part a augmentée

Si  $y' - y < 0$  alors sa part a diminué

Si  $y' - y = 0$  alors sa part reste inchangée.

### La 3ième personne

Si  $z' - z > 0$  alors sa part a augmentée

Si  $z' - z < 0$  alors sa part a diminué

Si  $z' - z = 0$  alors sa part reste inchangée

**Application n°6 :** Le promoteur de **ISSMOLAND** souhaite partager une prime entre trois élèves  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour des raisons de compétences proportionnellement aux nombres 2, 3 et 5. Le comptable se trompe et effectue le partage de façon inversement proportionnels aux nombres 2 ; 3 et 5. Ainsi une personne a vu sa part diminuée de 47.500FCFA.

1°) Lequel des trois élèves a vu sa part diminuée de 47.500FCFA

2°) Calculer le montant de la prime à partager

3°) quelle est la part de chacun des trois élèves.

REPONSE :  $x=31\ 000$   $Y=46\ 500$   $Z= 77\ 500$

4°) Partage composé :  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  proportionnels aux nombres  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et proportionnel aux nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tous non nuls :  $X/xa = Y/yb = z/zc = k$   $X= k.xa$   $Y=k.yb$   $Z=k.zc$

**Application n°7 :** on doit partager 53.300F entre trois personnes proportionnelles à 2 ; 3 ; 5 et proportionnelles à 3 ; 7 et 11. Trouvez la part de chaque personne.

SOLUTION :  $X=3.900$   $y= 13.650$   $z=35.750$

**Application n°8 :** Un chef d'entreprise demande à son comptable de partager la somme de 582.400 F représentant les primes de trois employés directement proportionnelles à leurs nombres d'enfants 3 ; 1 ; 2 ; directement proportionnelles à leurs anciennetés dans le service 5 ans ; 6 ans ; 8ans et directement proportionnelles en millier de francs de leurs salaires 2 ; 3 et 4. Déterminez la part de chacun.

SOLUTION :  $x=3\ 900$   $y=13650$   $z=35\ 750$

**Application n°9 :** Un oncle du nom de **ISSOUF** avait décidé de partager sa fortune entre ses trois neveux A, B et C en partie directement proportionnelle à leurs âges 8 ans, 12ans et 18 ans. Il révisé son testament et fait le partage proportionnel aux âges.

1°) Quel est le neveu qui conserve la même part ?

2°) Un autre perd 250 000F, calculez le montant de l'héritage et les parts définitives des héritiers.

SOLUTION :  $A=200\ 000$   $B=300\ 000$   $C=450\ 000$

#### Moyenne proportionnelles :

Etant donné deux nombres a et b, la moyenne proportionnelle est le nombre x tel que a ; x ; x ; b forment une proportion si et seulement et si :  $x/a = b/x$  donc  $x^2 = ab$  alors  $x = \sqrt{ab}$  ou  $x = -\sqrt{ab}$

**Application n°10 :** Trouvez deux entiers naturels dont la moyenne proportionnelle est 8 sachant que l'un est le quart de l'autre.

SOLUTION :  $a=4$  et  $b=16$

#### Quatrième proportionnelles

Etant donné trois nombres a, b et c. Leur quatrième proportionnelle est le nombre réel x tel que a ; b ; c et x forment une proportion :  $a/b = c/x$  donc  $x = bc/a$

**Application n°11 :** calculer la quatrième proportionnelle aux nombres 5, 10 et 2.

Solution :  $x=4$

Si  $a/b = c/d$  on dit que a, b, c et d forment une proportion à quatre termes. a et d sont les extrêmes, b et c sont les moyens. ad produit des extrêmes, bc produit des moyens.

a est appelé la première proportionnelle ,b est appelé la deuxième proportionnelle , c est appelé la troisième proportionnelle et d est appelé la quatrième proportionnelle

#### Application n°12 :

1- Trouver la quatrième proportionnelle aux nombres 4, 5 et 20 ; 7,8 et 9

2- Trouver la moyenne proportionnelle entre 4 et 9 ; 3et 27 ; 5 et 45.

3- Trouver deux nombres connaissant leur somme 3,6 et leur rapport 2 /7

#### Application n°13 :

1) Partager une somme de 2 720 F en parts proportionnelles à 4, 7 et 6.

2) Une somme est payée en trois parts directement proportionnelles à 4, 7 et 6.

Trouver les sachant que le double de la deuxième dépasse la somme des deux autres de 4 000 F.

3) Trouver trois nombres réels  $x$ ,  $y$  et  $z$  proportionnels aux nombres 7, 8 et 9 et sachant que  $x - y + z = 64$

### Exercice 1

1° Une entreprise fabrique des tables, dont le prix de vente est fixe à 119 € l'unité.

a) Exprimer le chiffre d'affaire en fonction de la quantité  $q$  de tables vendues. Le chiffre d'affaire est proportionnel à la quantité vendue.

b) Combien de tables, au moins, doit vendre l'entreprise pour réaliser un chiffre d'affaires sur ces tables supérieur à 5 000 € ?

2°) Dans cette entreprise, les 50 salariés perçoivent 1 500 € par mois.

a) Calculer la masse salariale de cette entreprise.

Définition : la masse salariale est la somme de tous les salaires de l'entreprise.

b) On admet que la masse salariale est constante et que tous les salariés de l'entreprise ont le même salaire. Exprime le nombre de salariés en fonction du salaire  $x$ , compris entre 1 200 et 4 500 euros.

c) Ici, le nombre de salaires de cette entreprise est inversement proportionnel au salaire. Quel est le nombre de salaires s'ils perçoivent tous 3 000 €

### Exercice 2

1°) Une somme de 840 000 FCFA doit être partagée entre trois personnes proportionnellement aux nombres 3 ; 5 ; 7 et inversement proportionnellement aux nombres 2 ; 6 et 3. Calculer les trois parts. 2°) Trouver trois nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de somme 147 600 FCFA sont proportionnels aux nombres 7 ; 6 et 2. 3°) Une somme  $S$  doit être partagée entre trois personnes proportionnelles aux nombres 3 ; 5 et 7. a) Calculer les trois parts en fonction de  $S$ . b) La troisième personne gagne 200 FCFA de plus que la première. Calculer la somme  $S$  et les trois parts.

### Exercice 3

Un père de famille distribue de l'argent de poche à ses trois enfants, Zoukka, Dramane (5 ans) et Youssouf proportionnellement à leur âge. Il donne 5 600 F à Zoukka, 4 000 F à Dramane et le reste à Youssouf. Sachant que la somme des âges des enfants est 23 ans.

1) Quels sont les âges de Zoukka et de Youssouf ?

2) Quel est l'argent de poche de Youssouf ?

Quelle est la somme totale distribuée.

**Exercice4**

Déterminer la moyenne proportionnelle de a et b si possible dans les cas suivant :

- 1)  $a=3$  et  $b=27$     2)  $a=-5$  et  $b=-125$     3)  $a=9$  et  $b=-900$

**Exercice5**

Calculer les nombres suivants en mettant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} ; B = \frac{1}{-3} \cdot \frac{3}{10} ; C = -3 + \frac{3}{10} ; D = \frac{-1}{\frac{3}{4}} ; E = \frac{4}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} ;$$

$$F = \frac{\frac{-2}{3} - 4}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} ; G = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{5}}{-3 + \frac{3}{10}} : \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{-3} + \frac{3}{10}} ; H = \frac{\frac{1}{4} - 3}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5}}{5 - \frac{1}{2}}$$

- Déterminer les termes du rapport  $\frac{a}{b}$  tel que le rapport  $\frac{a}{b} = 6$  ; 8 ; 9.
- Ecrire le rapport de 17,5 à 0,25 et  $\frac{2}{3}$  à  $\frac{5}{6}$
- Calculer le quotient de 68,8 par 8 et de  $\frac{4}{5}$  par  $\frac{5}{4}$
- Deux capitaux ont pour somme 18 000 et pour rapport  $\frac{18}{27}$ . Quels sont ces deux capitaux  $C_1$  et  $C_2$  ?
- Deux capitaux diffèrent de 25 000 F et ont pour rapport  $\frac{9}{4}$ . Quels sont ces deux grandeurs ?
- Trouver deux nombres connaissant leur rapport  $\frac{2}{9}$  et leur somme 22 440 F.
- Soit la suite de rapports suivants :  $\frac{9}{3} ; \frac{18}{6} ; \frac{27}{9} ; \frac{36}{12} ; \frac{45}{15}$ .

Montrer que ces rapports sont égaux.

- Ecrire le rapport de la distance de Bamako à Kati ( 21 km ), à la distance de Bamako à Ségou ( 472 km ).
- Ecrire le rapport de la contenance d'un bidon de vin ( 30 cl ) à une bouteille de vin ( 0,75 l ) ; d'un bidon de 114 l à un tonneau de 228 l.
- Ecrire le rapport du poids d'argent fin contenu dans une pièce de 100 F CFA antérieur à 1890, au poids de cuivre quelle contenait ( poids total : 25 g, poids du cuivre : 2,5 g ).
- Ecrire le rapport du poids du franc Guinéen au demi-kilogramme.

**Exercice6**

- 1 Dans chaque question et pour chacune des colonnes des tableaux, déterminer la valeur exacte du coefficient de proportionnalité permettant de passer de la première ligne à la deuxième ligne :

a-

|              |      |     |      |      |
|--------------|------|-----|------|------|
|              | 5,2  | 4,2 | 2,2  | 3    |
|              |      |     |      |      |
| Coefficients | 22,8 | 26  | 14,2 | 10,5 |

b-

|              |      |     |      |      |
|--------------|------|-----|------|------|
|              | 5,2  | 4,2 | 2,2  | 3    |
|              |      |     |      |      |
| Coefficients | 22,8 | 26  | 14,2 | 10,5 |

- 2 Déterminer dans les tableaux ci-dessous la quatrième proportionnelle  $x$  :

a-

|   |   |
|---|---|
| 3 | 5 |
|   |   |

b-

|    |     |
|----|-----|
| 21 | $x$ |
|    |     |

c-

|   |   |
|---|---|
| 7 | 2 |
|   |   |

d-

|     |               |
|-----|---------------|
| $x$ | $\frac{5}{2}$ |
| -   | -             |

e-

|   |     |
|---|-----|
| 4 | $x$ |
|   |     |

f-

|   |    |
|---|----|
| 5 | 14 |
|   |    |

g-

|     |     |
|-----|-----|
| $x$ | 0,3 |
|     |     |

h-

|                 |               |
|-----------------|---------------|
| $\frac{15}{14}$ | $\frac{5}{7}$ |
|                 |               |

- 3 Répondre si possible aux questions suivantes :

- a- Pour confectionner un cocktail, ISSMO a besoin de 1,5 l de jus d'orange pour 6 personnes. Combien de litres de jus d'orange doit-il confectionner s'il souhaite préparer ce même cocktail pour 10 personnes ?
- b- En révisant pendant 3 heures son cours de mathématique, Idrissa a progressé de 5 points. De combien de points augmentera-t-il sa note, s'il révise le prochain cours pendant 5 heures ?
- c- Le professeur de mathématique ISSMO a remarqué qu'il lui fallait 22 min pour corriger 4 copies d'élèves. Combien de temps, en gardant cette allure lui faudra-t-il pour corriger une classe de 26 élèves ?

- 4 ISSMO partage une somme entre ses 3 enfants MOUHAMAD, ABOUBAKHR et OUMAR proportionnelle à leurs âges 12,18 et 20, le tardillon reçoit 24 000.

Quelle est cette somme.

- 5 On achète 21 l d'huile à 35 000 F ? Combien couterons 17 l ?

- 6 Sur une vente de 25 700 F, un placier a reçu une commission de 771 F. Quelle commission recevra t-il sur une vente de 98 350 F ?

- 7 Les frais de transport de 250 t de pommes de terre se sont élevés à 6 275 F. A combien s'élèveraient dans les mêmes conditions les frais de transport de 145 t ?
- 8 24 m de tissus coûtent 1 328,4 F. Combien coûtent 6,5 m du même tissu ?
- 9 Sur un objet ayant coûté 1 250 F, un commerçant fait un bénéfice de 387,5. Quel bénéfice réaliserait-il dans les mêmes conditions sur un objet acheté à 1 800 F ?
- 10 Pour fabriquer 12 chaises, on a utilisé 374,4 F de matière première. Combien dépensera-t-on pour se procurer les matières premières nécessaires pour 33 chaises identiques aux précédentes ?
- 11 Le salaire total de 3 ouvriers travaillant ensemble s'élève à 650 F pour 5 jours de travail. Le premier gagne 44 F par jour, le deuxième 300 F par semaine de 6 jours de travail. Quel est le gain du troisième pour 28 jours de travail ? ( $\times 3$ )
- 12 Des marchandises importées reviennent sans les droits de douane à 7 500 F pour 6 t, on sait d'autre part que sur 2 700 kg les droits de douane s'élèvent à 9 180 F. Quel est le prix total payé pour 36 900 kg de ces marchandises ?
- 13 ISSMO veut répartir à part égale une certaine somme, à titre de gratification, entre des employés : s'il en fait bénéficier 7 employés, chacun recevra 1 242 F. Quel serait la part de chacun s'il y avait 9 bénéficiaires ?
- 14 Avec un pot de peinture, on peut peindre un panneau rectangulaire de 2,4 m de long et 0,72 m de large. Quelle serait la longueur du panneau qu'on pourrait recouvrir avec le même pot, si la largeur était de 1,08 m ?
- 15 15 ouvriers peuvent faire un travail en 8 heures. Combien faut-il à 12 ouvriers pour exécuter le même travail ?
- 16 Avec une certaine quantité de graine, on peut semer un champ rectangulaire de 30 m de large sur 100 m de long. Quelle est la longueur d'un champ rectangulaire de 25 m de large qu'on pourrait semer avec la même quantité de graine ?
- 17 Un entrepreneur peut avec une certaine somme, payer 35 ouvriers, ayant travaillé 14 heures par jour, pendant 12 jours. Combien, avec le tiers de cette somme, pourrait-il payer d'ouvriers ayant travaillé 7 heures par jour, pendant 5 jours ?
- 18 ISSMO calcule que, si elle vit à l'hôtel elle dépensera en 6 jours autant que chez elle en 16 jours. Elle est obligée de vivre régulièrement 1 jour à l'hôtel pour 3 jours chez elle. En combien de temps dépensera-t-elle ainsi autant qu'en 272 jours chez elle ?

19

12 radiateurs électriques de 3 kw fonctionnant 8 h par jour pendant 15 jours ont dépensé 864 F. Pendant combien de jours ont fonctionné, à raison de 10 heures par jour, 15 radiateurs de 2 kw qui ont dépensé 1 080 F ?

20

Un industriel possède un stock de charbon qui lui permet de d'alimenter 10 chaudières identiques pendant 20 jours. Après 8 jours de fonctionnement, il est avisé qu'il ne sera réapprovisionné que 24 jours après. Combien de chaudières doit-il arrêter s'il veut faire fonctionner les autres, régulièrement pendant ces 24 heures ?

21

Un fabricant estime qu'en faisant travailler 15 ouvriers 10 heures par jour pendant 12 jours il pourra exécuter une commande. En fait, la durée du travail quotidien est bien de 10 heures pendant les 4 premiers jours mais doit être réduite ensuite à 7 h 30 mn. Combien faudra-t-il de jours pour exécuter la commande ? Combien de jours aurait-il fallu s'il avait disposé régulièrement de 20 ouvriers travaillant 9 heures par jour ?

### Exercice7

Un père de famille veut partager son héritage **H** entre ces trois enfants directement proportionnel à leur âge : 15 ans ; 14 ans et 9 ans et inversement proportionnel aux rangs de leur mère : 3 ; 2 et 3. En ne tenant pas compte de la deuxième condition, il fait une erreur. Il décide ainsi de faire un partage directement proportionnel aux rangs de leur mère. Le deuxième enfant atteste avoir perdu une somme de 560 000 F après ce partage.

Trouver le montant de l'héritage **H** du père et faire correctement le partage.

### Exercice8

Un employé est chargé de partager une prime **P** entre trois contremaîtres, proportionnellement à leurs salaires annuels : 42 000 F ; 35 000 F ; 28 000 F, proportionnellement à leurs années de service : 7 ; 5 ; 3 et inversement proportionnel à leurs retards dans l'année : 2 ; 4 et 5. L'employé fait une erreur et ne tient pas compte de la dernière condition. Le deuxième touche alors 352,5 F de moins qu'il aurait dû toucher.

Quelle était la prime **P** à partager ?

### Exercice8

1

Une personne décide de partager une somme de 208 000 F entre trois personnes proportionnellement au nombre : 2 ; 3 ; 4. Calculer la part de chacune d'elle.

2

Trois personnes ont fondées une société de fabrique de glace :

- La première personne a misé la somme de 500 000 F.
- La deuxième personne a misé la somme de 600 000 F.
- La troisième personne a misé la somme de 800 000 F.

Elles doivent se partager un bénéfice de 1 99 500 F proportionnellement aux mises.

Quelle est la part qui revient à chacun des actionnaires ?

3

Trois commerçants se sont groupés pour faire transporter sur un même parcours des marchandises de même nature.

Ils repartissent le transport qui s'élève à 676 000 F proportionnellement aux poids des marchandises transportées par chacun d'eux, à savoir : 2500 kg ; 6 000 kg et 4 500 kg.

Quelle est la somme à donner pour chaque commerçant ?

**4**

Un industriel emploie trois entrepreneurs. Ils veulent chacun exécuter un même travail.

Pour les encourager à travailler rapidement, l'industriel décide de partager entre eux un bonus de 8 520 000 F, inversement proportionnelle au nombre d'heures de travail qu'il aura fallu à chacun pour effectuer sa tâche.

- Le premier entrepreneur a mis 63 heures.
- Le deuxième entrepreneur a mis 72 heures.
- Le premier entrepreneur a mis 80 heures.

Quel est le bonus attribué à chacun des trois entrepreneurs ?

**6**

ISSMO partage la somme de 66 000 F CFA entre ses trois enfants directement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 10 ans ; 7 ans et 5 ans.

Quelle est la part de chaque enfant ?

**7**

Un héritage de 190 000 F CFA doit être partagé entre trois frères directement proportionnel à leur âge : 7 ans ; 3 ans et 9 ans.  
Calculer la part des trois frères.

**8**

Trois contremaîtres des équipes d'ouvriers : la première comprend 10 ouvriers, la deuxième 18, la troisième 22. Le caissier de l'entreprise leur remet une somme totale de 9 600 F pour payer les salaires. Répartir cette somme entre les trois contremaîtres proportionnellement aux nombres des ouvriers qu'ils dirigent.

**9**

A 8 heures, un camion part d'une ville **A** et se dirige vers une ville **B** distant de 180 km. A la même heure, une automobile part de **B** vers **A**. la vitesse du camion est les  $\frac{5}{7}$  de l'automobile.

A quelle distance de **A** aura lieu le croisement des deux véhicules ? La rencontre ayant lieu à 9 h 4 mn. Quelle sont leur vitesse horaires ?

**10**

Trois associés ont engagé dans une affaire des capitaux : le premier 400 000 F pendant 3 ans, le deuxième 250 000 f pendant 4 ans, le troisième 600 000 F pendant 18 mois.

Partager un bénéfice de 220 100 F proportionnellement aux capitaux engagés et aux durées de leurs participations.

**11**

Un banquier, voulant récompenser le travail exceptionnel de trois employés, décide de leur accorder une gratification proportionnellement à leur année de service, respectivement 14 ; 12 et 10 ans. Les parts ont été calculées par erreur sur 12 ; 10 et 8 ans, et l'un des employés se trouve, après rectification du décompte, recevoir 10 F de plus qu'on ne l'avait prévu par le calcul erroné. On demande quelle était la somme globale à distribuer et quelle part est revenue à chacun des employés.

**12**

Des locataires d'un même immeuble ont décidé de faire installer à leurs frais un ascenseur. Repartir le montant des frais 350 000 F proportionnellement aux loyers, sachant que 3 locataires paient chacun un loyer 1 000 F, que 5 locataires paient chacun un loyer de 800 F et que 6 locataires paient chacun un loyer de 500 F.

**13**

Un industriel partage une gratification entre quatre collaborateurs proportionnellement à leurs émoluments annuels : 30 000 F ; 24 000 F ; 16 000 F. La part du premier s'élève à 390 F.

Calculer le montant total de la somme partagée et de la gratification reçue par chaque ingénieur.

**14**

Dans un grand magasin le rayon de fourrures a fait un chiffre d'affaires égal aux  $\frac{2}{17}$  chiffre total, le rayon de confection pour hommes un chiffre égal aux  $\frac{3}{11}$  du chiffre total et le rayon de confection pour dames un chiffre aux  $\frac{7}{20}$  du chiffre total.

On sait que les chefs de ces rayons ont reçu des appointements dont le total s'élève à 83 070 F.

Quelle est la somme reçue par chacun si ses appointements sont proportionnels au chiffre d'affaires de son rayon

**15**

Mr DEMBELE partage la somme de 45 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 7 ans ; 9 ans et 12 ans.  
Quelle est la part de chaque enfant ?

**16**

Un père partage son patrimoine d'une valeur de 99 000 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnel à leur âge : 8 ans ; 7 ans et 15 ans.  
Calculer la part des trois frères.

**17**

Répartir une gratification de 16 770 F entre trois employés, inversement proportionnellement aux nombres de leurs jours d'absence dans l'année : 2 jours ; 3 jours et 4 jours.

**18**

Un père veut partager un capital de 360 000 F CFA entre ses trois enfants en raison inverse de leur âge. Ils ont respectivement 3 ans ; 5 ans et 10 ans.  
Calculer la part des trois frères.

**19**

Un marchand achète une pièce de 180 m de tissu. Au moment de la mettre en vente, il s'aperçoit qu'une partie de la pièce représentant les  $\frac{2}{9}$  de sa longueur est détériorée. Il divise le reste en trois coupons dont les longueurs sont inversement proportionnelles à 2 ; 4 et 7.  
Quelle est la longueur de chaque coupon ?

**20**

Un directeur est chargé de partager la somme de 1 960 000 F CFA entre ses trois employés : Ali ; Moussa et Bakary. Le partage se fait proportionnellement à leur salaire respectivement égale à : 24 000 ; 20 000 ; 18 000 et inversement proportionnelle au retard accusé par les trois employés dans le mois : 4 jours ; 2 jours et 5 jours.  
Quelle est la part de chaque employé ?

**21**

Une teinturière achète à 21 000 F CFA du tissu Bazin. Au moment de la teinture, elle constate que  $\frac{1}{7}$  du Bazin est inutilisable. Alors elle décide de diviser le reste en 3 coupons inversement proportionnel à : 3 ; 4 et 6.

Calculer la longueur de chaque coupon.

**22**

Un chef d'entreprise décide de répartir une part de ses bénéfices entre trois de ses principaux employés Ali est au 3<sup>ème</sup> échelon, Madou au 4<sup>ème</sup>, Idrissa au 6<sup>ème</sup>. Idrissa qui avait calculé la somme lui revenant reçoit 280 F de moins qu'il n'avait prévu. Cela provient de ce que le partage a été fait en parties inversement proportionnelles aux échelons alors que Idrissa avait calculé des parts proportionnelles aux échelons.

Quelle était la somme à répartir ?

## CHAPITRE III : POURCENTAGES

### I ) Introduction

Aujourd'hui, les pourcentages sont partout dans notre vie quotidienne. Nous sommes entourés d'affiches publicitaires présentant offres promotionnelles, soldes, offres de prêts ....

On peut dire qu'un pourcentage est le rapport d'une mesure de cette partie à la mesure correspondante sous forme de fraction de dénominateur 100. Prendre les  $x\%$  d'un nombre, revient à multiplier ce nombre par  $x/100$

**Application n°1 : ZOULEYKHA** accorde une remise de 25% sur une mensualité de 10 000 F. Quel est le montant de la remise

**Application n°2 :** En 2015 LP-ISSMO a présenté 18 candidats de TS.ECO au baccalauréat malien. 13 candidats ont été admis dont deux mentions assez (il s'agit de Lamine TRAORE et BINTOU WALLET).

Quel est le pourcentage de réussite de LP-ISSMO

**Augmenter** une quantité de  $x\%$  revient à multiplier le nombre par :  $(1 + x/100)$

**Application n°3 :** La TVA sur la moto Jakarta 300 000 F HT est de 18%.

A quel prix la moto Jakarta est – il vendu ?

Solution : 354 000 F TTC

**Diminuer** une quantité de  $x\%$  revient à multiplier le nombre par :  $(1 - x/100)$ .

**Application n°4 :** A quel prix un article sera – t – il vendu après une remise de 5%, sachant que son prix initial est de 120 F.

Solution : il sera vendu 114

### II) Pourcentage de pourcentage

$x\%$  de  $y\%$  correspond à :  $xy/100$

**Application n°5 :** Au cours privé la BAKHISSMO, les filles représentent 54% des élèves. On a constaté que 20% des filles sont de la Tseco.

Quel pourcentage d'élèves représente les filles de la Ts.ECO ?

Solution : 10,8%.

### III Pourcentages successifs

Des augmentations (ou baisses) successives ne s'additionnent pas mais se font plutôt en cascade.

**Application n°6** : La population d'un village était de 4 550 habitants au 1er janvier 1993. Elle a augmenté de 8 % chacune des 2 années suivantes. Quelle est la population au bout d'un an ? de deux ans ?

Solution : La population était, le 1er janvier 1994,

Au 1er janvier 1995, elle était de 5 307 habitants

**ATTENTION** : Une augmentation de x% ne compense pas une baisse de x%

Une baisse de x % ne compense pas une augmentation de x %

Un article coûtant 345 F subit une baisse de 10% puis quelques mois plus tard une hausse de 10%. Quel est alors son prix ?

Après remise de 10%, il coûte 310,5

en effet Après l'augmentation de 10%, son prix est alors  $310,5 \times (1 + 10\%) = 341,55$ . On constate qu'il n'est pas revenu au prix initial.

Des évolutions successives exprimées en pourcentages se traduisent par des produits de coefficients multiplicateurs. La baisse de 10% correspond au coefficient multiplicateur : 0,9. La hausse de 10% correspond au coefficient multiplicateur : 1,1 or  $0,9 \times 1,1 = 0,99$  or  $345 \times 0,99 = 341,55$

Rappel : Pour calculer les variations en pourcentages d'une quantité, on utilise la formule suivante :  $T = \frac{VA - VD}{VD} \times 100$

VA= Valeur d'Arrivée et VD= valeur de Départ

-Si  $T > 0$  on a une hausse de T% -

-Si  $T < 0$  on a une baisse de T%

### IV Coefficient multiplicateur

Propriété : Lorsqu'une valeur VD subit une évolution pour arriver à une valeur VA, elle est multipliée par un nombre positif CM appelé coefficient multiplicateur. Si t est le taux d'évolution, alors  $CM = 1 + t/100$  ou encore  $t = (CM - 1) \times 100$

En effet une hausse de t% donne le coefficient multiplicateur  $CM = 1 + t/100$

En effet une baisse de t% donne le coefficient multiplicateur  $CM = 1 - t/100$

Si  $CM > 1$  alors  $t = 100 (CM - 1)$

Si  $CM < 1$  alors  $t = 100 (1 - CM)$

### Pourcentages additifs ou Pourcentages à ajouter

**Définition :** Un Pourcentage est dit **additif** ou est appelé Pourcentage à **ajouter** s'il peut s'exprimer sous la forme  $(100 + x) \%$  où  $x$  est le pourcentage à ajouter au montant initial.

**Exemple :** Pour expédier une marchandise achetée à 2 540 F, on paye 7,5 % du prix d'achat. Quel sera le coût de cette marchandise lorsqu'elle arrivera à destination ?

#### Solution

##### 1<sup>ière</sup> Méthode

Calculons le coût de cette marchandise :

- Frais de transport :  $\frac{2540 \times 7,5}{100} = 190,5 \text{ F.}$
- Coût de la marchandise :  $2\,540 + 190,5 = 2\,730,5 \text{ F.}$

##### 2<sup>ème</sup> Méthode

Utilisons la proportionnalité directe pour calculer la quatrième proportionnelle  $x$  :

$$\text{Proportion : } \frac{100}{2540} = \frac{107,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2540 \times 107,5}{100} = 2\,730,5 \text{ F.}$$

Dans la deuxième méthode, pour déterminer le coût de la marchandise, on a multiplié le prix par 107,5 % c'est-à-dire  $(100 + 7,5) \%$  soit 1,075.

#### Remarque :

- Ajouter 7,5 % équivaut à prendre 107,5 % , donc multiplié le montant par 1,075.
- Ajouter  $x \%$  équivaut à prendre  $(100 + x) \%$

### Pourcentages soustractifs ou Pourcentages à retrancher

**Définition :** Un Pourcentage est dit **soustractifs** ou est appelé Pourcentage à **retrancher** s'il peut s'exprimer sous la forme  $(100 - x) \%$  où  $x$  est le pourcentage à soustraire au montant initial.

**Exemple :** Un objet supporte 5 % de taxe du prix de vente de 7 320 F. Quel sera le prix de vente des taxes déduites ?

#### Solution

##### 1<sup>ière</sup> Méthode (utilisation du coefficient de proportionnalité)

Calculons :

- Montant de la taxe :  $\frac{7320 \times 5}{100} = 366 \text{ F.}$
- le prix de vente des taxes déduites :  $7320 - 366 = 6954 \text{ F.}$

**2<sup>ème</sup> Méthode** (utilisation de la proportionnalité directe)

**Proportion :**  $\frac{100}{7320} = \frac{95}{x} \Rightarrow x = \frac{7320 \times 95}{100} = 6954 \text{ F.}$

Dans la deuxième méthode, pour déterminer le montant du prix de vente des taxes déduites, on a multiplié le montant 7320 par  $\frac{95}{100}$  c'est-à-dire  $(100 - 5) \%$  soit 95%.

**Remarque :**

- Retrancher 5 % équivaut à conserver 95 % , donc  $(100 - 5) \%$  multiplié par 0,95.
- Retrancher  $x \%$  équivaut à conserver  $(100 - x) \%$
- Exemple : Une valeur passe de 120 à 80. Son coefficient multiplicateur est  $CM = 80 / 120 = 2 / 3 = 0,6667$  or  $(0,667 - 1) \times 100 = -33,33$ . La valeur a donc baissé d'environ 33,33% ou d'un tiers de façon exacte.

## VI Formules

Variation absolue  $\Delta V = VA - VD$

Coefficient multiplicateur  $CM = VA / VD$

Variation relative  $VR = (VA - ) / VD$

## VII Taux d'évolution global :

Définition et propriété :

Une valeur subit deux évolutions successives aux taux  $t_1$  et  $t_2$ . Globalement, elle subit une évolution au taux  $t$ . Le coefficient multiplicateur global est :  $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$  et le taux global d'évolution est :

$$T_{\text{global}} = (CM_{\text{global}} - 1) \times 100$$

Exemple : Un prix initial de 400 € augmente de 10% puis augmente de 20% Attention : Pour calculer le taux d'évolution global, on ne peut pas additionner des pourcentages d'évolutions ! il faut utiliser les coefficients multiplicateurs.  $CM_1 = 1,1$  et  $CM_2 = 1,2$  pour connaître le coefficient multiplicateur global, on multiplie les coefficients multiplicateurs :  $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 = 1,1 \times 1,2 = 1,32$  or  $(1,32 - 1) \times 100 = 32$  donc le taux global d'évolution est de 32% et non 30%

## VIII Taux d'évolution réciproque :

Définition et propriété :

Une valeur subit une évolution du taux  $t$ . Pour revenir à sa valeur initiale, on applique un taux d'évolution  $t'$ . Le taux d'évolution réciproque  $t'$  est tel que le produit des coefficients multiplicateurs  $CM$  et  $CM'$  des taux  $t$  et  $t'$  est égal à 1 :  $CM \times CM' = 1$ . Ainsi, le coefficient multiplicateur réciproque est  $CM' = 1/CM$  dont le taux d'évolution réciproque est  $t' = (-1) \times 100$

### IX Pourcentages par tranches

**Définition** : Les pourcentages par tranches sont des pourcentages relatifs aux calculs d'un montant par intervalles de classe. Le tant pour cent ou ( le tant pour mille ) varie le plus souvent d'une classe à une autre. On peut dire également que les pourcentages par tranches sont des pourcentages qui sont appliqués sur un intervalle de valeur comprise entre deux bornes. Comme on ne peut pas appliquer à toutes les valeurs à la fois, on se sert des valeurs de tranche : ( VT = borne supérieur – borne inférieure ).

Soit un intervalle ouvert ]  $a$  ;  $b$  [ de classe en % . Le calcul de  $x$  % se fait sur la différence des bornes : c'est-à-dire la différence de la borne inférieure  $b$  et de la borne supérieur  $a$  (  $b - a$  ).

Alors le montant de la tranche est donné par :  $\frac{(b - a) \times c}{100}$ .

#### Exemple

Le directeur commercial de l'entreprise DEMBELE rejoint annuellement une commission sur le chiffre d'affaire ainsi calculé :

- De 0 à 1 000 000, on a une commission de 0%.
  - De 1 000 000 à 2 000 000, on a une commission de 2%.
  - De 2 000 000 à 4 000 000, on a une commission de 3%.
  - De 4 000 000 et plus, on a une commission de 4%.
- a- Calculer ses appointements pour les chiffres d'affaires suivantes :  
2 650 000 F CFA et 5 800 000 F CFA.
- b- Déterminer le chiffre d'affaire correspondant à la commission 56 000 F CFA.

#### Solution

a- Calculons les appointements:

Pour le chiffre d'affaire de 2 650 000 F CFA, on a :

De 0 à 1 000 000, on a : 0

De 1 000 000 à 2 000 000, on a :  $\frac{(2\,000\,000 - 1\,000\,000) \times 2}{100} = 20\,000$

De 2 000 000 à 2 650 000, on a :  $\frac{(2\,650\,000 - 2\,000\,000) \times 3}{100} = 19\,500$

**Total** = 20 000 + 19 500 = 39 500

Pour le chiffre d'affaire de 5 800 000 F CFA, on a :

De 0 à 1 000 000, on a : 0

De 1 000 000 à 2 000 000, on a :  $\frac{(2\,000\,000 - 1\,000\,000) \times 2}{100} = 20\,000$

De 2 000 000 à 4 000 000, on a :  $\frac{(4\,000\,000 - 2\,000\,000) \times 3}{100} = 60\,000$

De 4 000 000 à 5 800 000, on a :  $\frac{(5\,800\,000 - 4\,000\,000) \times 4}{100} = 72\,000$

**Total** = 20 000 + 60 000 + 72 000 = 152 000 F CFA.

b- Déterminons le chiffre d'affaire correspondant à la commission 56 000 F CFA.

56 000 F CFA est compris entre 20 000 F CFA et 60 000 F CFA, par conséquent le pourcentage est de 3 %.

Ainsi :

- Un chiffre d'affaire de 2 000 000 FCFA donne 20 000 F CFA.
- Le reste du tarif de 3 % donne 36 000 F CFA.

La somme correspondante au 36 000 F CFA est de  $\frac{36\,000}{0,03} = 1\,200\,000$  F CFA.

Donc le chiffre d'affaire sera de : 2 000 000 + 1 200 000 = 3 200 000 F CFA.

### **X Pourcentages en dedans** (tant pour cent en dedans)

**Définition** : Si la quantité à laquelle s'applique le tant pour cent est inférieur à la quantité connue, on dit qu'on calcule un tant pour cent en dedans.

#### **Exemple**

Les droits de douanes sur une marchandise s'élève à 12% de son prix d'achat.

Quel est le montant de ces droits sachant que le prix d'achat majoré des droits de douane est de 23744 F ?

#### **Solution**

Calculons d'abord, pour un prix d'achat de 100 F, le prix d'achat majoré des droits de douane : 100 F + 12 F = 112 F.

#### **1<sup>ière</sup> Méthode**

Calculons :

- Pour un prix total de 112 F, les droits s'élèvent à 12 F.

- Pour un prix total de 23744 F, les droits s'élèvent à  $x$  F.

$$\text{Alors } x = \frac{12 \times 23744}{112} = 2544 \text{ F.}$$

Donc les droits de douane représentent les  $\frac{12}{112}$  du prix total.

## 2<sup>ème</sup> Méthode

| Droits | Prix d'achat | Prix d'achat majoré |
|--------|--------------|---------------------|
| $x$    | $y$          | 23744               |
| 12 F   | 100 F        | 112 F               |

$$\text{Alors } x = \frac{12 \times 23744}{112} = 2544 \text{ F.}$$

### Remarque :

On peut calculer le prix d'achat par le même procédé :  $y = \frac{100 \times 23744}{112} = 21200 \text{ F.}$

Donc le prix d'achat représentent les  $\frac{100}{112}$  du prix total. Le coefficient de proportionnalité est ici  $\frac{100}{112}$

## XI Pourcentages en dehors (tant pour cent en dehors)

**Définition :** Si la quantité à la quelle s'applique le tant pour cent est supérieur à la quantité connue, on dit qu'on calcule un tant pour cent en dehors.

### Exemple

Un éditeur accorde à une librairie une remise de 30 % sur les prix marqués.

Quel est le montant de cette remise sachant que le prix net est de 21 450 F ?

### Solution

- Pour un prix marqué de 100 F, le prix net est :  $100 - 30 = 70 \text{ F CFA.}$
- Pour un prix net de 70 F, la remise est :  $100 - 30 = 70 \text{ F CFA.}$
- Pour un prix net de 21 420 F, la remise est :  $x \text{ F CFA.}$

$$\text{Alors } x = \frac{21\,420 \times 30}{70} = 9\,180 \text{ F CFA. La remise représente donc les } \frac{30}{70} \text{ du prix net.}$$

### Remarque :

On peut calculer le total des prix marqués par le même procédé :  $\frac{100 \times 21420}{70} = 30\,600 \text{ F CFA}$

Le total des prix marqués représente donc les  $\frac{100}{70}$  du prix net.

Le coefficient de proportionnalité est  $k = \frac{100}{70}$ .

**NB :**

Normalement c'est le total des prix marqués c'est-à-dire les 30 600 F CFA qu'on devrait appliquer au 30 % pour obtenir le montant de la remise, mais de façon indirecte on a déterminé le montant de la remise sur le montant connu c'est-à-dire 21 420 F CFA.

Donc 30 000 F CFA est supérieur à la quantité connue : 21 420 F CFA.

## XII Coût – Prix d'achat – Prix de revient

Les charges étant classées par fonctions, nous pouvons retenir :

- **(Prix d'achat brut) – (Bonifications) = Prix d'achat net.**
- **(Prix d'achat net) + (Frais d'achat) = Coût d'achat.**

Pour un industriel ou un artisan, nous pouvons retenir :

- **(Coût d'achat) + (Frais de fabrications) = Coût de production.**
- **(Prix d'achat net) + (Frais d'achat) = Coût d'achat.**
- **(Coût de production) + (Frais de distribution : vente) = Prix de revient.**

Pour un commerçant, nous pouvons retenir :

$$\text{(Coût d'achat) + (Frais de distribution) = Prix de revient.}$$

Ainsi : Un coût est constitué par le total des charges supportées par un objet ou un groupe d'objets, jusqu'à un stade autre que le stade final.

**Le prix de revient** est donc le total de tout ce qu'a coûté l'objet, ou le groupe d'objets, jusqu'au stade final de la livraison au client. S'il n'est pas fait mention des frais de distribution, il est égal au coût de production (**Industrie**) ou au coût d'achat (**Commerce**).

### Exemple

On propose à un fourreur des peaux à une somme de 180 000 F. Il obtient sur ce prix une remise de 5 %. Il paye pour le transport 6 % du prix d'achat net. Les frais de transformation s'élèvent à 40 % du prix d'achat augmenté de transport. Il estime ses frais de vente à 10 % du prix de revient. Calculer le prix de revient.

### Solution

- Retrancher 5 %, c'est multiplier par 0,95.
- Ajouter 6 %, c'est multiplier par 1,06.
- Ajouter 40 %, c'est multiplier par 1,40.
- Le prix d'achat net est :  $180\,000 \text{ F} \times 0,95 = 171\,000 \text{ F}$ .
- Le coût d'achat est :  $171\,000 \text{ F} \times 1,06 = 181\,260 \text{ F}$ .
- Le coût de production est :  $181\,260 \text{ F} \times 1,40 = 253\,764 \text{ F}$ .

Le dernier calcul nécessite une préparation car les frais de vente sont calculés sur le prix de revient qui les contient.

Pour un prix de revient de 100 F, les frais de vente s'élèvent à 10 F, le coût de production à  $100 \text{ F} - 10 \text{ F} = 90 \text{ F}$ .

Pour un coût de production de 90 F, le prix de revient est 100 F.

Pour un coût de production de 253 764 F, le prix de revient est :  $\frac{100 \text{ F} \times 253\,764}{90} = 281\,960 \text{ F}$ .

### XIII Bénéfice

#### **a- Marge brut – Bénéfice brut**

Une marge est la différence entre le prix de vente hors taxe et un coût ou un prix (d'achat ou de revient). Ainsi retenons les relations suivantes :

- En industrie, nous pouvons retenir :

**(Prix de vente hors taxe) – (Coût de production) = Marge sur Coût de production ou Marge brute.**

- En commerce, nous pouvons retenir :

- **(Prix de vente hors taxe) – (Coût d'achat) = Marge sur Coût d'achat ou Marge brute.**
- **(Prix de vente hors taxe) – (Prix de revient) = Marge sur prix de revient ou Bénéfice brut ou Bénéfice commercial.**
- **(Marge brute) – (Frais de distribution) = Bénéfice Brut.**
- **(Prix de vente hors taxe) – (Prix de revient) = Bénéfice.**

#### Exemples

**Exemple 1 :** (Calcul du bénéfice, connaissant son tant pour cent du prix de revient et le prix de vente).  
On vend un objet revenant à 75 F avec 30 % de bénéfice sur ce prix. Calculer le bénéfice et le prix de vente hors taxe.

**Exemple 2 :** (Calcul du bénéfice, connaissant son tant pour cent du prix de revient et le prix de vente hors taxe).

Un objet dont le prix de vente hors taxe est 360 F, laisse un bénéfice de 20 % du prix de revient. Calculer le bénéfice.

#### Solutions

##### Solution 1 :

C'est un pourcentage simple à ajouter :

- Bénéfice =  $75 \text{ F} \times 0,3 = 22,5 \text{ F}$ .
- Prix de vente hors taxe =  $75 \text{ F} + 22,5 \text{ F} = 97,5 \text{ F}$  ou  $75 \text{ F} \times 1,3 = 97,5 \text{ F}$ .

##### Solution 2 :

- Pour un prix de revient de 100 F, le bénéfice est de 20 F et le prix de vente hors taxe de  $100 \text{ F} + 20 \text{ F} = 120 \text{ F}$ .
- Pour un prix de vente hors taxe de 120 F, le bénéfice est de 20 F.
- Pour un prix de vente hors taxe de 360 F, le bénéfice est  $\frac{20 \text{ F} \times 360}{120} = 60 \text{ F}$

#### **b- Taux de marque**

On appelle **taux de marque**, le bénéfice correspondant à un prix de vente de 100 F, c'est-à-dire le **pourcentage de bénéfice calculé sur le prix de vente**.

Il s'applique actuellement, en général, au prix de vente hors taxe.

En général on peut retenir :

$$\text{Bénéfice} = \frac{\text{Prix de revient} \times \text{Taux de marque}}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\frac{\text{Pourcentage}}{\text{Prix de revient}} = \frac{100 \times \text{Taux de marque}}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\text{Prix de vente} = \frac{\text{Prix de revient} \times 100}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\text{Coefficient multiplicateur} = \frac{100}{100 - \text{Taux de marque}}$$

### Exemples

**Exemple 1** (Calcul du bénéfice connaissant le taux de marque et le prix de revient)

Calculer le bénéfice correspondant à un taux de marque de 28% sur un objet revenant à 432 F.

**Exemple 2** (Calcul des pourcentages de bénéfice)

Le prix de revient d'un objet est 150 F. Son prix de vente hors taxe est 240 F.

Quel pourcentage du prix de revient, et quel pourcentage du prix de vente, représente le bénéfice ?

### Solutions

#### Solution1

Sur un prix de vente hors taxe de 100 F, le bénéfice est de 28 F et le prix de revient de :

$$100 \text{ F} - 28 \text{ F} = 72 \text{ F}.$$

$$\text{Pour un prix de revient de 432 F, le bénéfice s'élève à : } \frac{432 \text{ F} \times 28}{72} = 168 \text{ F}$$

#### Solution2

$$\text{Le bénéfice s'élève à : } 240 \text{ F} - 150 \text{ F} = 90 \text{ F}.$$

### QUELQUES EXEMPLES

Exemple : Un prix de 100 € augmente de 25%. Il est donc multiplié par CM = 1,25 et passe à 125 €.

valeur initiale de 100 €, on divise 125€ par 1,25.

multiplicateur réciproque est CM' = 100 / 125 = 0,8.

d'évolution réciproque : t' = (0,8 - 1) x 100 = -20%

25 %, il faut appliquer une baisse réciproque de 20% pour retrouver le prix initial.

Pour revenir à sa

Donc le coefficient

D'où le taux

après une hausse de

Exemple : En 2012, le chiffre d'affaire d'une entreprise a baissé de 15% par rapport à 2011.

1°) Calculer le coefficient multiplicateur du chiffre d'affaire entre 2011 et 2012.

2°) En déduire l'indice d'évolution du chiffre d'affaire pour la même période.

Solution :

1°) On note  $y_1$  et  $y_2$  les chiffre d'affaire de l'entreprise en 2011 et 2012 respectivement. D'après l'énoncé, le taux d'évolution du chiffre d'affaire entre  $y_1$  et  $y_2$  est :

$t = -15\% = -0,15$  Donc, le coefficient multiplicateur est donné par :  $k = 1 + t = 1 + (-0,15) = 0,85$

Conclusion : Le coefficient multiplicateur est :  $k = 0,85$ .

2°) Nous avons deux méthodes à notre disposition pour calculer l'indice :

– soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (5)  $I = 100 \times (1 + t)$   $I = 100 \times [1 + (-0,15)]$   
 $I = 100 \times 0,85$   $I = 85$

– soit à partir du coefficient multiplicateur en appliquant la formule (3)  $I = 100 \times k$   $I = 100 \times 0,85$   $I = 85$

Conclusion : L'indice d'évolution du chiffre d'affaire est :  $I = 85$

QCM : Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse

Exercice1 : Jean désire acheter une automobile qui, neuve, vaut 13500€. Jean dit que l'achat de l'automobile représente 60% de son budget. Le budget dont dispose Jean est de :

- a. 20000€      b. 8100€      c. 22500€

Exercice2 : Pour un prix de 100€, une augmentation de 2€ correspondant à :

- a. Une hausse de 2%      b. Une hausse de 102%      c. Un produit de 0,02.

Exercice3 : Un prix TTC est de 129,90€ avec une TVA à 19,6%. Le prix HT, au centime, est de :

- a. 155,36€      b. 110,30€      c. 108,61€

Exercice4 : A 19h, dans un magasin qui fait nocturne, on compte 1500 clients et seulement 200 clients à 21h. La fréquentation a baissé, à 1 point près, de : a. 13%

b. 75%      c. 87% Exercice5 : pour les soldes, on applique à un prix un abatement de 10% puis un abatement de 20%. Le prix est multiplié par : a. 0,30

b. 0,72      c. 0,70 Exercice 6 : si le nombre 3400 a pour indice 100, l'indice du nombre 4318 est : a. 79      b. 127      c. 127%

d. 27% Exercice7 : le prix d'un article a d'abord été doublé, puis ensuite triplé. Le taux d'évolution global est : a. 600%      b. 500%      c. 400% Exercice 8 :

le volume d'un ballon publicitaire a augmenté de 60% sous l'effet de la chaleur. Pour retrouver son volume initiale il doit maintenant diminuer de : a. 40%      b. 37,5%      c. 60% Exercice9 : pour compenser une baisse d'un quart d'une valeur, il faut :

- a. Augmenter de 25%      b. multiplié par 4      c. augmenté d'un tiers

Exercice 10 : Un capital de 4800€ augmente de 6,5% par an. Au bout de deux ans, le capital a augmenté de :

- a. 624€                                      b. 644, 28€                                      c. 3120€

Exercice 11 : Une société de crédit propose un prêt de 2000€. Le taux mensuel est 0.9%, ce qui signifie que, chaque moi, la valeur due augmente de 0.9%. Le taux annuel correspondant arrondi à un chiffre après la virgule, est :

- a. 12,1%                                      b. 10,8%                                      c. 11,4%

Exercice 12 : par lecture des indice d'une valeur boursière, compléter le tableau ci-dessous en donnant les pourcentages d'évolution par rapport au mois de janvier :

| AU 1 <sup>ER</sup> du mois | JANVIER | FEVRIER | MARS | AVRIL |
|----------------------------|---------|---------|------|-------|
| INDICE                     | 100     | 110     | 123  | 103   |
| TAUX D'EVOLUTION           |         |         |      |       |

Exercice 13 : a) Apres une hausse de 3%, la population d'une ville atteint 20600 habitants en 2010. Quel était la population en 2009 ?

b) Apres une remise de 20%, une veste est vendu a 58€. Quel était le prix initial de la veste ?

c) Le taux de TVA est de 19,6% et le prix TTC d'un article est de 258€. Quel est le prix hors taxe

Exercice 14 : Etude du marché solaire thermique dans 21pays le l'UE

| ANNEES                                  | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|-----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Croissance par rapport à l'an précédent | 11   | 25   | 47   | -9   | 60   | -10  |

a) Expliquer les signe – qui apparaisse dans le tableau.

b) Calculer le taux d'évolution globale.

#### EXERCICE14

1°) Sur un lycée de 1 534 élèves, 227 sont inscrits au cours LT/COURS.

Quel est le pourcentage d'élèves du lycée inscrits au cours LT ?

2°) on a célébré au Mali 253,7 milliers de mariages en 1994. Le nombre de mariages a augmenté en 1995 de 4,4%. Combien a-t-on célébré de mariage au Mali en 1995 ?

3°) Claire a payé, après 15% de remise, 265,20 F une robe. Quel était le prix de la robe avant la remise ?

EXERCICE 15 Une société dispose d'une somme de 1.000.000 FCFA qu'elle décide de repartir de la façon suivante : 17,5 % de cette somme seront affectée à la constitution d'un

compte de retraite ; sur le reste 8% sont destinés aux œuvres sociales et le reste est partagé entre les salariés proportionnellement à leurs anciennetés respectivement 5 ans ; 2 ans ; 15 ans ; 8 ans.

Effectuer le partage

### Exercices

- 1 Calculer : 3 % sur 9260 F – 7,2 % sur 2870 F – 12,2 % sur 870 F – 4 ‰ sur 6 800 F – 2,4 ‰ sur 9 400 F – 15,3 ‰ sur 250 000 F.
- 2 Quel pourcentages représentent : 8 F sur 60 F – 72 F sur 450 F – 295,3 F sur 6300 F – 126 F sur 6 000 F ?
- 3 Indiquer le tant pour mille correspondant aux sommes de l'exercice N°2.
- 4 Calculer les prix brut sur les quels ont été calculés les rabais suivants :
- 5 Un commissionnaire vend pour le compte d'un producteur des marchandises. Il prélève une commission et remet à son commettant la différence entre le prix de vente et la commission. Quelle somme versera-il dans les conditions suivantes :

|               |           |           |             |
|---------------|-----------|-----------|-------------|
| Prix de vente | 720 000 F | 870 000 F | 5 800 000 F |
| Commission    | 2 %       | 1 ½ %     | 4,5 %       |

- 6 Les prix de marchandises achetées aux enchères sont majorés de 14 % de frais et taxes. Quels sont les prix de revient correspondant aux enchères suivantes : 2 800 F ; 7 200 F ; 15 600 F ?  
Quel est le prix net de vente d'un objet marqué 100 F sur le quel on fait une remise de 15 % et une escompte de 3 % ?
- 7
- 8 Un fabricant vend une paire de chaussures au prix marqué de 32 F et accorde 15 % de remise et 5 % d'escompte. Calculer le prix net de vente ainsi obtenu.
- 9 Trois associés ont constitués une entreprise et ont apporté respectivement 500 000 F ; 700 000 F et 1 000 000 F. Le premier est gérant et à ce titre il lui est attribué un prélèvement égal à 10 % du bénéfice réalisé. Ce qui reste du bénéfice est reparti entre les trois associés proportionnellement au capital qu'ils ont apporté. A la fin de la première année, le bénéfice étant 110 000 F, calculer la part de chacun.
- 10 Un industriel fabricant des appareils d'un modèle unique réorganise son service des ventes. Il constate une importante augmentation du nombre d'articles vendus, dans la proportion de 11,5 à 46 alors que le chiffre d'affaires passe de 14 007 F à 81 240,6 F.  
Pour couvrir un accroissement de charges, il a dû majorer son prix de vente. Calculer le pourcentage de majoration :
  - Par rapport au prix de vente primitif ;
  - Par rapport au prix de vente actuel.

11

Un savon a perdu en fondant 30 % de son poids initial. Quel était ce poids si le poids actuel est de 770 kg ?

12

Une balle de coton entreposé dans un endroit humide a augmenté de poids de 5 % par rapport à son poids initial. Quel était celui – ci si son poids actuel est 567 kg ?

12 % d'une livraison de fruits sont inutilisables. Le kilogramme de fruits en bon état revient à 1,75 F. Quel est le prix d'achat du kilogramme ?

13

Deux ouvriers travaillent 40 heures par semaine plus quelques heures supplémentaires rémunérées au tarif normal majoré de 25 %. A la fin d'une semaine, leur employeur retient 6,5 % pour la sécurité sociale et leur verse un total de salaires de 528,925 F. Calculer le total de salaire avant retenues. Sachant que le premier a fait 40 heures à 6 F et 6 heures supplémentaire et que le deuxième a fait 40 heures à un certain taux et des heures supplémentaires à 6,75 F, trouvé combien le deuxième a fait d'heures supplémentaires.

14

Un commerçant achète des marchandises à 1280 F. Il paye 5 % de ce prix pour faire divers. Calculer le prix de revient.

15

Un commerçant achète pour un prix total de 3 480 F, deux coupes de tissus. Les  $\frac{3}{7}$  du prix de la première sont égaux aux  $\frac{2}{5}$  du prix de la deuxième.

- 1) Calculer le prix d'achat respectif de deux coupes.
- 2) Le marchand veut réaliser sur la première un bénéfice net de 20 % du prix d'achat. Les frais et les taxes s'élèvent à 16 % du prix de vente. Par quel coefficient faut-il multiplier le prix d'achat pour obtenir le prix de vente ? Quel est le prix de vente de la première pièce ?
- 3) Calculer le pourcentage de bénéfice net réalisé sur le prix de vente de la deuxième pièce, si le commerçant la vend au prix trouvé ci-dessus pour la première et si les charges sont dans les mêmes rapports.

## Pourcentages par tranche.

16

En fin d'année, un commerçant décide d'accorder des ristournes (réductions de prix accordés par un commerçant ou remise de prix accordés par un commerçant) à ses meilleurs clients selon les volumes de ventes :

| Volumes de ventes  | Taux des ristournes |
|--------------------|---------------------|
| [ 10 000 ; 25 000[ | 2 %                 |
| [25 000 ; 50 000[  | 2,5 %               |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| [50 000 ; 100 000[  | 3 % |
| [110 000 ; 200 000[ | 4 % |
| [200 000 ; 450 000[ | 6 % |
| [ 450 000 ; + ∞[    | 7 % |

- 1) Calculer les valeurs des tranches et les montants des ristournes accordés sur chaque vente.
- 2) Un client apporte deux factures  $F_1 = 175\,000$  UM et  $F_2 = 600\,000$  UM. Calculer la ristourne totale sur  $F_1$  et  $F_2$ .

**17** Un commerçant décide d'accorder des ristournes à sa clientèle selon le tableau suivant :

| Volumes de ventes    | Taux des ristournes |
|----------------------|---------------------|
| [ 15 000 ; 45 000[   | 3 %                 |
| [45 000 ; 90 000[    | 4 %                 |
| [90 000 ; 140 000[   | 5 %                 |
| [140 000 ; 200 000[  | 6,2 %               |
| [200 000 ; 350 000[  | 7%                  |
| [ 350 000 ; 700 000[ | 7,2 %               |
| [ 700 000 ; +∞ [     | 7,2 %               |

- 1) Calculer les valeurs des tranches et les remises accordées sur chaque vente.

- 2) Un client apporte deux factures  $F_1 = 125\,000$  UM ;  $F_2 = 349\,000$  UM et  $F_3 = 1\,000\,000$  UM. Calculer la remise totale sur  $F_1$  ;  $F_2$  et  $F_3$

## CHAPITRE IV : PROGRESSION ARITHMETIQUE ET GEOMETRIQUE

### I Progression arithmétique

a) **Définition :**

On appelle progression arithmétique une suite de terme rangé tel que chacun s'obtient en ajoutant un nombre constant (appelé raison et noté  $r$ ) à celui qui le précède.

Dans ce cas  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n + r$  avec  $r$  la raison  $r \in \mathbb{R}$

NB : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que  $U_{n+1} - U_n = r$

b) **Application n°1 :**

Soit  $U_n = 2n + 3$  montrer que  $U_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Solution :

Montrons que  $U_n$  est une suite arithmétique  $U_n$  est une suite arithmétique ssi  $U_{n+1} - U_n = r$   
 $U_n = 2n + 3$   $U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 2 + 3 = 2n + 5$   $U_{n+1} - U_n = 2$   
 $n = 2$  donc  $U_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 2$  et de premier terme  $U_0 = 3$

c) **Expression du terme général d'une suite arithmétique**

Soit  $U_n$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $U_p$  ( $p < n$ ).

L'expression du terme général est  $U_n = U_p + (n-p)r$

Si  $p=0$  alors  $U_n = U_0 + nr$

Si  $p=1$  alors  $U_n = U_1 + (n-1)r$

d) **Expression de la somme  $S_n$  d'une suite arithmétique**

$$S_n = \left( \frac{n-p+1}{2} \right) (U_p + U_n)$$

$$\text{Si } p=0 \text{ alors } S_n = \left( \frac{n+1}{2} \right) (U_0 + U_n)$$

$$\text{Si } p=1 \text{ alors } S_n = \left( \frac{n}{2} \right) (U_1 + U_n)$$

$n$  est le nombre de terme,  $U_p$  le premier terme,  $U_n$  est le dernier terme. En remplaçant  $U_n$  par son expression on obtient  $S_n = \left( \frac{n-p+1}{2} \right) (2U_p + (n-p)r)$

e) **CAS PARTICULIER**

Trois termes  $C_1$  ;  $C_2$  et  $C_3$  sont en progression arithmétique ssi  $2C_2 = C_1 + C_3$  Dans ce cas  $C_1 = C_1$ ,  $C_2 = C_1 + r$ ,  $C_3 = C_1 + 2r$

**Comment insérer  $K$  terme en progression arithmétique entre  $a$  et  $b$  ?**

Pour insérer, nous devons d'abord chercher la raison de la progression arithmétique qui se calcule par  $r = (b - a) / (k + 1)$

Exemple : Insérer 4 capitaux en progression arithmétique entre 20 000 et 200 000

Solution : Insérons quatre capitaux

Soient C1, C2, C3 et C4 ces quatre capitaux  $a = 20\,000$  et  $b = 200\,000$   $k = 4$   $r = (200\,000 - 20\,000) / (4 + 1) = 36\,000$

$C1 = 20\,000 + 36\,000 = 56\,000$ ,  $C2 = 56\,000 + 36\,000 = 92\,000$ ,  $C3 = 92\,000 + 36\,000 = 128\,000$  et  $C4 = 128\,000 + 36\,000 = 164\,000$

## II Progression géométrique

- 1) **Définition** : On appelle progression géométrique une suite de terme telle chacun s'obtient en multipliant par un terme constant appelé raison de la progression géométrique (il est noté  $q$ ).

Dans ce cas  $V_{n+1} = V_n q$

NB : Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que :  $V_{n+1} / V_n = q$

Exemple : soit  $V_n$  la suite définie par  $V_n = 2^{n+1}$  Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Solution :

$V_n$  est une suite géométrique de raison  $q=2$  et de premier terme  $V_0=2$   $q$  et de premier terme  $V_p$  :  $V_n = V_p * q^{n-p}$  Si  $p=0$   $V_n = V_0 * q^n$  Si  $p=1$   $V_n = V_1 * q^{n-1}$  Exemple : Soit  $V_n$  une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $V_0=2$ . Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire  $V_{20}$

Solution  $V_{20} = 221$

Application : Soit  $V_n$  une suite géométrique telle que  $V_5=8$  et  $V_9=128$

a) Déterminer la raison et le premier terme de cette suite

b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$

Expression du terme général Soit  $V_n$  est une suite géométrique de raison

**Cas particuliers** : Trois termes  $C1$  ;  $C2$  et  $C3$  sont en progression géométrique ssi  $C_2^2 = C1 \times C3$  dans ce cas  $C1 = C1$  ;  $C2 = C1 q$  ;  $C3 = C1 q^2$  **Somme  $S_n$  des termes d'une suite géométrique**  $S_n = V_p (1 - q^{n-p+1}) / (1 - q)$

$V_p$  Premier terme,  $V_n$  dernier terme,  $q$  la raison de la progression géométrique,  $S_n$  la somme de la suite géométrique.

### Comment insérer k capitaux en progression géométrique entre a et b

Pour insérer entre a et b on calcule :  $q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$

Exemple : Insérer deux capitaux en progression géométrique entre 5 000 et 135 000

Solution : Insérons deux capitaux en progressions géométriques entre 5 000 et 135 000  $k=2$   
 $a=5\ 000$   $b=135\ 000$  donc  $q=3$ ,  $C_1=C_0.q=5\ 000 * 3 = 15\ 000 \rightarrow C_1=15\ 000$ ,  $C_2=C_1.q=15\ 000 * 3=45\ 000 \rightarrow C_2=45\ 000$

**Exercice1** : Un pays A à un taux de croissance démographique de 0,4% par an .Un pays B à un taux de croissance de 3%. Au 1<sup>er</sup> Janvier 1999 le pays A compte 40 millions d 'habitants et le pays B 30 millions.

- 1) Quel sera le nombre d'habitants de chacun des pays A et B au 1<sup>er</sup>Janvier 2009
- 2) En quelle année la population double dans chacun des pays.

### Exercice2

Un véhicule coute 80 millions de francs en 1998.Il se déprécie de 20% par an. (C'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an).

- 1) Quelle est la valeur du véhicule au bout de cinq ans.
- 2) On suppose que pendant la même période les prix des véhicules neufs ce type augmente de 4% par an.
- 3) Quelle somme d'argent l'entreprise doit-elle prévoir pour remplacer la véhicule dans cinq ans.

### Exercice 3

Au premier janvier de l'année N, la ville de Bamako en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants. L'Institut National de Statistique du Mali fait l'hypothèse qu'à partir du premier janvier de la même année : Le nombre d'habitants de Bamako augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès. Du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville. Pour tout entier naturel n, on note  $U_n$  le nombre d'abonné de la ville de Bamako au premier janvier de l'année N +n . On a donc  $U_0 = 100\ 000$

- 1°) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .

La suite U est-elle arithmétique ? Géométrique ?

- 2°) Justifier que, pour tout entier naturel n,  $U_{n+1} = 1,05 U_n + 4\ 000$

- 3°) Pour tout entier naturel n on pose  $V_n = U_n + 80\ 000$

- a) Calculer  $V_0$

b) Montrer que  $V_n$   $n \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- c) Exprimer  $V_n$  en fonction de n. En déduire que  $U_n = 180\ 000 * (1,05)^n - 80\ 000$

- 4°) On utilise le modèle théorique que l'on vient d'étudier

- a) Quel sera le nombre d'habitants de la ville de Bamako au premier janvier 2020 sachant que  $N$  vaut 2005
- b) Déterminer le sens de variation de la suite  $U$
- c) A partir de quelle année la population de Bamako dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

#### Exercice 4

Disposant d'un capital de 10 000 FCFA un investisseur malien étudie les offres de deux banques différentes maliennes. La BDM propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %. La BNDA propose un placement à intérêts composés au taux annuel de 2 % du capital. Les intérêts obtenus sont augmentés d'une prime annuelle de 170 FCA intégrée au capital. Ainsi, les intérêts et la prime produisent des intérêts pour l'année suivante.

Partie A : Etude l'offre de la Banque Du Mali BDM

On note, pour  $n$  entier naturel,  $a_n$  le capital en FCFA de l'investissement au début de l'année  $n$ . Ainsi  $a_0 = 10\,000$  et  $a_1 = 10\,350$ .

- 1°) Quelle est la nature de la suite  $a$  ? Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$
- 2°) Calculer le capital disponible au début de l'année 10

Partie B : Etude l'offre de la Banque Nationale du Développement Agricole

On note, pour  $n$  entier naturel,  $b_n$  le capital en FCFA de l'investisseur au début de l'année  $n$ . Ainsi  $b_0 = 10\,000$  et  $b_1 = 10\,370$

- 1°) La suite  $b$  est-elle arithmétique ? Géométrique ?
- 2°) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_{n+1} = 1,02b_n + 170$
- 3°) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n = b_n + 8\,500$  a) Calculer  $U_0$  b) Démontrer que la suite  $U$  est géométrique et préciser sa nature. c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $b_n = 18\,500 \cdot (1,02)^n - 8\,500$
- 4°) Calculer le capital disponible au début de l'année 10
- 5°) L'investisseur décide de placer son capital jusqu'au début de l'année 10. Déterminer parmi les deux banques maliennes, celle qui propose l'offre la plus intéressante

#### Exercice 5:

Le prix d'un appareil électronique diminue de 8% chaque année. Au départ le prix était de 200€

- a. Exprime le prix au bout de  $n$  années de diminution.
- b. Calcule le prix au bout de 5 ans, en € près.

#### Exercice 6

Du fait de bouche à l'oreille, le nombre de clients d'un magasin augmente chaque trimestre de 2%. Début Janvier 2010, la fréquentation était de 1000 clients. On note  $u_n$  le nombre de clients au bout de  $n$  trimestres d'augmentation

- 1) a. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
- b) Calculer  $U_4$  ; puis interpréter le résultat
- 2) la fréquentation a-t-elle augmenté de 16% en 2 ans

### Exercice 7

On propose deux contrats de location d'un appartement : 350€ de loyer mensuel l'année de référence, puis chaque année :

Contrat A : Une augmentation de 20€ du loyer mensuel ;

Contrat B : Une augmentation de 5% de loyer mensuel.

Pour l'année  $n$ , on note  $a_n$  et  $b_n$  les loyers mensuels respectifs correspondants au contrat A et B. Ainsi,  $a_0 = 350$  et  $b_0 = 350$ .

- 1) a. Calculer  $a_1$  et  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ .
- b. Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$
- 2) À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n < b_n$ .

### Exercice 8:

Un site de vente par internet souhaite prévoir l'évolution de ses ventes pour les années à venir. Pour cela, on a obtenu le nombre moyen de connexion par jour durant les quatre dernières années

| Année                                 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---------------------------------------|------|------|------|------|
| Le nombre moyen de connexion par jour | 2600 | 2795 | 3005 | 3230 |

- 1) a. Calculer la variation absolue et la variation relative du nombre de connexion par jour entre les deux premières années. On arrondit la variation absolue à  $10^{-3}$  près.
- b. faire le même sur les années suivantes.
- 2) on décide de modéliser le nombre  $U_n$  de connexion futur l'année 2010+n par une suite géométrique de raison 1,075. Ainsi  $U_0 = 3230$ .
- a. explique le choix de 1,075 comme raison.
- b. Calculer  $U_1$  puis interpréter le résultat.
- c. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3) a. Quel serait le nombre de connexion par jour en 2020 ? b. En quelle année ce nombre moyen dépassera-t-il 6000 connexions par jour ?

### Exercice 9

Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu  $v_1$  voies, le 2<sup>e</sup> avait obtenu  $v_2$  voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des  $n$  candidats qui avait obtenu  $v_n$  voies. De plus on a constaté que le  $k$ ème candidat avec  $k \geq 1$  avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat ( $k+1$ )ème du classement ; définissant ainsi une suite numérique  $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouver que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison  $q$ .

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est  $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ . Un candidat est élu président dès le 1<sup>er</sup> tour, lorsque son nombre de voies  $v_1$  dépasse la moitié de  $S_n$  où  $S_n$  désigne le suffrage exprimé.

a) Déterminer en fonction de  $n$  et  $v_1$  le suffrage exprimé  $S_n$ .

b) Examiner si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies. Déterminer alors le nombre  $n$  de candidats qui avaient postulés.

### Exercice 10

Le promoteur du lycée LENTY, veut placer la somme de 1 000 000 F au taux annuel 6,5%. Il peut le faire de deux façons :

Placement à intérêts simples

Placement à intérêts composés

On désigne respectivement par  $C_n$  et  $D_n$  les valeurs acquises par le capital au bout de  $n$  années dans chacun des cas :

1.a) Calculer  $C_1$  ;  $C_2$  et  $C_3$

b) Exprimer  $C_n$  en fonction de  $C_{n-1}$ . En déduire que  $C_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2.a) Calculer  $D_1$  ;  $D_2$  et  $D_3$

b) Exprimer  $D_n$  en fonction de  $D_{n-1}$ . En déduire que  $D_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. Calculer dans chacun des cas, la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.

### Exercice 11

Le loyer mensuel d'une maison est de 50 000 F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%.

1. Quel est le montant du loyer dans 8 ans ?
2. Au bout de combien d'année le loyer aura-t-il doublé ?
3. Calculer le total des loyers payés pendant les 10 premières années.

**Exercice 12**

Un propriétaire désire vendre sa maison qui comporte deux étages de 16 marches chacun. L'acheteur devra payer 10 F pour la 1<sup>re</sup> marche, 20 F pour la 2<sup>ème</sup> marche, 40 F pour la 3<sup>ème</sup> marche ; ainsi de suite, en doublant chaque fois jusqu'à la dernière marche. Quel est le prix de vente de cette maison ?

**Exercice 13**

Dans un pays de 50 millions d'habitants, le taux d'accroissement annuel de la population est de 20%. Quelle sera la population de ce pays dans 1 an ? Dans 2 ans ? Dans 10 ans ?

EXERCICE 5 Un fermier possède dans sa ferme des vaches, des moutons, et des chèvres. On désigne par  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivement le nombre de vaches, de moutons et de chèvres.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  constituent, dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite arithmétique décroissante. Sachant que  $X^2$ ,  $3Y$ ,  $Z^2$  sont dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite géométrique et que le nombre total des animaux est égale à 12.

Déterminez le nombre de vache, de moutons et de chèvres.

**Exercice 14**

En 2014, le Mali a réalisé un taux de croissance du PIB de 7,4 %. En effet selon les économistes, aucun développement économique voire durable ne peut être pleinement efficace s'il ne va de pair avec la croissance économique. Mais hélas, cette croissance provoque l'émission des effets à gaz de serre, la pollution industrielle, les fumées industrielles, la biodiversité, la déforestation . . . bref le réchauffement climatique. Ainsi pour respecter une norme antipollution, le Directeur général de la SOMAPILE s'engage à réduire de moitié sa production de gaz à effet de serre en 10 ans. Pour atteindre cet objectif, il envisage de réduire chaque année sa production de gaz de 5%. Au cours de l'année 2010, la production de gaz  $P_0$  a été de 40 000 tonnes.

1°) Calculez les productions de gaz envisagées pour 2011, 2012 et 2013

2°) On note  $P_n$  la production de gaz envisagée pour 2010 +  $n$ . Justifiez que les nombres  $P_0$  ;  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_n$  . . . forment une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

3°) Le Directeur aura – t – il atteint son objectif en 10 ans ? Si non, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la production de gaz soit inférieure à la moitié de la production initiale. Expliquez économiquement en quelque ligne comment une telle mesure du directeur peut – elle contribuer à la préservation de l'environnement ?

**Exercice 15**

Le 01 janvier 2014, une ville possède 20 000 habitants. Cette population augmente de 5 % par an et reçoit 1000 autres personnes chaque année, on note  $P_n$  la population de cette ville en janvier 2014+n

1°) déterminez la population de cette ville en 2017

2°) démontrez que la suite  $P_n$  vérifie la relation  $P_{n+1} = 1,05 P_n + 1000$

3 °) on pose  $V_n = P_n + 20000$

a) Démontrez que  $V_n$  est une suite géométrique

b) Exprimez  $V_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $P_n$  en fonction  $n$  c)  
Déterminez la population en 2030

### Exercice16

M .MOCTAR désire acheter une automobile qui, au 1er janvier 1993, coûte 90 000 F . N'ayant à sa disposition que 77 000 F et ne voulant prendre aucun crédit, il décide de placer la somme de 77 000F, dont il dispose. Un organisme financier lui assure un placement, a intérêts composés au taux annuel de 7%. On note  $u_n$  le capital dont dispose M. Dupont le 1er janvier de l'année (1993 + n). 1) calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

2) a) montre que la suite  $(u_n) \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) on admet que le prix de l'automobile que veut acheter M. Dupont augmente régulièrement de 3% au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier  $n$ , on note  $p_n$  le prix de l'automobile au 1er janvier de l'année (1993 + n).

### Exercice17

Un pays A a un taux de croissance égal 0,4% par an. En 2000, le pays comptait 40.000.000 d'habitants.

1) Quelle sera la population de ce pays en 2001 ?; 2002

2) On désigne par  $P_0$  la population en 2000 et par  $p_n$  la population  $n$  années après 2000.

a) Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  . Quelle est sa nature ?

b) Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ .

c) En quelle année la population doublera dans A ?

3) La production agricole du pays A permet de nourrir 100.000.000 d'habitants par an. En quelle année le pays sera frappé par une crise alimentaire ?

### Exercice18

Soit  $U_n$  une suite géométrique décroissante  $U$  tel que 
$$\begin{cases} U_0 \times U_3 = 32 \\ U_0 + U_3 = 18 \end{cases}$$

1) Calculer  $U_0$  et  $U_3$

2) Déterminer la raison de la suite  $U$ .

3) Donner l'expression de la suite  $U$  en fonction de  $n$ .

- 4) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite  $U_n$

### Exercice 19:

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 - U_n} \end{cases} \quad \text{et la suite } V_n \text{ définie Par } V_n = \frac{U_n + 1}{U_n}$$

- 1) Calculer  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  puis en fonction de  $V_n$ .
  - 2) En déduire que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme  $V_1$ .
  - 3) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - 4) On pose  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$
- b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite  $V_n$

### Exercice 20

Soit la suite  $(U_n)_n \in \mathbb{N}^*$  à termes positifs tel que :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = e U_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4$   
(on donnera les résultats sous forme de  $e$ )
- 2) On pose  $V_n = \ln U_n - a$  ; où  $(a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^*)$ 
  - a) Déterminer le réel  $a$  pour que  $V_n$  soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $V_1$ .
  - b) Calculer la limite de  $V_n$  puis celle de  $U_n$  en  $+\infty$
  - 3) Soit  $a = 1$ , on désigne par  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suites  $U_n$ . Déterminer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 21

On donne deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  telles que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 ; U_3$  et  $V_3$ .
- 2) On définit deux suites  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  par :  $X_n = U_n + V_n$  et  $Y_n = U_n - V_n$ 
  - a) Montrer que  $(X_n)$  est une suite géométrique et  $(Y_n)$  une suite constante.
  - b) Exprimer  $U_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$
  - 3) Calculer la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $X_n$ .

### Exercice 22

Quatre (4) entiers strictement positifs  $a, b, c$ , et  $d$  forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec  $a$ .

Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation  $10a^2 = d - b$ .

### Exercice 23

Soit  $(U_n)$  une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison  $r$  et à partir de  $U_{10}$  les termes sont en progression géométrique de raison  $q$ .

On donne :  $U_1 = 0$  ;  $U_{16} = \frac{-1}{27}$  et  $rq = 1$

- 1) Calculer  $q$  ;  $r$  ;  $U_{10}$  et  $U_{11}$
- 2) Calculer deux cas suivants : a)  $n \leq 10$   
b)  $n > 10$

### Exercice 24

Soit la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_0$  et par la relation de récurrence  $U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} (n \in \mathbb{N})$

- 1) a) Déterminer  $U_0$  pour que  $U_n$  soit constante.  
b) Démontrer que si  $U_n < 2$  alors

$U_n < U_{n+1} < 2 (n \in \mathbb{N})$ . En déduire que si  $U_0 < 2$  alors pour tout entier naturel on a :  $U_n < 2$  et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que  $U_0 = -1$

a) Calculer  $U_1$  ;  $U_2$  ;  $U_3$ .

b) Soit la suite  $V_n$  définie par  $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ . Démontrer que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$  puis étudier sa limite en  $+\infty$ .

### Exercice 25

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $m$ , les restes de la division euclidienne par 16 des entiers  $5^m$  et  $6^m$ .
- 2) Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U_0 = 9$  et  $V_p$  la suite géométrique de raison 5 et de premier terme  $V_0 = 1$ . Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
- 3) Soit  $(U'_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U'_0 = 8$  et  $(V'_p)$  la suite géométrique de raison 6 et de premier terme  $V'_0 = 9$ . Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera. /.

### Exercice 26

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = e^{2n-1}$

1) a) Calculer  $U_0, U_1 ; U_2 ; U_3$  et  $U_{n+1}$

b) Démontrer que la suite  $U_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer en fonction de  $n$  la somme

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$n \rightarrow +\infty$$

e) Trouver la valeur minimum de  $n$  telle que  $S_n \geq 10$

**NB :** On donne  $e \approx 2,7 ; e^3 \approx 19,7$

$$e^2 \approx 7,3 \text{ et } \ln 171 \approx 5,14$$

2) Soit la suite  $V_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$ .

a) Exprimer la somme

$$S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

b) Exprimer le produit

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

### Exercice 27

Soit  $U_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentation de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite  $U_n$ .
- 2) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

### Exercice 28

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

- a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
- b) Quel montant aura-t-il le 31/12/2008.

### Exercice 29

Un capital  $A$  est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle  $C_0$  le capital initial et  $C_n$  le capital après  $n$  années.

- 1) Expliquer la relation  $C_1 = 1.03C_0$  et écrire le capital  $C_n$  en fonction de  $C_0$  et de  $n$  en justifiant soigneusement cette relation.
- 2) Au bout de combien d'années le capital est-il doublé ?
- 3) Au bout de combien d'années le capital est-il triplé ?

## Exercice 30

On considère deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par  $U_0 = 1$  ;

$$U_{n+1} = 2U_n + 1 \text{ et } V_n = U_{n+1} - U_n.$$

a) Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n$  en fonction de  $n$ .

c) Soit la somme  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

d) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = U_n - U_0$ .

e) Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

### FIN DU PREMIER TRIMESTRE

## UA2 : UNITE D'APPRENTISSAGE DU DEUXIEME TRIMESTRE

### CHAPITRE V : LIMITES, CONTINUITES, DERIVEES, ETUDES DE FONCTIONS

## I- Généralité sur les fonctions

### 1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

### 2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique $f$ :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique  $f$ , **l'ensemble des éléments qui ont une image par  $f$** . On le note  **$Df$** .

#### Exemple

- Si  $f(x) = u(x)$  (fonction polynôme) ; alors  $Df = \mathbb{R} = ] - \infty ; + \infty [$
- Si  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  (fonction irrationnelle) ; alors  $Df = \{ x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0 \}$
- Si  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  (fonction rationnelle), alors  $Df = \{ x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0 \}$ .

#### Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3} ; 2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2} ; 3) f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}} ; 4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$$

$$5) f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

### Synthèse

$$1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$$

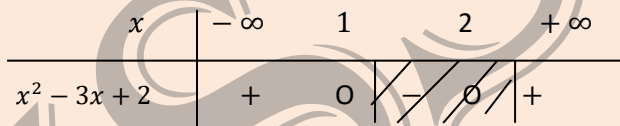
$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x+3 \neq 0\}$$

$$x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\} = ]-\infty ; -3[ \cup ]-3 ; +\infty[$$

$$2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2-3x+2 \geq 0\}$$

$$x^2-3x+2 \geq 0. \text{ Posons } x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } x_2=2$$

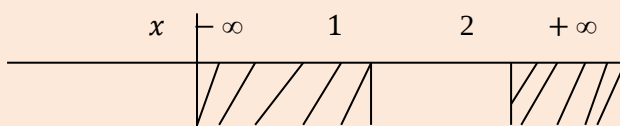


$$\Rightarrow D_f = ]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2-3x+2 \geq 0 \text{ et } x-\sqrt{x^2-3x+2} \neq 0\}$$

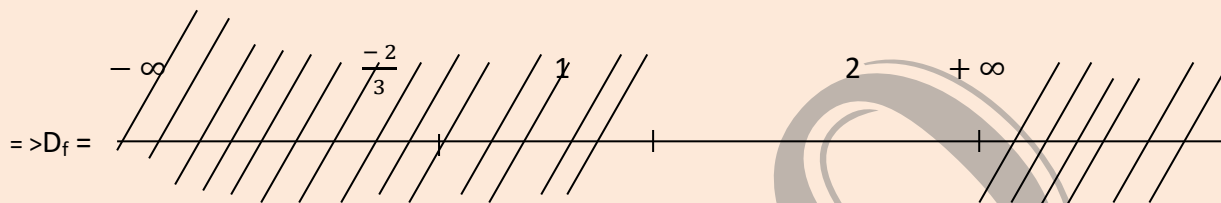
$$x^2-3x+2 \geq 0. \text{ Posons } x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } x_2=2$$



$$x^2 - 3x + 2 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq x^2$$

$$\Rightarrow -3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2}{3}$$



$$\Rightarrow D_f = \left[ \frac{-2}{3} ; 1 \right]$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \text{ et } -x + 3 \geq 0\}$$

$$(1): -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 1 \text{ et } x_2 \neq -4$$

$$(2): -x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$



$$\Rightarrow D_f = ]-\infty ; -4[ \cup ]1 ; 3]$$

$$5) f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0\}$$

$$x^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \neq -x \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq x^2 \Rightarrow 1 \neq 0 \text{ (Vraie)}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$$

### 3) Opération sur les fonctions :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition  $D_f$  et  $D_g$ .

a- Somme :

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall x \in D_g ; (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b- Produit :

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall x \in D_g ; (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

c- Quotient :

$$\forall x \in D_f \text{ et } \forall x \in D_g ; \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } g(x) \neq 0$$

## II- Limites

### Activité 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

| $x$    | - 3000000 | - 2000000 | - 1000000 | 0 | 1000000 | 2000000 | 3000000 |
|--------|-----------|-----------|-----------|---|---------|---------|---------|
| $f(x)$ |           |           |           |   |         |         |         |

b- Donne la valeur de  $x$  pour la quelle  $f$  n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

### Activité 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

| $x$    | - 3000000 | - 2000000 | - 1000000 | 0 | 1000000 | 2000000 | 3000000 |
|--------|-----------|-----------|-----------|---|---------|---------|---------|
| $f(x)$ |           |           |           |   |         |         |         |

b- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

### 1) Propriétés sur les limites :

#### a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

### b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

### c) Propriété 3 :

Si  $k$  est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty \quad (\text{le signe de } \infty \text{ dépend du signe du zéro et du signe de } k).$$

$$x \rightarrow 0$$

## 2) Opération sur les limites

### a) Somme :

|         |          |                        |           |           |                    |
|---------|----------|------------------------|-----------|-----------|--------------------|
| $f$     | $l$      | $l$                    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$          |
| $g$     | $l'$     | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$          |
| $f + g$ | $l + l'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |

### b) Produit :

|             |              |                           |                    |                           |
|-------------|--------------|---------------------------|--------------------|---------------------------|
| $f$         | $l$          | $l \neq 0$                | $0$                | $\infty$                  |
| $g$         | $l'$         | $\infty$                  | $\infty$           | $\infty$                  |
| $f \cdot g$ | $l \cdot l'$ | $\infty$ règle des signes | Forme indéterminée | $\infty$ règle des signes |

c) Quotient:

|               |                |                                  |                    |          |                           |                    |
|---------------|----------------|----------------------------------|--------------------|----------|---------------------------|--------------------|
| $f$           | $l$            | $l$                              | 0                  | $l$      | $\infty$                  | $\infty$           |
| $g$           | $l' \neq 0$    | $l' = 0$                         | 0                  | $\infty$ | $l$                       | $\infty$           |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{l}{l'}$ | $\pm \infty$ à gauche / à droite | Forme indéterminée | 0        | $\infty$ règle des signes | Forme indéterminée |

**NB :**

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; 0 \cdot \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}.$$

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$

**N.B :** La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque  $x$  tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $f \circ g$  leur composée définie sur un intervalle  $I$  contenant «  $a$  » où  $a$  est une borne. Si :  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  et si  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$

$$x \rightarrow a \qquad x \rightarrow l \qquad x \rightarrow a$$

### 5) Limite à gauche – Limite à droite de $x_0$

#### a) Limite à gauche de $x_0$

On appelle limite à gauche d'un réel  $x_0$  d'une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures on note :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

$$x \rightarrow x_0^-$$

#### b) Limite à droite de $x_0$

On appelle limite à droite d'un réel  $x_0$  en une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures on note :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

$$x \rightarrow x_0^+$$

**NB :**

Une fonction admet une limite en un point  $x_0$  si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

### Exemple

Calculer la limite des fonctions suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

d)  $\frac{\sin 5x}{2x};$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2}$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

### Solution

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$  (Forme Indéterminée)

$$x \rightarrow 1$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$

Puisque la limite est étudiée à droite de -1, alors cherchons le signe du dénominateur  $x^2-x-2$  à droite de -1

Posons :  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$  ou  $x_2 = 2$

|               |           |      |     |           |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $x^2 - x - 2$ | +         | 0    | 0   | +         |

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

**NB :** Le signe du zéro ( $0^-$ ) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$  (Forme Indéterminée)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \frac{1}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty$  (forme indéterminée)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 2})(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + x + 2})^2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x + 2)}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

## 6) Théorème sur les limites

### a- Théorème des gendarmes :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f(x)$  Répond à l'inégalité :  $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$ .

$$\text{et si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = l \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

### Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$

### Solution

On sait que :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par  $x + 1$ , on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + \sin x}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} = 0$

**b- Théorème de l'Hôpital :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et dérivables en un point  $x_0$ .

Si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  et  $g'(x_0) \neq 0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

**Exemple**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2}$  et  $g(x) = x^2 - 5x + 4$

a) Etudier la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

b) Calculer  $g'(1)$  et  $f'(1)$  puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

Solution

a) Etudions la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

- Etude de la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \text{F.I.}$$

$$x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 1$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1$$

- Etude de la continuité de  $g$  en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 1$$

Alors  $f(1) = g(1) = 0$  d'autre part  $f'(1) = -1$  et  $g'(1) = -3 \neq 0$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

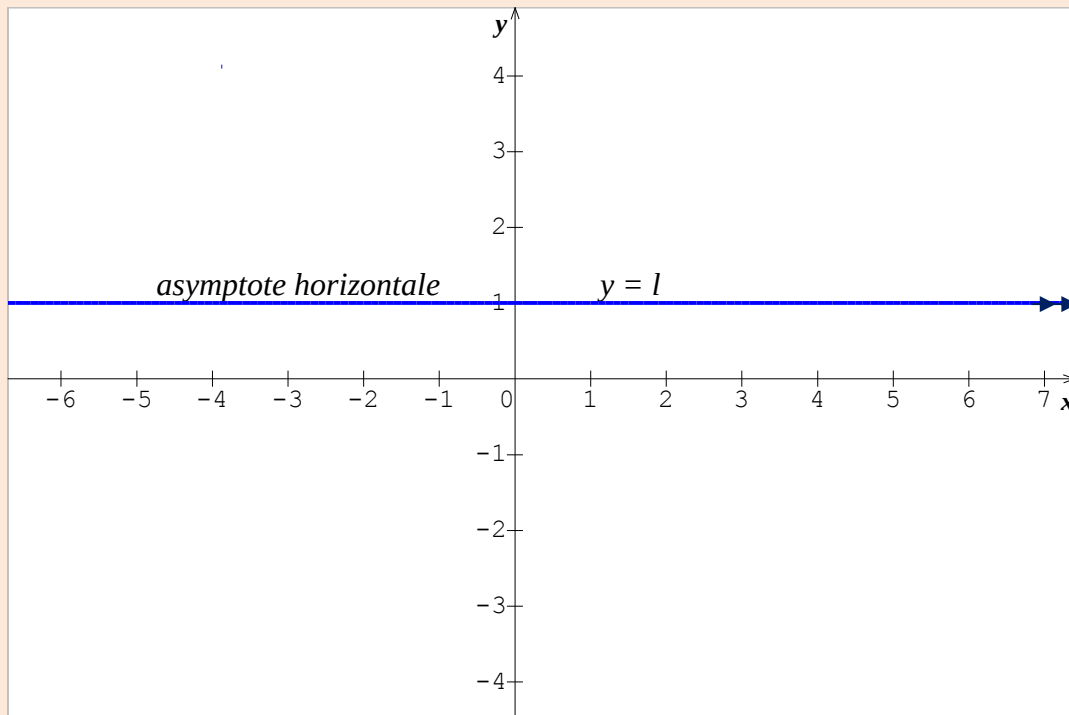
$$x \rightarrow 1$$

6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

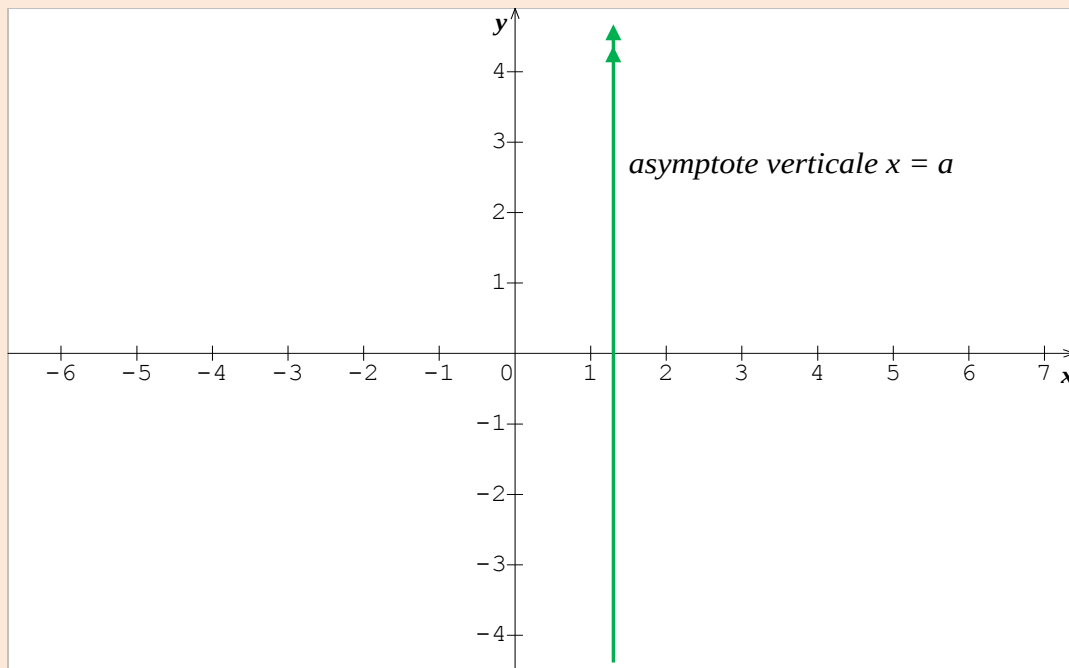
- Si  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ ) est asymptote

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

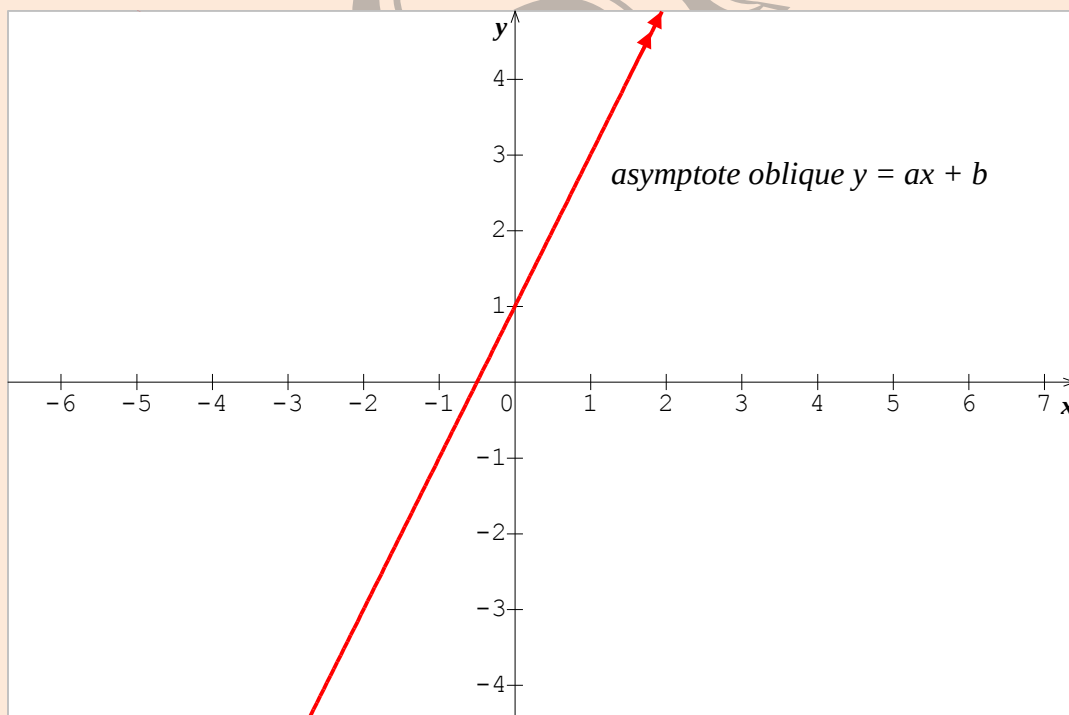
**Horizontale** à la combe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ ) est asymptote **verticale** à la combe représentative de  $f$ .



• Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$   
 (alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la combe représentatives de  $f$ ).



### III- Continuité

#### 1) Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0$  un réel appartenant à  $I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est définie en  $x_0$  et si la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $f(x_0)$

Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si :

$f(x_0)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l$  ( $l$  fini).

$$x \rightarrow x_0$$

**Remarque :** les fonctions non continues en  $x_0$  sont les fonctions non définies en  $x_0$  et les fonctions n'admettant pas de limite en  $x_0$

## 2) Continuité sur un intervalle :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b[$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

## 3) Continuité à gauche – continuité à droite

### a- Continuité à gauche :

Une fonction  $f$  est continue à gauche de  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

$$x \rightarrow x_0^-$$

### b) Continuité à droite :

Une fonction  $f$  est continue à droite de  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0^+$$

NB :

Une fonction est continue en un point de  $x_0$  si elle est **gauche** et à **droite** de  $x_0$

## 4) Prolongement par continuité

Soit  $f$  une fonction numérique non définie en  $x_0$  ; mais admettant une limite  $l$  en ce point. La fonction  $g$

définie par :  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction  $f$  par continuité au point  $x_0$

**NB :** Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  mais admet une limite en ce point, alors on dit que  $f$  est prolongeable par continuité au point  $x_0$ .

**Exemple**

1) Etudions la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné dans chacun des cas suivant:

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ f(2) = 4 \end{cases} ; x_0 = 2 ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{|x - 1| + 2}{x + 3} \\ f(1) = 5 \end{cases} ; x_0 = 1$$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  puis dire si elle est prolongeable par continuité au point  $x_0$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

### Solution

1) Etudions la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné dans chacun des cas suivant:

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ si } x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

$$f \text{ est continue en } x_0 = 2, \text{ si } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ecrivons  $f$  sans le symbole de la valeur absolue :

Posons  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

|           |           |     |           |
|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x - 1$   | $-$       | $0$ | $+$       |
| $ x - 1 $ | $-x + 1$  |     | $x - 1$   |

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & \text{si } x \in ]1 ; +\infty [ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & \text{si } x \in ]1 ; +\infty [ \end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de  $f$  à gauche et à droite de  $x_0 = 1$

$f$  est continue en  $x_0 = 1$  si  $f(1)$  existe et si  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

**Continuité à gauche :**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^-$$

**Continuité à droite :**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1^+ \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\text{Puis que } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^+$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et voyons si  $f$  est prolongeable par continuité au point  $x_0$

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

- $D_f = ]0 ; +\infty[$
- Etudions la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$f$  n'est pas définie en  $x_0 = 0$  donc elle n'est pas continue en  $x_0 = 0$

Voyons si  $f$  admet une limite finie  $x_0 = 0$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{(x + \sqrt{x})} = \infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

Alors  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 0$ .

Par conséquent  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$ .

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{\lg x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Etudions la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

Par conséquent  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$

et son prolongement par continuité en  $x_0 = 0$  est la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## IV- Dérivation :

### 1) Nombre dérivé en un point $x_0$ :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si la quantité  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite est appelée **nombre dérivé en  $x_0$**  et est noté  $f'(x_0)$ . C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$x \rightarrow x_0$$

**N.B :**  $f$  est dérivable en  $x_0$  est équivalente que la quantité  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers zéro ; il suffit de poser  $h = x - x_0$

$f$  est dérivable en  $x_0$  si elle admet un nombre dérivé  $f'(x_0)$

### 2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point  $x_0$  est continue en  $x_0$ .

**N.B :** La réciproque est inexacte.

### 3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

#### a) Nombre dérivé à gauche :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$

On la note  $f'_g(x_0)$

#### b) Nombre dérivé à droite :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  Existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ .

On la note  $f'_d(x_0)$

#### Théorème :

si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et si les deux nombres dérivés sont égaux alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

### 4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$

Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  un point fixé de  $(\mathcal{C})$ .  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un point courant de  $(\mathcal{C})$  ; construisons la droite  $(M_0M)$ . Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  la droite  $(M_0M)$  vient occuper une position limite  $(M_0T)$  appelée tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  ;  $f'(x_0)$  est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

### 5) Equation de la tangente au point d'abscisse $x_0$ :

L'équation de la tangente en un point  $x_0$  est donnée par la formule suivante :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

**NB :**

- Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi-tangentes en  $M_0$  de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de  $x_0$  et fait un angle en ce point.
- Si la courbe (C). de la fonction  $f$  admet en un point  $x_0$ , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors  $f'(x_0) = 0$

### 6) Utilisation des dérivées :

Sens de variation d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction définie par :  $x \mapsto f(x)$ . On appelle dérivée de  $f$ , la fonction  $f'$  définie par :  $f' : x \mapsto f'(x)$  nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $x$

**Formules sur les dérivées :**

**Dérivées usuelles :**

| Fonctions       | Dérivées                    | Domaines de dérivabilité |
|-----------------|-----------------------------|--------------------------|
| $a$ (constante) | 0                           | $\mathbb{R}$             |
| $ax$            | $A$                         | $\mathbb{R}$             |
| $ax^n$          | $nax^{n-1}$                 | $\mathbb{R}$             |
| $\frac{a}{x^n}$ | $\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}$ | $\mathbb{R}^*$           |
| $\sqrt{x}$      | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$       | $\mathbb{R}_+^*$         |
| $\sqrt{ax+b}$   | $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$    | $\mathbb{R}_+$           |
| $\cos x$        | $-\sin x$                   | $\mathbb{R}$             |
| $\sin x$        | $\cos x$                    | $\mathbb{R}$             |

|                |                                      |                                                                             |
|----------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Tgx}$   | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  | $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$                              |
| $\cos(U)$      | $-U' \sin U$                         | $\mathbb{R}$                                                                |
| $\sin(U)$      | $U' \cos U$                          | $\mathbb{R}$                                                                |
| $\text{tg } U$ | $\frac{U'}{\cos^2 U} = 1 + \tan^2 U$ | $\mathbb{R} - \left\{ ax + b \mid \frac{k\pi}{2} \right\} k \in \mathbb{Z}$ |

### Opérations sur les dérivées :

| Fonctions                            | Dérivées                          |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $u + v$                              | $U' + v'$                         |
| $au \ (a \in \mathbb{R})$            | $au'$                             |
| $(u)(v)$                             | $u'v + v'u$                       |
| $\frac{a}{u} \ (a \in \mathbb{R})$   | $\frac{-au'}{u^2}$                |
| $\frac{u}{v}$                        | $\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$ |
| $(u)^n$                              | $n(u')(u)^{n-1}$                  |
| $\frac{a}{u^n} \ (a \in \mathbb{R})$ | $\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$     |
| $\sqrt{u}$                           | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$            |

### 7) Dérivée de la réciproque d'une fonction $f$ :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et admet une bijection  $f^{-1}$  de  $f(I)$  dans  $I$

Ayant même sens de variation que  $f$

Pour calculer  $(f^{-1})'(x_0)$ , on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation  $f(x) = x_0$
- On calcule  $f'(x)$  et on vérifie que  $f'(x) \neq 0$
- On conclue  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

### 8) Sens de variation d'une fonction.

#### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement décroissante.
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement croissante.
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est constante ou stationnaire

#### N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de  $f$ . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de  $f$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0 ; y_0)$  une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :  $f'(x_0) = 0$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0 ; y_0)$  une tangente de coefficient directeur  $a$  si et seulement si :  $f'(x_0) = a$ .

### 9) Extremum d'une fonction :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . Si  $f'(x)$  s'annule en changeant de signe en passant par  $x_0$ , alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

Si  $f'(x)$  passe du signe négatif au signe positif on dit que  $f$  présente un minimum

Si  $f'(x)$  passe du signe positif au signe négatif on dit que  $f$  présente un maximum

Ainsi on dit que : **( $C_f$ ) admet une tangente horizontale en  $M_0(x_0 ; f(x_0))$**

#### Exemple

- 1) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

- 2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$$

- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Solution

1) Etudions la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  si  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$  avec ( $l \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Alors  $f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  et son nombre dérivé est  $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$ .

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2 + 3x - 5 \Rightarrow U'(x) = -2x + 3 \\ V(x) = x^3 - 2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x+3)(x^3-2) - (3x^2)(-x^2+3x-5)}{(x^3-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3-2)^2}$$

3) Dressons le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x+1$ | $-$       | $0$  | $+$       |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow -1^- \quad x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow -1^+ \quad x \rightarrow -1^+$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \quad \text{or } \forall x \in D_f, (x+1)^2 > 0$$

Alors le signe de  $f'(x)$  dépend donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

Posons  $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = -2$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |   |
|--------|-----------|------|-----------|-----|-----------|---|
|        | +         | 0    | -         | -   | 0         | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |   |

## V- Etude de fonctions :

### 1) Parité et périodicité d'une fonction :

#### a) Fonction paire :

Une fonction  $f$  est dite paire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = f(x)$$

#### b) Fonction impaire :

Une fonction  $f$  est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$$

#### c) Fonction Périodique :

Une fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  s'il existe un nombre réel  $T$  tel que

$$\forall x \in Df \text{ et } x + T \in Df ; f(x + T) = f(x).$$

Remarque :

- La fonction  $\cos x$  est paire car  $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction  $\sin x$  est impaire car  $\sin(-x) = -\sin x$

#### 4) Courbes symétriques :

##### a) Axe de symétrie :

La droite d'équation  $x = a$  est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de  $f$  si :

- $f(2a - x) = f(x)$   
ou
- $f(a + x)$  est paire  
ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

##### b) Centre de symétrie :

Le point  $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  est dit **centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de  $f$  si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$   
ou
- $f(a + x) - b$  est paire  
ou
- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

#### N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe ( $y' o y$ ) comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point O  $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  (origine du repère) comme centre de symétrie.

##### c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- Centre de symétrie :

Soit  $f$  une fonction rationnelle définie par :  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$  et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) où :  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $\gamma$  ;  $\beta$  sont tous des réels avec :  $a \neq 0$  et  $\gamma x + \beta \neq 0$ .

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de  $f$  a pour coordonnée :

$$I\left(\begin{smallmatrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{smallmatrix}\right)$$

- **Axe de symétrie :**

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré définie par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec ( $a \neq 0$ )

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie de la courbe (C) de  $f$  a pour équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

**Exemple**

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $a = -1$

b)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$  et  $a = \frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point  $I\left(\frac{a}{b}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$  et  $I\left(\frac{0}{-1}\right)$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  et  $I\left(\frac{-1}{0}\right)$

**Solution**

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

**a)**  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $a = -1$

$a = -1$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$

$$f(2(-1) - x) = f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3$$

$$= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3$$

$$= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3$$

$$= x^2 - 2x + 3 = f(x)$$

Puisque  $f(-2-x) = f(x)$  alors  $a = -1$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$

$$f(2(\frac{1}{2}) - x) = f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3$$

$$= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3$$

$$= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x)$$

Puisque  $f(1 - x) \neq f(x)$  alors  $a = \frac{1}{2}$  n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point  $I(\frac{a}{b})$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$a) \quad f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right)$$

Le point  $I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right)$  est dit centre de symétrie si  $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{-1}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^3 - (-x)^2 + 4}{3(-x)^2 - 12} = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$$

$$\Rightarrow f(-x) + f(x) = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} = \frac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 12} \neq -\frac{2}{3}$$

Puisque  $f(-x) + f(x) \neq -\frac{2}{3}$  alors  $I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right)$  n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \quad \text{et} \quad I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Le point  $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  est dit centre de symétrie si  $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$$\Leftrightarrow f(-2 - x) + f(x) = 0$$

$$f(-x-2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x)+1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2-x+1} = \frac{x^2 + 2x}{-x-1}$$

$$\Rightarrow f(-x-2) + f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x-1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x+1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = 0$$

Puisque  $f(-x-2) + f(x) = 0$  alors  $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C)

### 5) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

#### a) Minimum :

Soit  $f$  une fonction définie en un point  $x_0$ . S'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que  $\forall x \in I$  on a :  $f(x) \geq f(x_0)$  alors  $f$  présente un minimum

en  $x_0$ . Ce minimum est  $m = f(x_0)$ .

#### b) Maximum :

$f$  admet un maximum relatif au point  $x_0$ , s'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que  $\forall x \in I$  on a :  $f(x) \leq f(x_0)$ . Le maximum est  $M = f(x_0)$ .

#### Théorème :

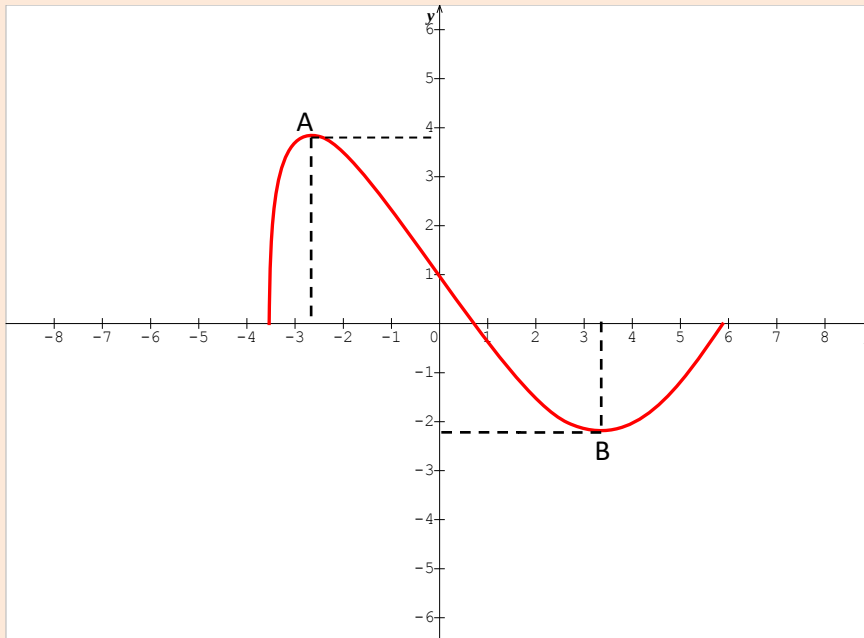
Si une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $f'(x)$  s'annule en  $x_0$  et change de signe en passant par  $x_0$ , on dit alors que  $f$  présente un extremum en  $x_0$ . Cet extremum est égal à  $f(x_0)$ . Il est le minimum si  $f'$  passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si  $f'$  passe du signe positif au signe négatif.

#### NB :

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert ]a ; b[, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point  $x_0$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum relatif en  $x_0$ .

c) Extremum :

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

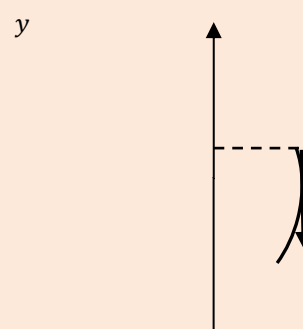
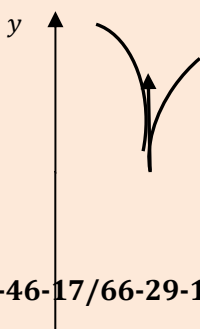
d) Point d'inflexion :

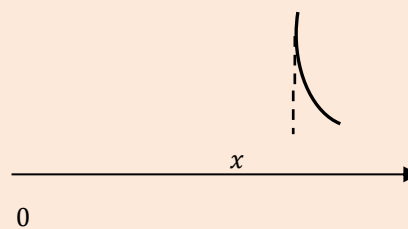
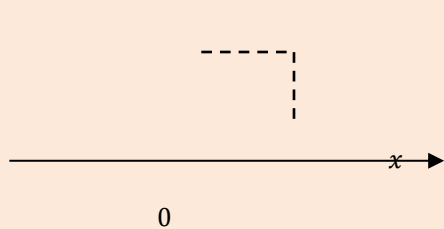
Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $]a; b[$ . On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe**.

e) Point de reboursement :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$$

Alors on dit que  $f$  admet un point de reboursement  $x_0$  à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :





$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

### 7) Théorème de valeurs intermédiaires :

#### L'image d'un intervalle par une fonction continue :

#### Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $D_f$  son ensemble de définition. Soit  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b[$  un intervalle de  $D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est aussi un intervalle

ou  $I =$

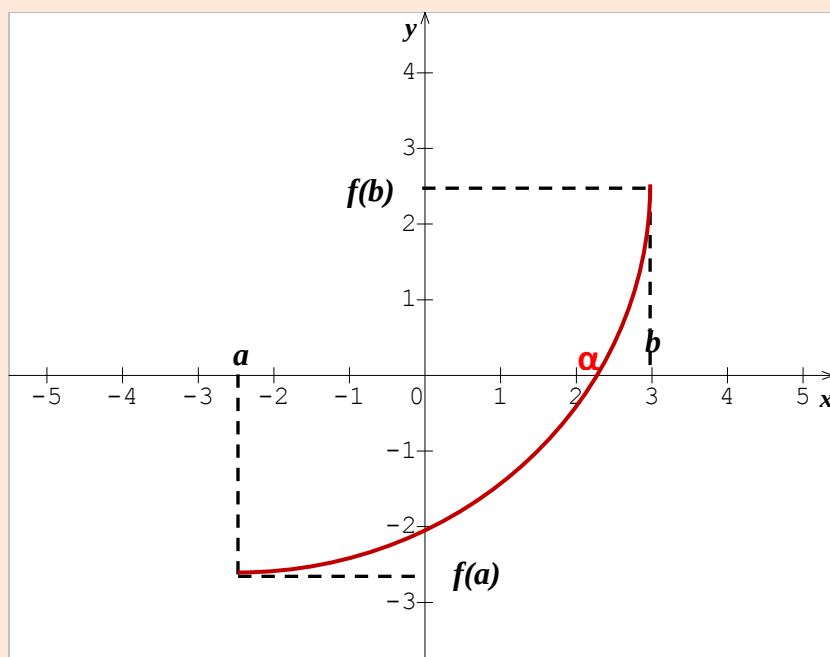
### 9) Approximation d'une solution $\alpha$ de l'équation $g(x) = 0$ :

#### a- Méthode de dichotomie :

Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $[a ; b]$  tel que  $g(a) \times g(b) < 0$ .

Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

- Si  $g$  est strictement croissante sur  $[a ; b]$



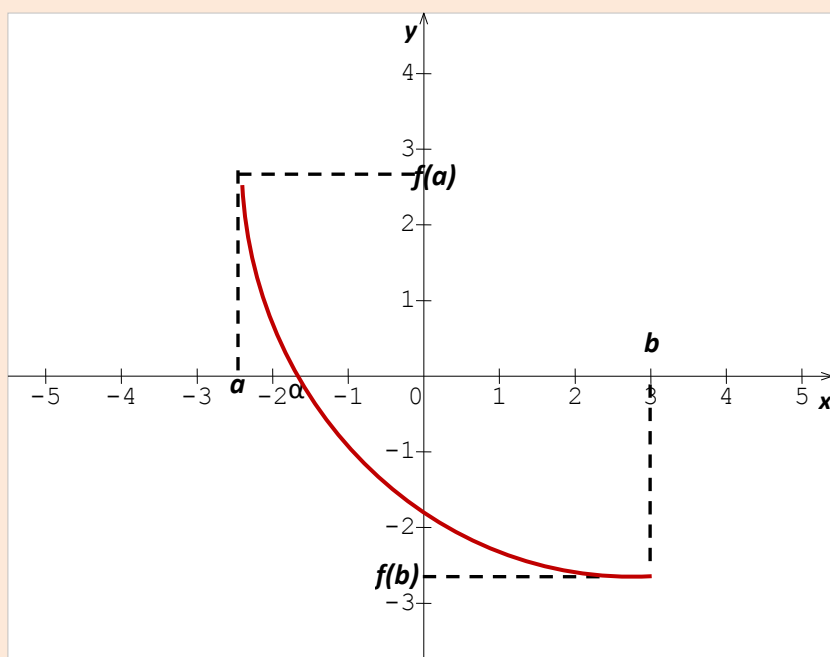
Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .

- Si  $g$  est strictement décroissante sur  $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .
- 
- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .

#### b- Méthode des balayages :

C'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de  $\alpha$  à partir d'un tableau de valeur où la valeur de  $\alpha$  est obtenue en encadrant la valeur de  $x$  à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

| $x$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    | $x_7$    | ..... | $x_n$    |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|----------|
| $f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ | $f(x_7)$ | ..... | $f(x_n)$ |

Si par exemple  $f(x_5) \times f(x_6) < 0$  alors  $\alpha \in [x_5 ; x_6]$  et par conséquent  $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

#### Exemple

**A)** Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculer  $f'(x)$ .

- 2- Etudier le sens de variation de  $f$ .
- 3- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1 ; 2[$ .
- 5- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**B)** Soit  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

- 1- Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

**C)** Soit  $f(x) = \cos x$  une fonction définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

- 1- Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$
- 2- Trouver une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = x$

### Solution

**A)** Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculons  $f'(x)$ .

$$Df = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de  $f$ .

$\forall x \in Df, f'(x) > 0$ . D'où  $\forall x \in Df, f$  est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

|         |           |          |           |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|         |           | +        |           |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $0$      | $+\infty$ |

4- Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1 ; 2[$   
 D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  $]-\infty ; +\infty[$  vers  $]-\infty ; +\infty[$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

De plus :  $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in ]1 ; 2[$

2- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.  
 Pour cela utilisons la méthode des balayages

|        |       |       |       |       |      |     |     |     |     |
|--------|-------|-------|-------|-------|------|-----|-----|-----|-----|
| $x$    | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5  | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
| $f(x)$ | -2,36 | -1,67 | -0,90 | -0,05 | 0,87 | ?   | ?   | ?   | ?   |

Ainsi d'après le tableau, l'image par  $f$  des différentes valeurs de  $x$  commencent à changer de signe à partir des valeurs de  $x$  comprises entre 1,4 et 1,5.

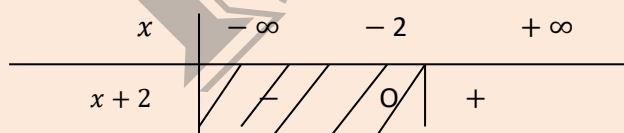
Alors :  $\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$

**B) Soit  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .**

3- Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x+2 \geq 0\}$

$x+2 \geq 0$ . Posons  $x+2=0 \Rightarrow x = -2$



$\Rightarrow D_f = [-2 ; +\infty[$

4- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
 Pour cela, dressons le tableau de variation de  $f$  :

$$f(-2) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

|         |      |           |
|---------|------|-----------|
| $x$     | $-2$ | $+\infty$ |
|         | +    |           |
| $f'(x)$ | 0    | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  $-2$  ;  $+\infty$  [ vers ]  $0$  ;  $+\infty$  [ alors  $f$  réalise une bijection de  $-2$  ;  $+\infty$  [ vers l'intervalle  $J = ] 0$  ;  $+\infty$  [

### 10) Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels appartenant à  $I$  tel que ( $a < b$ ).

-Si  $m$  et  $M$  sont deux réels tel que  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors on a :  
 **$(b-a)m \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)M$ .**

-Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors il existe un réel  $k$  appartenant à  $I$  tel que  $|f'(x)| \leq k$ .

Ainsi par conséquent  $\forall a \in I$  et  $b \in I$ , on a :  $|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$ .  
**(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements finis).**

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

- 1) Montrer que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$   
 2) En déduire que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

**Solution**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

- 1) Montrons que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1 \\ V(x) = x - 3 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x-1)(x-3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x-3)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

$$\text{Or } x \in [4 ; 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$$

En appliquant la fonction dérivée  $f'$  à l'inégalité, on a :

$$\text{Or } f'(4) = 0 \quad \text{et} \quad f'(5) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$$\Rightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left| \frac{3}{4} \right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

D'où  $\forall x \in [4; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduisons que  $\forall x \in [4; 5],$  on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

D'après la question 1), on a :

$$\forall x \in [4; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

Or si  $|f'(x)| \leq k$ , on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$$

Ainsi puisque  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ , alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

Finis on a :  $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$ . Avec  $k = \frac{3}{4}$  et  $a = 5$

$$\text{Or } f(5) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

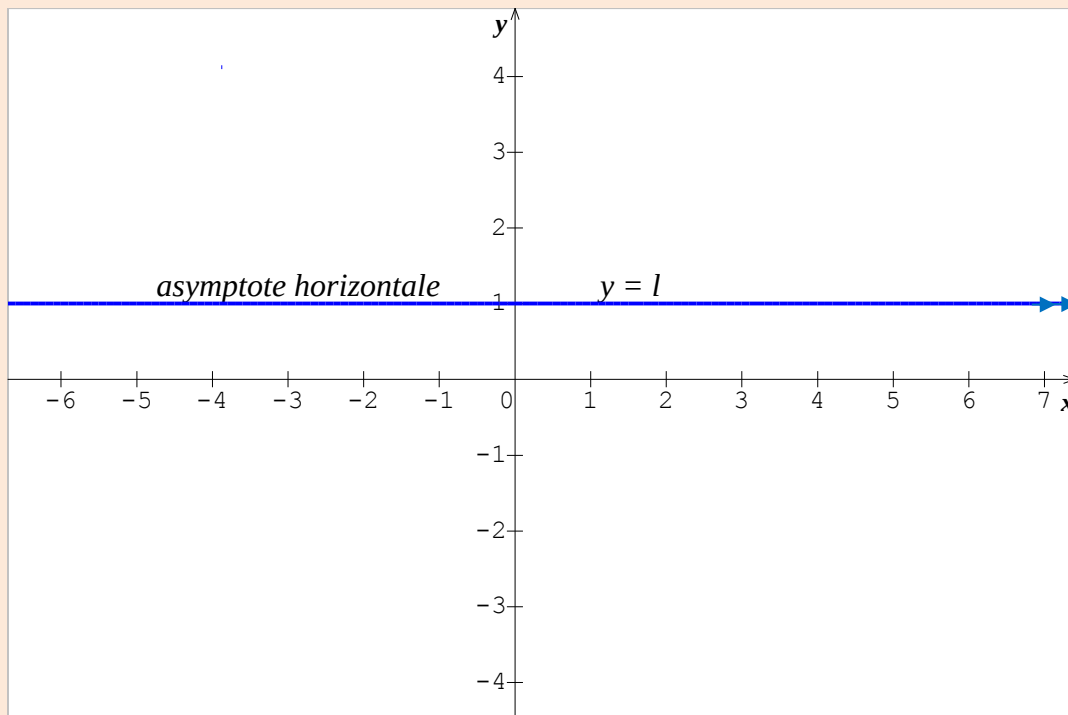
D'où  $\forall x \in [4; 5],$  on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

## 11) Etude des branches infinies :

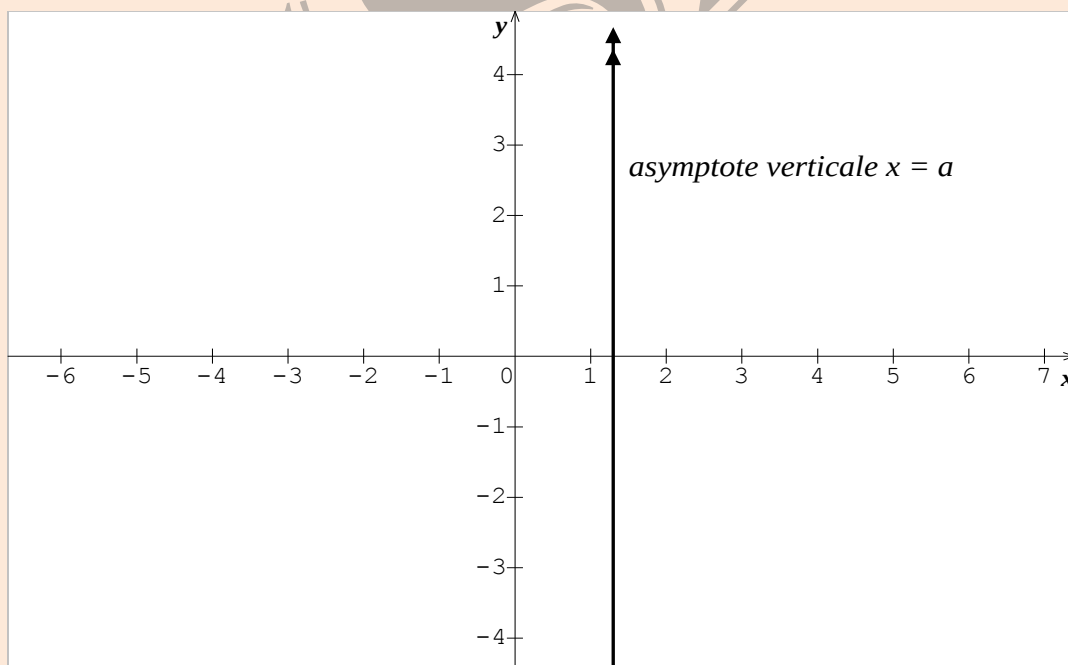
### Notion d'asymptotes :

- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ )

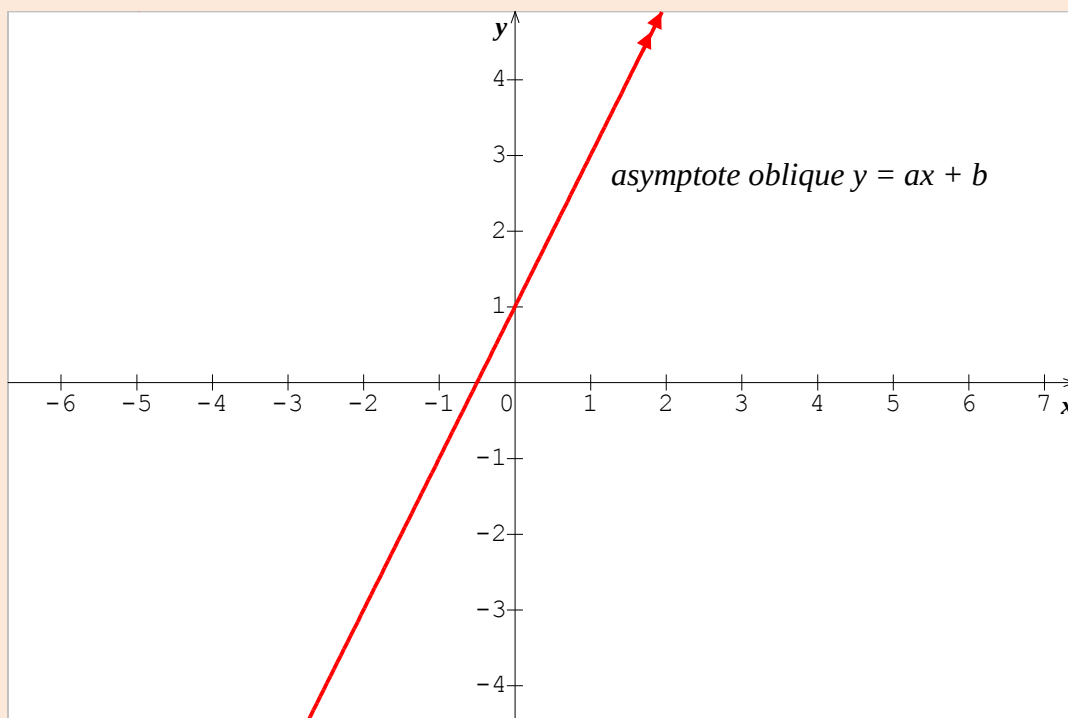
est asymptote **horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ ) est asymptote **verticale** à la combe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  (Alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la combe représentatives de  $f$ ).

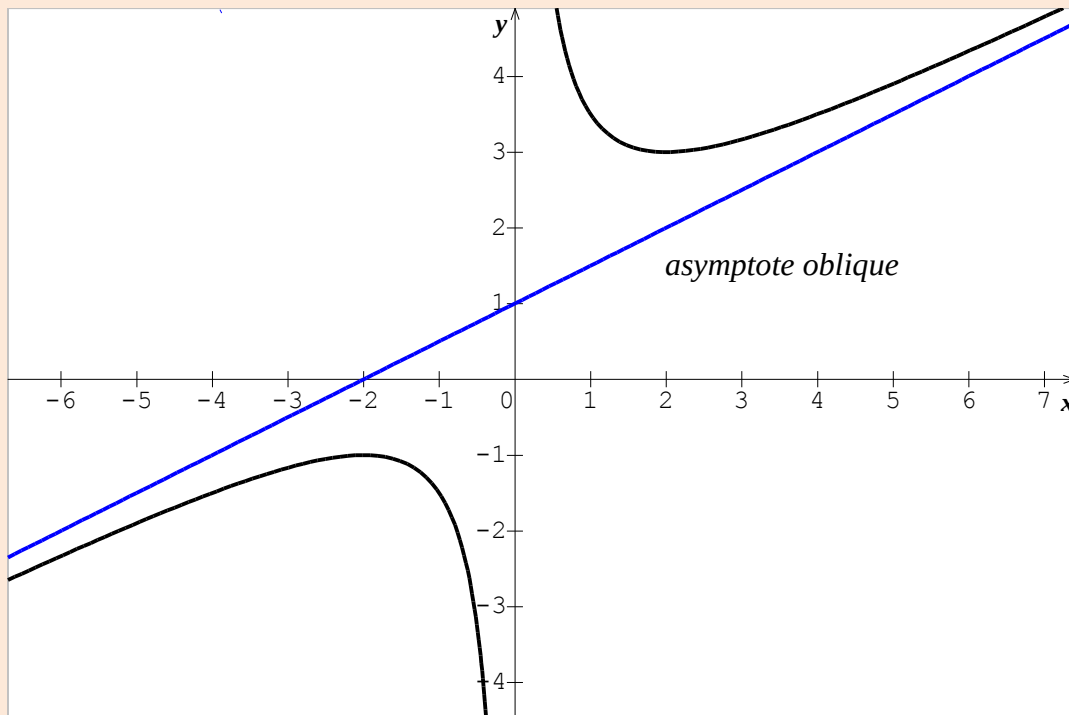


### Recherche d'asymptote oblique :

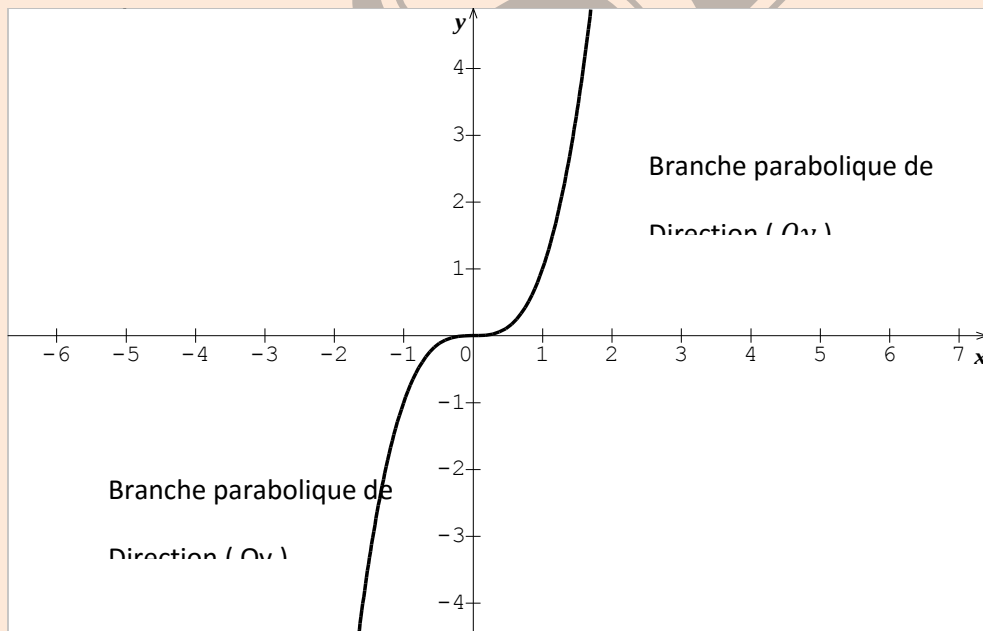
Il est évident de dire que si :  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ , alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

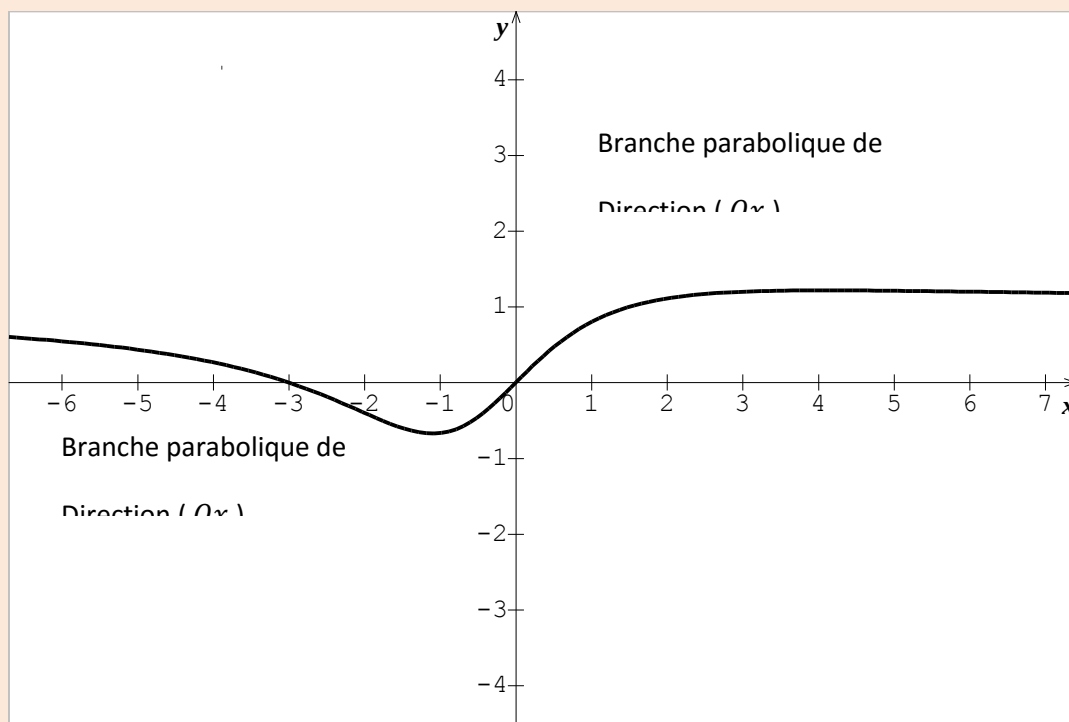
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est
- et  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$  Asymptote oblique à la courbe (C) de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$  alors la courbe (C) de  $f$  admet l'axe ( $y'oy$ ) comme branche parabolique.



- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  alors la courbe (C) de  $f$  admet l'axe ( $x'ox$ ) comme branche parabolique.

**N.B :**

Si  $f$  est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire  $f(x)$  sous la forme :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)} \text{ (en effectuant une division euclidienne) .}$$

$Q(x) = y$  est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.

$D(x)$  = est le diviseur

$R$  = est le reste.

**Cas Particulier d'asymptote**

Toutes fonctions de la forme :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ ou } f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}; \text{ (avec } a \neq 0 \text{ et } a > 0)$$

Admet deux asymptotes :

- L'une en  $-\infty$  d'équation :  $y = -\sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

- L'une en  $+\infty$  d'équation :  $y = \sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

**11) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.**

Pour déterminer la position relative d'une courbe ( $Cf$ ) et de son asymptote oblique ( $\Delta$ ), on étudie le signe de :  $f(x) - y$ . Ainsi :

- Si  $f(x) - y < 0$ , alors la courbe ( $Cf$ ) est en dessous de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y > 0$ , alors la courbe ( $Cf$ ) est au dessus de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y = 0$ , alors la courbe ( $Cf$ ) et la droite ( $\Delta$ ) sont confondues.

### Exemple

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) :  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe ( $Cf$ ) de  $f$  en  $+\infty$ .
- b) Etudier la position de la courbe ( $Cf$ ) et ( $\Delta$ ).

2- On donne  $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

- a) Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .
- c) En déduire l'équation des asymptotes à la courbe ( $Cf$ ).

### Solution

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- a) Démontrons que la droite ( $\Delta$ ) :  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe ( $Cf$ ) de  $f$  en  $+\infty$ .

la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe ( $Cf$ ) de  $f$  en  $+\infty$  si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

Alors la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe  $(Cf)$  et de la droite  $(\Delta)$ .

Pour cela étudions le signe de  $f(x) - y$ .

Posons  $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

D'où le tableau de signe est le suivant :

|            |            |       |       |            |           |
|------------|------------|-------|-------|------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$  |       | 2     |            | $+\infty$ |
| $x - 2$    |            | -     | 0     | +          |           |
| $f(x) - y$ | $(\Delta)$ | $(C)$ | $(C)$ | $(\Delta)$ |           |

Alors  $\forall x \in ]-\infty ; 2[ ; f(x) - y < 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]-\infty ; 2[ ;$  la courbe  $(C)$  est en dessous de la droite  $(\Delta)$ .

$\forall x \in ]2 ; +\infty[ ; f(x) - y > 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]2 ; +\infty[ ;$  la courbe  $(C)$  est au dessus de la droite  $(\Delta)$ .

2- On donne  $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x - 3 \neq 0\} \Rightarrow D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

b) Calculons les limites aux bornes de Df

|     |           |       |           |
|-----|-----------|-------|-----------|
| x   | $-\infty$ | 3     | $+\infty$ |
| x-3 |           | - 0 + |           |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe ( C ) de f.

Puisque  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$  Alors la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à ( Cf ).

Puisque  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$  Alors la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $(Cf)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$  Alors la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote

$x \rightarrow +\infty$

oblique à  $(Cf)$ .

## 12) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

### a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ( $ox$ )

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(Cf)$  avec l'axe des abscisses, on résout l'équation  $f(x) = 0$ . Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'axe  $(ox)$ .

### b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ( $oy$ )

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(Cf)$  avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée  $y = f(o)$ . Ainsi la courbe passe par  $y = f(o)$  sur l'axe des  $(oy)$ .

## 13) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction  $f$  et représenter graphiquement sa courbe  $(Cf)$  dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté  $D_f$
- On calcule les limites aux bornes de  $D_f$
- On étudie la parité et la périodicité de  $f$
- On étudie la continuité de  $f$
- On étudie le sens de variation de  $f$  qui consiste à calculer la dérivée et à étudier son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

### Exemple

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

**Solution**

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$$

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $x+1$ | $-$       | $0$  | $+$       |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$= > f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= > f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \text{ or } \forall x \in Df, (x+1)^2 > 0 \text{ alors le signe de } f'(x) \text{ dépend}$$

donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

Posons  $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$

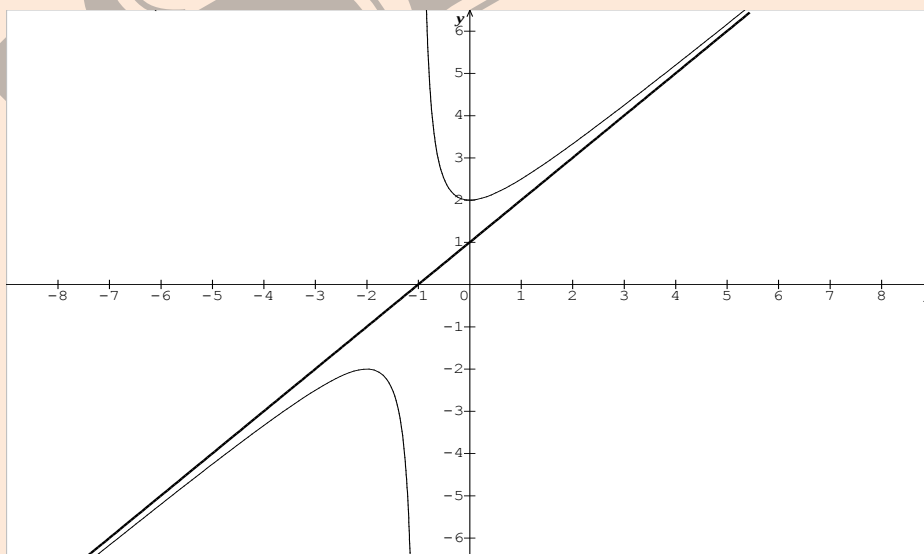
D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$       | $+\infty$ |           |
|--------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|        | $+$       | $0$  | $-$       | $-$       | $0$       | $+$       |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-2$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $2$       | $+\infty$ |

$x = -1$  est asymptote verticale à (C).

$y = x + 1$  est asymptote oblique à (C) car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ .

Ainsi on a la représentation suivante :



\*

**Exercice1**

Calculer les limites suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\text{a- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}; \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; \quad \text{c- } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

$$\text{e- } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; \quad \text{g- } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}$$

**Exercice 2**

Calculer les limites suivantes à l'infinie :

$$\text{a- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}; \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}; \quad \text{c- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}; \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

$$\text{e- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x} - 5}; \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}; \quad \text{g- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{2x - 2}$$

$$\text{h- } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1};$$

**Exercice 3**

Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes )

ci-dessous (

$$\text{a- } f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}; \quad \text{b- } f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}; \quad \text{c- } f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}; \quad \text{d- } f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$\text{e- } f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}; \quad \text{f- } f(x) = \frac{\sqrt{-x + 2}}{-x^2 + 2x - 1}; \quad \text{g- } f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$$

**Exercice4**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . La courbe  $(C_f)$  admet-elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

### Exercice5

Soit la fonction  $f$  définie par :  $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$ .

On note  $(C_g)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Etudier la limite de  $g$  en  $-\infty$ . (On discutera suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ ).

b- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x + 2$  soit asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

### Exercice 6

Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & \text{et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ; \text{ b- } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{c- } \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} & \text{si } x \in ]1; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \text{d- } \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{f- } \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \in ]-\infty; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & \text{si } x \in [1; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & \text{si } x \in [3; +\infty[ \end{cases}$$

### Exercice 7

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 2$

### Exercice8

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax & \text{si } x \in ]-\infty; -1[ \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \in ]-1; 1[ \\ f(x) = b(x^2 - 1) & \text{si } x \in [1; +\infty[ \end{cases}$$

- Déterminer a pour que f soit continue au point  $x_0 = -1$
- Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point  $x_0 = 1$  ?

### Exercice 9

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$$

a- Déterminer les ensembles de définition  $Df$  et  $Dg$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .

b- Vérifier que la fonction  $g$  est le prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$ .

### Exercice10

On considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

- Déterminer son ensemble de définition  $Dg$ .
- Montrer que  $g$  admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par  $h$ .
- Montrer que  $h$  est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe ( C ) de  $h$  au point d'abscisse 2.

### Exercice11

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b- } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ et } x_0 = 1$$

$$\text{c- } \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ si } x \in ]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \text{d- } \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{f- } \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \text{ si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [3 ; +\infty[ \end{cases}$$

### Exercice12

Déterminer les réels a, et b pour que  $f$  soit continue et dérivable aux points  $x_0$  donnés :

$$a- \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad b- \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$c- \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$c- \begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue au point  $-1$  ?

Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $-1$ .

### Exercice13

Déterminer une équation de la tangente en  $M_0(x_0; f(x_0))$  à la courbe (C) de  $f$  dans les cas suivants :

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \text{ et } x_0 = -2 ; b) f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ et } x_0 = 0$$

$$c) f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ et } x_0 = 3$$

### Exercice14

Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3 ; b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} ; c) f(x) = (-x^2 + 2x)^3$$

$$d) f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1} ; e) f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1) ; f) f(x) = \cos^3 x$$

$$g) f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2} ;$$

### Exercice15

Soit la fonction numérique  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Prouver que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) a) Dresser le tableau de signe du trinôme  $x^2 - 2x - 3$  en y plaçant le réel 1  
b) En déduire pour tout  $x \geq 1$  une écriture de  $f(x)$  sous le symbole de la valeur absolue.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x_0 = 3$ . Que dira-t-on pour la dérivabilité de  $f$  au point 3 ?  
b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut-on conclure quant à la dérivabilité de  $f$  en 1 ?
- 4) a) Etudier le signe de  $f'$  sur chacun des intervalles sur lequel  $f$  est dérivable.  
b) Préciser les ordonnées de chaque extremum de  $f$ .
- 5) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

### Exercice16

Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

- a- les domaines de définition.
- b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
- c- Donner l'allure de la courbe ( $C_f$ ) dans chaque cas.

1)  $f$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

**De plus :**

- La courbe ( $C_f$ ) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe ( $C_f$ ) admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.

2)  $g$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|     |           |    |   |           |
|-----|-----------|----|---|-----------|
| $X$ | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|-----|-----------|----|---|-----------|

|         |           |     |     |           |   |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|---|
| $g'(x)$ | -         | 0   | +   | 0         | - |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $1$ | $-\infty$ |   |

**De plus :** La courbe (  $C_g$  ) admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.

**3)  $h$**  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|         |           |           |   |           |           |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -2        | 0 | 2         | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | +         | +         | 0 | -         | -         |
| $h(x)$  | -1        | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | 3         |

**4)  $p$**  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|         |           |    |           |   |           |
|---------|-----------|----|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -2 | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $p'(x)$ | -         | 0  | +         | 0 | +         |
| $p(x)$  | 2         | 0  | $+\infty$ | 1 | 2         |

### Solution16

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

**1) Pour  $f$  :**

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que l'équation  $f'(x) = 0$  admet les solutions  $x = -1$  et  $x = \frac{3}{2}$
- $f$  n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée  $f'$  et les points  $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$  et  $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$  sont ses extremums
- les droites  $y = -2$  et  $y = 3$  sont ses asymptotes respectives en  $-\infty$  et  $+\infty$

**2) Pour  $g$  :**

- $g$  est définie sur  $] -\infty ; 0 ] \cup \left[ \frac{5}{2} ; +\infty \right[$  et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses  $0$  et  $\frac{5}{2}$
- $g$  est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite  $y = -x$  est à la fois asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; -3)$  et  $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$  sont sur la courbe de  $g$ .

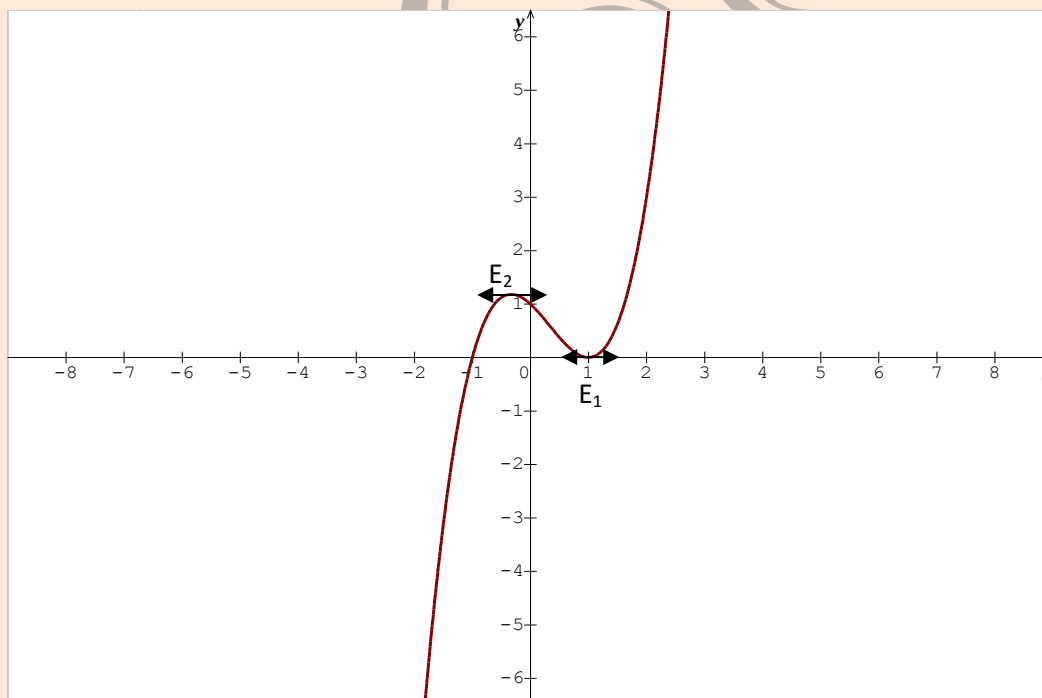
### 3) Pour $h$ :

- $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$  et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- le point de coordonnées  $(0,3 ; 0,4)$  est l'extremum maximum absolue de la courbe  $(C_h)$  et  $h$  est croissante sur  $[0 ; 0,3] \cup [2 ; +\infty[$
- les droites d'équations  $y = -1$  et  $y = -2x + 1$  sont asymptotes de  $(C_h)$  respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; 0) ; (1 ; 0) ;$  et  $(2 ; -2)$  ; appartiennent à  $(C_h)$

### Exercice 17

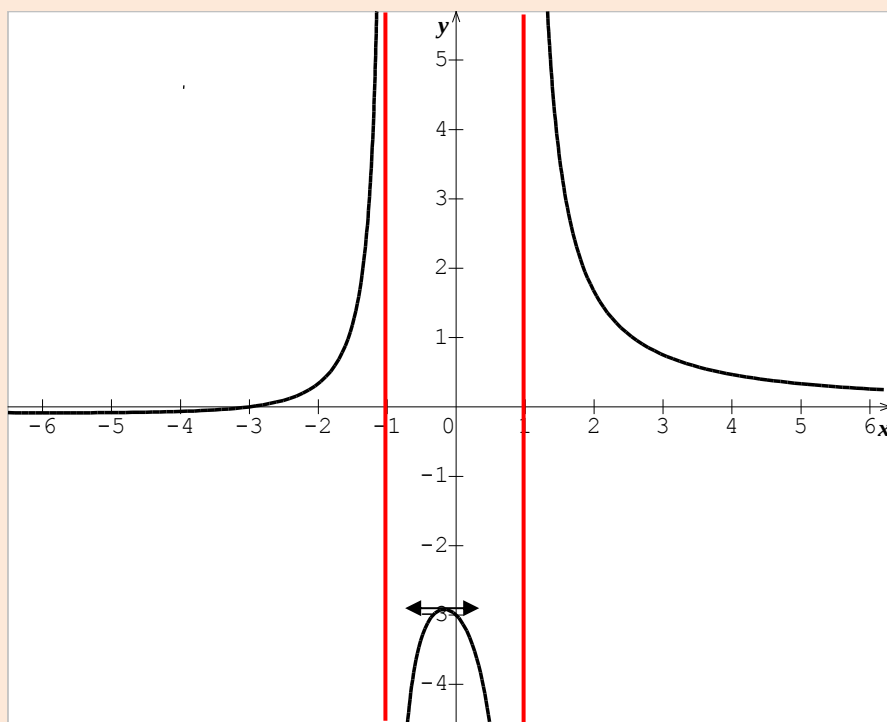
- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.
- Déterminer les réels  $a ; b ; c ; \dots$  en utilisant le graphique.

1)  $f$  est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par :  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

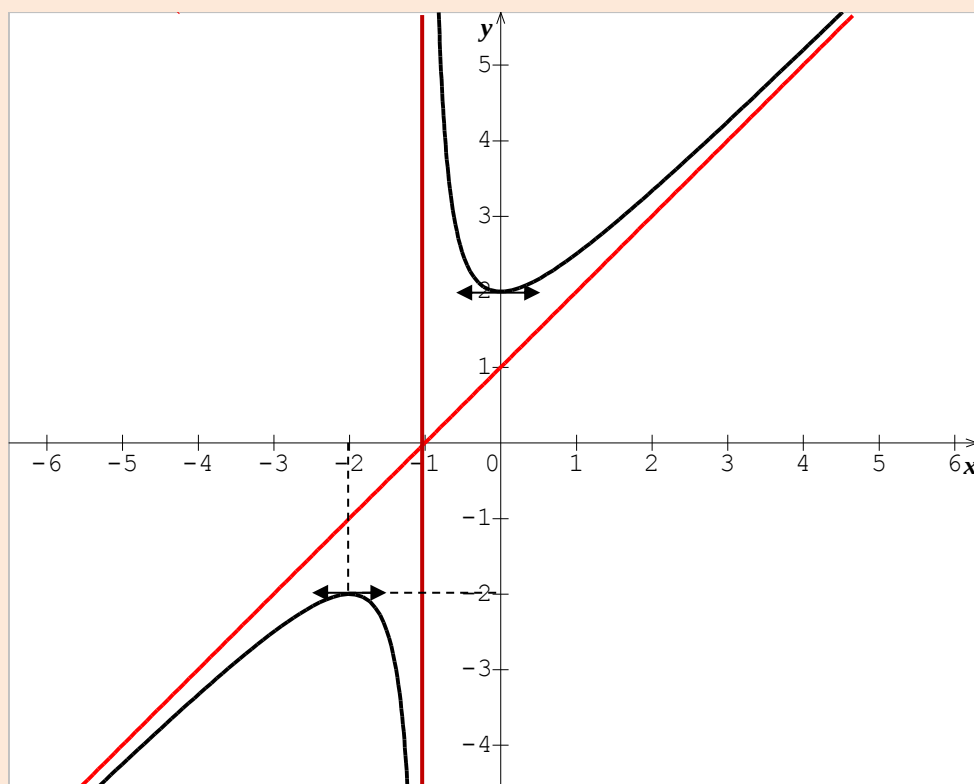


De plus :  $E_1(1 ; 0)$  et  $E_2\left(-\frac{1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$  sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est  $g$  telle que :  $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est  $h$  telle que :  $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



### Exercice18

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe  $C_f$ .  
b- Déterminer la position de la courbe  $C_f$  et de la droite  $(D)$ .
- 5) Montrer que le point  $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$  est centre de symétrie pour la courbe  $C_f$ .
- 6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $-2$
- 7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  au point d'abscisse nul.
- 8) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 9) Construire la courbe  $C_f$  et la droite  $(D)$  dans le même repère.

### Exercice19

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(-\frac{1}{2}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-5$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**Exercice20**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$ .
  - b- La courbe  $Cf$  n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe  $(Ox)$ .
  - c- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(-\frac{1}{2}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $2$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**Exercice21**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $m$  ;  $n$  et  $p$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(\frac{0}{3}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-3$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**Exercice22**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$ .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe  $Cf$ .
- 3) Soit  $\Delta$  l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de  $Cf$  par rapport à  $\Delta$  dans l'intervalle  $]-1 ; 1[$ .
- 4) Construire  $Cf$ .

### Exercice23

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier et construire la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de  $(C_f)$

### Exercice24

**Partie A :** On considère le polynôme  $P$  définie :  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

- 1) Donner le tableau de variation de  $P$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1,6; 1,7[$ .
- 3) Donner le signe de  $P(x)$  dans l'intervalle  $] -1; +\infty [$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f : ] -1; +\infty [ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-x}{1+x^3}$$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $] -1; +\infty [$ .  
b) Calculer  $f'(x)$  puis établir que  $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

- 2) Donner le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe  $C_f$  de  $f$ .
- 4) Placer  $\alpha$  puis tracer  $C_f$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[2; +\infty [$ .

Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[2; +\infty [$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

- 6) On désignera  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.

a) Donner le tableau de variation de  $g^{-1}$

b) Tracer la courbe  $C_{g^{-1}}$  de  $g^{-1}$

### Exercice25

**Partie A :** On donne la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.

- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $2,19 < \alpha < 2,20$
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $Df$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ , on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f$  puis son tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$ . Etudier la position de  $C_f$  et (D).
- 5) Tracer  $C_f$ .

### Exercice 26

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

#### Partie A :

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)
- 2) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique tel que  $g(\alpha) = 0$ , puis déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du réel  $\alpha$ .
- 3) Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

#### Partie B :

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $Df$ .

Montrer que  $\forall x \in Df$  on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis déduire le tableau de variation de  $f$ .

- 2) a) Montrer que  $\forall x \in Df$  ;  $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

**Partie C :**

1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .

2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = m + x$ .

**Exercice27**

1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- a) Etudier les variations de la fonction  $g$ .
- b) Montrer que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  que l'on déterminera.
- c) En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ .

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives :  $y = -3x$  et  $y = x$ .

- a) Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
- b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- c) En déduire le tableau de variation de  $f$ .
- d) Déterminer la limite en  $-\infty$  de  $f(x) - (-3x)$ . Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
- e) Montrer la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en  $+\infty$
- f) Etudier la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
- g) Tracer la courbe (C), les droites (D) et (D').

**Exercice28**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 + 1$

- 1) Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$ , puis en déduire l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection I de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses.
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

**Partie B :**

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $Df$  puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 2) a- Prouver que le signe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  dépend en signe et en racine de la fonction  $g$  étudiée dans la **partie A**.  
b- Déterminer  $g(x_0)$  où  $x_0$  est l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection I de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.  
c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) tracer la courbe ( $C_f$ ) dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).

**Exercice29**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).

- 1) Donner l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$ , puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne :  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$  et  $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

**Exercice30**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).

- 1) a) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :  $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$   
b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ . En déduire que la courbe (C) de  $f$  admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.  
c) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = -2x$  est asymptote à (C) en  $-\infty$
- 2) a) Calculer  $f'(x)$ . Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de  $f$ .  
b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

**Exercice31**

La fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de

plus que la droite d'équation  $x = 2$  est axe de symétrie pour la courbe  $C$  de  $f$ .

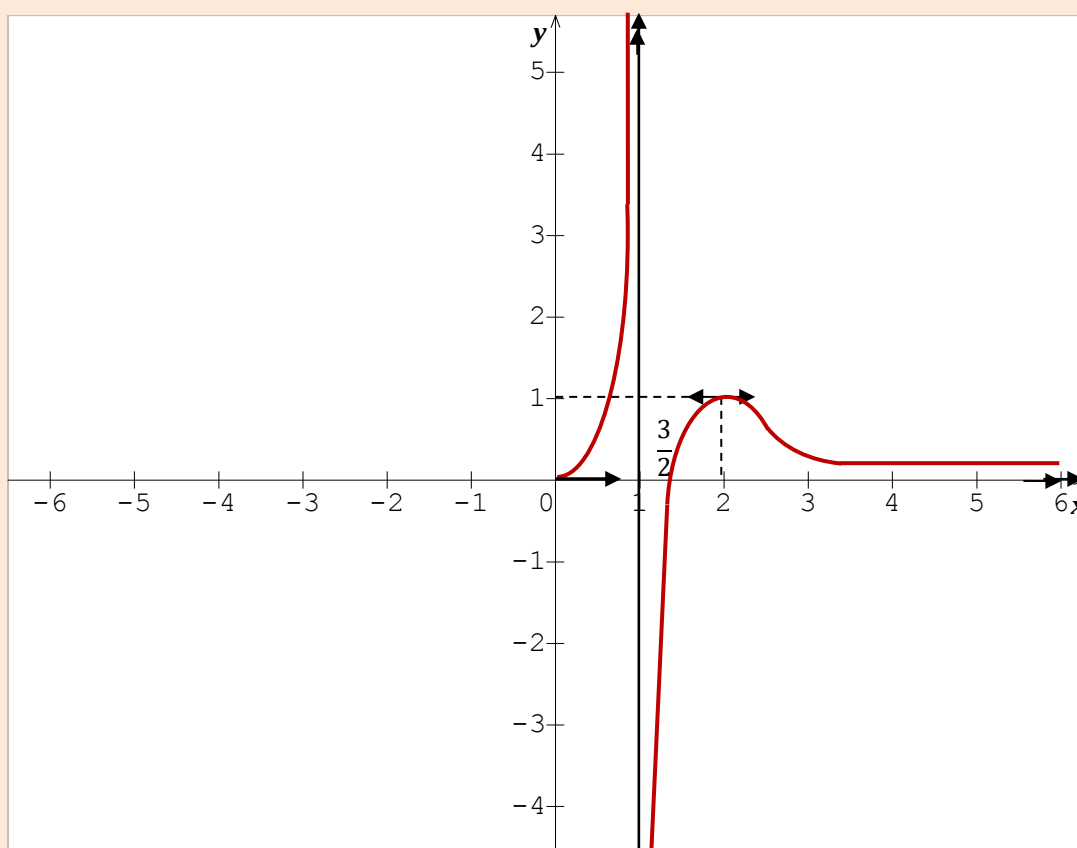
|         |           |   |           |           |
|---------|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 2 | 4         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | 0 | —         | —         |
| $f(x)$  |           | 1 | $+\infty$ | 3         |

Diagramme de variation : La courbe  $f(x)$  a une valeur de 1 à  $x=2$  et tend vers  $+\infty$  à  $x=4$ . Elle a une asymptote horizontale à  $y=-\infty$  pour  $x \rightarrow -\infty$  et une autre à  $y=3$  pour  $x \rightarrow +\infty$ . La dérivée  $f'(x)$  est négative sur  $(2, 4)$  et positive sur  $(-\infty, 2)$  et  $(4, +\infty)$ .

- 1) Tracer la courbe  $C$  de  $f$
- 2) Compléter le tableau de variation de  $f$
- 3) On suppose que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$ 
  - a- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $\beta$  et  $\alpha$
  - b- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $I = ]2 ; 4]$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
  - c- Donner l'équation de la tangente à la courbe  $C'$  de  $g^{-1}$  au point d'abscisse 1
  - d- Tracer  $C'$
  - e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre  $m$ , du nombre et des signes des solutions de l'équation  $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

**Exercice32**

On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction  $g$ .



- 1) Compléter la courbe de la fonction  $g$  sachant que  $g$  est impaire.
- 2) Donner les équations des asymptotes à  $(C_g)$
- 3) Quel est le domaine de définition de  $g$  sous forme de réunion d'intervalles  
Donner les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ .
- 4) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

### Exercice 33

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  où  $a, b, c, d$  sont des réels et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouver les réels  $a ; b ; c$  et  $d$  sachant que la droite d'équation  $x = 3$  est asymptote et  $(C_f)$  passe par les points  $A(2 ; 3)$ ,  $B(4 ; 7)$  et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra  $a = 1 ; b = -1 ; c = -5$  et  $d = -3$

- a- Etudier la fonction  $f$
- b- Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à son asymptote oblique
- c- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[4 ; +\infty[$  réalise une bijection de  $[4 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

d- Calculer  $g(5) ; g(6) ; (g^{-1})' \left( \frac{15}{2} \right)$

3) Montrer que  $(C_f)$  admet un centre de symétrie que l'on déterminera

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$

5) a- Montrer que  $\forall x \in [4,5] \text{ on a } |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduire que  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

6) Tracer  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ainsi que  $(C_{g^{-1}})$  la courbe de  $g^{-1}$

### Exercice34

**Partie A :** Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $D_f = ]1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Montrer que la dérivée de  $f$  garde un signe constant sur  $D_f$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$  (limite et sens de variation)
- 3) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]1 ; 2[$

**Partie B :** On se propose de résoudre l'équation  $f(x) = 0$  dans  $]1 ; 2[$ .

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , a même ensemble de solution que l'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
- 2) On appelle  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$  soit  $\alpha$  la solution de l'équation  $f(x) = 0$  (On a donc  $g(\alpha) = \alpha$  et  $1 \leq \alpha \leq 2$ )
  - a) Montrer que si  $x$  est élément de  $]1 ; 2[$  alors  $g(x)$  est aussi élément de  $]1 ; 2[$ .
  - b) Justifier la dérivabilité de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  Calculer la dérivée de  $g$  puis montrer que pour tout  $x \in [1, 2]$  on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - c) En déduire que pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ , on a  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

### Exercice35

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Etudier la fonction  $f$  (limites, variations).

2) a- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que  $\forall x \neq 1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

b- En déduire que la droite (D) d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à (C)

c- Préciser la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commune I à la courbe (C) et (D).

3) Tracer (C) et (D)

4) a- Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T).

b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = x + m$ .

5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation

$y = x + m$  sont les solutions de l'équation :

$$(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$$

(E) :

b) Trouver suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation (E).

c) Pour quelles valeurs de  $m$  la courbe (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  ont-elles deux points communs M et N ?

d) Dans ce cas, calculer en fonction de  $m$ , l'abscisse du milieu I de [M N].

e) Montrer que lorsque  $m$  varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :

$$y = x + \frac{7 - 4x}{2x - 2}$$

### Exercice 36

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduire que  $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$ , on a :  $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$  (1)

2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$ , par  $g(x) = \sqrt{x+1}$  et soit  $a$  un réel strictement positif.

3) Déterminer la dérivée première et seconde de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$

4) Vérifier que  $\forall x \in [0 ; a[$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

5) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; a]$ ,

$$\text{démontré que } 1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2} \quad (2)$$

6) a) Dédurre des relations (1) et (2) que :

$$\forall \alpha \in [0 ; +\infty[ , \text{ on a : } 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$$

b) Etablir alors l'inégalité suivante :  $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$

c) En déduire une valeur approchée de  $\sqrt{1,1}$  tout en précisant la marge d'incertitude.

7) Etudier la fonction  $f$  puis tracer la courbe (C).

### LES FONCTIONS ECONOMIQUES

**DOMAINE DE DEFINITION :** une fonction de production est toujours définie sur un intervalle compris entre 0 et  $+\infty$ .

**Quelques importantes formule :**

- Le cout total de production est la somme des couts variables et des couts fixes  
**CT=CV+CF**
- Les couts variables représentent la partie dépendante de la quantité produite
- Les couts fixes représentent la partie indépendante de la quantité produite
- Le cout marginal est le cout d'une unité supplémentaire, c'est la dérivée première du cout total
- Le cout moyen est le cout d'une unité produite, c'est le cout total divisé par la quantité produite
- La recette totale représente le prix unitaire de vente multiplié par la quantité vendue, C'est le montant total des ventes, elle est aussi appelée chiffre d'affaire  
**RT = P x Q**
- Recette marginale  $R_m$  = dérivée de la recette totale  
 **$R_m = (RT)'$**
- Le bénéfice réalisé représente la différence entre la recette totale et le cout total  
**Le Bénéfice = recette total RT – coût total CT**  
 **$B(x) = RT(x) - CT(x)$**

**NOTION DE MINIMUM ET MAXIMUM :**

- Dans un tableau de variation, lorsque deux flèches se croisent en en haut, ce niveau représente celui pour lequel la quantité produite maximise la fonction de production donnée

➤ Et vice versa

### EXERCICES :

#### Exercice 1 :

1.-) Déterminer les fonctions de coût total, de coût moyen, de coût marginal, de recette totale et de bénéfice à partir des données suivantes : ?

Coût variable :  $q^2 + 5q$

Coût fixe : 20

Prix de vente : 60

2.-) Déterminer les fonctions de coût total, de coût moyen, de coût marginal, de recette totale et de bénéfice à partir des données suivantes :

Coût variable :  $q^3 + 2q^2 + 3q$

Coût fixe : 8

Prix de vente : 15

3.-) Déterminer les fonctions de coût total, de coût moyen, de coût marginal, de recette totale et de bénéfice à partir des données suivantes :

Coût variable :  $q^2 + 10q$

Coût fixe : 20

Fonction de demande  $q = -0,5p + 15$

#### Exercice 2 :

1.-) Calculer la recette totale et la recette marginale à partir de la fonction de demande du bien :  $q = -0,5p + 15$

2.-) Calculer la recette totale et la recette marginale à partir de la fonction de demande du bien :  $q = -2p + 20$

3.-) Calculer la recette totale et la recette marginale à partir de la fonction de demande du bien :  $q = -5p + 50$

#### Exercice 3 :

1.-) Pour un Bien déterminé, la demande D pour un prix d'achat P et l'offre O pour un prix de vente P s'expriment respectivement par les relations suivantes :

$D = 50\,000 - 0,5P$  et  $O = -10\,000 + 0,5P$

a.-) Quel prix d'achat (et de vente) s'établit sur le marché ?

b.-) En déduire la quantité d'équilibre du marché. c.-) Quelle est l'élasticité de la demande par rapport au prix pour  $P = 100\,000F$  ?

2.-) même exercice :  $D = 60 - 2P$  et  $O = 7P + 15$

a.-) Calcule le prix et la quantité d'équilibre.

b.-) Le Prix d'équilibre passe à 10F. Quelle est la situation du marché ?

**Exercice 4 :** Une usine fabrique « x » produits ( $0 \leq x \leq 30$ ). Les frais de production sont donnés par  $(x) = x^2 + 5x + 10$ .

1.-) Calcule le coût pour une production de 10 unités ; 20 unités et 25 unités

2.-) Calcule la quantité à produire pour un coût total de 310 um, en déduire le coût moyen.

3.-) Calcule le moyen  $(x)$  et le coût marginal  $Cm(x)$ .

- 4.) Calcule la quantité  $x$  qui minimise le coût moyen.
- 5.-) L'usine vend un produit «  $x$  » à 50 F : Donne la fonction de recette totale  $R(x)$  et de bénéfice  $B(x)$
- 6.-) Calcule la quantité de «  $x$  » qui maximise le bénéfice.

**Exercice 5 :** Dans une entreprise, les coûts de fabrication de «  $q$  » objets en euros, sont définis par la fonction  $(q) = 0,2q^2 + 10q + 1500$ .

- a.-) Calcule  $C(0)$  et donne en une interprétation concrète.
- b.-) Détermine la quantité  $q$  à fabriquer pour que les coûts soient égaux à 1 610 euros
- 2.-) L'entreprise vend chaque objets à 87 euros
- a.-) Vérifie que le Bénéfice  $B(q) = -0,1q^2 + 77q - 1500$
- b.) Pour quelle valeur de  $q$  le bénéfice est-il nul ?
- c.-) Dresse le tableau de variation de  $B(q)$  puis déduise en le bénéfice maximal.

**Exercice6 :**

Une entreprise de forage propose le tarif suivant : 10 000F le premier mètre, 12 000F le deuxième mètre, 14 000F le troisième et ainsi de suite en ajoutant chaque fois 2 000F.

On désigne par  $C_n$  le coût du forage du mètre.

- 1) Exprimer  $C_{n+1}$  en fonction de  $C_n$ .
- 2) En déduire la nature de la suite  $C_n$  puis préciser sa raison et son premier terme.
- 3) Exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Quel est le coût du forage 16ème mètre ?
- 5) Quel est le coût du forage d'un puits de profondeur 16 mètres ?
- 6) Quelle profondeur maximale en mètres peut-on atteindre avec un budget de 3 000 000F ?

**Exercice 7 :** Une usine fabrique «  $x$  » produits ( $0 \leq x \leq 50$ ). Les frais de production sont donnés par  $(x) = 2x^2 + x + 20$ .

- 1.-) Calcule le coût pour une production de 10 unités ; 20 unités et 30 unités
- 2.-) Calcule la quantité à produire pour un coût total de 3 260 um, en déduire le coût moyen.
- 3.-) Calculer le moyen  $(x)$  et le coût marginal  $h(x)$ .
- 4.-) Calculer la quantité  $x$  qui minimise le coût moyen.

**Exercice 8 :** fonctions économiques La fonction de coût d'une entreprise est  $C(Q) = 3Q^2 + 6Q + 5$

- 1.-) Calcule le coût pour  $Q = 0$  ;  $Q = 5$  ;  $Q = 10$  ;  $Q = 15$  ;  $Q = 20$
- 2.-) Calcule  $Q$  pour Coût évalué à 245 um
- 3.-) Quelle est l'équation de la fonction du coût marginal ?
- 4.-) Quelle est l'équation de la fonction du coût moyen ?

5.-) Quelle est la quantité de  $Q$  qui minimise le coût moyen

**Exercice 9 :** Une entreprise fabriquant un type unique de produit se trouve sur un marché de monopole. Sa production peut atteindre un maximum de 10 unités. Elle supporte les coûts de production suivants :  $2Q^2 + 50$  (Où  $Q$  représente le nombre d'unités produites). La demande est exprimée par la fonction :  $q = -0, p + 15$  (Où  $p$  représente le prix unitaire du bien considéré).

Déterminer la quantité et le prix qui permettent au monopoleur de maximiser son profit- calculez le.

**Exercice 10 :** fonctions économiques Etant donné le coût de production  $(q) = q^3 - q^2 + q + 1$  Et la loi de la demande :  $(p) = 3 - 2p$  1.-) Quelle est la quantité qui minimise le coût moyen ? 2.-) Quelle est la quantité qui maximise le bénéfice total ? 3.-) Trouver le coût moyen minimal et le profit maximum.

**Exercice 11 :** fonctions économiques Un fabricant de pièces métalliques réalise une production annuelle de  $Q$  unités pour un coût total de :  $(q) = q^3 - 12q^2 + 48q$

1/ Déterminer en fonction de  $q$  le coût marginal  $C'(q)$  et le coût moyen  $CM(q)$ .

2/ Montrer que si  $q_0$  est la production pour laquelle le coût unitaire est minimum, on a  $C'(q_0) = CM(q_0)$ .

3/ On suppose cette entreprise en concurrence parfaite, le prix du marché étant  $p = 36$  par unité vendue. Montrer que le Bénéfice en fonction de  $Q$  s'exprime par  $B = q [p - CM(q)]$  Définir la production optimale.

4/ On suppose maintenant que le prix de vente  $p$  dépend de la production  $q$  que l'entreprise décide d'écouler sur le marché :  $p = 50 -$  . Quelle est la valeur de la production qui maximise le bénéfice ? Calculer l'élasticité  $E$  de la demande par rapport au prix.

**Exercice 12 :** La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante  $t \rightarrow (t) = -t^2 + 2t + 36$  où  $t$  s'exprime en années.

1.-) Calculer la dérivée de la fonction  $(t)$  puis en déduire le tableau de variation de  $f$ . Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.

2.-) Tracer la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; i ; j)$

3.-) La production totale sur les cinq années est donnée par  $\int (t) dt$  50 . Calculer la production totale.

**Exercice 13 :** Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de  $x$  centaines d'objets est :  $(x) = 3x^3 + 33x - 54$  où  $1 \leq x \leq 10$ .

1.-) Calculer  $B'(x)$ . en déduire le tableau de variations de  $N$  sur  $[0 ; +\infty[$

2.-) Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.

**Exercice 14 :** On note  $f(x)$  la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où  $x$  désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années. On donne  $(x) = 60x + 40x + 10$  où  $x \in [0 ; \infty[$ .

- 1.-) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $(x) = a + b x + 10$  pour  $x \in [0; \infty[$ .
- 2.-) a.- Calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$  b.-) Justifier que la population est croissante
- 3.-) a.-) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 52$   
b.-) En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieure à 52 000 habitants.
- 4.-) a.-) Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$   
b.-) En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5.-) Tracer la courbe  $C_f$  de  $f$  dans un repère orthonormé 1 cm = 10 ans sur l'axe  $x$  1 cm = 10 000 habitants sur l'axe  $y$

**Exercice 15 :** Un fabricant de postes de radio produit  $x$  postes par semaine à coût total de :  $f(x) = x^2 25 + 3x + 100$  francs. Il est en régime de monopôle et la demande de son marché est  $x = 75 - 3p$  ; où  $p$  est le prix d'un poste.

- 1.-/ Trouver la fonction du bénéfice  $(x) = \text{recette totale} - \text{coût total}$
- 2.- / Trouver le nombre de postes que ce fabricant doit produire par semaine pour maximiser son bénéfice.
- 3.-/ Quel est le bénéfice maximum ?

**Exercice 16 :** Une entreprise fabrique des jouets de modèles X. Le modèle X, se vend à 1F pièce. Le coût de fabrication, exprimé en F, est donné par la fonction suivante :  $(x) = 8x^2 - 2x - 1\,000$  où  $x$  est le nombre de jouets. On suppose que toute la production est écoulee sur le marché.

- 1.- déterminer la fonction  $(x)$ , le profit de l'entreprise lorsqu'elle a vendu  $x$  jouets. 2.- La capacité de production de l'entreprise est au total 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver le nombre de jouets permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé.

**Exercice 17 :** Le coût moyen de production d'une entreprise est une fonction de la quantité  $x$  produite  $(x) = x^2 - 150x + 8\,000$

- 1/ Déterminer la quantité  $x$  qui minimise le coût moyen puis trouver la valeur du coût moyen minimum.
- 2/ déterminer la fonction coût total de production et la fonction coût marginal de production.
- 3/ le prix de vente unitaire étant de 7 550F, déterminer la fonction profit et en déduire le profit maximum de l'entreprise.

**Exercice 18 :**

- 1/ connaissant le coût marginal d'une unité produite  $x$  :  $CMa = x^2 - 11x + 10$ . Trouver le coût total et le coût moyen si les coûts fixes sont de 60.
- 2/ Si le revenu marginal est  $RMa = -4x^2 + 42x - 20$ , déterminer le revenu total et la fonction de demande.
- 3/ Déterminer la quantité qui maximise le profit total, en déduire le profit total.

**Exercice 19 :** Un fabricant de pièces métalliques réalise une production annuelle de  $x$  unités pour un coût total de :  $(x) = x^3 - 12x^2 + 48x$

- 1/ Déterminer en fonction de  $x$  le coût marginal  $Cm(x) = f'(x)$  et le coût unitaire moyen  $CM(x) = f(x)/x$ .
- 2/ Montrer que si  $x_0$  est la production pour laquelle le coût unitaire est minimum, on a  $f'(x_0) = CM(x_0)$ .
- 3/ On suppose que le prix du marché étant  $P = 36$  par unité vendue. Montrer que le Bénéfice en fonction de  $x$  s'exprime par  $(x) = x [p - C(x)]$ . Définir la production optimale.

**Exercice 20 :** Etant donné le coût de production  $(x) = x^3 - x^2 + x + 1$  et la loi de la demande :  $p = 3 - 2x$ . Déterminer la quantité qui minimise le coût moyen et celle qui maximise le profit total. Quelles sont les valeurs de ce coût moyen minimum et ce profit maximum.

**Exercice 21 :**

Une entreprise fabriquant un type unique de produit se trouve sur un marché de monopole. Sa production peut atteindre un maximum de 10 unités. Elle supporte les coûts de production suivants :  $2x^2 + 50$  (Où  $x$  représente le nombre d'unités produites). La demande est exprimée par la fonction :  $x = -0,5p + 15$  (Où  $p$  représente le prix unitaire du bien considéré). Déterminer la quantité et le prix qui permettent au monopoleur de maximiser son profit- calculer le.

**Exercice 22 :**

Une usine fabrique mensuellement  $x$  produits ( $0 \leq x \leq 10$ ). Chaque mois les frais de production sont donnés par  $(x) = \ln(2x + 4)$  la recette obtenue en vendant  $x$  produits au prix unitaire de 50 000 FCFA s'exprime par  $(x) = 12x$  (frais et recette en centaine de milliers de FCFA). Le bénéfice mensuel de l'usine est donc :  $(x) = 12x - \ln(2x + 4)$ .

1.-/ L'usine réalise-t-elle un bénéfice lorsqu'elle vend chaque mois :

a.-) 4 produits ?

b.-) 7 produits ?

2.-/ Quel nombre minimal de produits faut-il vendre mensuellement pour être bénéficiaire ?

**Exercice 23 :** Une entreprise fabrique une quantité  $x$  d'un produit, exprimé en millier de tonnes, dont le coût marginal  $C$  défini sur  $[0; 10]$  par  $(x) = x + 4x + 1$ .

Le but est d'étudier le coût total  $CT$  et le coût moyen  $Cm$  de la production, puis de minimiser le coût moyen. Les coûts sont exprimés en centaine de milliers de FCFA.

A.-/ Etude de  $CT$  La fonction  $CT$  est la primitive de  $C$  qui s'annule pour  $x = 0$ . Vérifier que  $CT = x^2/2 + 4x + 1$ .

B.-/ Etude du coût moyen  $Cm$  La fonction  $Cm$  est définie sur  $[0; 10]$  par :  $Cm = CT/x$ .

1.-/ Calculer la dérivée  $Cm'$  de  $Cm$ .

2.-/ Etudier le sens de variation de  $Cm$  sur  $[0; 10]$ .

3.-/ Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ?

**Exercice 27 :**

On se propose d'étudier les effets du volume de la récolte mondiale d'un produit agricole sur les prix atteints par ce produit. Par la suite,  $x$  désigne la quantité récoltée en millions de tonnes. La recette totale en millions de francs CFA est donnée par la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $R(x) = -0,4x^2 + 8x$ .

1°/ Etudiez la fonction  $R$  et la représenter graphiquement (2 points)

2°/ L'ensemble des charges totales (entraînées par la récolte) est donné par la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = 25 + x$ .

a.- / Déterminez les points d'intersection de cette droite avec la parabole précédente représentant la recette totale (1pt)

b.-/ Déterminez graphiquement la zone correspondant à un gain (2 pts)

3°/ déterminez la fonction bénéfice  $B$  et la représenter graphiquement. Déterminez la valeur de  $x$  pour laquelle le bénéfice atteint son maximum (3 points)

### Exercice 28 :

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production. Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction  $C_m$  définie sur l'intervalle  $[1 ; 20]$  par :  $C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q) e^{-0,2q}$ ,  $q$  étant la quantité exprimée en tonnes et  $C_m(q)$  son coût exprimé en milliers de francs CFA.

1-/ La fonction coût total est modélisée par la fonction  $CT$  définie sur l'intervalle  $[1 ; 20]$  par :  $CT(q) = 4q - q^2 e^{-0,2q}$ . Vérifier que cette fonction  $CT$  est une primitive de la fonction  $C_m$  sur l'intervalle  $[1 ; 20]$ . (1 pt)

2-/ La fonction coût moyen, notée  $CM$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; 20]$  par :  $CM(q) = CT(q) / q$

a-/ Vérifier que  $CM(q) = 4 - qe^{-0,2q}$ .

### Exercice 29 :: .....

Pour l'entreprise TANG et frères, le coût total de fabrication, exprimé en milliers de francs CFA, de  $x$  appareils est donné par :

$$C(x) = 0,1x^2 + 6x + 1\,000 \text{ pour tout } x \text{ de } [0 ; 600] ;$$

1- a- Détermine le coût fixe de l'entreprise,

b-Détermine le coût total de fabrication de 400 appareils,

2- On suppose que chaque appareil est vendu à 65 milliers de francs CFA.

a- Détermine la recette totale  $R(x)$  réalisée en milliers de francs CFA, pour la vente de  $x$  appareils,

b- Détermine la recette correspondante à la vente de 400 appareils,

c- Vérifie que le bénéfice lors de la vente  $x$  appareils est donné par :

$$B(x) = -0,1x^2 + 59x - 1\,000$$

3-On veut trouver le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et le nombre d'appareils, fabriqués et vendus correspondant.

a- Etudie les variations de  $B(x)$  sur  $[0 ; 600]$  ;

b- En utilisant le tableau de variation, réponds à la question posée en 3).

### Exercice30:

Une usine vend actuellement des boîtes de peinture au prix de 15 CFA (en milliers de francs) la boîte de peinture. Sa production journalière  $q$  est comprise entre 0 et 400 boîtes. Le coût de fabrication de peinture est donné par :

la fonction  $0,04q^2 - 5q + 2100$  (en milliers de francs CFA),

où  $q$  désigne le nombre de boîtes de peinture produit et vendu par jour.

- 1) Exprimer la recette journalière  $R(q)$ , (en milliers de francs CFA) en fonction de  $q$  où  $q \in [0; 400]$ .
- 2) Déterminer les points morts de la production, c'est-à-dire la quantité de boîtes à produire pour que la recette soit égale au coût total de fabrication.
- 3) On appelle  $B(q)$  le bénéfice (en milliers de francs CFA) réalisé par l'usine en une journée.
  - a) Exprimer  $B(q)$  en fonction de  $q$ .
  - b) Calculer la fonction dérivée  $B'(q)$  de la fonction  $B(q)$ .
  - c) Dresser le tableau de variations de  $B(q)$  sur l'intervalle  $[0; 400]$ .
  - d) En déduire la quantité de boîtes à produire pour réaliser un bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice.
  - e) Tracer la courbe représentative de la fonction  $B(q)$  dans un repère orthogonal. 1 cm représente 100 boîtes en abscisse. 1 cm représente 200 000 en ordonnée.

### Exercice31.....

Les coûts de production d'un bien de grande consommation sont calculés par l'expression

$CT(x) = 0,1x^2 + 100x + 16000$ , où  $x$  est le nombre d'unités produites et  $CT(x)$  le coût total en francs de la production de  $x$  unités. Chaque article étant vendu 100F la pièce. On désigne par  $RT(x)$  la recette totale de l'entreprise. L'entreprise peut produire au maximum 1000 unités.

1. déterminer la fonction bénéfice notée  $BT$
2. Etudier le sens de variation de la fonction  $CT$  sur l'intervalle  $[0; 1000]$  et représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthogonal où 1cm représente 100 unités sur l'axe des abscisses et 10000 F sur l'axe des ordonnées.
3. Représenter graphiquement la fonction  $RT(x)$  dans le même repère. D'après le graphique, sur quel intervalle la courbe de  $RT$  est-elle au-dessus de  $CT$  ?
4. Etudier le signe de  $BT$ . A quel intervalle doit appartenir  $x$  pour que l'entreprise réalise un bénéfice ?

### Exercice32

Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois  $x$  objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par  $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$  avec  $x \in [5 ; 60]$ .

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

- 1) Calculer  $C'_m(x)$  puis en déduire le tableau de variation de  $C_m(x)$ .
- 2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante  $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$  où  $t$  s'exprime en années.

- 1) Calculer la dérivée  $f'(t)$  de la fonction  $f(t)$  puis en déduire les variations et le tableau de variation de  $f$ . Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
- 2) Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 3) La production totale sur les cinq années est donnée par  $\int_0^5 f(t)dt$ .  
Calculer la production totale.

### Exercice33

Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par  $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$  où  $x > 0$ .

Le coût moyen  $f(x)$  est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite  $x$  en hectolitres.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 1cm.

- 1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- 2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = 0,5x$ .
- 3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est il minimum ?
- 4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.
- 5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

### Exercice34

Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de  $x$  centaines d'objets est :  $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$  où  $1 \leq x \leq 10$

- 1) a- Calculer  $B'(x)$ . En déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[1 ; 10]$ .

b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.

- 2) a- Résoudre l'équation  $B(x) = 0$ . En déduire les points morts de la production.

b-Résoudre l'inéquation  $B(x) \geq 0$ . En déduire la marge de bénéfice de la production.

### Exercice35

On note  $f(x)$  la population ( en milliers ) d'une ville fondée en 1960, où  $x$  désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne  $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$  où  $x \in [0 ; +\infty[$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$  pour  $x \in [0 ; +\infty[$ .
- 2) a- Calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$ .  
b- Justifier que la population est croissante.
- 3) a- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 52$ .  
b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?  
b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ).  
Echelle : 1 cm  $\rightarrow$  10 ans sur l'axe des abscisses  
1 cm  $\rightarrow$  10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

### Exercice36

Une entreprise produit d'un certain nombre  $x$  de crayons de couleur par jour où :  $(x$  exprimé en millier).

Lorsque la quantité  $x$  est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par :  $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de  $x$  que l'on notera  $R(x)$ .

2) Montrer que la bénéfice  $B(x)$ , exprimé en euro, est donnée par :  $B(x) = -x^3 + 147x - 600$  avec  $x \in [3 ; 10]$ . (On rappelle que  $R(x) - C(x) = B(x)$ ).

3) Calculer  $B'(x)$  où désigne la fonction dérivée de  $B$ .

4) Etudier le signe de  $B'(x)$  sur l'intervalle  $[3 ; 10]$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $B$ .

5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]3 ; 7[$  et  $\beta \in ]7 ; 10[$  tel que  $B(\alpha) = B(\beta) = 0$ .

b- Calculer  $B(4)$  ;  $B(8)$  ;  $B(5)$  ;  $B(9)$  puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur desquelles  $(x) < 0$ .

7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

### Exercice37

Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.

On désigne par  $f(x)$  le coût moyen, en euro par kg, pour  $x$  kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction  $f$  est définie sur  $[1 ; 45]$  par :  $f(x) = x^2 - 60x + 1250$ .

1) Justifier que le coût de production total  $C(x)$  pour  $x$  kg de truffes est donné, en FCFA, par :  $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$ .

2) Exprimer le bénéfice  $B(x)$ , en euro, réalisé par ce producteur pour  $x$  kg de truffes conditionnés et vendus.

3) a) Calculer  $B'(x)$  et en déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[1 ; 45]$ .

b) Pour quelles quantités de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

### Exercice38

Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de  $x$  milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour  $1 \leq x \leq 4$  ;  $C(x) = 2x - 14\sqrt{x}$

1) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[1 ; 4]$ , on a :  $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation  $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduire le sens de variation du coût total  $C$  sur l'intervalle  $[1 ; 4]$ .

Interpréter économiquement.

### Exercice39

Le coût, en euro, de  $x$  repas préparés dans un restaurant peut s'écrire :

$$C(x) = 0,1x^2 - x + 640 \text{ avec } x \in [40 ; 160].$$

On note  $C_m(x)$  le coût moyen de  $x$  repas, en euro par repas.

1) Justifier que  $C$  est croissante sur  $[40 ; 160]$ .

2) a- Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.

b- Exprimer le coût moyen  $C_m(x)$  par repas en fonction du nombre  $x$  de repas préparés.

3) a- Etudier le sens de variation du coût moyen  $C_m$

b- Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

### Exercice40

La société EDM désire mesurer la satisfaction de ces consommateurs par une « fonction de satisfaction »  $f$ , dont la valeur se situe dans l'intervalle  $[0 ; 100]$ . Si la satisfaction vaut 0,

les consommateurs ne sont pas satisfaits et quand elle vaut 100 les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « satisfaction ».

On définit la fonction « envie »  $v$  comme étant la dérivée de la fonction  $f$  tel que  $v = f'$ .

On dit qu'il y a « envie » lorsque  $v$  est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ». Ainsi l'EDM propose différents types de formules pour la consommation de l'électricité et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une consommation.

La fonction de satisfaction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[1 ; 21]$  par :

$$f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640 \text{ où } t \text{ est la durée en jour de la consommation.}$$

1) Calculer  $f'(t)$ , puis en étudier le signe sur  $[0 ; 21]$ .

2) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; 21]$ .

3) Quelle doit être la durée, en jour, de la consommation pour qu'il y ait saturation ?

4) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

## CHAPITRE VI : PRIMITIVE D'UNE FONCTION

**Définition** : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle. On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  définie sur  $I$  tel que  $F'(x) = f(x)$

a)  $f$  est le polynôme défini par  $f(x) = x + 1$ .

Trouvez une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire une fonction  $F$  dont la dérivée soit  $f$ .

b) Montrez que pour tout réel  $c$ , la fonction  $G$  définie par  $G(x) = F(x) + c$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Trouvez une primitive  $G$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $G(2) = -3$ .

Existe-t-il d'autres primitives de  $f$  qui prennent la valeur  $-3$  en  $2$  ?

1. Dans chaque cas, trouvez une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par :

a)  $f(x) = 2x^2 + x + 1$ . b)  $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$ . c)  $f(x) = 2 + \cos x$ .

### 1) Propriétés

$P_1$  : Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

$P_2$  : L'ensemble des primitives d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par  $x \rightarrow F(x) + k$  où  $k$  est un nombre réel.

### 2) Recherche de la primitive d'une fonction :

La fonction  $x \rightarrow x^4$  a pour dérivée  $x \rightarrow 4x^3$

Donc la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{4}x^4$  a pour dérivée  $x \rightarrow x^3$

Alors d'une manière générale,  $n$  étant un nombre entier naturel non nul, la fonction :

$x \rightarrow x^{n+1}$  a pour dérivée  $x \rightarrow (n+1)x^n$

donc  $x \rightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}$  est une primitive de  $x^n$ .

Ainsi par lecture inverse des tableaux de dérivation, on établit le tableau des primitives :

#### a) Primitives des fonctions usuelles

| Fonctions                    | Primitives                          | Intervalles                                                                                |
|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a \ (a \in \mathbb{R})$     | $ax + k$                            | $\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$                                                         |
| $x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$           | $\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$                                                         |
| $ax^n$                       | $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$          | $\begin{cases} \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \\ \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \end{cases}$ |
| $\frac{1}{x^2}$              | $-\frac{1}{x} + k$                  | $\mathbb{R}^*$                                                                             |
| $\frac{1}{x^n}$              | $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$       | $\mathbb{R}^* \text{ avec } (n \neq 1)$                                                    |
| $\frac{a}{x^n}$              | $\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$       | $\mathbb{R}^* \text{ avec } (n \neq 1)$                                                    |
| $\frac{1}{x}$                | $\ln x  + k$                        | $\mathbb{R}_+^*$                                                                           |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$         | $2\sqrt{x} + k$                     | $\mathbb{R}_+^*$                                                                           |
| $\frac{a}{\sqrt{x}}$         | $2a\sqrt{x} + k$                    | $\mathbb{R}_+^*$                                                                           |
| $\sqrt{x}$                   | $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$          | $\mathbb{R}_+$                                                                             |
| $\sqrt{ax+b}$                | $\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$ |                                                                                            |

|          |               |              |
|----------|---------------|--------------|
|          |               | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $\sin x + k$  | $\mathbb{R}$ |

b) Opérations sur les Primitives :

| Fonctions                  | Primitives                      |
|----------------------------|---------------------------------|
| $u' + v'$                  | $u + v + K$                     |
| $u'v + v'u$                | $u \bullet v + K$               |
| $au' \ (a \in \mathbb{R})$ | $au + K$                        |
| $u' \bullet u^n$           | $\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$     |
| $\frac{u'}{(u)^n}$         | $\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$ |
| $\frac{u'}{u}$             | $\ln u  + k$                    |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$      | $2\sqrt{u} + k$                 |

|                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| $\sin(u)$                            | $-\frac{1}{u'} \cos(u) + k$ |
| $\cos(u)$                            | $\frac{1}{u'} \sin(u) + k$  |
| $\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$ | $\tan(u) + k$               |
| $\frac{u'}{\sin^2 u} = 1 + \cot^2 u$ | $\cot(u) + k$               |

**NB :**  $(u)^n \sqrt{u} = (u)^{\frac{2n+1}{2}}$

### EXEMPLES

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes

a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$  ; b)  $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5}$  ; d)  $f(x) = (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}$

e)  $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$  ; f)  $f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}}$

**Solution :**

a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + K$

b)  $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1} \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + K$

c)  $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2x+3)^5}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4(2x+3)^4} + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{8(2x+3)^4} + K$

$$d) f(x) = (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2} \Leftrightarrow f(x) = (x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(4x^3 + 4x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}+1} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}+1} \right] + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{3}{2}} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2) \sqrt{x^4 + 2x^2} + K$$

$$e) f(x) = (x + 1)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) = (x + 1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} (x + 1)^{\frac{5}{2}} + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} (x + 1)^2 \sqrt{x+1} + K$$

$$f) f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Rightarrow$$

$$F(x) = 3(2\sqrt{3x^2-5x+1}) + K \Rightarrow F(x) = 6\sqrt{3x^2-5x+1} + K$$

### Exercices

1

En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1- f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 \quad ; \quad 2- f(x) = (x^2 - 3)^3 \quad ; \quad 3- f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$$

$$4- f(x) = \sqrt{-3x+2} \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 6- f(x) = 3(-x-2)(3x+2)^2$$

$$7- f(x) = \frac{3}{(3x+1)^3} \quad ; \quad 8- f(x) = (4x-4)(2x^2-4x+1)^2 \quad ; \quad 9- f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x+5}}$$

$$10- f(x) = \frac{-5}{(7x+3)^3} \quad ; \quad 11- f(x) = (x-1)(-3x^2+6x+7)^2 \quad ; \quad 12- f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}}$$

2

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

1-  $f(x) = x^3 - x^2 - 1$  et  $F(0) = 7$  ; 2-  $f(x) = (x - 3)^6$  et  $F(3) = 0$

3-  $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$  et  $F(0) = 0$  ; 4-  $f(x) = (x - 3)^6$  et  $F(3) = 0$

5-  $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$  et  $F(0) = \sqrt{5}$

3

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition

2) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$

3) En déduire la primitive de  $f$  qui s'annule en 0

4

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x\sqrt{x}$

a- Calculer la dérivée de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

b- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

c- Déduire des questions précédentes une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

5

Soit les fonctions  $f$  et  $F$  définies par :  $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$  et  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$

Déterminer les réels  $a ; b$  et  $c$  tel que  $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$ ,  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

## Chapitre VII : Intégrales

### I) Intégrale d'une fonction

#### Problème :

Construis dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$  du plan affine la droite  $\Delta : y = x + 2$  et

La droite d'équation  $x = 3$  ; on désigne par le point d'intersection de  $\Delta$  et l'axe des ordonnées

Par B et C les points d'intersections de  $\Delta$  et de  $x = 3$  et de l'axe des abscisses avec  $x = 3$

- a- Calcule l'aire du quadrilatère OABC
- b- Calcule une primitive de F de f tel que  $f(x) = x + 2$
- c- Calcule  $F(3) - F(0)$  puis compare-le à l'aire du trapèze OABC

### 1) Définition :

Soit  $f$  une fonction définie, dérivable sur un intervalle  $I = [a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

On appelle intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  le nombre réel  $A$  tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 2) Propriétés :

**Propriété 1 :** (linéarité)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I = [a ; b]$ , on a :

- $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R} ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall k \in \mathbb{R} ; \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- Si  $f \geq 0$  ; alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si  $f \geq g$  ; alors  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

**Propriété 2 :** (Relation de Chasles).

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

Soient trois réels  $a, b, c$  éléments de l'intervalle  $I$

$$\text{D'après Chasles } \int_a^c g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

**Conséquences :**

- si  $a = b$  alors  $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

## II) Primitives et intégrales indéfinies :

### Théorème 1 :

Si  $f$  est une fonction continue et  $F$  sa primitive, alors, on peut écrire  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

#### 1) Définition :

Si  $F'(x) = f(x)$ , on dit que  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  et on peut symboliquement écrire

$$F(x) = D^{-1}[f(x)]$$

Où  $D^{-1}$  indique l'opération inverse de la dérivée

### Théorème 2 :

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f(x)$ , il s'en suit que :  $F_1(x) = F_2(x) + C$ . Où  $C$  est une constante

### Théorème 3 :

Si  $F_1(x)$  est une primitive quelconque de  $f(x)$ , alors  $F(x) = \int_a^x f(t)dt = F_1(x) - F_1(a)$

C'est-à-dire que la valeur de l'intégrale définie peut s'obtenir à partir d'une de ses primitives évaluées à la limite supérieure et à la limite inférieure.

## III) Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

### 1) Intégration par Parties

#### Théorème :

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle  $I = [a, b]$ , alors on appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx$$

### 2) Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable  $x$  une autre variable qui est fonction de  $x$ .

**Méthode pratique :**

Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$  ( $\alpha \neq 0$ ) ; on utilise la méthode suivante :

- faire le changement de variable en posant :  
 $u = \alpha t + \beta$  et on obtient  $du = \alpha dt$
- utiliser l'égalité :  $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u) du$

**Exemple**

1) En utilisant la méthode de substitution, calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$$

Posons  $u = 2x + 3 \Leftrightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$

De plus  $\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow u = 3 \\ \text{si } x = -1 \Rightarrow u = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3 \\ x = \frac{u-3}{2} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \text{Donc } I = \int_1^3 \frac{u-3}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) du = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{3} u\sqrt{u} - 6\sqrt{u} \right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$$

D'où  $I = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

**IV) Calcul d'aires :**

De façon générale nous admettrons que lorsque  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à  $F(b)-F(a)$  ou  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle OIAJ).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction  $f(x)$  et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions  $f$  et  $g$  ( $f > g$ ) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque  $x$  va de  $a$  vers  $b$  ( $a < b$ )

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ (unité d'aire)}$$

Ou  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$  (unité d'aire)

**NB :** Dans cette intégration, les portions de surface au-dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.

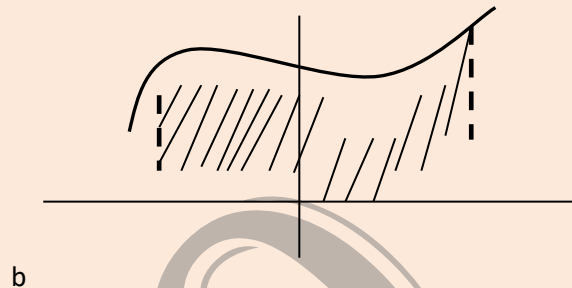
Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

**1<sup>er</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan Da

$$\text{est } A(D) = \int_a^b f(x) dx \text{ (unité d'aire)}$$

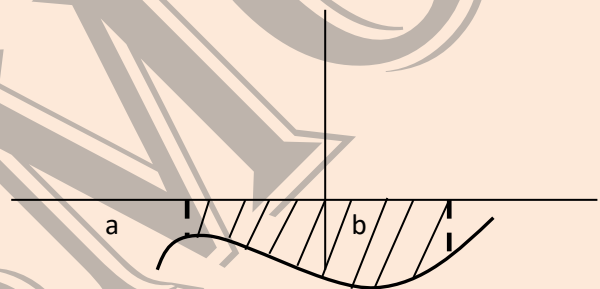


**2<sup>ème</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan

$$D \text{ est } A(D) = - \int_a^b f(x) dx \text{ (unité d'aire)}$$



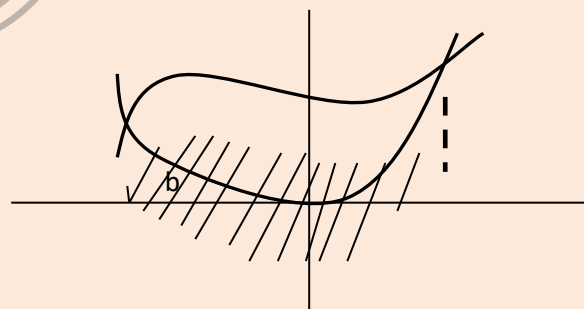
**3<sup>ème</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad a$$

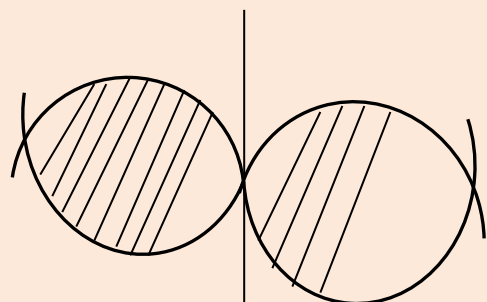
Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

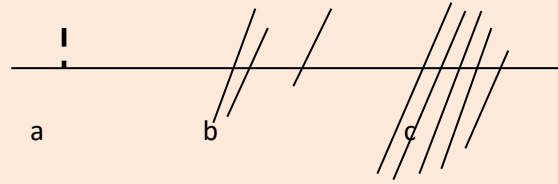
(car (Cf) est au-dessus de (Cg)).



**4<sup>ème</sup> Cas :**



$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \text{ et } b \leq x \leq c \\ g(x) \leq y \leq f(x) \text{ et} \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$



Ainsi l'aire du domaine plan limité

par les deux courbes est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \int_b^c (g(x) - f(x)) dx$$

### Exemple

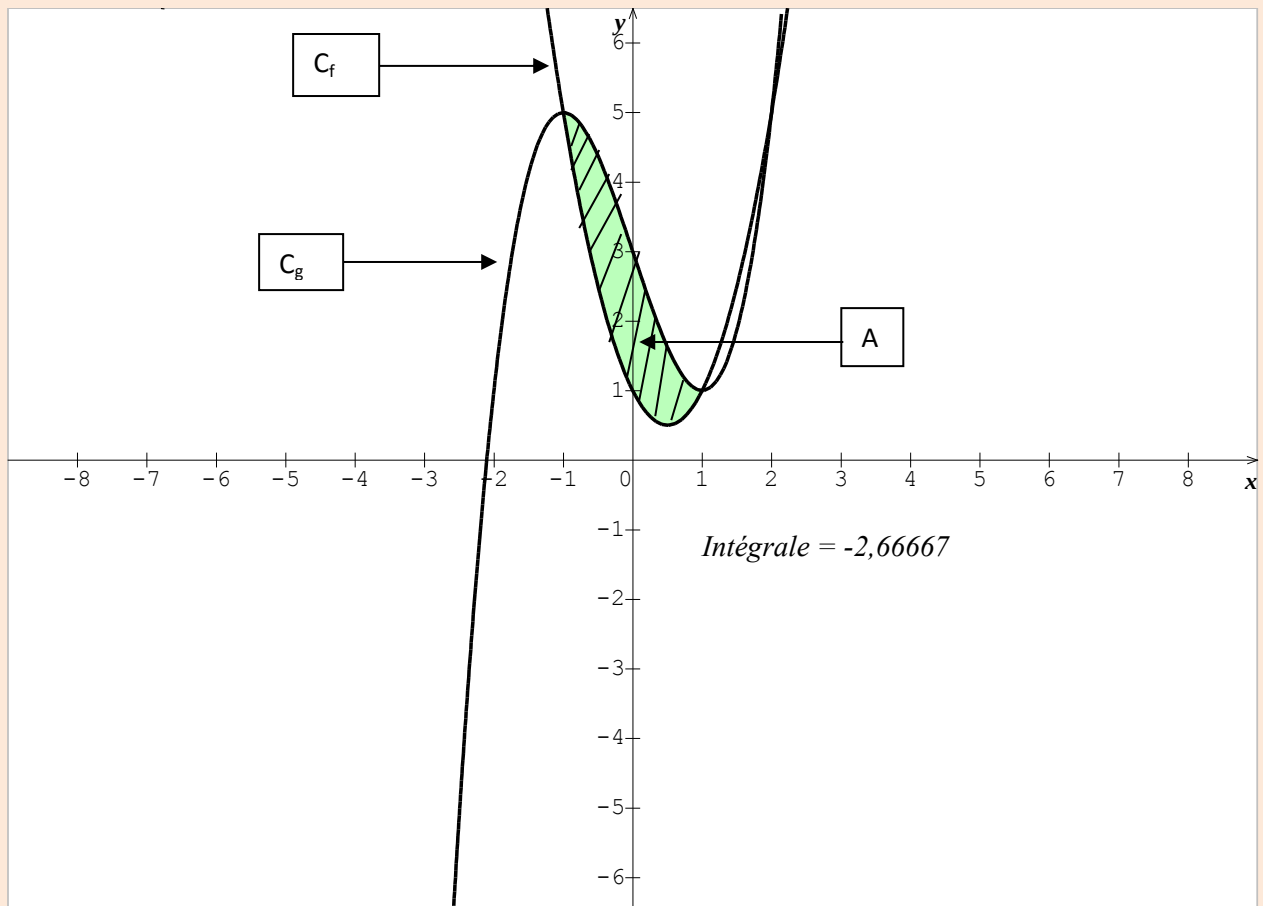
1) Calculer puis représenter l'aire A de l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$  et  $g(x) = x^3 - 3x + 3$  et les droites d'équations :  $x = -1$  et  $x = 1$ .

2) Calculer puis représenter l'aire de la portion du plan limité par la courbe (Cf) de la fonction  $f(x) = 1 - x^2$  et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 2$ .

### Solution

1) Calculons puis représentons l'aire A de l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$  et  $g(x) = x^3 - 3x + 3$  et les droites d'équations :  $x = -1$  et  $x = 1$

La représentation des courbes (Cf) et (Cg) dans le repère donne :



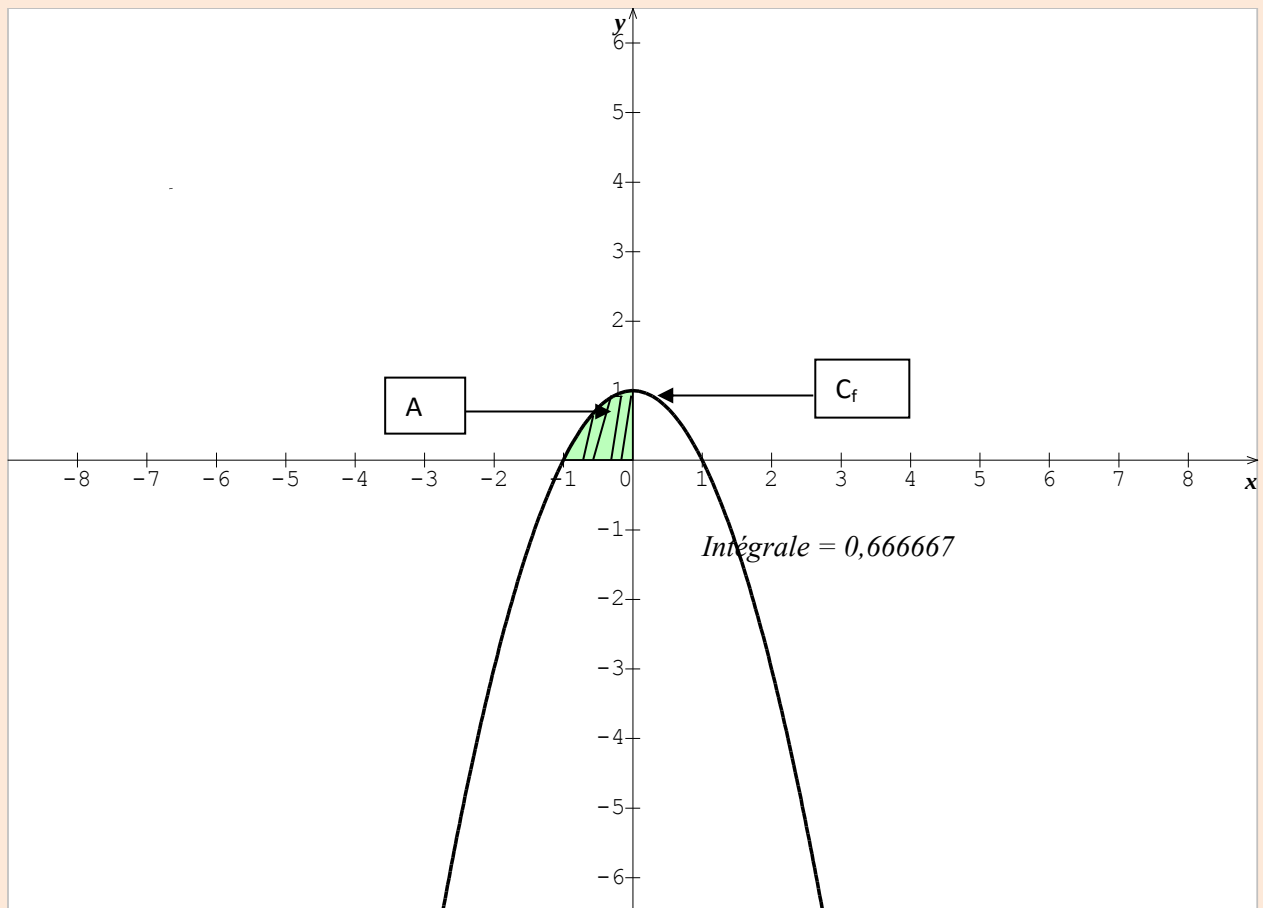
$$A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 ((2x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 3x + 3)) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^1 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^1$$

$$\Rightarrow A = \left[ -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] - \left[ -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right] = -\frac{8}{3} \text{ (u.A)}$$

2) Calculons puis représentons l'aire de la portion du plan limitée par la courbe ( $C_f$ ) de la fonction  $f(x) = 1 - x^2$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ .

La représentation de la fonction  $f$  dans le repère donne :



$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow A = \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow A = [0] - \left[ -1 + \frac{1}{3} \right] = -\frac{2}{3} \text{ (u.A.)}$$

### Exercices

**1**

En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx \quad ; \quad 5) I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$2) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx \quad ; \quad 6) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$3) I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx \quad ; \quad 7) I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx$$

$$4) I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2} dx \quad ; \quad 8) I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$$

2

En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+1} dx$$

$$2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$3) I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx$$

$$4) I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$$

3

En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$; \quad 3) I = \int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x^2-2} dx$$

$$2) I = \int_{-1}^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$; \quad 4) I = \int_2^7 (x+2)\sqrt{x+2} dx$$

4

Soit le polynôme  $p$  définie par :  $p(x) = x^3 - 12x - 16$ .

1) Montrer que  $-2$  est un zéro double de  $P$ .

2) Calculer  $I$  en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, l'intégrale :  $I = \int_4^5 p(x) dx$

5

Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

1) Calculer  $I_1$ .

2) En intégrant par parties, montrer que  $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$  (on posera  $x^n = x \cdot x^{n-1}$ )

**1°) Introduction :** Dans le tableau des primitives, pour la fonction  $1/x^n$  avec  $\forall n \neq 1$  et  $U'/U^n$  avec  $\forall n \neq 1$  ; leurs primitives existent. Si  $n=1$  la primitive de  $1/x$  et  $U'/U$  donne une nouvelle fonction appelée logarithme népérienne  $\ln$ .

C'est un mathématicien du nom de Napier ou **Neper** trouva la solution à ce problème et lui donna son Nom : **Logarithme Népérien**.

**2°) Définition :** on appelle fonction logarithme népérienne, la fonction numérique définie sur  $]0 ; +\infty[$  s'annulant à 1 et qui a pour dérivée la fonction  $1/x$ .

**3°) Propriétés immédiates :**

- La fonction **logarithme** est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et sa fonction dérivée est  $\frac{1}{x}$ .
- La fonction **logarithme** est croissante sur  $]0 ; +\infty[$  car  $\forall x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $\frac{1}{x} > 0$ . Tapez une équation ici.
- **$\ln 1 = 0$**  ;  $\forall x \in ]0 ; 1[$ ,  **$\ln x < 0$**  et ;  $\forall x \in ]1 ; +\infty[$ ,  **$\ln x > 0$** .
- La fonction **logarithme** est une bijection de  $]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  ; elle admet donc une bijection réciproque de  $\mathbb{R}$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

**Remarque :** un nombre négatif n'a pas de logarithme

**4°) Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :**

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow Df = ]0 ; +\infty[$
- Si  $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si  $f(x) = \ln[u(x)] \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$
- Si  $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$

**4) Propriétés Remarquables :**

$\forall a > 0$  et  $\forall b > 0$ , on a :

- **$P_1$  :**  $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$        **$P_6$  :**  $\ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$
- **$P_2$  :**  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$        **$P_7$  :**  $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- **$P_3$  :**  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$        **$P_8$  :**  $\ln e^a = a$  et  $e^{\ln a} = a$

- $P_4: \ln(a)^n = n \ln a$        $P_9: \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$  et  $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$
- $P_5: \ln e = 1$  et  $\ln 1 = 0$        $P_{10}: \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$

### Evaluation

- a- Calcule les réels suivants :  $A = \ln 2 + \ln 3 - 5 \ln 9$  ;  $B = \ln \frac{5}{6} + \ln 5 - 3 \ln 36$  ;
- b- Exprime en fonction de  $\ln 2$ , les expressions suivantes :  $C = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2}$  ;  
 $D = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .
- c- Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :  
 $\ln x (2x + 7) = \ln(x - 3)$  ;  $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$   
 $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$  ;  $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1)$ .  
 $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) \leq 3 \ln 2$  ;  $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) > 2 \ln(x + 1)$ .

### 5) Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ (Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

### 1- Dérivées logarithmiques:

La dérivée logarithmique d'une fonction  $u$ , est la dérivée de  $\ln|u|$

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si  $f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si  $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si  $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si  $f(x) = \ln(U(x) \cdot v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si  $f(x) = \ln[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \frac{u'(x)}{u(x)}$

### 2- Primitives remarquables :

#### Activité

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions :  $x \rightarrow \ln x$  et  $x \rightarrow \ln(ax + b)$ . Ainsi on retiendra :

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + K$
- Si  $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + K$
- Si  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|u(x)| + K$

### 3- Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$ :

Le nombre  $e$  est l'unique solution de l'équation  $\ln x = 1$  avec  $e = 2,718...$

Soit  $f(x) = \ln x$  et de courbe représentative (C).

$$Df = ] 0 ; + \infty [$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

Alors la courbe (C) admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe (C).

( $x'Ox$ ) est branche parabolique (car  $\frac{\ln x}{x} = 0$ )

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  |   | $+\infty$ |

$-\infty \xrightarrow{\quad \quad \quad} \rightarrow$

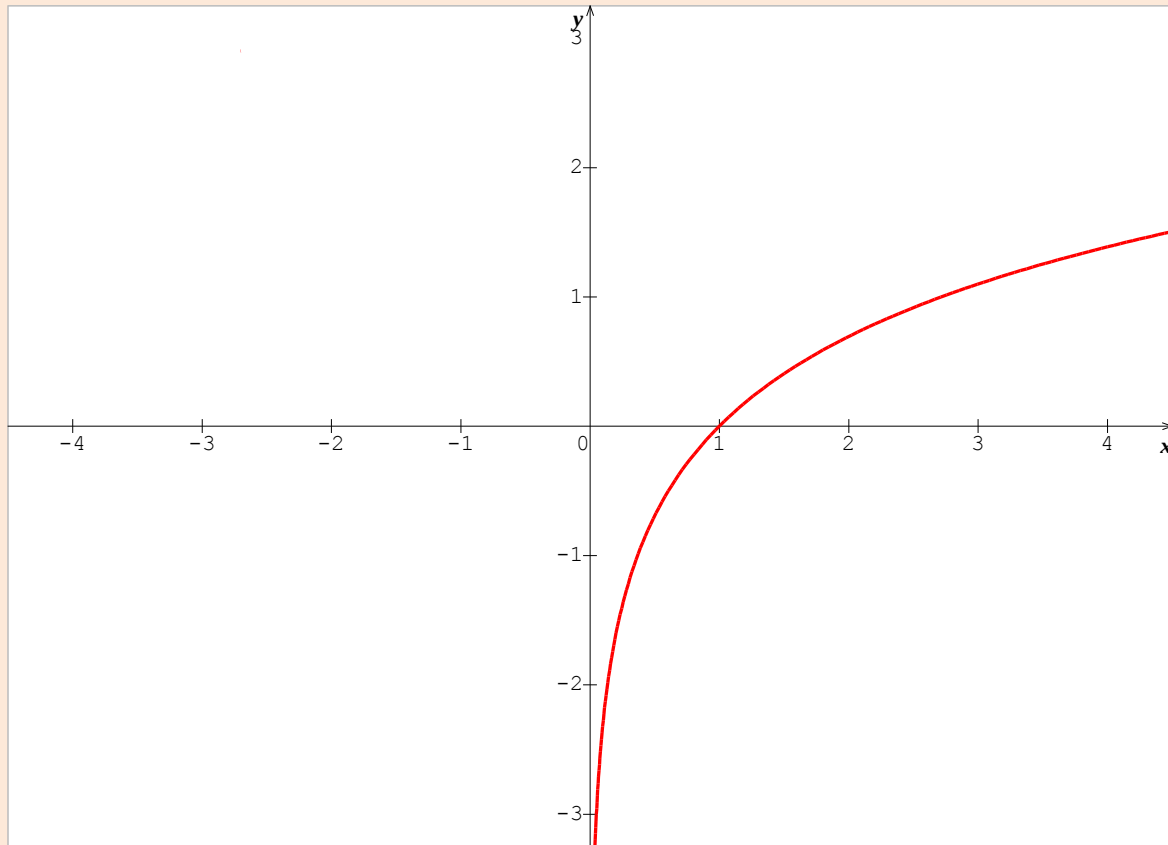
$$- \quad (C) \quad (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

$$- \quad (C) \quad (OY) \Rightarrow x = 0 \text{ et } f(0) = \ln(0) \text{ qui n'existe pas.}$$

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



#### 4- Fonction logarithme de base a :

##### a) Définition :

Soit ***a*** un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base ***a***, la fonction définie par :  $\log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

**N.B** : Lorsque ***a*** = 10, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale.

Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$M = \frac{1}{\ln 10}$  est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi  $\log x = M \cdot \ln x$ .

**b) Propriétés :**

$$P_1 : \log(ab) = \log a + \log b$$

$$P_3 : \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$P_2 : \log(ab)^n = n \log a$$

$$P_4 : \log(10)^n = n$$

$$P_5 : (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

**5- Etude de la fonction  $\log_a(x)$  :**

Soit  $f(x) = \log_a(x)$  et de courbe représentative  $(C_a)$ .

**1<sup>er</sup> Cas :**  $0 < a < 1$  ( $\ln a < 0$ )

$$Df = ] 0 ; + \infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = + \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow + \infty} f(x) = - \infty.$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow + \infty$$

Alors la courbe  $(C)$  admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe  $(C)$ .

$(x'Ox)$  est branche parabolique (car  $\frac{\ln x}{x} = 0$ )

$$x \rightarrow + \infty$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

- (C) (OX)  $\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- (C) (OY)  $\Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = \ln(0)$  qui n'existe pas.  
Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2<sup>ème</sup> Cas :  $a > 1$  ( $\ln a > 0$ )

$Df = ] 0 ; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Alors la courbe (C) admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe (C).

(x'Ox) est branche parabolique (car  $\frac{\ln x}{x} = 0$ )  
 $x \rightarrow +\infty$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  |   | $+\infty$ |

$-\infty$

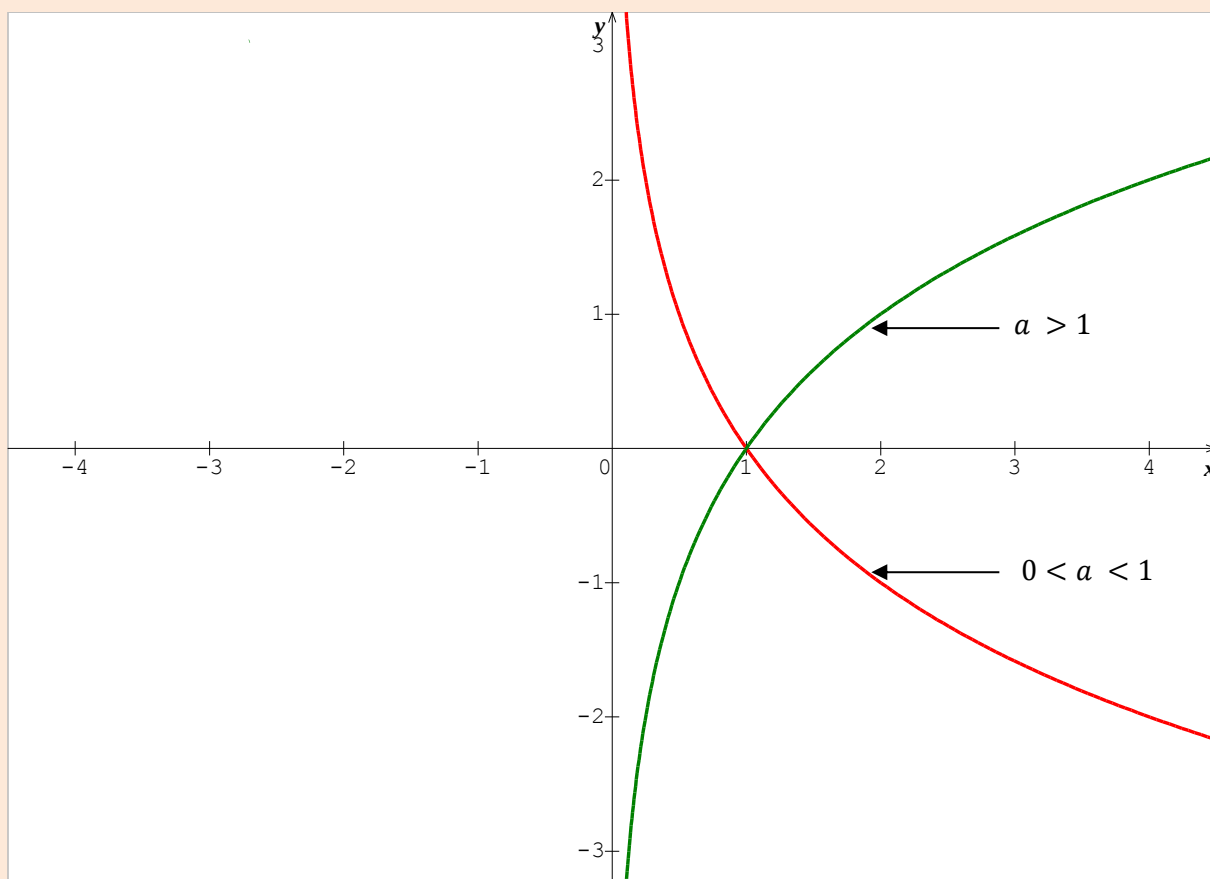
- (C)  $(OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- (C)  $(OY) \Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = \ln(0)$  qui n'existe pas.  
Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas,  $\log_a(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

### Représentation



**Exercice 1 :**

**1) Exprimer en fonction de  $\ln 2$  les réels suivants :**

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} ; B = \ln 2 + \ln (2 + \sqrt{2}) + \ln (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$C = \ln 2 \sqrt{2} + \ln 2^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} ; D = 2 \ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{2^3} - \frac{\ln 2^{\sqrt{2}}}{3 \ln 2^{\frac{3}{2}}}$$

**2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :**

**a) Les équations suivantes :**

$$\ln (2x + 7) = \ln (x - 3) ; \ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (x + 7)$$

$$\ln x + \ln (3x + 2) = \ln (2x + 3) ; \ln (x - 3) = \ln (x + 7) - \ln (x + 1).$$

$$\ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2 ; \ln(x-2) + \ln(x+3) = 2\ln(x+1).$$

$$\ln \sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x ; \ln|x-1| + \ln|2x-1| = 0$$

$$\ln \sqrt{x+1} = \ln(3-x) - \frac{1}{2} \ln 2x ; \ln \left( \frac{x-1}{2x-3} \right) = 0$$

$$3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0 ; -5(\ln x)^2 + (\ln x) + 6 = 0$$

**b) Les inéquations suivantes :**

$$\ln(2-3x) > \ln x ; \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$$

$$\ln(x^2 + 2x + 2) \geq \ln(-x^2 + x + 3) ; \ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0$$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3 ; \ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1).$$

$$(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0 ; (\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$$

$$\ln(x^2 + 2x + 2) > \ln(3+x-x^2) ; \ln(5x^2 + 6x + 1) < 0.$$

**c) Les systèmes suivants :**

$$\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases} ; \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{3}{2} \\ x+y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ln x) \bullet (\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \bullet y = 243 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases} ; \begin{cases} 2\ln(x-1) + 3\ln(x+y) = -2 \\ 3\ln(x-1) + 5\ln(x+y) = -4. \end{cases}$$

**Exercice 2 :**

I) Soit le polynôme  $p$  définie par  $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- Calculer  $p(-1)$  puis factoriser  $p(x)$  en trois produits de facteur du premier degré.
- Résoudre l'équation  $p(x) = 0$
- En déduire la résolution de l'équation :  $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 \leq 0$

II) Soit le polynôme  $q$  définie par  $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ .

- Calculer  $q(1)$  puis résoudre l'équation  $q(x) = 0$  et  $q(x) \geq 0$
- En déduire la résolution de :

- l'équation :  $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$
- l'inéquation  $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 \geq 0$

### Exercice 3 :

I) Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln(2 - x) ; 2) f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3) ; 3) f(x) = x \ln x - x ; 4) f(x) = \frac{2x \ln x}{x + 1}$$

$$5) f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) ; 6) f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$$

II) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1) \ln|x+1| & \text{si } x \neq -1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$
- Dresser le tableau de variation de  $f$  puis construire sa courbe

III) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$  par  $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

- Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tel que  $\forall x \in ]1; +\infty[$

On ait  $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2) Déterminer une primitive de la fonction  $g$  sur  $]1; +\infty[$

3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer :  $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx$

### Problème 1 :

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

#### A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$ .

- 1) Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
- 3) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 4) Donner le signe de  $g(x)$ .

#### B. Etude d'une fonction et calcul d'une aire :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ .

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

- 1) Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .
- 2) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$   
b) Déterminer la limite  $f$  en  $+\infty$ . On pourra remarquer que :

si on pose  $X = 1 + 2e^x$ ,  $f(x)$  s'écrit  $4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}$

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. Tracer  $C$ .

5. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

En déduire la valeur de l'intégrale  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :  $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ .

1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie B est solution de (E).
2. montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - f$  est solution de l'équation différentielle. (E') :  $y' + 2y = 0$
3. résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

### **Problème 2 :**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique  $f$  définie sur

$]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ , de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe

représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

### **Partie A :**

1) Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$

a) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable et que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

b) Etudier les variations de la fonction  $g$  puis déterminer le signe de  $g(x)$ .

2) a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$   $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis donner le tableau de variations de  $f$ .

### **Partie B :**

$\Gamma$  désigne la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1.1 soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x + \ln x$ .

a) Etudier le sens de variation de  $h$  puis montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0,4 ; 0,7]$ .

b) Montrer que l'on a :  $e^{-\alpha} = \alpha$ .

2) a) Vérifier que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $\Gamma$  en  $+\infty$ .

b) Utiliser les résultats de la question 1.a) pour déterminer les positions relatives de  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

3) Construire  $\Gamma$  et  $\Delta$  dans le repère ortho normal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

4) a) Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale  $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$ .

c) En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$  de la portion de plan limitée par la courbe  $\Gamma$ , la droite  $\Delta$  et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### Problème 3 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ . Sur  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ; unité graphique : 5 cm.

1) Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Déterminer les asymptotes de  $C$ .

2) Etudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$  une solution unique, notée  $\alpha$ .

Déterminer un encadrement de  $\alpha$ , d'amplitude  $10^{-2}$ . Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

4) Tracer la courbe  $C$ .

### Problème 4 :

I) Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2) Calculer  $g(1)$  puis en déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

II) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$

1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ).

3) a) Montrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  est asymptote à la courbe ( $C$ ) de  $f$ .

b) Etudier le signe de  $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$  puis en déduire la position de (C) et ( $\Delta$ ).

4) Tracer (C) et ( $\Delta$ ) dans le même repère.

### **Problème 5**

#### **Partie A :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1- Etudier les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

2- Dresser le tableau de variation de  $g$  puis en déduire son signe sur  $]0, +\infty[$

#### **Partie B :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$f(x) = x + 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$  et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1) a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe (C), puis étudier la position de (C) par rapport à la droite ( $\Delta$ ).

2) Déterminer les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à ( $\Delta$ ).

3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

4) Tracer (C) et ( $\Delta$ ) dans le même repère.

5) Hachurer puis calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite ( $\Delta$ ) et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### **Problème 6:**

#### **Partie A :**

1) On considère la fonction numérique  $g$  définie par  $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

b) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $1,89 < \alpha < 1,90$ .

c) Déduire de ce qui précède le signe de  $g(x)$ .

2) On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$  et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique (2 cm).

a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \cdot 10^{-3}$ .

Tracer (C) dans le repère.

## CHAPITRE IX : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1°) **Définition** : On appelle fonction exponentielle et on note  $e^x$  la fonction réciproque de la fonction  $\ln$ .

2°) **Propriété** : Pour tout nombre réel  $x$  et pour tout nombre réel  $y$  strictement positif, nous avons l'équivalence :  $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Pour tout nombre réel  $x$ , nous avons  $\ln e^x = x$

Pour tout nombre réel  $x$  strictement positif, nous avons  $e^{\ln x} = x$

3°) **Propriété algébrique** : Les propriétés algébriques sont voisines à celles des propriétés de puissances.

$$P_1 : e^{a \times b} = (e^a)^b$$

$$P_2 : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$P_3 : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$P_4 : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$P_5 : (e^a)^n = e^{na}$$

$$P_6 : e^{\ln a} = \ln e^a = a$$

$$P_7 : e^0 = 1 \text{ et } e^1 = e$$

$$P_8 : \ln e = e^{\ln 1} = 1$$

$$P_9 : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$P_{10} : e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \text{ et } e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$P_{11} : e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$$

4°) **Théorème** : Pour tout nombre réel  $a$  et  $b$  nous avons :

- si  $a = b \Rightarrow e^a = e^b$ , et
- si  $a < b \Rightarrow e^a < e^b$

5- **Limites remarquables** :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et pour } a > 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

## 6- Dérivées remarquables :

- Si  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Si  $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = a e^{(ax+b)}$
- Si  $f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x) e^{[u(x)]}$

## 7- Primitives remarquables :

- Si  $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- Si  $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + K$

- Si  $f(x) = u'(x) e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

### 8- Etude de la fonction $x \rightarrow e^x$

Soit  $f(x) = e^x$  et (C) sa courbe.

$$Df = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(C) admet des branches infinies :  $y = 0$  est asymptote à (C), et (Y'OY) est branche parabolique pour la courbe (C).

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

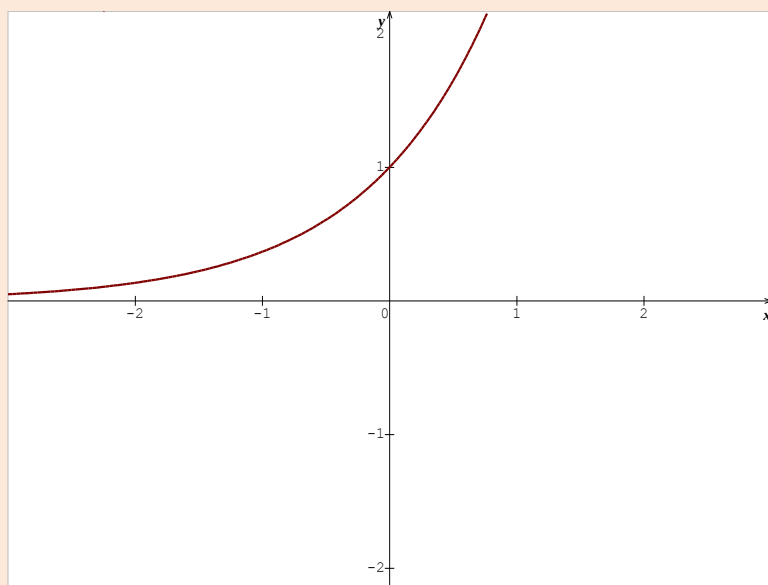


- (C) (OX)  $\Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 0$  impossible

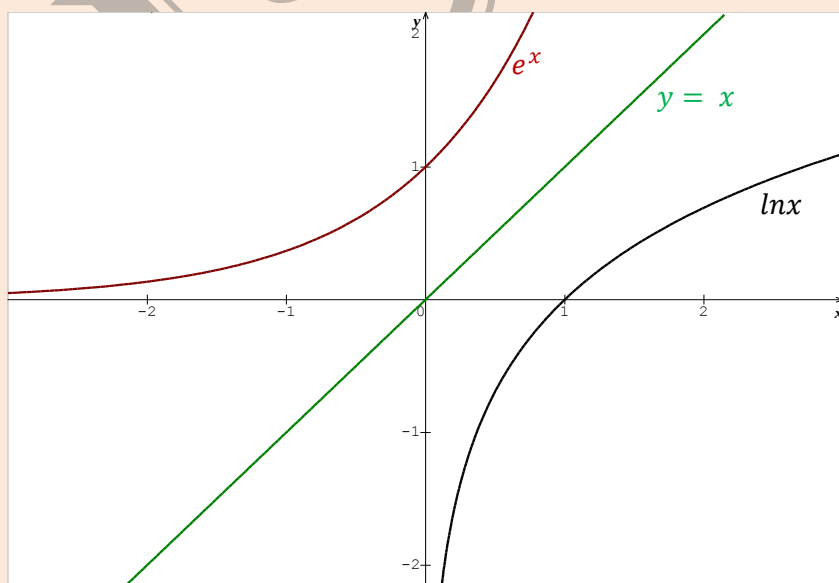
Donc (C) ne coupe pas l'axe (OX).

- (C)  $\cap$  (OY)  $\Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = e^0 = 1$ .  
Donc (C) coupe l'axe (OY) en 1

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



**NB :** les courbes représentatives des fonctions  $x \rightarrow \ln x$  et  $x \rightarrow e^x$  dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite ( D ) d'équation :  $y = x$  ( première bissectrice )



## Evaluation

### Activité 1 :

Simplifie les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}} ; C = -2 \ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{e^2}{2} \right)$$

### Activité 2 :

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a-  $e^x = 2$  ;  $e^x = \frac{1}{3}$  ;  $e^x = -\frac{3}{2}$  ;  $e^x = \sqrt{2}$

b-  $e^{x-2} = 1$  ;  $e^{3x+1} = e^{-x+3}$  ;  $e^{x^2+1} = e^{2x}$

c-  $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$  ;  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$  ;  $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$

### 9- Fonctions puissances :

#### a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction  $f_a$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}, \text{ où } a \text{ est un nombre réel positif et différent de } 1.$$

#### b) Etude des fonctions puissances :

- Dérivée :  $f'_a(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$ , d'où :  $f'_a(x) = a^x \ln a$

#### - Tableaux de variation :

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de  $f_a$  suivant les valeurs de  $a$ .

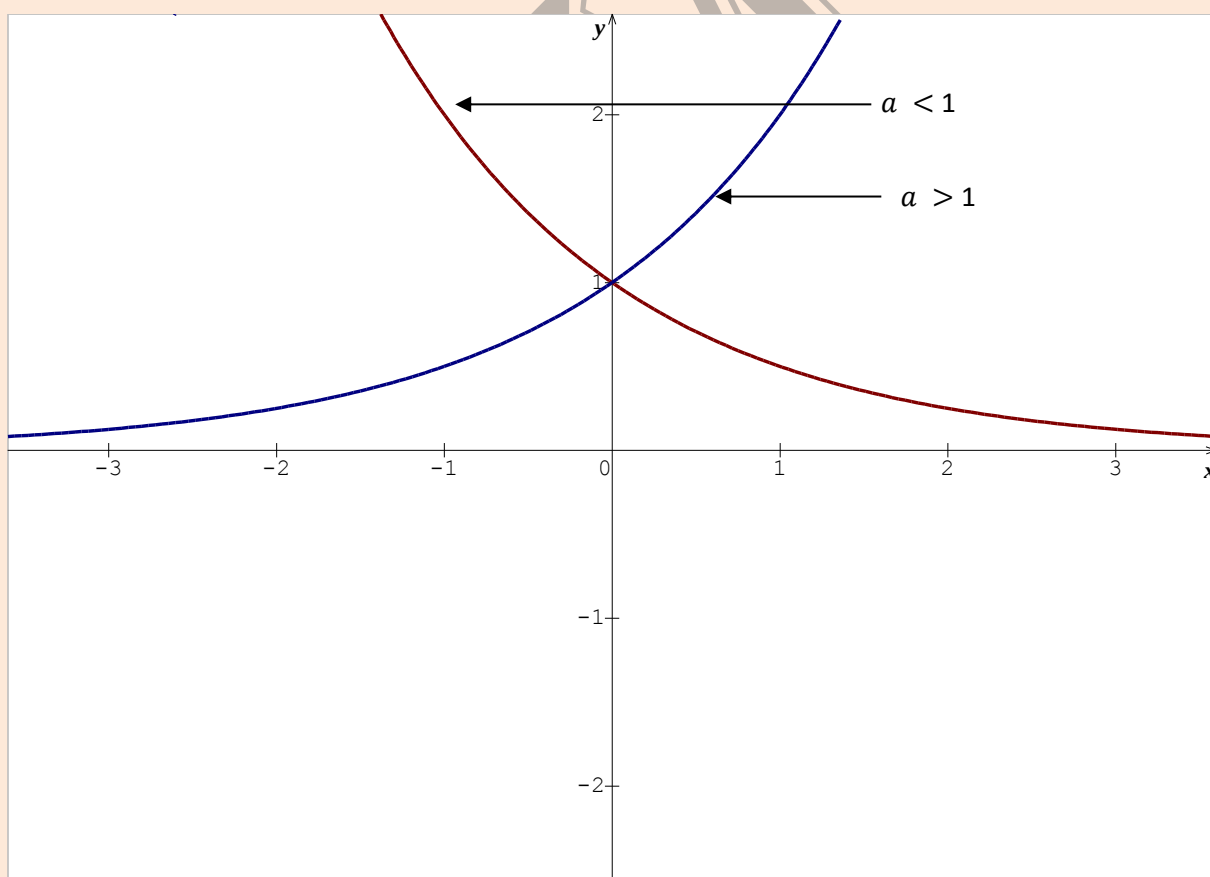
**1<sup>er</sup> cas :** Si  $0 < a < 1$  alors on a : le tableau suivant

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_a(x)$ |           | —         |
| $f_a(x)$  | $+\infty$ | 0         |

2<sup>ème</sup> cas : Si  $a > 1$  alors on a : le tableau suivant

|           |                         |           |
|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$       | $-\infty$               | $+\infty$ |
| $f'_a(x)$ | +                       |           |
| $f_a(x)$  | $0 \rightarrow +\infty$ |           |

- Représentations graphiques:



### Evaluation

**Activité 1**

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a-  $3^x = 4$  ; b-  $2^x = 3$  ; c-  $4^{-x} = 3$  ; d-  $3^x > 6$  ; e-  $2^{-x} \geq 3$  ; f-  $3^{-x} \leq 3^{2x}$

**Activité 2**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , trace la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a-  $f(x) = 2^x$  ; b-  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

**Exercice 1 :** Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}} \quad B = e^{2\ln 3} + e^{1+\ln 2} - e^{3-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}+\ln 4}$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}e^2\right) ; D = \frac{2 - \ln \sqrt{e}}{1 + \ln e^2} + \frac{1 + e^{-\ln 2}}{\ln(e \ln e)}$$

**Exercice 2 :**

I) Résolvez dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $e^x = 2$  ;  $e^x = \frac{1}{3}$  ;  $e^x = -\frac{3}{2}$  ;  $e^x = \sqrt{2}$

2)  $e^{x-2} = 1$  ;  $e^{3x+1} = e^{-x+3}$  ;  $e^{x^2+1} = e^{2x}$

3)  $3^x = 4$  ;  $2^x = 3$  ;  $4^{-x} = 3$

4)  $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$  ;  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$  ;  $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$

5)  $x^2 + 3x - 4 = 0$  et  $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

6)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  et  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

II) Résolvez dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $e^x < 2$  ;  $e^{-x} \geq 1$  ;  $e^{-2x} \leq e^x$

2)  $(e^x - 1)(e^{-x} - 4) < 0$  ;  $(e^{2x} - 1)(2e^x + 1) \geq 0$

3)  $3^x > 6$  ;  $2^{-x} \geq 3$  ;  $3^{-x} \leq 3^{2x}$

4)  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  et  $e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$

5)  $x^2 - x - 2 \geq 0$  et  $4^x - 2^x - 2 \geq 0$

III) soit la fonction polynôme définie par  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

- 1) Calculer  $f(-1)$  et  $f(-3)$  puis en déduire une factorisation de  $f$  sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.
- 2) Résolvez l'équation  $f(x) = 0$
- 3) En déduire la résolution de l'équation :  $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$

IV) Résoudre les systèmes suivants :

a)  $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ e^{-x} + e^{-y} = \frac{3}{2} \end{cases}$

c)  $\begin{cases} e^x e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 3e^x - 2 \ln y = 13 \\ 5e^x + 3 \ln y = 9 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} e^{x+1} \times e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y-1) \end{cases}$

g)  $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x + 2^{2+y} = 0 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

### Exercice 3 :

I) Calculer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1)  $f(x) = x - e^x$  ;  $f(x) = x + e^{-x}$  ;  $f(x) = xe^x$  ;  $f(x) = xe^{-x}$

2)  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$  ;  $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$  ;  $f(x) = e^{-x^2}$  ;  $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

3)  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$  ;  $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$  ;  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - e^x}$

II) Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = e^{2x+1}$  ;  $f(x) = e^{2-3x}$  ;  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2)  $f(x) = (2x-1)e^x$  ;  $f(x) = (x-1)^2 e^x$  ;  $f(x) = (x^2+1)e^{-2x}$

3)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  ;  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$  ;  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

### Exercice 4 :

I) Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = e^{-x} ; f(x) = e^{\frac{1}{2}x} ; f(x) = xe^{x^2}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} ; f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} ; f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{e^x + 1} ; f(x) = 2^x ; f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

II) 1) déterminer les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f.

$$a) f(x) = (2x + 1)e^x \text{ et } F(x) = (ax + b)e^x$$

$$b) f(x) = (x + 1)e^{-\frac{x}{2}} \text{ et } F(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{2}}$$

2) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f

$$a) f(x) = (x^2 - 1)e^{2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$$

### Problème 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

### Partie A :

Soit f la fonction définie sur R par :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$ . On note C la courbe représentative de f dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que, pour tout x de R :  $f(x) > 0$ .

2) a) Montrer que, pour tout x de R :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ .

b) En déduire que, pour tout x de R :  $2 + \cos x + \sin x > 0$

c) Montrer que f est strictement décroissante sur R.

3) a) Montrer que, pour tout x de R :  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

b) En déduire les limites de f en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en  $+\infty$ .

4) a) Montrer que, sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$ .

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$

5) Représenter la courbe C sur  $[0 ; 4]$

### Partie B :

On veut calculer l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

1) Montrer que :  $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t \, dt$

2) On pose :  $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t \, dt$  et  $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t \, dt$ .

a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :  
 $I = -\cos 1 + e - J$  et  $J = -\sin 1 + I$ .

b) En déduire la valeur de I.

3) Déterminer la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de A à  $10^{-2}$  près par défaut.

### Partie C :

Soit h la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

1) a) Montrer que la fonction h admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .  
 b) Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur  $(1 + \ln 3)$ .

2) a) Déterminer  $\ln(f(x))$  pour tout x de  $\mathbb{R}$ .

b) Etudier le sens de variation de la fonction H.

c) déterminer le tableau de variations de H.

3) On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ . (On ne demande pas de représenter  $\Gamma$ ). On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = -x + 1$ .

a) Etudier la position relative de  $\Gamma$  et de  $\Delta$ .  
 b) Déterminer les abscisses des points communs à  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

4) a) Etablir une équation de la tangente T à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0.  
 b) Etudier la position relative de  $\Gamma$  et T.

5) Montrer que la courbe  $\Gamma$  est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

### Problème 2 :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### A) Etude de la fonction $f$ et construction de la courbe $C$ .

- 1) Etudier la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$  (on pourra écrire  $xe^{x-1} = \frac{1}{e} xe^x$ ).
- 2) Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe  $C$  en  $-\infty$  et préciser la position de la courbe  $C$  par rapport à la droite  $\Delta$ .
- 3) a) Calculer la dérivée  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$ .  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$  en précisant la limite de la fonction  $f'$  en  $-\infty$ .  
c) Calculer  $f'(1)$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .  
d) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Soit  $I$  l'intervalle  $[1, 9; 2]$ . Démontrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique,  $\alpha$ .
- 5) Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe  $C$  (unité graphique : 2 cm).

#### B) Recherche d'une approximation de $\alpha$ :

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $I$  par :  $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ .

- 1) Démontrer, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ .
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $I$  et démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$ .
- 3) Démontrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ .
- 4) Soit  $(U_n)$  la suite de nombres réels définie par :  
 $U_0 = 2$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = g(U_n)$ .

On déduit de la question B. 2. que tout les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle  $I$ . On ne demande pas de le démontrer.

- a) Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$
- b) En déduire, en raisonnant par récurrence que :  
Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$
- c) En déduire que la suite  $(U_n)$  converge et préciser sa limite.

**C) Calcul d'aire :**

- 1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale  $J = \int_1^{\alpha} x e^{x-1} dx$
- 2) a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = 1$  et la droite d'équation  $x = \alpha$ .
- c) Démontrer qu'on peut écrire  $A = (\alpha - 1) \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$ .

**Problème 3 :**

Soit g la fonction définie sur R par  $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$ .

- 1) Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de R.
- 2) Déterminer les limites de g en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de g.
- 4) Donner le signe de g(x).

**Problème 4 :**

**Partie A :** Résolution de l'équation différentielle (1) :  $y' - 2y = xe^x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (2) :  $y' - 2y = 0$  où y désigne une fonction dérivable sur R.
- 2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur R par  $u(x) = (ax + b)e^x$ .
  - a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
  - b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si  $u + v$  est solution de (1).
  - c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
- 3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

**Partie B :** Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par  $g(x) = 2e^x - x - 2$ .

- 1) Déterminer la limite de g en  $-\infty$  et la limite de g en  $+\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
- 3) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement deux solutions réelles.
  - a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
  - b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montrer que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ .
- 4) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

**Partie C :** Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur R par  $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$ .

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (On pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur).
- 2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Etudier le sens de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la **partie B**. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ . (On rappelle que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ ).
- 4) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer la courbe (C), représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

**Partie D** : Calcul d'aire

- 1) Soit  $m$  un réel négatif

Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x)dx$ . (on justifiera la réponse).

- 2) a) Calculer  $\int_m^0 xe^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire  $\int_m^0 f(x)dx$ .

- 3) Calculer la limite de  $\int_m^0 f(x)dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

**Problème 5 :**

On considère la fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- b) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $-1$ . Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

- 2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que son signe est celui de  $\frac{x-1}{x+1}$ .

- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- 4) Tracer la courbe (C), les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $y = 1$ , ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

- 5) Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[1; 10]$ . Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs  $a$  et  $b$  tels que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[a; b]$ .

**Problème 6 :**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 5 cm).

On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_1(x) = xe^{-x^2}$  et on appelle  $C_1$  sa courbe représentative.

- 1) Montrer que pour tout réel positif  $x$ ,  $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ . En déduire le sens de variation de  $f_1$ .
- 2) Calculer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$  (on pourra poser  $u = x^2$ ). Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .
- 4) On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$ . Déterminer la position de  $C_1$  par rapport à  $\Delta$ .
- 5) Tracer  $C_1$  et  $\Delta$ .

**Problème 7 :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$ . (On ne demande pas de déterminer les limites de  $g$ , ni de construire sa courbe).
- 2) a) Calculer  $g(0)$  et  $g(2)$   
b) Démontrer que l'équation :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $1,30 < \alpha < 1,31$

**Problème 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 5 cm).

- 1) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $C$ .
- 2) Pour  $x > 0$ , calculer  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ . Etudier la limite de cette expression quand  $x$  tend vers 0

(on pourra utiliser, pour  $n$  entier naturel non nul,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$ )

Que peut-on en déduire pour la fonction  $f$  ?

Que peut-on en déduire pour la courbe  $C$  ?

- 3) Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a  $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ .
- 4) Etudier les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau des variations de  $f$ .  
a) m donné.

**Problème 9 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ; (unité graphique : 2 cm).

Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - e^x \text{ et } g(x) = (1 - x)e^x ;$$

On appelle  $(C)$  et  $(C')$  leurs courbes représentatives respectives.

- 1) a) Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
 b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .  
 c) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions  $f$  et  $g$ , sur l'ensemble des nombres réels.  
 d) Dresser les tableaux de variation des fonctions  $f$  et  $g$ .
- 2) Pour tout réel  $x$ , on pose  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  
 a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = 1 - g(x)$ .  
 b) En déduire le sens de variation de la fonction  $h$ , sur l'ensemble des nombres réels.  
 c) Démontrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée  $\alpha$ , appartient à l'intervalle  $[1 ; 2]$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .  
 d) Etudier, suivant les valeurs de  $x$ , la position relative de  $(C)$  et de  $(C')$ .
- 3) Tracer la droite  $(\Delta)$  et les courbes  $(C)$  et  $(C')$ .
- 4) Pour tout réel  $x$ , on pose  $\theta(x) = \int_0^x h(t)dt$ .  
 a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\theta(x)$ .  
 b) En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en  $\alpha$ , l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine limité sur le graphique par les courbes  $(C)$  et  $(C')$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation

$$x = \alpha.$$

### **Problème 10 :**

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on note  $f_n$  la fonction numérique de la variable réelle définie

$$\text{sur } \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ par : } f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

- 1) Déterminer la fonction dérivée  $f'_n$  de  $f_n$  et donner l'expression de  $f'_n$  en fonction de  $f_n$  et de  $f_{n+1}$ .
- 2) Etudier les variations de  $f_n$  et ses limites éventuelles en  $-\infty$ ,  $-1$  et  $+\infty$ . (On distinguera les cas où  $n$  est pair et  $n$  est impair.)

- 3) Démontrer que toutes les courbes ( $C_n$ ) passent par un même point.
- 4) Déterminer la limite de  $\frac{f_n(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Que peut – on en déduire pour les courbes ( $C_n$ )? Tracer sur deux figures distinctes les courbes ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ).

### FIN DU DEUXIEME TRIMESTRE

### UA3 : Unité d'apprentissage du troisième trimestre

### CHAPITRE X : STATISTIQUES

## I- Vocabulaire de la statistique

### Evaluation diagnostique

#### Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes on une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes on une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes on une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes on une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes on une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour Classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

| Nombre d'élève | Intervalles de notes attribuées |
|----------------|---------------------------------|
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |

#### Solution

| Nombre d'élève | Intervalles de notes attribuées |
|----------------|---------------------------------|
| 13             | $[ 0 ; 3 [$                     |
| 9              | $[ 3 ; 8 [$                     |
| 4              | $[ 8 ; 10 [$                    |
| 3              | $[ 10 ; 15 [$                   |
| 1              | $[ 15 ; 18 [$                   |

Le faite que tu es classé ses notes donne la notion de statistique.

#### 1- Définition :

$D_1$  : La statistique est un ensemble de données chiffrées ou non.

$D_2$  : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

## **2- Langage statistique :**

### **a- Notion de population et d'individu :**

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

**N.B** : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

### **b- Caractères et modalités :**

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

**Exemple** : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

#### **- Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

**Exemple** : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité....

#### **- Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

**Exemple** : l'âge, la taille, le poids.....

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)

Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.

**Exemple** : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme.....

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge...;

### **c- Echantillon :**

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc... c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

## II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillis et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

### 1- Cas d'un caractère qualitatif :

#### a- Tableau statistique :

**Exemple :** l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

A : marié

B : Divorcé

C : Célibataire

D : Célibataire

E : Marié

F : Veuf

G : Divorcé

H : Célibataire

I : Célibataire

J : Marié

| Modalité ( $x_i$ ) | Nombre d'élément ( $n_i$ ) |
|--------------------|----------------------------|
| Marié              | 3                          |
| Célibataire        | 4                          |
| Divorcé            | 2                          |
| Veuf               | 1                          |
| Total              | 10                         |

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1<sup>ère</sup> Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note  $x_i$
- La 2<sup>ème</sup> Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note  $n_i$ .

$n_i$  est l'effectif relatif de la modalité  $x_i$ . C'est le nombre d'élément présentant la modalité  $x_i$ .

**Exemple** :  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 1$  (d'après le tableau).

Alors  $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

N est appelé somme des  $n_i$ .

A ce tableau, on peut ajouter une 3<sup>ème</sup> colonne ; celle des **fréquences notés**  $f_i$  tel que  $f_i =$

$$\frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif relatif}}{\text{effectif total}}$$

| Modalités   | Nombre d'éléments | Fréquences   |
|-------------|-------------------|--------------|
| $(x_i)$     | $(n_i)$           | $(f_i)$      |
| Marié       | 3                 | $3/10 = 0,3$ |
| Célibataire | 4                 | $4/10 = 0,4$ |
| Divorcé     | 2                 | $2/10 = 0,2$ |
| Veuf        | 1                 | $1/10 = 0,1$ |
| Total       | 10                | $10/10 = 1$  |

**NB** : la somme des fréquences est toujours égale à 1 :  $\sum f_i = 1$

#### **b- Représentation graphique :**

##### **Diagramme en bâton :**

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  ou les fréquences  $f_i$ .

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .

**N.B :**

Si les fréquences  $f_i$  étaient en ordonnée, le diagramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).

D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points  $B_i(x_i ; n_i)$

##### **Diagramme en secteur circulaire :**

Soit le demi – cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif  $\alpha_i$  tel que  $\alpha_i = f_i \times 180^\circ$ .

Marié :  $\alpha_1 = 0,3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 54^\circ$

Célibataire :  $\alpha_2 = 0,4 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 72^\circ$

Divorcé :  $\alpha_3 = 0,2 \times 90^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 36^\circ$

Veuf :  $\alpha_4 = 0,1 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_4 = 18^\circ$

**NB** : pour le cercle tout entier le secteur angulaire  $\alpha_i$  est :  $\alpha_i = f_i \times 360$

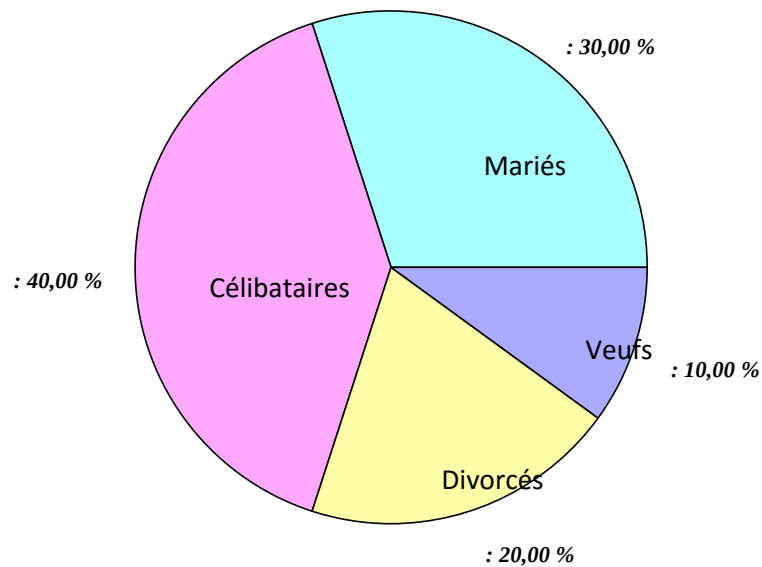
$$\alpha_1 = 108^\circ$$

$$\alpha_2 = 144^\circ$$

$$\alpha_3 = 72^\circ$$

$$\alpha_4 = 36^\circ$$

secteur circulaire



## 2- Cas d'un caractère quantitatif discret :

### a- Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12è a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.

Regrouper ces données dans un tableau statistique.

| Modalités $x_i$ | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Effectif cumulé croissant | Effectif cumulé décroissant | Fréquence croissante | Fréquence Décroissante |
|-----------------|----------------|-----------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------|------------------------|
| 1               | 2              | 0,2             | 2                         | 10                          | 0,2                  | 1                      |
| 2               | 4              | 0,4             | 6                         | 8                           | 0,6                  | 0,8                    |
| 3               | 3              | 0,3             | 9                         | 4                           | 0,9                  | 0,4                    |
| 4               | 1              | 0,1             | 10                        | 1                           | 1                    | 0,1                    |
| Total           | 10             | 1               | /                         | /                           | /                    | /                      |

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs.

La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de croissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

- **Effectif cumulé croissant de  $x_i$  :**

La somme des modalités inférieures ou égales à  $x_i$  c'est-à-dire :

$$n_i = (n_1 + n_2) + \dots + n_i$$

$$n_1 = n_1 = 2$$

$$n_2 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 = 0$$

$$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$$

$n_4 = n_1 + n_2 + n_3$   $n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10$  et la fréquence croissante cumulé est  $f_i = \frac{n_i}{N = 10}$

- **Effectif cumulé décroissant de  $x_i$  :**

On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité  $x_i$ , la somme des modalités qui le succède ;

c'est-à-dire  $n_i = n_i + n_{i+1} + \dots + n_k$  et la fréquence cumulée décroissante est :  $f_i = \frac{n_i}{N}$

**b- Diagramme en bâton des effectifs cumulés :**

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  cumulés croissants ou décroissants.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .

**3- Cas des caractères quantitatifs continus :**

**a- Tableau statistique :**

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude  $[x_i, x_{i+1}[$  soit appelées des classes.

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12<sup>e</sup> a donné les résultats suivants en cm :

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 175 | 165 | 172 | 171 | 168 |
| 170 | 178 | 170 | 171 | 173 |
| 170 | 170 | 168 | 150 | 160 |
| 165 | 175 | 179 | 180 | 170 |
| 173 | 165 | 168 | 176 | 150 |
| 174 | 158 | 153 | 144 | 172 |

Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.

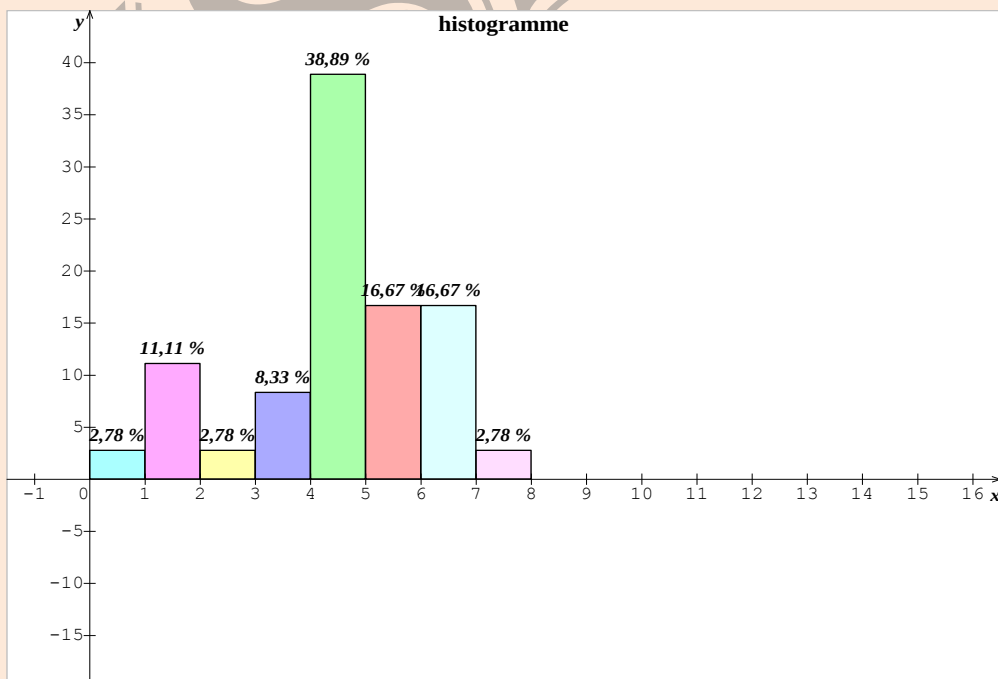
Prenons des classes d'amplitude 6.

| Classes           | Effectif | Centre des classes | $n_i$ | $n_i$ croissante | $f_i$ |
|-------------------|----------|--------------------|-------|------------------|-------|
| $[x_i ; x_{i+1}]$ | $n_i$    | $c_i$              |       |                  |       |
| [144 ; 150]       | 1        | 147                | 1     | 30               | 0,633 |
| [150 ; 156]       | 4        | 153                | 5     | 29               | 0,166 |
| [156 ; 162]       | 1        | 159                | 6     | 25               | 0,2   |
| [162 ; 168]       | 3        | 165                | 9     | 24               | 0,3   |
| [168 ; 174]       | 14       | 171                | 23    | 21               | 0,76  |
| [174 ; 180]       | 6        | 177                | 29    | 7                | 0,966 |
| [180 ; 186]       | 1        | 183                | 30    | 1                | 1     |
| Total             | 30       | —                  | —     | —                | —     |

On appelle centre ( $c_i$ ) de la classe ( $x_i, x_{i+1}$ ) le nombre  $C_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour les calculs, nous conviendrons de prendre la valeur  $c_i$  commune à tous les individus de la classe ( $x_i, x_{i+1}$ )

Histogramme des effectifs (représentation graphique)



Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.

Pour chaque classe  $[x_i; x_{i+1}[$ , on trace le rectangle de base  $[x_i; x_{i+1}[$ , et de hauteur  $(n_i$  ou  $f_i)$ . La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences**.

### Les polygones :

On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points  $(c_i; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées  $(x_{i+1}; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne brisée joignant les points de coordonnées  $(x_i; n_i)$  ↘

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant se coupent en un point d'abscisse  $M_e$  : ( $M_e$  est la médiane).

## **III- Les éléments caractéristiques d'une série :**

### **1- Les caractéristiques de position :**

#### **a- Le mode ou dominante :**

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note  $M_o$ .

**Exemple :** Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10

Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

#### **b- La médiane d'une série :**

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note  $M_e$ .

**Exemple 1 :** soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2

Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, 6, 7, 8, 11

La médiane est donc  $M_e = 6$

**Exemple 2 :** soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4

Déterminer la médiane de cette série :

6, 7

3, 4, 5, , 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est  $Me = \frac{6+7}{2} = 6,5$

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé

$$n_i = \frac{N}{2}$$

**NB :**

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissante, on a :

-Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N+1}{2}$

-Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2} + 1$

Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

**Exemple :**

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de 12<sup>ème</sup> dont les données sont dans le tableau en 3°).

La médiane Me correspond à l'effectif cumulé  $\frac{N}{2} = 15$

Me  $\in$  [168 ; 174[ est la classe médiane.

$$x_i : 168 < M_e < 174$$

$$n_i : 9 < 15 < 23$$

$$\frac{M_e - 168}{174 - 168} = \frac{15 - 9}{23 - 9} \Rightarrow M_e = 170,57$$

**c- Moyenne arithmétique d'une série :**

**Définition :** La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs et  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i$$

**NB :** Dans le cas d'un caractère continu, les  $x_i$  sont remplacés par les  $c_i$  (centre de classe  $[x_i, x_{i+1})$ )

**Exemple :** Soit le tableau statistique donné par :

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i \times x_i$ |
|-------|-------|------------------|
| 7     | 1     | 7                |
| 8     | 3     | 24               |
| 9     | 5     | 45               |
| 10    | 4     | 40               |
| 11    | 2     | 22               |
| 12    | 2     | 24               |
| 13    | 4     | 52               |
| 14    | 1     | 14               |
| 15    | 2     | 30               |
| 16    | 0     | 0                |
| 17    | 1     | 17               |
| Total | 25    | 275              |

## 2- Les caractéristiques de dispersion :

### a- Amplitude ou étendue d'une série :

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

**Exemple** : Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

- a)  $-5; 4; 3; 1; 10; 12$  / Rep. :  $(12) - (-5) = 12 + 5 = 17$   
 b)  $5; 10; 9; 20; 40; 30; 8$  / Rep :  $(40) - (5) = 40 - 5 = 35$

### b- Les quartiles

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divisent la série en 4 groupes de même effectifs : on note :  $Q_1$  ;  $Q_2$  ;  $Q_3$  ces 3 valeurs

**Exemple** : Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

|                 |       |                 |       |                  |                |
|-----------------|-------|-----------------|-------|------------------|----------------|
|                 | 7     |                 | 15    |                  | 20             |
| Rep : 1, 2; 5 ; |       | ; 9 ; 11 ; 12 ; |       | ; 16 ; 18 ; 19 ; |                |
|                 | $Q_1$ |                 | $Q_2$ |                  | $Q_3$          |
|                 |       |                 |       |                  | ; 30 ; 34 ; 40 |

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc  $Q_1 = 7$  ;  $Q_2 = 15$  ;  $Q_3 = 20$

$Q_2$  est la médiane, il est appelé quantile centrale

$Q_1$  et  $Q_3$  sont les quantiles extrémités

**NB** :  $Q_1$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{N}{4}$

$Q_3$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{3N}{4}$

$Q_3 - Q_1$  est l'écart interquartile

$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$  Est l'écart interquartile relatif.

**c- Variance ou fluctuation :**

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :

Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs du caractère et  $n_1 ; n_2 ; \dots, n_k$  les effectifs. La

variance est notée :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$  ou encore on la note :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k (n_i x_i - \bar{x})^2$

**d- L'écart type :**

C'est la racine carrée de la variance, on la note  $\sigma$  tel que  $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2}$

**EXERCICE 1 :**

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

| $x_i$ | $n_i$ |
|-------|-------|
| 36    | 5     |
| 37    | 11    |
| 38    | 12    |
| 39    | 8     |
| 40    | 4     |
| 41    | 3     |
| 42    | 4     |
| 43    | 1     |

- 1) Quelle est la population ?
- 2) le caractère étudié ?
- 3) Déterminer le mode
- 4) Déterminer la pointure moyenne

**Solution**

- 1- La population est un ensemble d'élèves.
- 2- Le caractère est : la pointure des chaussures.

3- Le mode est : 38

4- La moyenne des pointures :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1849}{48} \Rightarrow \bar{x} = 38,52$$

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i x_i$ | $x_i^2$ | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|-----------|---------|-------------|
| 36    | 5     | 180       | 1296    | 6480        |
| 37    | 11    | 407       | 1369    | 15059       |
| 38    | 12    | 456       | 1444    | 17328       |
| 39    | 8     | 312       | 1521    | 12168       |
| 40    | 4     | 160       | 1600    | 6400        |
| 41    | 3     | 123       | 1681    | 5043        |
| 42    | 4     | 168       | 1761    | 7056        |
| 43    | 1     | 43        | 1849    | 1849        |
| Total |       | 1849      |         | 71383       |

### EXERCICE 2 :

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons pêchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

| Classe des tailles (cm) | Effectifs | $n_i$ | $c_i$ | $n_i \quad c_i$ |
|-------------------------|-----------|-------|-------|-----------------|
| [10, 20[                | 16        | 16    | 15    | 240             |
| [20, 30[                | 26        | 42    | 25    | 1050            |
| [30, 40[                | 36        | 78    | 35    | 2730            |
| [40, 50[                | 52        | 130   | 45    | 5850            |
| [50, 60[                | 38        | 168   | 55    | 9240            |
| [60, 70[                | 30        | 198   | 65    | 12870           |
| [70, 80[                | 20        | 218   | 75    | 16350           |
| [80, 90[                | 12        | 230   | 85    | 19530           |

|            |    |     |     |       |
|------------|----|-----|-----|-------|
| [90, 100[  | 10 | 240 | 95  | 22800 |
| [100, 110[ | 6  | 246 | 105 | 25830 |
| [110, 120[ | 4  | 250 | 115 | 28750 |

**N.B** : Les parties complétées sont :

$$n_i : n_1 = 16; n_2 = 16 + 26 = 42, n_3 = 16 + 26 + 36 = 78.....$$

$$c_i : c_1 = \frac{10+20}{2} = 15 ; c_2 = \frac{20+30}{2} = 25 ; c_3 = \frac{30+40}{2} = 35$$

$$n_i \quad c_i : n_1 \cdot c_1 = 16 \times 15 = 240 ; n_2 \cdot c_2 = 42 \times 25 = 650 ; n_3 \cdot c_3 = 78 \times 35 = 1260$$

### Évaluation

- a- compléter le tableau :
- b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
- c- déterminer les quartiles
- d- déterminer la moyenne et l'écart type.

### Solution

- a- Complétons le tableau (voir tableau)
- b- La population : les poissons
  - le caractère : la taille
  - nature du caractère : caractère quantitatif continu
- c- Déterminons les quartiles :

$$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62,5 \text{ alors } Q_1 \in [30, 40[ \Leftrightarrow 42 < 62,5 < 78$$

$$\frac{Q_1 - 30}{40 - 30} = \frac{62,5 - 42}{78 - 42} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 30}{10} = 0,56 \Rightarrow Q_1 = 35,6 \text{ or le } n_i =$$

$$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 \Leftrightarrow 40 < Q_2 < 50$$

$$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 250}{4} = 187,5$$

$$Q_3 \in [60 - 70[$$

- d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{250} \times 13090 = 52,36$$

**L'écart type :**

- Variance  $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} \times (1063064 - (52,36)^2)$
- Ecart type :  $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1510,6864} = 38,86$

$$\sigma = 38,86$$

## **IV- Série statistique à deux caractères x et y**

### **1- Nuage de points associé :**

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points  $M_{ij}$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

### **2- Point moyen d'un nuage de points :**

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées  $(X_G ; Y_G)$  où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \\ \text{et} \\ Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

### **3- Covariance :**

La covariance d'une série statistique à deux caractères x et y, de moyennes respectives  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  et d'effectif total N est le nombre réel noté  $\text{Cov}(X, Y)$  ou  $\sigma_{x,y}$  tel que :

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\text{Effectif total}}$$

ou

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_i}{\text{Effectif total}} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

### **4- Droit de régression de y en x :**

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G ( $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ), point moyen du nuage de point son équation est  $y = ax + b$  avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

où V(X) est la variance et a pour formule :  $V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

#### 5- Droite de régression de X en Y :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point G( $\bar{X}$  ;  $\bar{Y}$ ), point moyen du nuage de point. Son équation est  $x = a'y + b'$  avec :

$$a' = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$$

où V(Y) est la variance et a pour formule :  $V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2$

#### Remarque :

G( $\bar{X}$  ;  $\bar{Y}$ ) appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

#### 6- Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

#### 7- Coefficient de corrélation linéaire :

##### a) Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X ; Y), le nombre réel **r** définie par  $\mathbf{r} = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

##### b) Propriétés de r :

P<sub>1</sub> : Si  $0,87 \leq |r| \leq 1$ , on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.

P<sub>2</sub> : si  $r = 1$ , on dit que la corrélation est parfaite.

#### 8- Estimation et prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice – versa.

**Exercices d'application :**

**Exercice 1 :**

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires – correspondant.

|   |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|
| X | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Y | 12 | 13 | 15 | 19 | 21 | 22 |

- 1- Calculer  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables X et Y.
- 2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
- 3- Calculer la variance V(X) de x et la covariance Cov(X,Y) de x et y.

**N.B :** Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- 4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$
- 5- Tracer la droite (D).
- 6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois.

**Exercice 2 :**

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

|                                           |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix de vente en milliers de francs $x_i$ | 9   | 10  | 11  | 12  | 14  | 15 | 16 | 17 |
| Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$       | 180 | 160 | 150 | 130 | 100 | 90 | 80 | 70 |

- 1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :  
1 cm pour 1000 francs en abscisse  
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

- 2- Déterminer les coordonnées du point G
- 3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.
- 4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)
- 5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :
  - a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
  - b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

### Solution

#### Exercice 1

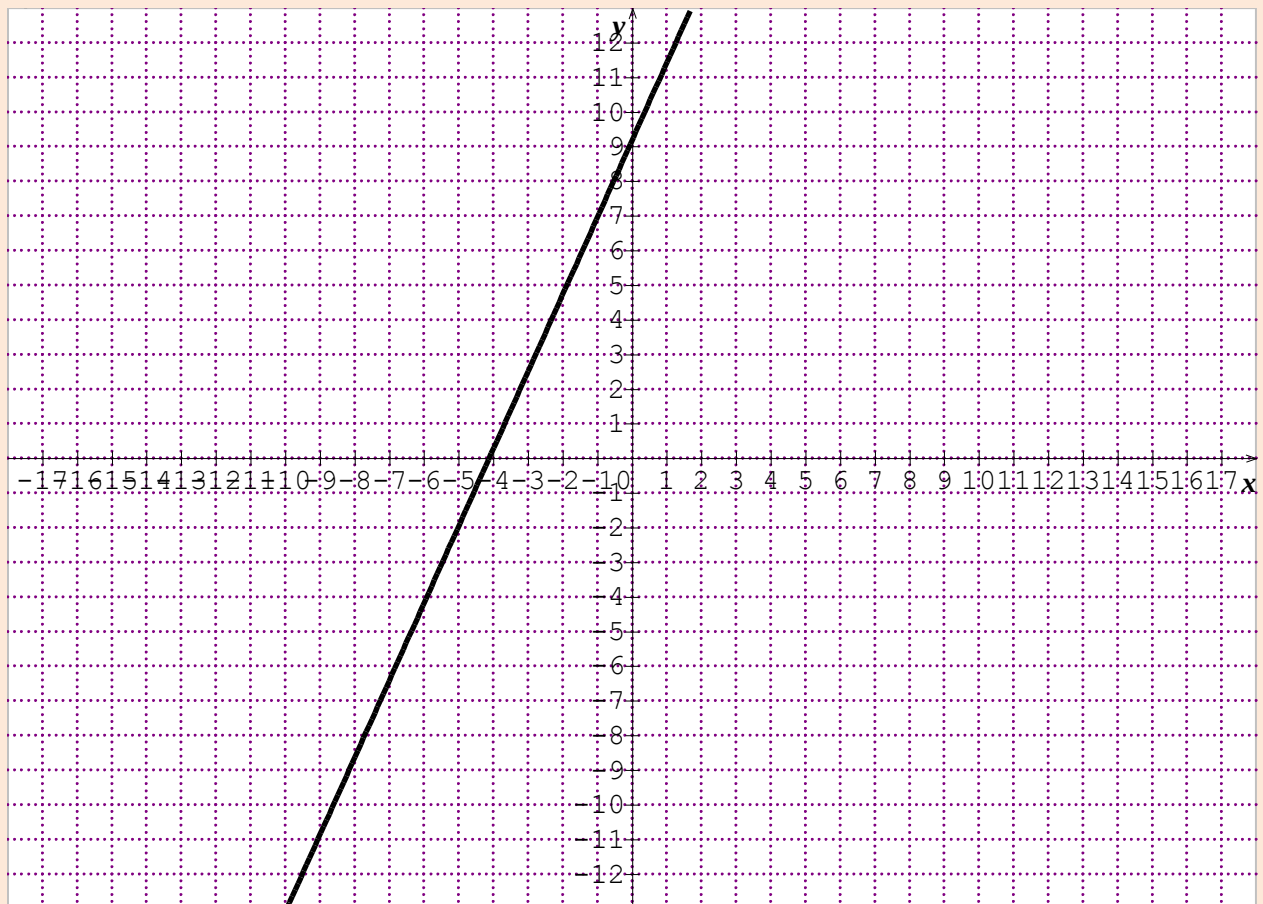
Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i, y_i$ | $X_i^2$ | $Y_i^2$ |       |
|-------|-------|------------|---------|---------|-------|
| 1     | 12    | 12         | 1       | 144     |       |
| 2     | 13    | 26         | 4       | 169     |       |
| 3     | 15    | 45         | 9       | 225     |       |
| 4     | 19    | 76         | 16      | 361     |       |
| 5     | 21    | 105        | 25      | 441     |       |
| 6     | 22    | 132        | 36      | 484     |       |
| 21    | 102   | 396        | 91      | 2 331   | Total |

- 1- Calcul de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables  $x$  et  $y$ .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 ; \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

- 2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variance  $V(x)$  de  $x$  et la covariance  $\text{Cov}(x, y)$  de  $x$  et  $y$ .

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}; \text{cov}(X; Y) = \frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$$

2- Montrons qu'une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9,2$$

donc l'équation de la droite de régression est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression,  $x$  par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si  $x = 0$ , on obtient  $y = 9,2$ . (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois. Le 7<sup>ème</sup> mois correspond à  $x = 7$ . Il s'agit de déterminer la valeur de  $y$  associée à cette valeur de  $x$ .

Pour  $x = 7$ , on a :  $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9,2 = 24,8$  millions de francs CFA.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ . interpréter le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{9 \times 180 + 10 \times 160 + 11 \times 150 + 12 \times 130 + 14 \times 100 + 15 \times 90 + 16 \times 80 + 17 \times 70}{8} - 13 \times 120 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(X) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \times 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4°) Equation de la droite (D) de régression de y en x.

$$(D) : y = ax + b$$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\bar{Y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 199,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à x = 13

$$y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39 \approx 119$$

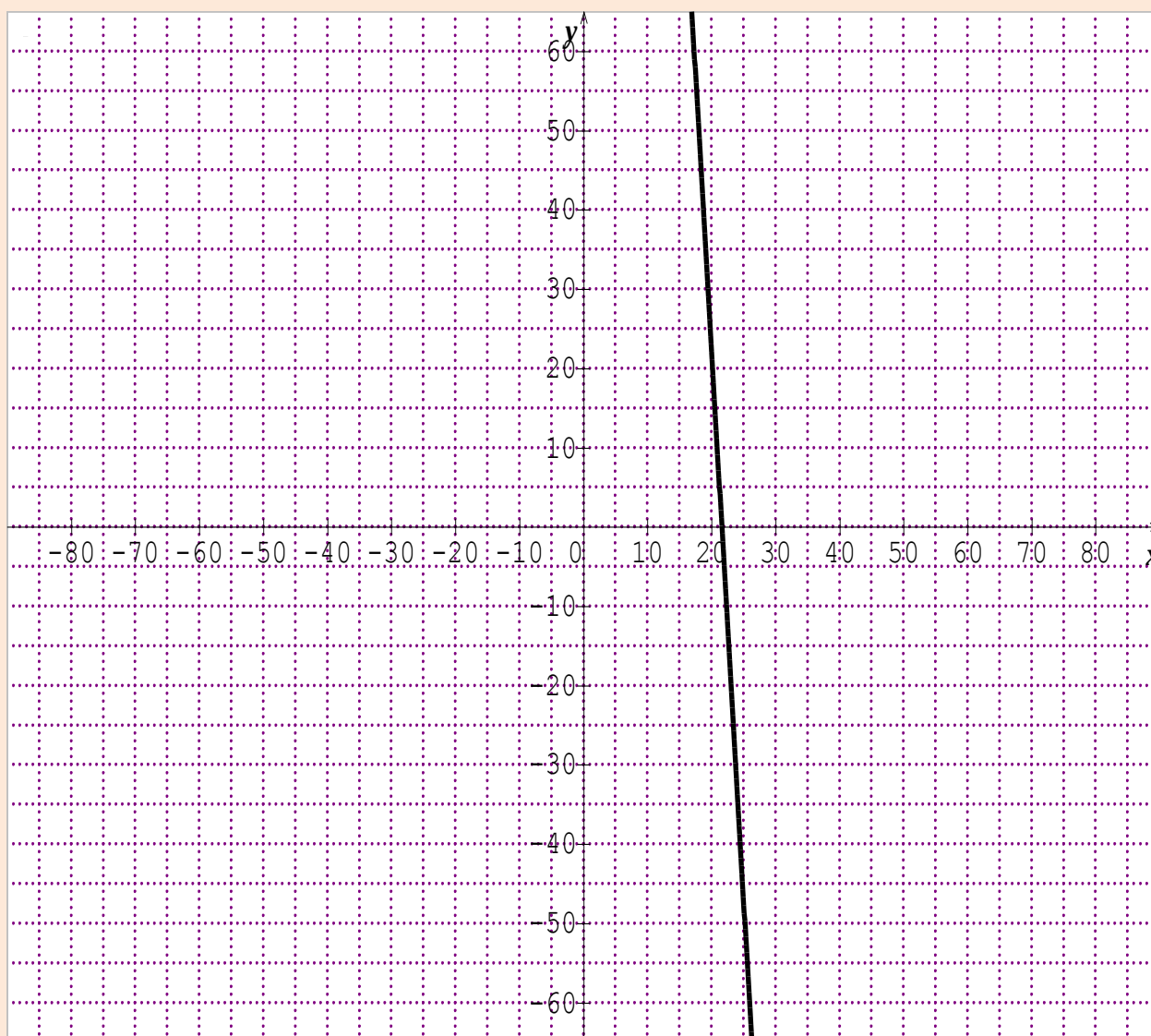
b°) Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

$$y = -13,88x + 299,83 \Rightarrow x = \frac{y-299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 250, \text{ on a : } x = \frac{250-299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de francs} = 3590 \text{ F}$$

**Exercice 2 :**

- 1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



- 2- Déterminons les coordonnées du point G.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$$

$$\Rightarrow G(13; 120)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$$

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire  $r$ .

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{N} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{9 \cdot 180 + 10 \cdot 160 + 11 \cdot 150 + 12 \cdot 130 + 14 \cdot 100 + 15 \cdot 90 + 16 \cdot 80 + 17 \cdot 70}{8} - 13 \cdot 120$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \cdot 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variations X et Y. linéaire

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4-Equation de la droite (D) de régression de Y en X

$$(D) : y = ax + b$$

$$A = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\text{Alors on a } \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 299,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120). Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5-Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à  $x = 13$ .

$$Y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39$$

b) il s'agit de déterminer x pour y = 250

$$Y = -13,88x + 299,83 \text{ alors } x = \frac{y-299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 240, \text{ on a : } x = \frac{250-299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de franc} = 3590 \text{ F}$$

**EXERCICE 1 :**

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| $n_i$ | 5  | 11 | 12 | 8  | 4  | 3  | 4  | 1  |

- 1) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 2) Déterminer le mode des chemises
- 3) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

**EXERCICE 2 :**

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

|                           |             |             |             |             |             |             |             |
|---------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Classes $[x_i ; x_{i+1}[$ | [144 ; 150[ | [150 ; 156[ | [156 ; 162[ | [162 ; 168[ | [168 ; 174[ | [174 ; 180[ | [180 ; 186[ |
| Effectifs $n_i$           | 1           | 4           | 1           | 3           | 14          | 6           | 1           |

- 1) Dresser el tableau des centres ci .
- 2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 3) En déduire l'histogramme des effectifs ( $n_i$ ) puis celle effectifs ( $n_i$  et  $n_i$ ).

**EXERCICE 3 :**

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 1) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 2) Faites la représentation en boîte de cette série.

**EXERCICE 4 :**

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
- 2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

#### **EXERCICE 5 :**

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

#### **EXERCICE 6 :**

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41<sup>ème</sup> valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

#### **EXERCICE 7 :**

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

| Montant des chèques | effectif | Fréquence | Fréquence cumulée croissante |
|---------------------|----------|-----------|------------------------------|
| [0,15[              | 20       |           |                              |
| [15,30[             | 9        |           |                              |
| [30,45[             | 19       |           |                              |
| [45,60[             | 27       |           |                              |
| [60,75[             | 18       |           |                              |
| [75,90[             | 6        |           |                              |

|          |   |  |  |
|----------|---|--|--|
| [90,105[ | 1 |  |  |
| Total    |   |  |  |

- 1) compléter le tableau
- 2) soit  $s$  le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de  $S$ . En déduire un intervalle  $I$  tel que le montant moyen des chèques appartienne à  $I$ .
- 3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle  $I$  trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

#### **Exercice 8 :** ( non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

|                                           |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix de vente en milliers de francs $x_i$ | 9   | 10  | 11  | 12  | 14  | 15 | 16 | 17 |
| Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$       | 180 | 160 | 150 | 130 | 100 | 90 | 80 | 70 |

- 1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

- 2- Déterminer les coordonnées du point G

- 3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.

- 4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)

- 5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

- 6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :

- a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

## CHAPITRE XI : DENOMBREMENTS-PROBABILITE

### Dénombrement :

#### 1) Théorie des ensembles :

##### a) Activité 1 :

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;                      ESLN ;                      LESN ;                      NELS ;

SENL ;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

SLNE;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

SLNE;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

SLEN;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

SNLE;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

SNEL;                      ..... ;                      ..... ;                      ..... ;

Pour **S** en 1<sup>ère</sup>

Pour **E** en 1<sup>ère</sup>

Pour **L** en 1<sup>ère</sup>

Pour **N** en 1<sup>ère</sup>

Position

Position

Position

Position

Ainsi on aura donc formé au total  $6 \times 4 = 24$  mots.

On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit :  
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

**b) activité 2 :**

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) avec 45 personnes ; combien de bureau peut- on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

**Solution :**

|    |   |    |   |    |         |
|----|---|----|---|----|---------|
| D  |   | S  |   | C  |         |
| 45 | × | 44 | × | 43 | = 85140 |

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi  $A_{45}^3$  tel que

$$A_{45}^3 = 45 \times 44 \times 43 = 85140$$

**c) Activité 3 :**

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement 3 cartes.

- 1) Quel est le nombre de tirage possible ?
- 2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
- 3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

**Solution :**

1) On a  $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30 = 29760$

2) On a :  $A_8^1 \times A_{24}^2$

3) On a :  $A_{16}^1 \times A_{13}^2$

**2) Probabilité sur un ensemble fini :****a- Vocabulaire :**

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note :  $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- **Intersection de 2 ensemble :** L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note :  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$

**N.B :**

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup \phi = A$$

$$\text{Card} \phi = 0$$

**Exercices d'application :**

Soit E et F deux ensembles tels que :

$$E = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 0, a, b, c, 4, 8\}$$

- 1) Déterminer  $E \cup F$  et  $E \cap F$
- 2) Déterminer  $\text{card} E$ ,  $\text{card} F$ ,  $\text{card} (E \cup F)$ ,  $\text{card} (E \cap F)$

**Solution :**

$$1) E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c\}$$

$$E \cap F = \{0, 1, 2\}$$

$$2) \text{Card } E = 4, \text{Card } F = 8$$

$$\text{Card} (E \cup F) = 9, \text{Card} (E \cap F) = 3$$

**b- Propriétés :**

$$P_1 : \text{Card } \phi = 0$$

$P_2$  : Soient A et B deux univers finis :

- $\text{Card} (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card} (A \cap B)$
- $\text{Card} (A \cap B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card} (A \cup B)$

$P_3$  : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien  $A \times B$  l'ensemble défini par :  $\{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

**Exemple:**

Soient A et B deux ensembles tel que :

$$A = \{1, 2\}; B = \{a, b, c\}$$

- a) Donner les éléments de  $A \times B$
- b) Déterminer  $\text{Card} (A \times B)$

**Solution :**

- a)  $A \times B = \{(1, a) ; (1, b) ; (1, c) ; (2, a) ; (2, b) ; (2, c)\}$
- b)  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B = 3 \times 2 = 6.$

**N.B :**

- $A \times B \neq B \times A$  (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B.$

**P<sub>4</sub> : Complémentarité :** On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note  $\bar{A} = C_B^A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}$

**Exemple :**

Soit  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  ;  $F = \{0, 3, 4, 5\}$

- a) Déterminer  $\bar{F} = C_E^F$
- b) Déterminer  $\text{Card } \bar{F}$

**Solution**

- a)  $\bar{F} = C_E^F = \{1, 2, 6, 7, 8\}$
- b)  $\text{Card } \bar{F} = \text{Card } E - \text{Card } F = 9 - 4 = 5$

**N.B:**  $\text{Card}(C_E^F) = \text{Card } E - \text{Card } F$

**3) Permutation—Arrangement — combinaison****a) Permutation :**

- **Définition :**

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de  $[1 ; n]$  dans F. Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n.

On la note : ***n!*** (et se lit Factorielle n).

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$$

- **Propriétés :**

$$P_1 : 1! = 1 \quad ; \quad P_2 : 0! = 1$$

**b) Arrangement :**

- **Définition:**

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $P$  un ensemble fini tel que :  $(n \geq P)$ . On appelle arrangement de  $P$  éléments de  $E$ , toute injection de  $P$  dans  $E$ .

On le note :  $A_n^P$  et on lit : «  $A, n, P$  ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \text{ ou } A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

- **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^0 = 1$$

$$P_2 : A_n^1 = n P_4 : A_n^{n-1} = n !$$

$$P_3 : A_n^n = n !$$

c) **Combinaison :**

- **Définition :**

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $P$  un ensemble fini tel que :  $(n \geq P)$ . On appelle combinaison de  $p$  éléments de  $E$  tout sous ensemble de  $E$  ayant  $p$  éléments.

On le note :  $C_n^P$  et on lit : «  $C, n, P$  ».

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{n(n-1) \dots 2 \times 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- **Propriétés :**

$$P_1 : C_n^0 = 1$$

$$P_2 : C_n^1 = n P_4 : C_n^{n-1} = n$$

$$P_3 : C_n^n = 1$$

**N.B :** Pour calculer le  $C_n^P$ , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

| P \ N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 0     | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
| 1     | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
| 2     | 1 | 2 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
| 3     | 1 | 3 | 3 | 1 |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |

|   |   |   |    |    |    |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|----|----|----|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 4 | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |

d) **Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini ( P- liste )**

• **Définition :**

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté :  $A_n^{\hat{P}}$  tel que :

$$A_n^{\hat{P}} = n^P$$

• **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^{\hat{0}} = n^0 = 1 ;$$

$$P_2 : A_n^{\hat{1}} = n^1 = n;$$

4) **Les différents types de tirages**

a) **Tirages successif et sans remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts ( ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments ).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement**.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \text{ ou } A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

b) **Tirages successif et avec remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**.

$$A_n^{\hat{P}} = n^P$$

c) **Tirage simultané :**

Si l'énoncé contient le mot : simultanément, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison**.

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} \text{ ou } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**d) Tirage successif :**

Si l'énoncé contient le mot : successif, il faut en tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

**Attention :**

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

**Application :**

Une boîte contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires.

Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boîte et que :

- a) le tirage est simultané
- b) le tirage est successif et sans remise
- c) le tirage est successif et avec remise

**Solution :**

Ici : - le nombre d'élément qui constitue l'univers est :  $n = 30$

- le nombre d'élément tiré est :  $p = 3$

a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est :  $C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est :  $A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = 24360$

c) le tirage est successif et avec remise :

Alors le nombre de cas possible est :  $A_{30}^3 = 30^3 = 2700$

## I- Probabilité simple :

### 1) Définition :

Dans une épreuve où tous les événements élémentaires d'un univers  $\Omega$  sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'événement A et le Nombre de Cas Possibles. On note  $P_A$  ou  $P(A)$ .

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de A}}$$

#### Exemple:

On jette un dé ordinaire non piqué. Soit  $\Omega$  l'ensemble des résultats possibles tel que :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $\Omega$  est appelé univers ou population.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

#### Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

- La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est  $P = \frac{3}{6} = 0,5$
- La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est :  $P = \frac{1}{6}$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est  $P = \frac{0}{6} = 0$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est  $P = \frac{6}{6} = 1$

### 2) Propriétés :

Soit  $\Omega$  l'univers ou l'événement certain et A et B deux événements élémentaires de  $\Omega$ .

On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + (P(B) - P(A \cap B))$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints  $(A \cap B) = \phi$  alors on a :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Exemple :**

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité d'avoir "A" exactement 2 boules blanches.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
- 3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

**Solution :**

Tirage simultané : on utilise  $C_n^p$  avec  $\begin{cases} n = 7 \\ p = 3 \end{cases}$

Désignons par NCP : le **N**ombre de **C**as **P**ossible

et

par NCF : le **N**ombre de **C**as **F**avorable

$$\begin{array}{l} 1) \text{ Nombre de cas possible } C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \\ \text{Nombre de cas favorable } C_3^1 \times C_4^2 = 12 \end{array} \quad \left| \quad P(A) = \frac{12}{35} \right.$$

$$\begin{array}{l} 2) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_4^0 \times C_3^3 + C_3^2 = 12 + 1 = 13 \end{array} \quad \left| \quad P(B) = \frac{13}{35} \right.$$

$$\begin{array}{l} 3) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_3^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_3^1 = 13 + 18 = 30 \end{array} \quad \left| \quad P(C) = \frac{6}{7} \right.$$

$$\begin{array}{l} 4) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_3^3 \times C_4^0 + C_4^3 \times C_3^0 = 5 \end{array} \quad \left| \quad P(D) = \frac{5}{35} \right.$$

### 3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

- Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est  $\frac{1}{6}$
- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est de  $\frac{1}{2}$ .

## II- Probabilités conditionnelles et Indépendance

### 1) Définition :

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que  $A \cap B \neq \emptyset$ .

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B.  $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

### 2) Indépendance :

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

$$\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

### 3) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application  $x$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des valeurs prises par  $x$ , noté  $x(\Omega)$  et s'appelle l'univers image de  $\Omega$  par  $x$ .

### 4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image  $x_i$ , on désigne par " $X = x_i$ ", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités  $e_k$  de  $\Omega$  ayant pour image  $x_i$  par  $X$  on note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

**N.B :** L'ensemble des évènements " $X = x_i$ ", constitue une partition de  $\Omega$  et forme un système complet d'évènements.

On définit également les notations :  $X > a$  ;  $X \geq a$  ; .....

C'est l'ensemble des éventualités de  $\Omega$  dont l'image est strictement supérieure à  $a$ , supérieure ou égale à  $a$ , .....

## 5) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire  $x$  la fonction :

$P : x \mapsto P(X = x)$  qui à toute valeur image  $x_i$  associe la probabilité  $P_i = P(X = x_i)$ .

**N.B :** Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

|            |       |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i$      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ..... | $x_n$ |
| $P(X=x_i)$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | ..... | $P_n$ |

Avec  $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

## 6) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire  $x$ , la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$F : x \mapsto p(X \leq x)$

**N.B :**

Si  $x_i \leq x < x_{i+1}$ , alors  $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier :  $F(x) = 0$  pour  $x < x_1$  ;  $F(x) = 1$  pour  $x > x_n$

La fonction  $F$  est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

## 7) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

### a) Espérance mathématique X

On appelle espérance mathématique d  $X$ , le nombre  $\bar{X} = E(x)$  tel que :

$$\bar{X} = E(x) = \sum_{i=1}^n p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_n x_n$$

**N.B :**

C'est la moyenne pondérée des valeurs images  $x_i$ , pondérées par les probabilités  $P_i$  (**Car :  $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$** )

**Propriétés :**

$$P_1 : E(x - E(x)) = 0$$

$$P_3 : E(x + k) = E(x) + k$$

$$P_2 : E(k) = k$$

$$P_4 : E(kx) = k E(x).$$

**b) Variance :**

On appelle variance de  $x$  l'espérance mathématique du carré de la variable  $x - E(x)$ . Elle est noté  $V(x)$  telle que :

$$V(x) = \sum P_i [x_i - E(x)]^2 = P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + \dots + P_n (x_n - E(x))^2$$

$$\text{Ou } V(x) = (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots + P_n x_n^2) - (E(x))^2$$

**Propriétés :**

$$P_1 : V(k) = 0 ;$$

$$P_2 : V(X+k) = V(x)$$

$$P_3 : V(kx) = k^2 V(x)$$

**c) Ecart – type :**

On appelle écart-type la racine carré de la variance. On la note  $\delta(x)$  tel que  $\delta(x) = \sqrt{V(x)}$ .

**Propriété:**

$$\delta(kx) = k \delta(x)$$

**6°) Epreuve de Bernoulli**

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité  $p$  et l'autre échec avec pour probabilité  $q = 1 - p$ .

**7°) Loi binomiale :**

Soit une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit  $P$  la probabilité du succès et  $q = 1 - p$  celle de l'échec.

Soit  $x$  la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement  $k$  succès est :  $p(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

**Exercices d'application :**

**Exercice 1 :**

Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| X            | 0             | 1             | 2             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

- Calculer l'espérance mathématique
- Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
- Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

### Exercice 2 :

On suppose que la probabilité de faire un garçon est  $\frac{1}{4}$ . Une famille a 5 enfants.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

### Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

### Partie A :

Dans cette partie on prend  $p = 0,1$

- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

### Partie B :

On revient au cas général

- Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que  $f(p) = p^2$

Soit  $g(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que  $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

b) On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$ .

- Etudier le signe de  $h(p)$  en fonction de  $P$ .
- En déduire, suivant les valeurs de  $p$  dans quels avions il vaut mieux monter.

### Solutions :

#### Exercice 1 :

a) **Espérance mathématique est :**

$$E(x) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} = 0,857 \Rightarrow E(x) = 0,857$$

b) **La variance et l'écart – type**

- **Variance :**

$$V(x) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0,857^2 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 0,857^2 \Rightarrow V(x) = 1,142 - 0,857^2 = 0,407$$

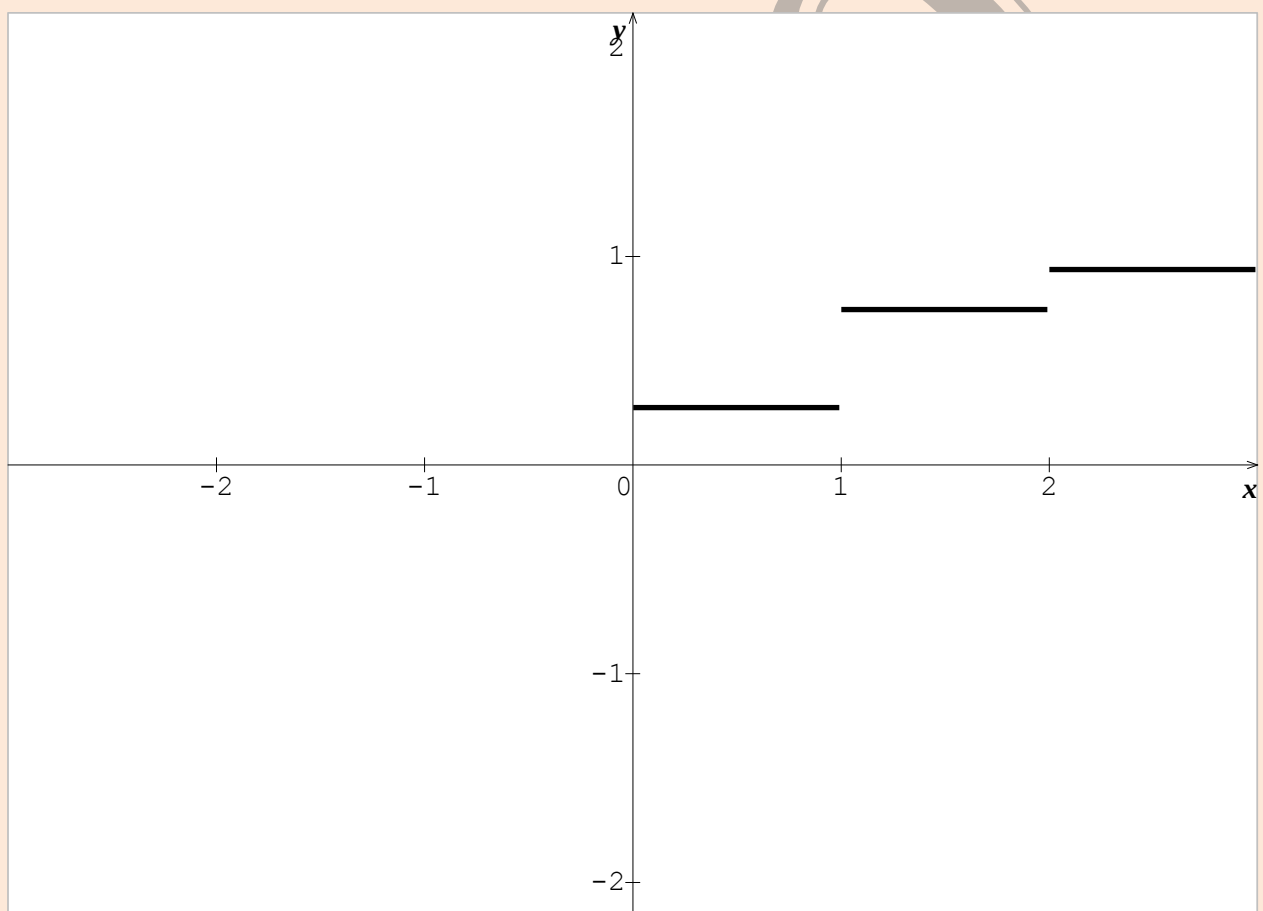
- L'écart – type :  $\delta(x) = \sqrt{0,407} = 0,637$

c) **La fonction de répartition est :**

$$\begin{array}{l} P(x < 0) = 0 \left| \begin{array}{l} P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7} \\ P(x \leq 2) = P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$D'o\grave{u} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{7} & \text{si } x \in [0;1] \\ \frac{6}{7} & \text{si } x \in [1;2] \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

La présentation graphique est définie par la figure suivante :



### **Exercice 2 :**

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité  $p = \frac{1}{4}$  et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité  $q = 1 - p = 1 -$

$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour

Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et  $\frac{3}{4}$  tel que

$$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p(x = 3) = \frac{45}{512} = 0,088$$

$$\Rightarrow p(x = 3) = 0,088$$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est  $p(x = 3) = 0,088$ .

### Exercice 3 :

Soit  $p$  la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

#### Partie A :

On donne  $p = 0,1$

a) La probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.  $p_1 = p \quad p = p^2 = 0,1 \quad 0,1 = 0,01$

b) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

$$p_2 = p \quad p \quad p \quad p = p^4 = 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1 = 0,0001$$

c) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne. L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre  $p = 0,1$  et  $k = 3$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3 (0,1)^3 (0,9)^1 = 4 \quad (0,001) \quad (0,9) = 0,0036$$

d) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

$$p_4 = p_2 + p_3 = 0,0001 + 0,0036 = 0,0037$$

#### Partie B :

On revient au cas général

a) Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.  
Démontrons que  $f(p) = p^2$

Un avions à 2 moteurs s'crase si ses deux moteurs sont en panne.

$$f(p) = p \quad p = p^2$$

b)  $g(p)$  est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.  
Démontrons que  $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$$g(p) = p^4 + p(x=3) = p^4 + C_4^3 p^3 (1-p) = p^4 + 4p^3 (1-p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2 (-3p^2 + 4p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$$

c) On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2 (-3p^2 + 4p) = p^2 (1 + 3p^2 - 4p)$$

$$\Rightarrow h(p) = p^2 (3p^2 - 4p + 1)$$

Si  $p^2 > 0$  alors le signe de  $h(p)$  dépend du signe  $3p^2 - 4p + 1$

$$\text{Or } 3p^2 - 4p + 1 = 3(p-1) \left(p - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow h(p) > 0 \text{ si } p \in ]0 ; \frac{1}{3}[ ; h(p) < 0 \text{ si } p \in ]\frac{1}{3} ; 1[ ; h(p) = 0 \text{ si } p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$$

En déduisons, suivant les valeurs de  $p$ , dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si  $p \in ]0 ; \frac{1}{3}[$ , alors  $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$ . Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si  $p \in ]\frac{1}{3} ; 1 [$ , alors  $h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$  : Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si  $p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$  ; alors  $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$  : le risque est le même.

### EXERCICES

#### Exercice 1 :

1) calculer les expressions suivantes :

a)  $5! ; 7! ; (2^3)! ; 3(4!) ; \frac{8!}{6!}$

b)  $A_8^3 ; A_{10}^4 ; A_{10}^{10} ; C_5^2 ; C_8^3 ; C_{10}^{10}$

c)  $\frac{C_{10}^5}{C_{10}^3} ; \frac{A_8^5}{A_8^1} ; C_{15}^{14} + C_3^0$

2) Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  les équations suivantes :

a)  $C_n^2 = 5n ; A_{n+1}^3 = n(n^2 - 1)$

b)  $A_n^2 = n(2n + 5) ; A_n^2 = C_n^3$

c)  $C_n^2 = 45 ; C_n^3 = 2n ; C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$

d)  $C_n^1 + C_n^2 = 10 ; n^2 + 3C_n^2 = 1$

#### Exercice 2 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

- 1) combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
- 2) combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2 as peut – on constituer ?
- 3) combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

#### Exercice 3 :

Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent

former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes.

Trouver de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

- 1) chaque membre de l'association accepte de faire partir du comité
- 2) deux des hommes refusent d'en faire partir
- 3) monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

**Exercice 4 :**

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

- I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :
  - 1) le tirage est simultané
  - 2) le tirage est successif sans remise
  - 3) le tirage est successif avec remise.
  
- II) Dénombrer les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :
  - 1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
  - 2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
  - 3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
  - 4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
  - 5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

**Exercice 5 :**

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 aiment la mathématique
- 30 aiment le français
- 17 aiment la mathématique et le français

Trouver le nombre d'élève :

- a) qui aiment uniquement le français
- b) qui aiment uniquement la mathématique
- c) qui aiment la mathématique ou le français
- d) qui n'aiment aucune des deux matières

**Exercice 6 :**

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

- 1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :
  - a) aucune boule rouge n'est tirée
  - b) une boule rouge et une seule est tirée
  - c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
  - d) une boule rouge au moins est tirée
  - e) deux boules blanches au plus sont tirées
- 2) soit  $x$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
  - a) Donner la loi de probabilité de  $x$
  - b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $x$
  - c) Calculer la probabilité de l'évènement  $1 \leq x \leq 2$

**Exercice 7 :**

Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ( $n \in \mathbb{N}_+^*$ )

1) Une urne contient  $(n + 1)$  boules vertes et  $(n - 1)$  boules rouges  
Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :

- Si la boule est rouge, le joueur perd
- Si la boule est verte, le joueur gagne

- a) Quelle est la probabilité  $P_1$  que le joueur gagne ?
- b) Quelle est la probabilité  $P_2$  que le joueur perd ?

2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire  $x$  qui à chaque tirage associe le gain en FCFA.  
(le gain pouvant être négatif).

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $x$
- b) Calculer l'espérance mathématique de  $x$
- c) Pour quelle valeur de  $n$ , le jeu est – il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable  $x$  est nulle).

#### Exercice 8 :

Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire  $x$  prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

|        |      |      |      |      |      |           |
|--------|------|------|------|------|------|-----------|
| N      | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5 et plus |
| P(x=n) | 0,15 | 0,40 | 0,30 | 0,10 | 0,05 | 0         |

- 1) Dresser le tableau de la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $x$  et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
- 2) Calculer l'espérance mathématique  $E(x)$  et la variance  $V(x)$  de la variable  $x$ .

#### Exercice 9 :

Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons.20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

- 1) Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
- 2) On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit :
  - a) une fille ;
  - b) un garçon.

**Exercice 10 :**

Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématiques. Trois professeurs X; Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :

\* 0,35 la probabilité pour que ce soit X qui choisisse le sujet;

\* 0,4 la probabilité pour que ce soit Y;

\* 0,25 la probabilité pour que ce soit Z.

Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté r ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur r si X le choisit, 2 chances sur 5 si c'est Y qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est Z qui fait le choix du sujet.

- 1) Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre r ?
- 2) Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet r. Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
  - a) par X ?
  - b) par Y ?
  - c) par Z ?

**Exercice 11 :**

On considère deux dés cubiques identiques non pipés, dont les faces sont marquées:  $(0;0)$ ,  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$ .

On lance simultanément les deux dés, et on lit les résultats a et b de leurs faces supérieures. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des deux dés, associe la valeur  $\sin(a + b)$

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

**Exercice 12 (non corrigé)**

1- On suppose que la probabilité de faire un garçon est  $\frac{1}{4}$ . Une famille a 5 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

2- L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

### Partie A :

Dans cette partie on prend  $p = 0,1$

- e) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- f) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- g) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- h) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

### Partie B :

On revient au cas général

- c) Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que  $f(p) = p^2$
- d) Soit  $g(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Démontrer que  $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$
- e) On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$ .
  - Etudier le signe de  $h(p)$  en fonction de  $p$ .
  - En déduire, suivant les valeurs de  $p$  dans quels avions il vaut mieux monter.

## CHAPITRE XII : ALGÈBRES LINÉAIRES (MATRICES)

### 1) Définitions :

#### a) Cas général :

On appelle **système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad (S)$$

Dans lequel  $a_{ij}$  et  $b_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) sont des réels ou des complexes donnés.

**Deux systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont équivalents**, s'ils ont même ensemble de solutions, c'est-à-dire si toute solution de  $(S_1)$  est solution de  $(S_2)$  et réciproquement, si toute solution de  $(S_2)$  est solution de  $(S_1)$ .

### Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \text{ est un système de 2 équations à 3 inconnues. } (1; -2; 2) \text{ en est une solution.}$$

**b) Cas particuliers :**

Un système est dit carré si  $p = n$ .

Un système carré est dit **triangulaire à diagonale unité** si l'on a :

$a_{ij} = 0$  pour  $i > j$  et  $a_{ii} = 1$ , avec  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Par exemple, la forme générale d'un système de 3 équations à 3 inconnues, triangulaire à diagonale unité est :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \quad x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \quad \quad x_3 = b_3 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est très simple et, de plus on admet :

**Propriété**

**Un système triangulaire à diagonale unité admet, quel que soit le second membre, une et une seule solution.**

**Exemple :**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 & L_1 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 7 & L_2 \\ \quad \quad x_3 = 2 & L_3 \end{cases}$$

Les solutions successives des équations  $L_3$  puis  $L_2$  puis  $L_1$  montrent que (S) admet une solution et une seule (1 ; -1 ; 2).

**2) Opérations élémentaires****a) Exemple et notations**

Soit le système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

On va ramener la résolution de (S) à celle d'un système de  $(3 - 1)$  équations à  $(3 - 1)$  inconnues. Pour cela on forme un système équivalent à (S), en éliminant une inconnue dans deux équations du système.

- Echangeons les lignes 1 notée  $L_1$ , et 2 notée  $L_2$ .

**Codage**

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

**Système**

$$(S_1) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 12y + 17z = 53 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

- Multiplions les deux membres de  $L_1$  par  $-2$  et ajoutons l'équation obtenue à  $L_2$ , membre à membre, afin d'éliminer  $x$  dans la deuxième équation. Procédons de même avec  $L_3$ .

**Codage**

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

**Système**

$$(S_2) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2y + 3z = 9 \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

- Appliquons à nouveau le procédé au système de 2 équations à 2 inconnues en éliminant  $y$  dans  $L_3$ .

**Codage**

$$L_3 \leftarrow \frac{L_2}{2}$$

**Système**

$$(S_3) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2}z = -\frac{125}{2}. \end{cases}$$

Nous obtenons un système triangulaire ( $S_4$ ). On vérifie que :

( $S_4$ ) est équivalent à (S) ;

( $S_4$ ) admet une solution et une seule : (2 ; -3 ; 5)

On en déduit que (S) admet une solution et une seule (2 ; -3 ; 5).

### b) Opérations élémentaires

On note de haut en bas  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les  $n$  équations ou lignes du système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites **élémentaires** :

- Echange de deux lignes :  
 $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul :  
 $L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in \mathbb{R}^*)$ .
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne :  
 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in \mathbb{R}, i \neq j)$ .

On admet le théorème suivant.

### Théorème :

Etant donné un système linéaire de  $p$  lignes  $L_1, L_2, \dots, L_p$ , on obtient un système équivalent en effectuant une des opérations élémentaires suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in \mathbb{R}^*)$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in \mathbb{R}, i \neq j)$ .

**La méthode du pivot de Gauss** consiste à exécuter, dans un ordre bien déterminé, des opérations élémentaires sur les lignes d'un système, conduisant à un système triangulaire (équivalent) plus facile à résoudre ; cette méthode est en fait un algorithme susceptible d'être exécuté par un ordinateur.

### Exercice d'application :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 \quad \quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20. \end{cases}$$

### Solution

#### 1<sup>ère</sup> Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de  $x_1$  dans la première ligne.

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 \quad \quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

#### 2<sup>ème</sup> Etape :

On élimine  $x_1$  dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0 + 0 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 0 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{cases}$$

#### 3<sup>ème</sup> Etape :

Le pivot de rang 2, coefficient de  $x_2$  dans la deuxième équation, est nul, on échange  $L_2$  et une autre ligne de façon à obtenir un pivot non nul.

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22. \end{cases}$$

Puis on élimine  $x_2$  dans la ligne 4.

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

**4<sup>ème</sup> Etape :**

On fait apparaître 1 pour coefficient de  $x_3$  dans la troisième ligne, puis on élimine  $x_3$  dans la ligne 4.

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

En résolvant  $L_4$ , puis  $L_3$ ,  $L_2$  et  $L_1$ , on obtient  $x_4 = -1$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_1 = 0$ .

Le système admet donc une solution unique (0 ; 1 ; 3 ; -1)

**Remarque :**

Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul on dit que la méthode de Gauss "se bloque" ; c'est le cas dans l'exercice 2.

### Exercice d'application

**Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système :**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 13x_4 = a + 4 \quad (a \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Solution

**1<sup>ère</sup> Etape :** on élimine l'inconnue  $x_1$  dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -1 \\ 0 - 3x_3 + 6x_4 = a + 3. \end{cases}$$

**2<sup>ème</sup> Etape :** on élimine l'inconnue  $x_2$  dans les lignes 3 et 4.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 &\leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 \quad 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_4 = -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4x_4 = 2a. \end{cases}$$

**Deux cas sont à envisager :**

**1<sup>er</sup> Cas :**  $a \neq -2$ , le système initial n'a pas de solution  $S = \emptyset$ .

**2<sup>ème</sup> Cas :**  $a = -2$ , le système initial (ou final) admet une infinité de solutions :

$$S = \{(7 - k; 2k - 4; k; -1); k \in \mathbb{R}\}.$$

EXERCICES:Exercise 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 7 \\ 3y - 7z = 1 \\ 8z = 16. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 12 \\ x + 3y + z = 6 \\ -x - 2y + 3z = -8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 2x + 7y + 6z = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 7z = 7 \\ 2x + 4y + 9z = 15. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - y + 7z = -4 \\ 2x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y & = a \\ x & + & z = b \\ & y + & z = c \end{cases}$$

a, b et c sont trois nombres réels donnés.

$$7) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ x + y - z = 1 \\ -3x - 4y + z = -5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x + 4y & = 16 \\ 3x + 9y + 18z & = 9 \\ 4x + 8y + & z = 29 \end{cases}$$

$$11) a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

### Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = -1 \\ & 3y - 2z - 2t = -6 \\ & & z + 6t = -1 \\ & & & -4t = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 2y + 4z + 6t = 8 \\ 3x + 4y + 11z + 15t = 21 \\ 5x + 8y + 27z + 17t = 57 \\ 4x + 2y - 5z + 27t = -5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8x_1 + 40x_2 - 32x_3 + 24x_4 = 16 \\ 2x_1 + 13x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ -3x_1 - 17x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -7 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 10x_4 = -3 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 6y + 4z + 2t = -2 \\ -2x - 3y + 5z - 5t = 2 \\ -3x - 8y - 3z + 2t = 1 \\ -x - 2y + z + 10t = 0. \end{cases}$$

**Exercice 3 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^5$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -5 \\ 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 18 \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 + 10x_4 + 12x_5 = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 4y + 6z + 8t + 10u = -2 \\ -x + z + 2t - 7u = -3 \\ -2x - 5y - 6z - 15t - 15u = 2 \\ -x - 4y - 7z - 10t - 3u = 5 \\ -2x - 7y - 10z - 20t - 9u = -6 \end{cases}$$

**Exercice 4 :**

1) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(0) = 1 ; P(1) = 3 \text{ et } P(-1) = 1.$$

2) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(2) = P(-2) = 1 ; P(0) = -1$$

3) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(1) = 0 ; P(3) = 16 ; P'(2) = 8$$

4) Trouver un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$P(1) = 1 ; P(2) = 15 ; P(3) = 51 ; P'(-1) = 11.$$

5) Trouver un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3 qui prenne la valeur 1 en 0 et la valeur  $-4$  en 1 et dont la courbe représentative  $C$  admette des tangents de coefficients directeurs  $-6$  et  $6$  respectivement aux points de  $C$  d'abscisses 0 et 2.

**Exercice 5 :**

Un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace est donné

1) Déterminer l'intersection des plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

$$P_1 : 2x + 2y + 6z = -1$$

$$P_2 : -3x - 4y - 9z = 1$$

$$P_3 : -y + 2z = 4.$$

2) Déterminer l'intersection des plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

$$P_1 : 3x + 3y - 3z = -3$$

$$P_2 : -3x - 3y = -1$$

$$P_3 : 2x + 2y - 8z = -8$$

**Exercice 6 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 22 \\ x + 2y - z = 6 \\ 2x - 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

2) En déduire la solution des systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 5|a| + 7|b| - 3|c| &= 22 \\ |a| + 2|b| - |c| &= 6 \\ 2|a| - 2|b| + 5|c| &= -7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{7}{2y} - 3(z+2) = 22 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y} - (z+2) = 6 \\ \frac{4}{x-1} - \frac{1}{y} + 5(z+2) = -7 \end{cases}$$

**Exercice 7 :**

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t &= -4 \\ -x + y - z + t &= 4 \\ 8x + 4y + 2z + t &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 0. \end{cases}$$

FIN DU TROISIEME TRIMESTRE

PREPARED BY ISSOUF MOHAMED : 76-96-46-17/66-29-10-98