déclic

Tes

mathématiques

Enseignements spécifique et de spécialité

Lydia Misset

Michèle Le Bras

Claudine Merdy

Denis Ravaille

hachette
ÉDUCATION

CHAPITRE 1

Suites

Partir d'un bon pied (p. 10)

A Vrai ou faux ? Reconnaître une variation absolue ou relative

a. Vrai : $\text{CM} - 1 = \dfrac{60\,600}{48\,400} - 1 \approx 0{,}25$, soit 25 %.

b. Vrai : $\text{VF} = (1 - 0{,}20) \times \text{VD}$.

Donc $\text{VD} = \dfrac{60\,000}{0{,}8} = 750\,000$.

Et $750\,000 - 600\,000 = 150\,000$.

c. Faux : car $\text{VF} = (1 + 0{,}316) \times \text{VD}$.

Donc $\text{VD} = \dfrac{4\,005 \times 10^9}{1{,}316} \approx 3\,043 \times 10^9$.

B QCM – Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

1 a. Les dates sont espacées de la même durée de 10 ans.

• $16{,}7 - 15{,}3 = 1{,}4$ et $18{,}1 - 16{,}7 = 1{,}4$.

La variation absolue est constante tous les 10 ans : la consommation peut être modélisée par une suite arithmétique.

• $\dfrac{16{,}7}{15{,}3} \approx 1{,}09$ et $\dfrac{18{,}1}{16{,}7} \approx 1{,}08$.

Le coefficient multiplicateur n'est pas constant : la consommation ne peut pas être modélisée par une suite géométrique.

2 b. Les dates sont espacées de la même durée de 10 ans.

• $8 - 10 = -2$ et $6{,}4 - 8 = -1{,}6$.

La variation absolue n'est pas constante.

• $\dfrac{8}{10} = 0{,}8$ et $\dfrac{6{,}4}{8} = 0{,}8$. Les coefficients multiplicateurs sont les mêmes : la consommation peut être modélisée par une suite géométrique.

3 b. L'augmentation est de 11 pour 1 000, ou 1,1 % par an.

C QCM – Établir une relation de récurrence

c. Au mois $n + 1$, le montant après prélèvement est $u_n - 120$.

La grand–mère de Nath ajoute $0{,}1 \times (u_n - 120)$.

Le montant après le dépôt est donc :

$u_{n+1} = (u_n - 120) + 0{,}1(u_n - 120) = (u_n - 120) \times 1{,}1$.

D QCM – Interpréter un algorithme

Réponse **b.**

Tableau de suivi des valeurs des variables lorsque A vaut 5.

	A	B	C
	5		
Initialisation	5	0	1
Traitement (tant que C < A)	5	1	2
		2	4
		3	8
Sortie	5	3	8

Découvrir

Activité 1 Estimer une population (p. 12)

1

C3 | f_x =C2/B2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Année**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
2	**Population**	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2
3	**CM**		1,254	1,287	1,315	1,325	1,283	1,234

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 Calculons le coefficient multiplicateur décennal moyen égal à $\left(\frac{1011,2}{227,3}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,282$.

3 **a.** Pour tout entier n, on note P_n la population africaine estimée par ce modèle (en millions) à l'année $1950 + 10n$. $P_0 = 227,3$ et $q = 1,28$.
Pour tout entier n, $P_{n+1} = 1,28\,P_n$
donc $P_n = 227,3 \times 1,28^n$
En 2010, $n = 6$, $P_6 \approx 999,68$, valeur inférieure à la valeur réelle.

b. Si $q = 1,29$.
Pour tout entier n, $P_{n+1} = 1,29\,P_n$
donc $P_n = 227,3 \times 1,29^n$
En 2010, $n = 6$, $P_6 \approx 1047,46$ valeur supérieure à la valeur réelle.

c. La population africaine dépassse 2 000 millions lorsque n vérifie $227,3 \times 1,28^n > 2\,000$.
À l'aide d'un tableur, on trouve $n \geqslant 9$.

Activité 2 Calculer une somme et déterminer un seuil (p. 12)

1 **d.**

f_x =1000*0,98^B1

2 **b.**

C3 f_x =B3+C2

3

	A	B	C	D	E
1	jour	1	2	3	4
2	production	1000	980	960	941
3	production stockée	1000	1980	2940	3882

4

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Production	1 000	980	960	941	922	904	886	868	851	834	817	801	785	769	754	739	724	709
Production stockée	1 000	1 980	2 940	3 882	4 804	5 708	6 594	7 462	8 313	9 146	9 963	10 764	11 549	12 318	13 072	13 810	14 534	15 243

Activité 3 Visualiser à long terme (p. 13)

1 **a.**

D4 f_x =B4/B3

	A	B	C	D	E
1					
2	semaine	valeur			
3	0	1000	taux t	q	
4	1	1020	2	1,02	

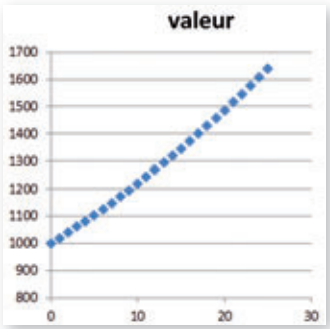
b. Pour tout entier n, soit v_n la valeur de l'action à l'année n, $v_n = 1\,000 \times 1,02^n$.

c.

B5 f_x =B4*$D$4

2 **a.**

	A	B	C	D
1				
2	semaine	valeur		
3	0	1000	taux t	q
4	1	1020	2	1,02
5	2	1040		
38	35	2000		
39	36	2040		



b.

	A	B	C	D
3	0	1000	taux t	q
4	1	900	-10	0,90
13	10	349		
23	20	122		

À long terme, la valeur de cette action sera nulle.

c. Si $q > 1$, la valeur de l'action augmente, si $0 < q < 1$, la valeur de cette action diminue et si $q = 1$, elle reste constante.

Activité 4 Modéliser par une suite récurrente (p. 13)

Situation ① : 2 a. C
Situation ② : 4 d. A
Situation ③ : 1 c. D

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Savoir faire

1. Modéliser à l'aide d'une suite arithmétique ou géométrique (p. 15)

Exercices d'application

1 **a.** Soit u_n la production à l'année n.
La production augmente chaque année de 2 %, la production est multipliée chaque année par 1,02 donc, la suite (u_n) est géométrique de raison 1,02 avec $u_0 = 3\,000$.
Ainsi pour tout entier n, $u_n = 1{,}02^n \times 3\,000$.
$u_{10} = 1{,}02^{10} \times 3\,000$. Soit $u_{10} \approx 3\,657$ tonnes.
b. La production totale est égale à
$P = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = u_0 \times \dfrac{1{,}02^{11} - 1}{1{,}02 - 1} = 150\,000(1{,}02^{11} - 1)$
soit $P \approx 36\,506$ tonnes.

2 **a.** Soit u_n la production de sucre de l'année $2010+n$.
La consommation moyenne de sucre diminue de 3 % par an. Cette consommation est multipliée par 0,97 chaque année.
b. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,97 avec $u_0 = 8$.
$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{15} = u_0 \times \dfrac{0{,}97^{16} - 1}{0{,}97 - 1} = \dfrac{800}{3}(1 - 0{,}97^{16})$
soit $S \approx 110{,}46$ kg par personne.

2. Étudier une suite géométrique et déterminer un seuil (p. 17)

Exercices d'application

3 **a.** On note C_n le capital acquis au bout de n années de placement. $C_0 = 12\,000$.
Le capital placé à intérêts composés au taux annuel de 2,7 % est donc multiplié par 1,027 chaque année.
La suite (C_n) est géométrique de raison 1,027 de terme initial $C_0 = 12\,000$.
Pour tout entier n, $C_n = 1{,}027^n \times 12\,000$.
$C_{10} = 1{,}027^{10} \times 12\,000$. Soit $C_{10} \approx 15\,663$ €.
b. $C_0 > 0$ et $1{,}027 > 1$, donc la suite (C_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = +\infty$.
c. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 27$.

4 On note F_n le nombre de femmes salariées après n années. $F_0 = 0{,}30 \times 2\,000 = 600$.
Les dirigeants décident d'augmenter de 5 % le nombre des femmes salariés, chaque année.
a. Le nombre d'hommes salariés va diminuer de 5 % du nombre de femmes, soit de 30 hommes ce qui représente environ 2 %.
Le nombre de femmes salariées augmente chaque année de 5 %, le nombre de femmes salariées est multiplié chaque année par 1,05 donc, la suite (F_n) est géométrique de raison 1,05 avec $F_0 = 600$.
Ainsi pour tout entier n, $F_n = 1{,}05^n \times 600$.
b. Le nombre de femmes dépasse le nombre d'hommes, lorsque $F_n > 1\,000$.
$1{,}05^n \times 600 > 1\,000 \Leftrightarrow 1{,}05^n > \dfrac{1\,000}{600} \Leftrightarrow 1{,}05^n > \dfrac{5}{3}$.
À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 11$.

3. Étudier une suite arithmético-géométrique (p. 19)

Exercices d'application

5 En reprenant le même raisonnement, on trouve :
1 **a.** $u_1 = 2\,944$ et $u_2 = 2\,887{,}216$.
b. Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}014u_n - 98$.
2 **a.** Pour tout entier n, $v_{n+1} = 1{,}014u_n - 7\,098 = 1{,}014\,v_n$ et $v_0 = 3\,000 - 7\,000 = -4\,000$.
D'où $u_n = 7\,000 - 4\,000 \times 1{,}014^n$.
b. Pour $n = 40$ le capital est encore positif. Au début du 40e mois le capital serait négatif et égal à –73, 2 donc le 41e versement sera de $98 - 73{,}2 = 24{,}8$ €.

6 **a.** On note u_n le montant restant dû en début du n-ième mois. $u_0 = 4\,300$.
Le taux mensuel étant de 1,6 %, un mois après l'achat, les intérêts sont de $4\,300 \times 0{,}016 = 68{,}8$, puis Corinne rembourse 68 €, donc le capital restant dû au début du 1er mois après l'achat est :
$u_1 = 4\,300 + 68{,}8 - 68 = 4\,300{,}8$.
$u_2 = 4\,300{,}8 + 4\,300{,}8 \times 0{,}016 - 68 = 4\,301{,}6128$.
b. Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 0{,}016\,u_n - 68$
$= 1{,}016\,u_n - 68$.
On pose la suite auxiliaire $v_n = u_n - 4\,250$, pour tout entier n, alors : $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,250$.
$v_{n+1} = 1{,}016\,u_n - 68 - 4\,250 = 1{,}016\,u_n - 4\,318$.
On met 1,016 en facteur en remarquant que $\dfrac{4\,318}{1{,}016} = 4\,250$.
D'où pour tout entier n, $v_{n+1} = 1{,}016 \times (u_n - 4\,250)$
$= 1{,}016 \times v_n$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Donc, par définition, la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 1{,}016$ et de terme initial :
$v_0 = 4\,300 - 4\,250 = 50$.
Ainsi, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 1{,}016^n$
et $u_n = v_n + 4\,250 = 50 \times 1{,}016^n + 4\,250$.

Puisque $1{,}016 > 1$ et $50 > 0$, la suite (v_n) est croissante, donc la suite (u_n) ayant même variation que la suite (v_n) est aussi croissante.
Ce qui signifie que le montant restant dû ne cesse de croitre, donc que le prêt ne sera jamais remboursé.

QCM (p. 21)

7 **c.** Le 1er entier pair est 0 et la différence entre deux entiers pairs consécutifs est 2.

8 **a.** Myriam dépense 9 fois 250 €. Donc fin septembre, il lui reste $3\,500 - 9 \times 250 = 1\,250$ €.

9 **c.** La suite (p_n) est modélisée par une suite géométrique de raison $1 + \dfrac{11{,}35}{1\,000} = 1{,}01135$ et de terme initial $p_0 = 6\,990$.
Donc $p_n = 6\,990 \times 1{,}01135^n$ et $p_{11} \approx 7\,913$.

10 **b.** Pour tout entier n :
$u_{n+1} = u_n - 0{,}3\,u_n + 0{,}5 \times 0{,}3\,u_n = 0{,}85\,u_n$.
La raison de la suite géométrique est 0,85.

11 **b.** Comme $64 = 2^6$, la somme $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{64}$ contient 7 termes.

D'où $S = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{128}\right) = 2 - \dfrac{1}{64}$.

1,984 est une valeur arrondie, pas une valeur exacte.

12 **a.** Fin juin, le nombre de bougies stockées est :
$S = 540 + 540 \times 1{,}1 + \ldots + 540 \times 1{,}1^5$
$= 540 \times (1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^5)$
$= 540 \times \dfrac{1 - 1{,}1^6}{1 - 1{,}1} \approx 4\,166$.

13 **b.** La quantité vendue au mois n augmente de 26 % ; donc $CM_q = 1{,}26$.
$q_n = 1\,000 \times 1{,}26^n$.
Le prix unitaire au mois n diminue de 21 % ;
donc $CM_p = 0{,}79$.
$p_n = 10 \times 0{,}79^n$.
Donc au bout de n mois, la vente est :
$V_n = p_n \times q_n = 10 \times 0{,}79^n \times 1\,000 \times 1{,}26^n$.
Donc $V_n = 10\,000 \times (0{,}79 \times 1{,}26)^n$,
soit $V_n = 10\,000 \times 0{,}9954^n$.
Comme $0 < 0{,}9954 < 1$ et $10\,000 > 0$, la suite (V_n) est décroissante.

14 **c.** La valeur de la moto suit une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$.
Comme $0 < 0{,}9 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$.

15 **a.** Pour tout entier n non nul, la probabilité de gagner n parties consécutives est $0{,}8^n$.
À la calculatrice, $0{,}8^{20} \approx 0{,}011 > 0{,}01$
et $0{,}8^{21} \approx 0{,}009 < 0{,}01$.

16 **c.** Pour tout entier n :
$u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{100}u_n + 4\,000 = 1{,}05u_n + 4\,000$.

Exercices

1 Suites arithmétique ou géométrique (p. 22)

17 QCM

1 **a.** L'accroissement moyen de $u_1 = 12$ à $u_3 = 48$ est :
$a = \dfrac{u_3 - u_1}{3 - 1} = \dfrac{48 - 12}{2} = 18$.

2 **c.** $v_n = 2n + 5$ est l'expression d'une suite arithmétique : $v_n = v_0 + n \times a$, avec $a = 2$.

3 **a.** La raison de la suite géométrique est :
$CM = \dfrac{16{,}7}{15{,}3} \approx 1{,}0915$.

18 QCM

1 **c.** $u_{n+1} = u_n + 6$.

2 **b.** $u_n = 1{,}03^{n+2} \times 176$.

19 QCM

1 **c.** $CM = 1 + t = 1 + \dfrac{1{,}8}{100} = 1{,}018$.

2 **b.** $u_8 = 20\,000 \times 1{,}018^8 \approx 23\,068{,}12$.

3 **b.** $u_{10} \approx 23\,906$; $u_{11} \approx 24\,336$.

4 **a.** $u_8 - u_0 = 23\,068{,}12 - 20\,000 \approx 3\,068{,}12$.

20 Nature d'une suite

Suite	arithmétique	géométrique
Réponse	**a. e.**	**b. c. d.**
Raison	**a.** $a = 2$; **e.** $a = -100$	**b.** $q = \dfrac{1}{2}$; **c.** $q = 1{,}1$; **d.** $q = \dfrac{1}{3}$

21 Calcul du n-ième terme

1 Le taux de croissance annuel est de 9 %, donc le PIB de la chine est multiplié par 1,09. Soit u_n le PIB à l'année n, la suite (u_n) est géométrique de raison 1,09 et de terme initial $u_0 = 5\,000$.
Pour tout entier n, $u_n = 5\,000 \times 1{,}09^n$.
Pour $n = 6$, $u_6 \approx 8385{,}5$ milliards.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 U = 5 000 ; N = 6 .

3 **a.** Ajouter Entrer T , puis changer Stocker U + 0,09U dans U par Stocker U + (T/100)*U dans U .

b. Pour 2015, U ← 200 et N ← 7.

On obtient environ 3 007,26 millions de dollars.

22 Calcul du terme initial

On note p_0 la production de départ.

$p_0 \times 1{,}2^6 = 224$. Donc $p_0 = \dfrac{224}{1{,}2^6} \approx 75$ tonnes .

23 Calcul de la valeur actuelle

On place un capital C_0 à **intérêts composés** au taux annuel de 4,5 % le 2 janvier 2012.

Le capital augmente de 4,5 % par an donc, il est multiplié par 1,045 chaque année. La suite (C_n) est géométrique de raison 1,045 et de terme initial C_0.

$$C_n = C_0\,(1{,}045)^n .$$

Au bout de 5 ans, $C_0\left(1+\dfrac{4{,}5}{100}\right)^5 = 4\,000$.

$$C_0 = \frac{4000}{(1{,}045)^5}$$

soit un capital initial d'environ 3 209,80 euros.

24 Augmentation constante et stockage

1 **a.** La production augmente chaque semaine de 10 boîtes et on stocke la production au fur et à mesure.

Soit P_n la production à la semaine n, la suite (P_n) est arithmétique de raison $a = 10$.

Le terme initial est $P_1 = 50$.

Pour tout entier n, $P_n = 50 + 10\,(n-1) = 10\,n + 40$.

$P_5 = 90$.

b. On résout $P_n > 200 \Leftrightarrow 10\,n + 40 > 200 \Leftrightarrow n > 16$.

2 **a.** **Casio**

```
======STOCK
"N":?→N
50→P
50→S
For 2→I To N
P+10→P
S+P→S
```

TI™

```
PROGRAM:STOCK
:Prompt N
:50→P
:50→S
:For(I,2,N)
:P+10→P
:S+P→S
:End
```

b. $S = 50 + (50+10) + (50+20) + (50+30) + (50+40)$
$= 350$ boîtes .

25 Empilement

Pour tout entier n non nul, le niveau n contient n pierres.

Donc le nombre total de pierres jusqu'au niveau n est :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n .$$

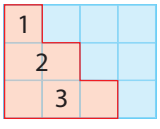
On remarque que, au niveau 3, on a deux fois $(1+2+3)$ représentés par un rectangle de côtés 3 et 4 :

$$2 \times (1+2+3) = 3 \times (3+1) .$$

De même, au niveau n :

$$2 \times (1+2+\ldots+n) = n\,(n+1) .$$

D'où : $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.



26 Stockage d'une production

1 Une augmentation de 12 % se traduit par une suite géométrique de raison 1,12 .

Donc le 8e mois, la production est :

$900 \times 1{,}12^8 \approx 2\,228$ kg .

2 On calcule la somme du stock et des productions du 1er au 8e mois :

$$900 + 900 \times 1{,}12 + 900 \times 1{,}12^2 + \ldots + 900 \times 1{,}12^8$$
$$= 900 \times (1 + 1{,}12 + 1{,}12^2 + \ldots + 1{,}12^8)$$
$$= 900 \times \frac{1-1{,}12^9}{1-1{,}12} \approx 13\,298 > 10\,000 .$$

L'entreprise pourra honorer sa commande en huit mois.

27 Somme de rebonds

1 À chaque rebond, la hauteur maximale atteinte par la balle diminue de 20 % , donc elle est multipliée par 0,8. Soit h_n la hauteur maximale atteinte par la balle au rebond n,

– au premier rebond, $h_1 = 0{,}8$;

– au deuxième rebond, $h_2 = 0{,}64$.

2 **a.** La suite (h_n) est géométrique de raison 0,8 et de terme initial $h_0 = 1$.

Pour tout entier n , $h_n = 0{,}8^n$.

On résout $h_n < 0{,}06$ à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $n \geqslant 13$.

b. La distance parcourue par la balle au n-ième rebond est égale à $2h_n$. La distance totale parcourue jusqu'au dixième rebond est :

$$D = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_9 = 2\left(h_0 \times \frac{1-0{,}8^{10}}{1-0{,}8}\right) - h_0$$
$$= 10\,(1-0{,}8^{10}) - 1$$

$D \approx 7{,}926$ m .

28 Calculs techniques

a. $S_1 = 1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^{20} = \dfrac{1{,}1^{21}-1}{1{,}1-1}$

$S_1 \approx 64{,}002$.

b. $S_2 = 1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \ldots + 0{,}98^{12} = \dfrac{1-0{,}98^{13}}{1-0{,}98}$

$S_2 \approx 11{,}549$.

c. $S_3 = 1{,}03 + 1{,}03^2 + \ldots + 1{,}03^7 = 1{,}03 \times \dfrac{1{,}03^8-1}{1{,}03-1}$

$S_3 \approx 7{,}892$.

29 Encore des sommes

a. $S_1 = 2 + 2 \times 0{,}8 + 2 \times 0{,}8^2 + \ldots + 2 \times 0{,}8^{45}$

$$= 2 \times \frac{1-0{,}8^{46}}{1-0{,}8} = 10(1-0{,}8^{46}) .$$

$S_1 \approx 10$.

b. $S_2 = 100 + 100 \times 1{,}01 + 100 \times 1{,}01^2 + \ldots + 100 \times 1{,}01^{12}$

$$= 100 \times \frac{1{,}01^{13}-1}{1{,}01-1} = 10\,000(1{,}01^{13}-1) .$$

$S_2 \approx 1381$.

30 En fonction de n

a. $S_1 = 1 + 1{,}5 + 1{,}5^2 + \ldots + 1{,}5^{n-1}$

$$= \frac{1{,}5^n - 1}{1{,}5-1} = 2\,(1{,}5^n - 1) .$$

b. $S_2 = 3 + 3 \times 0{,}9 + 3 \times 0{,}9^2 + \ldots + 3 \times 0{,}9^n$

$$= 3 \times \frac{1-0{,}9^{n+1}}{1-0{,}9} = 30\,(1-0{,}9^{n+1}) .$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

31 Somme de salaires

1 Pour tout entier n, on note S_n le salaire mensuel d'Alice l'année $2012+n$.
À chaque 1er janvier, à partir de 2013 pour 10 ans, son salaire mensuel augmente de 3 %. Il est donc multiplié par 1,03, donc la suite (S_n) est géométrique de raison 1,03 et de terme initial $S_0 = 1\,500$.
Pour tout entier n, $S_n = 1\,500 \times 1{,}03^n$.

2 a. Le salaire mensuel d'Alice en 2013 est $S_1 = 1\,545$ €.
Le salaire mensuel d'Alice en 2014 est $S_2 = 1\,591{,}35$ €.

b. Le salaire total en 2012 est : $12 \times 1\,500 = 18\,000$ € ;
en 2013 : $12 \times 1\,545 = 18\,540$ € ;
en 2014 : $12 \times 1\,597{,}35 = 19\,096{,}20$ €.

3 a. On résout $1\,500 \times 1{,}03^n > 2\,000$ à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $n \geqslant 10$; donc $p = 10$.

b. Le salaire total perçu par Alice depuis le 1er janvier 2012 jusqu'au 1er janvier $2012+p$ exclu est égal à :
$S = 12 \times S_0 + 12 \times S_1 + 12 \times S_2 + \ldots + 12 \times S_9$

$$= 12 \times 1\,500 \times \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} \quad S \approx 206\,350 \text{ €}.$$

32 La légende du jeu d'échec

Sur la première case du jeu, on dépose un grain de riz, puis le double sur la deuxième case et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains.

1 Le nombre de grains de riz que l'empereur s'engage à donner à Sissa est égal

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

soit environ 18×10^{18} grains, c'est-à-dire dix-huit milliards de milliards !

2 1 kg correspond à 3 000 grains donc, 18×10^{18} grains pèsent $\dfrac{18 \times 10^{18}}{3\,000} \approx 6 \times 10^{15}$ kg

ou encore : 6×10^{12} tonnes, ce qui représente plus de 10 000 fois la production mondiale annuelle de riz.

33 Comparaison de suites

1 a. Les deux suites (V_n) et (A_n) modélisent les consommations annuelles de vin en France en $1970+n$.
La consommation de vins courants a diminué de 4 % donc, elle est multipliée par 0,96 chaque année. La suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de terme initial $V_0 = 95$. Pour tout entier n, $V_n = 95 \times 0{,}96^n$.
Celle de vins AOC a augmenté de 4 % donc, elle est multipliée par 1,04 chaque année.
La suite (A_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de terme initial $A_0 = 8$. Pour tout entier n, $A_n = 8 \times 1{,}04^n$.

b. En 1990, $n = 20$. $V_{20} \approx 42$ L et $A_{20} = 17{,}5$ L.

2 a. $R_0 = \dfrac{95}{8} = 11{,}875$ et pour tout entier n,

$$R_n = \frac{95 \times 0{,}96^n}{8 \times 1{,}04^n} = 11{,}875 \times \left(\frac{12}{13}\right)^n.$$

La suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{12}{13}$ et de terme initial $R_0 = 11{,}875$.

b. En 2010, $n = 40$, $R_{40} \approx 0{,}483$.

3 On résout $V_n < A_n \Leftrightarrow 95 \times 0{,}96^n \Leftrightarrow 8 \times 1{,}04^n \Leftrightarrow R_n < 1$.
On trouve $n \geqslant 31$, soit $p = 31$.

34 Suite et calcul formel

1 a. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,05 et de terme initial 100.

b. Somme des 11 premiers termes $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

c. $u_0 + u_1 + \ldots + u_p = 100 \times \dfrac{1{,}05^{p+1} - 1}{1{,}05 - 1} = 2\,000(1{,}05^{p+1} - 1)$

$$= 2\,000 \times 1{,}05^{p+1} - 2\,000$$
$$= 2\,000 \times 1{,}05 \times 1{,}05^p - 2\,000$$
$$= 2\,100 \times 1{,}05^p - 2\,000.$$

2 $V = u_0 + u_1 + \ldots + u_{11} = 2\,000 \times 1{,}05^{12} - 2\,000$
soit $V \approx 1\,592$ tonnes.

35 L'œil d'Horus ou l'Oudjat

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6$. La partie manquante est $\left(\frac{1}{2}\right)^6$.

2 Sens de variation et limite

36 Vrai ou faux ?

1 Vrai : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$.
La différence entre 2 termes consécutifs est négative : la suite (u_n) est strictement décroissante.

Autre méthode :
Pour tout entier n, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, strictement négatif, la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $n < n+1$, alors $f(n) > f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

2 Vrai : La fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$; $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$ donc la suite (v_n) est monotone.

3 Vrai : La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.
Donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $n < n+1$, alors $f(n) < f(n+1)$ c'est-à-dire $w_n < w_{n+1}$: la suite (w_n) est strictement croissante.

37 QCM

1 c. $+\infty$. **2 a.** 0. **3 a.** $\dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

38 Vrai ou Faux ?

1 **Faux.** Exemple $u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2 **Faux.** Exemple $u_n = -2^n$.

39 Étude des variations d'une suite

1 **a.** $u_n = 0{,}1 \times 1{,}2^n$: $0{,}1 > 0$ et $1{,}2 > 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

b. $u_n = n^2 + 2n - 1$. $f(x) = x^2 + 2x - 1$, la fonction f est une fonction trinôme du second degré, elle est croissante sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

2 **a.** $u_n = \frac{1}{2n+3}$: Pour tout entier n,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+5)}$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

b. $u_n = \frac{3n}{n+1}$. Pour tout entier n,

$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+3}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

40 Limite de q^n

1 **a.** $+\infty$; **b.** 0 ; **c.** $+\infty$.

2 A est très grand ; B est proche de 1 ; C est proche de 0 ; D est proche de 1 ; E est très grand ; F est proche de 1.

41 Limite d'une suite géométrique

a. $0{,}8 \in]0 ; 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$.

En multipliant par 1 500, on obtient que

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1\,500 \times 0{,}8^n = 0$.

b. $2{,}3 > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2{,}3^n = +\infty$.

En multipliant par 5 000, on obtient que

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5\,000 \times 2{,}3^n = +\infty$.

c. $1{,}12 > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}12^n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 1{,}12^n = +\infty$.

42 Croissance ou décroissance ?

Ugo

a. Le capital de base est de 240 000 €.

Ugo place son capital à intérêts composés au taux annuel de 5 %, mais il doit payer une taxe de 2 % du capital et en retire chaque année 2 %.

On a donc pour tout entier n, $U_{n+1} = 1{,}05\,U_n - 2 \times 0{,}02\,U_n$

$= 1{,}01\,U_n$.

La suite (U_n) est géométrique de raison 1,01 et de terme initial $U_0 = 240\,000$.

Pour tout entier n, $U_n = 240\,000 \times 1{,}01^n$

$1{,}01 > 1$ et $240\,000 > 0$, donc la suite est croissante.

b. $U_5 = 240\,000 \times 1{,}01^5$ soit $U_5 \approx 252\,242{,}41$ €.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Vic

a. Vic investit son capital dans une entreprise ce qui lui permet d'augmenter son capital de 20 % par an, mais il paye 30 % de taxes sur les intérêts acquis et utilise 14 % de son capital par an.

On a donc pour tout entier n,

$V_{n+1} = 1{,}2\,V_n - 0{,}3 \times 0{,}2\,V_n - 0{,}14\,V_n = V_n$.

b. La suite (V_n) est constante égale à $V_0 = 240\,000 = V_5$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 240\,000$.

Walid

a. Walid réalise un investissement industriel : son capital augmente ainsi de 15 % par an, mais il doit payer 10 % du capital en assurance et céder 40 % des intérêts acquis en taxes.

Pour tout entier n,

$W_{n+1} = 1{,}15\,W_n - 0{,}1\,W_n - 0{,}4 \times 0{,}15\,W_n = 0{,}99\,W_n$,

la suite est géométrique de raison 0,99 et de terme initial 240 000.

Pour tout entier n, $W_n = 240\,000 \times 0{,}99^n$.

$0 < 0{,}99 < 1$ et $240\,000 > 0$, donc la suite est décroissante.

b. $W_5 = 240\,000 \times 0{,}99^5$ soit $W_5 \approx 228\,237{,}6$ €.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

2

	A	B	C	D
1	*n*	Ugo	Vic	Walid
2	0	240000	=B2	=C2
3	=A2+1	=B2+0,05*B2-0,02*B2-0,02*B2	=C2+0,2*C2-0,3*0,2*C2-0,14*C2	=D2+0,15*D2-0,1*D2-0,4*0,15*D2

	A	B	C	D
1	*n*	Ugo	Vic	Walid
2	0	240000	240000	240000
3	1	242400	240000	237600
4	2	244824	240000	235224
5	3	247272	240000	232871,76
6	4	249745	240000	230543,042
7	5	252242	240000	228237,612

43 Loyer en augmentation

1 **a.** $u_{n+1} = u_n + 0{,}02\,u_n = 1{,}02\,u_n$.

Donc le loyer suit une suite géométrique de raison 1,02.

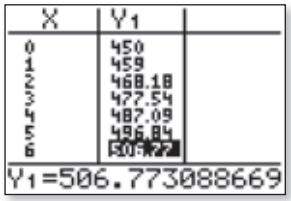
Pour tout entier n, $u_n = 450 \times 1{,}02^n$.

b. $q = 1{,}02 > 1$ et $450 > 0$, donc (u_n) est croissante.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}02^n = +\infty$, en multiplant par 450 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 450 \times 1{,}02^n = +\infty$.

2 Donc le loyer mensuel dépassera 500 € au bout de six années d'augmentation.



3 Le montant total des loyers versés en cinq ans est :

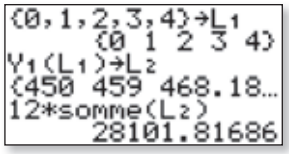
$S = 12 \times 450 + 12 \times 450 \times 1{,}02 + \ldots + 12 \times 450 \times 1{,}02^4$

$= 12 \times 450 \times (1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3 + 1{,}02^4)$

$= 5\,400 \times \frac{1 - 1{,}02^5}{1 - 1{,}02} \approx 28\,100$

soit 28 100 € au total sur 5 ans.

On peut vérifier à l'aide des listes sur la calculatrice.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

44 Déterminer un seuil

1 Soit la suite (u_n) géométrique de terme initial $u_0 = 100$ et de raison $q = 1{,}1$.
Pour tout entier n, $u_n = 100 \times 1{,}1^n$.
2 $1{,}1 > 1$ et $100 > 0$, la suite est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3 **a.** Le rang p tel que $u_p > 500$ existe, car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Dès que $u_p > 500$, la suite (u_n) étant croissante, on a pour tout entier n tel que $n > p$, $u_n > u_p > 500$.
b. On cherche, à l'aide de la calculatrice, l'entier n à partir duquel $u_n > 500$. On trouve $n \geqslant 17$, donc $p = 17$.
Reprendre les programmes de la p. 20 en entrant 100 dans U initialement.

```
Entrer Q et A
Mettre N à 0 et U à 100
Tant que U > A
  ajouter 1 à N et calculer
  le terme U suivant
Fin de Tant que
Afficher l'entier seuil

Entrer 1,1 en Q et 500 en A
```

45 Marché en valeurs à long terme

1 En 2009, en France, il s'est vendu 7,5 millions de téléviseurs au prix moyen unitaire de 500 €, donc le marché en valeurs est égal à $500 \times 7{,}5 = 375$ millions d'euros.
Entre 2009 et 2010, le prix des téléviseurs a chuté de 15 % et le volume de ventes a augmenté de 13 % donc, le marché en valeurs est égal à $500 \times 0{,}85 \times 1{,}13 \times 7{,}5$ soit 3 601,875 millions d'euros.
2 **a.** Le prix des téléviseurs chute de 15 % par an donc, il est multiplié par 0,85.
Pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n$ la suite est géométrique de raison 0,85 et de terme initial $u_0 = 500$.
Pour tout entier n, $u_n = 500 \times 0{,}85^n$.
Le volume de ventes augmente de 13 % par an donc, il est multiplié par 1,13. Pour tout entier n, $v_{n+1} = 1{,}13\,v_n$; la suite est géométrique de raison 1,13 et de terme initial $v_0 = 7{,}5$.
Pour tout entier n, $v_n = 7{,}5 \times 1{,}13^n$.
b. Pour tout entier n, $w_n = u_n \times v_n = 500 \times 0{,}85^n \times 7{,}5 \times 1{,}13^n = 3\,750 \times (0{,}85 \times 1{,}13)^n = 3\,750 \times 0{,}9605^n$.
La suite (w_n) est géométrique de raison 0,9605 et de terme initial 3 750.
c. $0 < 0{,}9605 < 1$ et $3\,750 > 0$, donc la suite est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.
3 Pour l'Allemagne, pour tout entier n, $A_{n+1} = 0{,}95 \times 1{,}13\,A_n = 1{,}0735\,A_n$.
La suite est géométrique de raison 1,0735.
$1{,}0735 > 1$ et $A_0 > 0$, donc la suite est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} A_0 = +\infty$.

46 Chiffre d'affaires

1 Avant la promotion le chiffre d'affaires est égal, en euros, à $C_0 = 2\,400 \times 15 = 36\,000$.
Le fabricant baisse le prix de 10 % et espère augmenter les ventes de 11 % donc, le chiffre d'affaires est égal, en euros, à $C_1 = 1{,}11 \times 0{,}90 \times 36\,000 = 35\,964$.
2 **a.** Pour tout entier n, $C_{n+1} = 1{,}11 \times 0{,}90\,C_n = 0{,}999\,C_n$.
La suite (C_n) est une suite géométrique de raison 0,999 et de terme initial $C_0 = 2\,400 \times 15 = 36\,000$.
Pour tout entier n, $C_n = 36\,000 \times 0{,}999^n$.
$0 < 0{,}999 < 1$ et $36\,000 > 0$, donc la suite est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 0$.
Donc le fabricant ferait mieux d'abandonner son idée.
b. $C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 36\,000 \times \dfrac{1 - 0{,}999^5}{1 - 0{,}999}$
$= 179\,640{,}3598$.

47 Dépréciation d'une machine

1 **a** À partir de 2010, la baisse annuelle de la valeur de la machine est de 15 %, elle est donc multipliée par 0,85.
On note v_n la valeur estimée de la machine au bout de n années de fonctionnement à partir de 2010. Pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}85\,v_n$. La suite est géométrique de raison 0,85 et de terme initial $v_0 = 220\,000$.
b. Pour tout entier n, $v_n = 220\,000 \times 0{,}85^n$.
c. En 2015, $n = 5$, $v_5 \approx 97\,615$ €.
2 $220\,000 > 0$ et $0 < 0{,}85 < 1$, donc la suite (v_n) est décroissante.
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
La machine perd de sa valeur au cours du temps et se rapproche de 0.
3 À l'aide de la calculatrice, on résout :
$220\,000 \times 0{,}85^n < 50\,000$. On trouve $n \geqslant 10$.

48 Injection de médicament

Le volume de médicament contenu dans le corps diminue de 8 % par heure.
1 Au bout d'une heure, $2 \times 0{,}92 = 1{,}84$ cm^3.
Au bout de deux heures, $1{,}84 \times 0{,}92 \approx 1{,}693$ cm^3.
2 **a.** Pour tout entier n, on note v_n le volume de médicament présent dans le sang du malade au bout de n heures. Ce volume diminue de 8 % chaque heure donc, il est multiplié par 0,92.
Pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}92\,v_n$. La suite est géométrique de raison 0,92 et de terme initial $v_0 = 2$.
Pour tout entier n, $v_n = 2 \times 0{,}92^n$.
b. $2 > 0$ et $0 < 0{,}92 < 1$, donc la suite est décroissante et de limite nulle. Le volume de médicament contenu dans le corps disparait à long terme.
3 On cherche l'entier n à partir duquel $v_n < 1$, à l'aide de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 9$.
Pour $v_n \leqslant 0{,}5$, on trouve $n \geqslant 17$.
Pour $v_n \leqslant 0{,}001$, on trouve $n \geqslant 92$.

```
Entrer Q et A
Mettre N à 0 et U à 2
Tant que U > A
  ajouter 1 à N et calculer
  le terme U suivant
Fin de Tant que
Afficher l'entier seuil
```

Reprendre les programmes de la page 20 en entrant 2 dans U initialement.
Entrer 0,92 en Q puis pour chacun des programmes, dans A : 1 ; 0,5 ; 0,001

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 Suite arithmético-géométrique

49 QCM

1 b. $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100}u_n + 100$
$= 1{,}03u_n + 100$.

2 c. $u_2 = 1\,263{,}90$.

3 a. (voir ci-contre).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1000
3	1	1130
4	2	1263,9
5	3	1401,817
6	4	1543,872
7	5	1690,188

50 Modélisation correcte ou non ?

a. correcte.

b. incorrecte :

$u_{n+1} = 1{,}05\,u_n - 0{,}02\,u_n - 50 = 1{,}03\,u_n - 50$.

51 Trouver une formule de récurrence

a. $u_0 = 10\,000$. Pour tout entier n :

$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n - 2\,000 + 300 = 1{,}05\,u_n - 1\,700$.

$u_1 = 1{,}05 \times u_0 - 1\,700 = 1{,}05 \times 10\,000 - 1\,700 = 8\,800$.
$u_2 = 1{,}05 \times u_1 - 1\,700 = 1{,}05 \times 8\,800 - 1\,700 = 7\,540$.
De même, $u_3 = 6\,217$ et $u_4 \approx 4\,828$.

b. $u_0 = 5\,000$. Pour tout entier n :

$u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100}u_n - 500 = 1{,}03u_n - 500$.

$u_1 = 1{,}03 \times u_0 - 500 = 1{,}03 \times 5\,000 - 500 = 4\,650$.
$u_2 = 1{,}03 \times u_1 - 500 = 1{,}03 \times 4\,650 - 500 = 4\,289{,}50$.
De même, $u_3 \approx 3\,918{,}19$ et $u_4 \approx 3\,535{,}73$.

c. $u_0 = 60$. Pour tout entier n :

$u_{n+1} = u_n - \frac{3}{100}u_n - \frac{15}{100}u_n + 4{,}3 = 0{,}82\,u_n + 4{,}3$.

$u_1 = 0{,}82 \times u_0 + 4{,}3 = 0{,}82 \times 60 + 4{,}3 = 53{,}5$.
$u_2 = 0{,}82 \times u_1 + 4{,}3 = 0{,}82 \times 53{,}5 + 4{,}3 = 48{,}17$.
De même, $u_3 \approx 43{,}799$ et $u_4 \approx 40{,}216$.

52 Calcul de premiers termes avec tableur

1 a. Soit la surface S_n envahie par les mauvaises herbes le mois n. Elle augmente de 50 % et s'agrandit de 140 m² donc, pour tout entier n,
$S_{n+1} = S_n + 0{,}5\,S_n + 140$

	A	B
1	n	S_n
2	0	600
3	1	1040
4	2	1760
5	3	2840
6	4	4460
7	5	6890

b. Pour tout entier n,
$S_{n+1} = 1{,}5\,S_n + 140$
$S_0 = 6\,000 \times 0{,}10 = 600$.

c. Voir tableau ci-contre.

2 a.



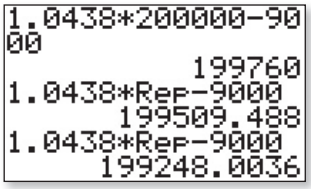
b. À chaque mois de traitement, la surface envahie, à ce mois, par les mauvaises herbes diminuent de 30 % donc est multipliée par 0,7.

	A	B	C
1	n	S_n	après traitement
2	0	600	600
3	1	1040	728
4	2	1760	1232
5	3	2840	1988
6	4	4460	3122
7	5	6890	4823

$S'_4 = 4\,460 \times 0{,}7 = 3\,122$ m².

53 Calcul de premiers termes

1 a. On note C_n le capital d'Arthur au bout de n années de placement et retrait.
Arthur trouve un placement au taux de 6 %.



Mais il doit payer 27 % des intérêts acquis en impôts et retire chaque année 9 000 €. Le capital est donc multiplié par 1,06 puis augmenté de 9 000.
$C_0 = 200\,000$.
$C_1 = 1{,}06\,C_0 - 0{,}27 \times 0{,}06 \times C_0 - 9\,000$
$= 1{,}0438 \times C_0 - 9\,000$.

b. $C_1 = 199\,760$; $C_2 = 199\,509{,}488$; $C_3 = 199\,248{,}0036$; $C_4 = 198\,975{,}0661$



2 Soit k la somme retirée, $C_1 = 1{,}0438 \times 200\,000 - k$
$= 200\,000 \Leftrightarrow k = 8\,750$.

54 Suite auxiliaire géométrique

a. $u_0 = 10$ et pour tout entier n :
$u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $v_n = u_n - 1$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2(u_n - 1) = 2v_n$
la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

b. $u_0 = 500$ et pour tout entier n :
$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100$ et $v_n = u_n - 2\,000$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0{,}95u_n + 100 - 2\,000$
$= 0{,}95u_n - 1\,900 = 0{,}95(u_n - 2\,000)$
$v_{n+1} = 0{,}95v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$.

55 Étude d'une clientèle

1 a. $u_2 = 8\,000 \times 0{,}7 + 3\,000 = 8\,600$;
$u_3 = 8\,600 \times 0{,}7 + 3\,000 = 9\,020$.

b. u_n est le nombre de clients au cours du n-ième mois. Le mois suivant, il y a alors $0{,}7 \times u_n$ de clients fidèles et 3 000 nouveaux clients. Donc $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 3\,000$.
Or $u_2 - u_1 = 600$ et $u_3 - u_2 = 420$: la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.
$\frac{u_2}{u_1} = 1{,}075$ et $\frac{u_3}{u_2} \approx 1{,}049$: la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2 a. Pour tout entier n :
$v_{n+1} = 10\,000 - u_{n+1} = 10\,000 - (0{,}7\,u_n + 3\,000)$
$= 7\,000 - 0{,}7\,u_n = 0{,}7(10\,000 - u_n)$.
Donc $v_{n+1} = 0{,}7v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,7 et de terme initial $v_1 = 10\,000 - u_1 = 2\,000$.
Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = 2\,000 \times 0{,}7^{n-1}$.

b. Comme $v_n = 10\,000 - u_n$, on a :
$u_n = 10\,000 - v_n = 10\,000 - 2\,000 \times 0{,}7^{n-1}$.

3 $u_{12} = 10\,000 - 2\,000 \times 0{,}7^{12-1} \approx 9\,960$.
Selon ce modèle, il y aura 9 960 clients le 12e mois de l'enquête.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

56 Retraits sur un compte bancaire

Pour tout entier n, on note u_n le solde du compte de Léo au 2 janvier de l'année $2000+n$, en euros.
Au 1er janvier 2000, Ainsi $u_0 = 1\,000$.
Léo a placé 1 000 € sur son compte rémunéré à intérêts composés à 2 % par an. À partir de 2011, Léo a retiré 100 € à chaque 1er janvier.

1 **a.** $u_1 = 1\,000 \times 1{,}02 - 100 = 920$
$u_2 = 920 \times 1{,}02 - 100 = 838{,}40$.

n	u(n)
0	1000
1	920
2	838.4
3	755.17
4	670.27
5	583.68
6	495.35

n=0

b. Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times 1{,}02 - 100$.
c. Voir ci-contre.
d. La suite semble être décroissante.

2 Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 5\,000$.
a. $v_0 = -4\,000$.
b. Pour tout entier n :
$u_{n+1} = 1{,}02u_n - 100$ et $v_n = u_n - 5\,000$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 5\,000 = 1{,}02u_n - 100 - 5\,000$
$= 1{,}02u_n - 5\,100 = 1{,}02(u_n - 5\,000)$.
Pour tout entier n, $v_{n+1} = 1{,}02v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$.
Pour tout entier n :
$v_n = -4\,000 \times 1{,}02^n$ et $u_n = 5\,000 - 4\,000 \times 1{,}02^n$.

3 **a.** En 2010, $n = 10$, $u_{10} \approx 124{,}02$ €.
b. $v_n < 0$, pour $n \geqslant 12$, donc, à partir de 2012.

57 Autres retraits

Matéo place 5 000 € sur son compte rémunéré à intérêts composés à 4,5 % par an. À partir de 2011, il retire 360 € à chaque 1er janvier.

1 Pour tout entier n :
$u_{n+1} = 1{,}045 \times u_n - 360$ et $u_0 = 5\,000$.

2 Pour tout entier n, $v_n = 8\,000 - u_n$
$v_{n+1} = 8\,000 - u_{n+1} = 8\,000 - 1{,}045 \times u_n + 360$
$= -1{,}045u_n + 8\,360 = 1{,}045(8\,000 - u_n)$.
Pour tout entier n, $v_{n+1} = 1{,}045v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}045$ et de terme initial $v_0 = 3\,000$.
Pour tout entier n :
$v_n = 3\,000 \times 1{,}045^n$ et $u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 1{,}045^n$.
En 2020, $n = 10$, $u_{10} \approx 3\,341{,}09$ €.

58 Versements sur un compte rémunéré

Armel place 2 000 € sur son compte rémunéré à intérêts composés à 4 % par an et à partir de 2012, verse 2 000 € à chaque 1er janvier.

1 **a.** $u_1 = 1{,}04 \times 2\,000 + 2\,000 = 4\,080$.
$u_2 \approx 6243{,}20$; $u_3 \approx 8\,492{,}93$
b. Pour tout entier n :
$u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 2\,000$ et $u_0 = 2\,000$.

2 Pour tout entier n, $v_n = u_n + 50\,000$
a. $v_0 = 52\,000$; $v_1 = 54\,080$; $v_2 = 56\,249{,}20$; $v_3 = 58\,492{,}93$.
b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 50\,000 = 1{,}04 \times u_n + 2\,000 + 50\,000$
$= 1{,}04u_n + 52\,000$
$= 1{,}04(u_n + 50\,000)$.
Pour tout entier, $v_{n+1} = 1{,}04v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de terme initial $v_0 = 52\,000$.
Pour tout entier n, $v_n = 52\,000 \times 1{,}04^n$.
c. Pour tout entier n, $u_n = 52\,000 \times 1{,}04^n - 50\,000$.

3 On résout à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, $52\,000 \times 1{,}04^n - 50\,000 > 15\,000$. On trouve $n \geqslant 6$.

59 Déterminer un seuil

On donne l'algorithme et les programmes de la question **2** :

```
Stocker 0 dans N et 300 dans U
TantQue U ≤ 600 faire
  Stocker N+1 dans N
  Stocker 1,04 × U + 13 dans U
FinTantQue
Afficher N
```

D'où les programmes :

Casio

```
======EXO59 ====
0→N
300→U
While U≤600
N+1→N
1.04×U+13→U
WhileEnd
N
```

TI™

```
PROGRAM:EXO59
:0→N
:300→U
:While U≤600
:N+1→N
:1.04*U+13→U
:End
:Disp N
```

On exécute le programme. Les chardons auront envahi plus de 600 m² de jardin au bout de 10 semaines.

```
prgmEXO59
                10
              Done
```

60 Prévision et comportement à l'infini

1 Le service commercial perd 50 % des abonnés chaque année, donc le nombre d'abonnés est multiplié par 0,5 et il enregistre 1 000 nouveaux abonnés donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1000$.

2 La suite (u_n) semble être décroissante, et de limite 2 000.

3 Pour tout entier n, $v_n = u_n - 2\,000$ donc,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0{,}5\,u_n + 1000 - 2\,000$
$= 0{,}5\,u_n - 1\,000 = 0{,}5\,(u_n - 2\,000) = 0{,}5\,v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,000 = 4\,000 - 2\,000 = 2\,000$.
Pour tout entier n, $v_n = 2\,000 \times 0{,}5^n$, donc
$u_n = 2\,000 \times 0{,}5^n + 2\,000$.

4 **a.** Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = 2\,000\,(0{,}5^{n+1} - 0{,}5^n) = 2\,000 \times 0{,}5^n\,(0{,}5 - 1)$
$= -1\,000 \times 0{,}5^n$.
b. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite est décroissante.
Le nombre d'abonnés diminue au cours du temps.

5 $0 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\,000 \times 0{,}5^n = 0$. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2\,000$.
À long terme, le nombre d'abonnés diminue sans descendre en dessous de 2 000.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Accompagnement personnalisé (p. 30)

Exercice guidé

61 **1** $T_1 = 20\,000 - \frac{1}{100} \times 20\,000 = 20\,000 - 200 = 19\,800$

$T_2 = 19\,800 - 0{,}01 \times 19\,800 = 19\,602$

et $T_3 = 19\,602 - 0{,}01 \times 19\,602 = 19\,405{,}98$.

2 **a.** Pour tout entier n, $T_{n+1} = T_n - 0{,}01\,T_n = 0{,}99\,T_n$.

Donc la suite (T_n) est géométrique de raison 0,99 et de terme initial $T_0 = 20\,000$. Donc $T_n = 20\,000 \times 0{,}99^n$.

b. 2008 correspond à $n = 58$.

$T_{58} = 20\,000 \times 0{,}99^{58} \approx 11\,165$ tonnes.

3 On calcule : $S_n = T_0 + T_1 + \ldots + T_n$.

$S_n = 20\,000 + 20\,000 \times 0{,}99 + \ldots + 20\,000 \times 0{,}99^n$

$= 20\,000 \times (1 + 0{,}99 + \ldots + 0{,}99^n)$

$= 20\,000 \times \frac{1 - 0{,}99^{n+1}}{1 - 0{,}99} = 2\,000\,000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})$.

4 Le filon sera épuisé lorsque $S_n \geqslant 1\,000\,000$, c'est-à-dire $1 - 0{,}99^{n+1} \geqslant 0{,}5$, ou encore $0{,}99^{n+1} \leqslant 0{,}5$.

On tabule $0{,}99^{n+1}$ à la calculatrice, par pas de 1.

X	Y1
62	.53091
63	.5256
64	.52034
65	.51514
66	.50999
67	.50489
68	.49984

Y1 = 0.99^(X+1)

Le filon sera épuisé lorsque $n = 68$, soit en 2018.

Revoir les outils de base

62 Savoir distinguer variation absolue et variation relative

1 La valeur finale est $V_F = 7{,}8$; la variation absolue est égale, en million, à 0,75. La valeur de départ est donc, $7{,}8 - 0{,}75 = 7{,}05$.

La variation relative est le quotient $\frac{\text{variation absolue}}{V_D} = \frac{0{,}75}{7{,}05} = \frac{5}{47}$ soit environ 0,1064 c'est-à-dire, exprimée en pourcentage, 10,64 %.

2 **a.** Le nombre de voitures immatriculées à Pékin est égal, en millions, à : $7{,}8 + 0{,}75 = 8{,}55$.

b. Le nombre de voitures immatriculées à Pékin est égal, en millions, à : $7{,}8 \times 1{,}1064 = 8{,}62992$ soit environ 8,63 millions.

3 Le taux d'évolution est de 24 % donc le nombre de ventes de véhicules tout terrain a été multiplié par 1,24 entre 2009 et 2010. Soit V_D le nombre de ventes en 2009, $V_D \times 1{,}24 = 850\,000$.

Donc, $V_D = \frac{850\,000}{1{,}24}$ soit environ 685 484 ventes.

63 Savoir si une suite numérique peut être arithmétique ou géométrique

1 $12{,}7 - 11{,}4 = 1{,}3$; $14 - 12{,}7 = 1{,}3$; il est possible que ces termes soient les premiers termes d'une suite arithmétique.

2 $54 - 90 = -36$; $32{,}4 - 54 = -21{,}6$; la suite n'est pas arithmétique.

$\frac{54}{90} = 0{,}6$; $\frac{32{,}4}{54} = 0{,}6$. Il est possible que ces termes soient les premiers termes d'une suite géométrique.

3 Les coefficients multiplicateurs ne sont pas égaux, donc la suite n'est pas géométrique.

64 Savoir calculer des capitaux placés à intérêts simples ou composés

1 **b.** Chaque année, les intérêts sont toujours égaux à 2,3 % du capital initial.

$\frac{2{,}3}{100} \times 5\,000 = 115$, soit 115 € par an.

Ils sont ajoutés au capital à la fin de chaque année : le capital acquis est donc modélisé par une suite arithmétique de raison 115.

2 **a.** Chaque année, les intérêts sont égaux à 2,3 % du capital placé durant l'année en cours.

$I_n = \frac{2{,}3}{100} \times C_n$. Donc $C_{n+1} = C_n + 0{,}023 \times C_n = 1{,}023\,C_n$.

Le capital est donc modélisé par une suite géométrique de raison 1,023.

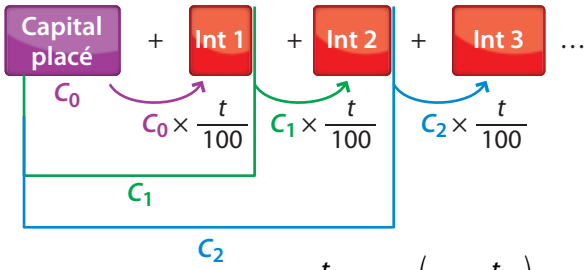
3 **b.** Le coefficient multiplicateur associé à un placement à taux mensuel de 1,6 % sur une durée d'un an est :

$$CM_{\text{global}} = \left(1 + \frac{1{,}6}{100}\right)^{12} \approx 1{,}2098.$$

Le taux associé est :

$$t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1 \approx 0{,}2098, \text{ soit} \approx 21\ \%.$$

Schéma explicité



On a donc : $C_1 = C_0 + C_0 \times \frac{t}{100} = C_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Intérêts I_1

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

$C_2 = C_1 + C_1 \times \frac{t}{100} = C_1\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

Intérêts I_2

On obtient donc, les termes d'une suite géométrique de raison $q = 1+\frac{t}{100}$ et de terme initial C_0.

65 Savoir traduire une situation par une relation de récurrence

a. $u_{n+1} = 1{,}20u_n - 10$; $u_0 = 100$.

b. $u_{n+1} = 0{,}92\ u_n + 5$; $u_0 = 50$.

c. $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 0{,}30 \times 0{,}20u_n + 5$: $u_0 = 2\,000$.

Pour aller plus loin

66 Modéliser

Soit u_n la longueur du côté d'un carré à l'étape n.

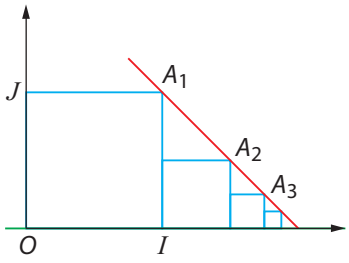
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ et $u_0 = 1$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_0 = 1$.

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

On définit un repère orthogonal, (O, I, J), et on étudie les sommets des carrés, les points $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$. Pour tout entier n, le point A_n a pour coordonnées $(S_n ; u_n)$.



Or, $S_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - u_n \Leftrightarrow u_n = 2 - S_n$. Les points A_n sont alignés sur la droite d'équation $y = -x+2$.

Lorsque n devient très grand, les points se rapprochent du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

On visualise ainsi la limite de la suite (S_n) égale à 2, ainsi que la limite nulle de la suite (u_n).

67 Raisonner, chercher

1

B4 | =B3+B2

	A	B	C
1	n	F_n	quotient
2	0	1	
3	1	1	1
4	2	2	2
5	3	3	1,5
6	4	5	1,666666667
7	5	8	1,6
8	6	13	1,625
9	7	21	1,615384615
10	8	34	1,619047619
11	9	55	1,617647059
12	10	89	1,618181818
13	11	144	1,617977528
14	12	233	1,618055556
15	13	377	1,618025751
16	14	610	1,618037135

2 **a.** Un carré est construit sur deux côtés des carrés précédents donc, la longueur de son côté est la somme des longueurs des côtés des deux carrés précédents.

b. Pour tout entier n,

$\Phi_{n+1} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1+\frac{F_n}{F_{n+1}} = 1+\frac{1}{\Phi_n}$

$x = 1+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = 5$;

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x_1 < 0$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 > 0$

Donc, comme $\Phi > 0$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Φ est le nombre d'Or.

3 Voir ci-contre et dessin.

n	S rouge $_n$	S bleue $_n$
0	6	18
1	9	30
2	15	48
3	24	78
4	39	126
5	63	204
6	102	330
7	165	534
8	267	864
9	432	1398
10	699	2262
11	1131	3660
12	1830	5922
13	2961	9582
14	4791	15504
15	7752	25086

68 Démontrer

1 Pour tout réel q, tel que $0 < q < 1$, on peut multiplier les termes de l'inégalité par le nombre réel $q > 0$, donc $0 < q^2 < q < 1$. On multiplie de nouveau par le nombre réel $q > 0$,

$0 < q^3 < q^2 < q < 1$ et de proche en proche on obtient pour tout nombre entier n :

$0 < q^n < q^{n-1} < q^{n-2} < \ldots < q^2 < q < 1$.

2 Si $u_0 < u_1$ et $q > 0$,

$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = q^n(qu_0 - u_0) = q^n(u_1 - u_0)$.

$u_1 - u_0 > 0$, donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$; donc la suite (u_n) est croissante.

Si $u_0 > u_1$ et $q > 0$:

$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = q^n(qu_0 - u_0) = q^n(u_1 - u_0)$.

Or $u_1 - u_0 < 0$ et $q^n > 0$, donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

69 À la recherche d'une généralisation

a. Pour tout entier n :

$u_{n+1} = qu_n + a$ et $v_n = u_n - \ell$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = qu_n + a - \ell = q\left(u_n + \frac{a-\ell}{q}\right)$. q non nul.

Or, $\ell = q\ell + a \Leftrightarrow \frac{(a-\ell)}{q} = -\ell$

donc, $v_{n+1} = q(u_n - \ell) = qv_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison q.

b. Pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = (u_0 - \ell)q^n$

d'où $u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)q^n + \ell$.

c. Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réussir au Bac

70 Évolution comparée de deux populations

1 Pour tout entier n, on note respectivement a_n et b_n les populations des villes A et B au bout de n années.
Les projections pour les prochaines années prévoient les évolutions suivantes :
Pour la ville A, une diminution annuelle de 3 %, donc la population est multipliée par 0,97 chaque année ; donc la suite (a_n) est géométrique de raison 0,97 et de terme initial $a_0 = 200\,000$.
Pour la ville B, une augmentation annuelle de 5 %, la population est multipliée par 1,05 chaque année ; donc la suite (b_n) est géométrique de raison 1,05 et de terme initial $b_0 = 150\,000$.

2 Pour tout entier n :
$a_n = 200\,000 \times 0{,}97^n$ et $b_n = 150\,000 \times 1{,}05^n$.

3 À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient, pour tout $n \geqslant 4$, $a_n < b_n$.

71 Comparaison de deux modèles

Question préliminaire

a. Les émissions de CO_2 seront, par rapport à celles en 1990, multipliées par 0,75 en 2020, par 0,6 en 2030, par 0,4 en 2040 et par 0,2 en 2050.

1990	2008	2020	2030	2040	2050
563,9	527,0	422,925	338,34	225,56	112,78

b. $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ et $\frac{c}{a} = 0{,}5$, la progression n'est pas géométrique.
$b - a = -112{,}78$ et $c - b = -112{,}78$, la progression est arithmétique.

1 Premier modèle

On suppose que la baisse annuelle de 10 Mtep constatée entre 2006 et 2008 se maintient dans les années à venir. On note u_n les émissions de GES, en France en Mtep de CO_2 en $2008 + n$.

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison -10 et de terme initial $u_0 = 527$.

b. Pour tout entier n, $u_n = 527 - 10n$.
En 2050, $n = 42$, les quantités de CO_2 émises en Mtep, seront égales à $u_{42} = 527 - 420 = 107$.
L'objectif est donc atteint.

2 Second modèle

On suppose que la baisse, d'environ 2 % par an entre 2006 et 2008, se maintient dans les années à venir. On note v_n les émissions de GES, en France en Mtep de CO_2, en $2008 + n$ suivant ce modèle.

a. Les quantités émises sont donc multipliées par 0,98 chaque année. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de terme initial $v_0 = 527$.

b. Pour tout entier n, $v_n = 527 \times 0{,}98^n$.
En 2050, $n = 42$, les quantités de CO_2 émises en Mtep, seront égales à $v_{42} = 527 \times 0{,}98^{42} = 225{,}58$.
L'objectif ne sera pas atteint.

c. En 2020, $n = 12$, $v_{12} = 527 \times 0{,}98^{12} = 413{,}55$:
Objectif atteint.
En 2030, $n = 22$, $v_{12} = 527 \times 0{,}98^{22} = 337{,}90$:
Objectif atteint.

3 Critique d'un modèle

a. Pour le premier modèle en 2061, $n = 53$,
$u_{53} = 527 + 12 \times 53 = -3$ résultat négatif.
Ce modèle n'est pas valable à long terme.

b. Pour le second modèle, $0 < 0{,}98 < 1$, donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $v_n < 112{,}78$ pour $n \geqslant 77$, soit en 2085.

72 Capital placé à intérêts composés

Hélène dispose d'un capital de 15 000 € qu'elle place à intérêts composés au taux annuel de 2,25 %.
Son capital est donc, multiplié par 1,0225 chaque année.

1 Au bout d'un an, le capital en euros est égal à :
$15\,000 \times 1{,}0225 = 15\,337{,}50$.
Au bout de deux ans, le capital en euros est égal à $15\,337{,}50 \times 1{,}0225 \approx 15\,632{,}59$.

2 a. Le capital est multiplié chaque année par 1,0225 donc la suite (C_n) est géométrique de raison 1, 0225 et de terme initial $C_0 = 15\,000$.
Pour tout entier n, $C_n = 15\,000 \times 1{,}0225^n$.

b. $1{,}0225 > 1$ et $15\,000 > 0$ donc la suite (C_n) est croissante et de limite infinie.

3 L'instruction stocker C*2,25/100 dans C est incorrecte. Il faut écrire : stocker C + C*2,25/100 dans C ou stocker C*1,0225 dans C.
À l'aide de ce programme, si S prend la valeur 30 000, alors on obtient $C > 30\,0000$ pour $n \geqslant 32$.
Si S prend la valeur 50 000, alors on obtient $C > 50\,000$ pour $n \geqslant 59$.

73 Sommes et calcul formel

1 a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la location mensuelle, selon le contrat A, et b_n selon le contrat B, pour la n-ième année d'utilisation.

• Contrat A :
Augmentation de la location mensuelle de 6 € à chaque premier janvier. La suite (a_n) est arithmétique de raison 6 et de terme initial $a_1 = 150$.
Pour tout entier n, $a_n = 150 + 6(n - 1) = 144 + 6n$.

• Contrat B :

2 a. Augmentation de la location mensuelle de 4 % à chaque premier janvier. Le montant de la location est donc multiplié par 1,04 chaque mois. La suite (b_n) est géométrique de raison 1,04 et de terme initial $b_1 = 150$.
Pour tout entier n, $b_n = 150 \times 1{,}04^{n-1}$.

b. Le coût annuel au bout de 5 ans est, pour le contrat A, $A_5 = 12 \times a_5 = 12 \times 174 = 2\,088$.
Pour le contrat B, $B_5 = 12 \times b_5 = 12 \times 175{,}48 = 2\,105{,}75$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 a. $A_5 = 3 \times 5^2 + 147 \times 5$, soit 810 €.

b. $B_5 = 150 \times \dfrac{1{,}04^5 - 1}{1{,}04 - 1} = 3\,750(1{,}04^5 - 1)$ soit environ 812,45 €.

c. Pour le contrat A, le montant total déboursé, en euros, est égal à $12 \times A_5 = 9\,720$. Pour le contrat B, le montant total déboursé, en euros, est égal à $12 \times B_5$ soit environ 9 749 €. Ces montants sont inférieurs au prix au comptant de ce piano.

74 Un jeu de fou

Gain pour un mois de n jours : $300\,000 \times n$.

On a donné après n jours :

$0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}04 + \ldots + 2^{n-1} \times 0{,}01 = 0{,}01 \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$

$= 0{,}01(2^n - 1)$.

Nombre de jours	Somme reçue	Somme donnée	Gain
28	8 400 000	2 684 354,55	5 715 645,45
29	8 700 000	5 368 709,11	3 331 290,89
30	9 000 000	10 737 418,2	−1 737 418,23
31	9 300 000	21 474 836,5	−12 174 836,5

75 Épargne en France

1 a. En 2000, l'épargne par habitant en France était de 2 160 € pour atteindre 3 197 € en 2010.

Le coefficient multiplicateur global est égal à $CM = \dfrac{3197}{2160}$ soit $CM \approx 1{,}48$.

Soit t le taux d'accroissement annuel moyen :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{10} = \frac{3197}{2160} \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \left(\sqrt{\frac{3197}{2160}}\right)^{1/10}.$$

$1 + \dfrac{t}{100} \approx 1{,}04$ soit un taux d'accroissement annuel moyen d'environ 4 %.

b. En 2002, le montant de l'épargne est, en euros : $2\,160 \times 1{,}04^2 \approx 2\,336{,}26$, montant inférieur à la valeur réelle 2 658 €.

c. Soit t, le taux d'accroissement annuel moyen,

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{2} = \frac{2\,658}{2\,160} \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \sqrt{\frac{2658}{2160}}.$$

$1 + \dfrac{t}{100} \approx 1{,}109$ soit un taux d'accroissement annuel moyen d'environ 11 %.

En 2010, le montant de l'épargne serait égal, en euros, à $2160 \times 1{,}11^{10}$, soit environ 6 133 €.

2 On cherche l'entier n tel que $3\,197 \times 1{,}04^n > 4\,000$. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 6$, soit en 2016.

3 Soit e_n le montant de l'épargne à l'année n et r_n le montant du revenu disponible la même année.

Le montant de l'épargne augmente de 4 % par an, donc il est multiplié chaque année par 1,04.

Le montant du revenu augmente de 3 % par an, donc il est multiplié chaque année par 1,03.

Pour tout entier n, $\dfrac{e_{n+1}}{r_{n+1}} = \dfrac{1{,}04\,e_n}{1{,}03\,r_n} = \dfrac{1{,}04}{1{,}03} \times \dfrac{e_n}{r_n}$.

La suite $\left(\dfrac{e_n}{r_n}\right)$ est géométrique de raison $\dfrac{104}{103}$.

$\dfrac{104}{103} > 1$ et $\dfrac{e_0}{r_0} > 0$, donc la suite est croissante.

76 Importations et limite de stock

1 a. Pour tout entier n, on note u_n la quantité **restante** d'extrait en fin de mois en kg.

À la fin du premier mois, il reste 96 % de la production soit, en kg : $500 \times 0{,}96 = 480$. Donc, $u_0 = 480$.

La production baisse de 8 % par an, elle est donc multipliée par 0,92 chaque année. Il reste 96 % de la production.

$u_1 = 0{,}96 \times 500 \times 0{,}92 = 441{,}60$

$u_2 = 0{,}96 \times 500 \times 0{,}92^2 = 406{,}272$

b. Soit P_n la production d'extrait à l'année n, pour tout entier n,

$u_{n+1} = 0{,}96 \times P_{n+1} = 0{,}96 \times (0{,}92 \times P_n)$

$= 0{,}92 \times 0{,}96 P_n = 0{,}92 u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $u_0 = 480$.

c. $S_n = 480 \times \dfrac{1 - 0{,}92^{n+1}}{1 - 0{,}92} = 6\,000(1 - 0{,}92^{n+1})$.

2 $0 < 0{,}92 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 6\,000$.

À long terme, la quantité stockée se rapproche de 6 000 kg ou 6 tonnes.

3 a. $S_n = 6\,000(1 - 0{,}92^{n+1}) = 6\,000 - 6\,000 \times 0{,}92^{n+1}$.

$0 < 0{,}92 < 1$ et $-6\,000 < 0$, donc la suite (S_n) est croissante et de limite 6 000, les quantités stockées n'atteindront donc jamais 10 tonnes.

b. On cherche l'entier n tel que $S_n > 4\,000$. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 13$, c'est-à-dire que la quantité stockée dépassera 4 tonnes au bout de 13 mois. $P_{13} = 500 \times 0{,}92^{13}$ soit $P_{13} \approx 169{,}127$ kg.

Volume des ventes : $0{,}04 \times 169{,}127 \approx 6{,}77$ kg.

77 La course d'Achille et la tortue

a. Soit u_n la distance parcourue, en mètre, par Achille à l'étape n pour atteindre l'endroit où était la tortue.

$u_1 = 700$. La distance parcourue par la tortue pendant 50 s est égale, en mètres, à $50 \times 0{,}07 = 3{,}5$ soit $u_2 = 3{,}5$ m.

b. Achille parcourt u_n mètres pendant le temps $t_n = \dfrac{u_n}{14}$ s. La distance parcourue par la tortue est alors égale en mètres à $\dfrac{u_n}{14} \times 0{,}07 = u_n \times 0{,}005$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}005 u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,005 et de terme initial 700.

c. $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 700 \times \dfrac{1 - 0{,}005^n}{1 - 0{,}005}$.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{700}{0{,}995} = \frac{140\,000}{199}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \approx 703{,}0518.$$

$0 < 0{,}005 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$t_n = \dfrac{u_n}{14}$, la limite du temps est nulle aussi.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

78 Épargne et consommation des ménages

1 Pour tout entier n, on note Y_n le revenu et C_n le montant de la consommation du ménage, en $2010+n$.
Son revenu pour l'année 2010 est de 40 000 € , donc $Y_0 = 40\,000$.
Le ménage épargne 20 % de son revenu annuel et consomme le reste, donc $C_0 = 0{,}8 \times 40\,000 = 32\,000$.
En 2011, le revenu augmente de 3 % :
$Y_1 = 40\,000 \times 1{,}03 = 41\,200$.
La part de sa consommation a diminué de 2,5 % et est donc égale à $0{,}8 \times 0{,}975 = 0{,}78$, soit 78 %.
Le montant de la consommation du ménage est
$C_1 = 0{,}78 \times Y_1 = 32\,136$.
En 2012, le revenu augmente de 3 %,
$Y_2 = 41\,200 \times 1{,}03 = 42\,436$.
La part de sa consommation a diminué de 2,5 % et est donc égale à $0{,}78 \times 0{,}975 = 0{,}7605$ soit 76,05 %.
Le montant de la consommation du ménage est
$C_2 = 0{,}7605 \times Y_2 = 32\,272{,}578$.
2 Pour tout entier n, $Y_{n+1} = Y_n \times 1{,}03$. La suite est géométrique de raison 1,03 et de terme initial $Y_0 = 40\,000$.
Pour tout entier n , $Y_n = 40\,000 \times 1{,}03^n$.
3 **a.** La part de la consommation des ménages diminue de 2,5 % par an donc, elle est donc multipliée par 0,975 chaque année. La suite (P_n) est géométrique de raison 0,975 et de terme initial $P_0 = 0{,}8$.
En $2010+n$, $P_n = 0{,}8 \times 0{,}975^n$ et $C_n = P_n \times Y_n$.
Pour tout entier n , $C_n = 0{,}8 \times 0{,}975^n Y_n$.
b. Pour tout entier n :
$C_n = 0{,}8 \times 0{,}975^n \times 40\,000 \times 1{,}03^n$
$= 32\,000 \times (0{,}975 \times 1{,}03)^n = 32\,000 \times 1{,}00425^n$
$1{,}00425 > 1$ et $32\,000 > 0$, donc la suite (C_n) est croissante.
c. La consommation à long terme tend vers l'infini.

79 Suite de versements sur un compte

Partie A Situation théorique

1 $v_1 = 1\,035$; $v_2 = 1\,070{,}175$; $v_3 \approx 1105{,}526$; $v_4 \approx 1141{,}054$.
2 Cet algorithme donne les valeurs de la suite géométrique (S_n) de raison 1,005 et de terme initial 1 000 c'est-à-dire les valeurs $S_n = 1\,000 \times 1{,}005^n$ pour les valeurs de n égales à 1, 2, 3, 4.

N	K	S
4		1 000
	1	1005
	2	1 010,025
	3	1 015,0751
	4	1 020,151

3 Affecter à S la valeur $S \times 1{,}005 + 30$.

Partie B Situation pratique

1 **a.** Le capital initial est placé au taux mensuel de 0,5 % , il est donc multiplié par 1,005 chaque mois, puis on ajoute 30 €.
Au bout d'un mois le capital est donc égal à :
$1000 \times 1{,}005 + 30 = 1\,035$.
b. Au bout de deux mois le capital est égal à :
$1035 \times 1{,}005 + 30 = 1\,070{,}175$.

2 Voir ci-dessous (Programme écrit avec Algobox)

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 12
  S PREND_LA_VALEUR 1000
  POUR k ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR 1.005*S+30
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

80 Variation d'un inventaire

Partie A

C3 | f_x | =C2*0,9+$D$2

	A	B	C	D
1	année	n	u_n	achat annuel
2	2011	0	11500	800
3	2012	1	11150	
4	2013	2	10835	
5	2014	3	10551,5	
6	2015	4	10296,35	
7	2016	5	10066,72	
8	2017	6	9860,044	
9	2018	7	9674,039	
10	2019	8	9506,635	
11	2020	9	9355,972	
12	2021	10	9220,375	
13	2022	11	9098,337	
14	2023	12	8988,503	
15	2024	13	8889,653	
16	2025	14	8800,688	
17	2026	15	8720,619	
18	2027	16	8648,557	
19	2028	17	8583,701	
20	2029	18	8525,331	
21	2030	19	8472,798	
22	2031	20	8425,518	
23	2032	21	8382,966	

Partie B Étude théorique

1 **a.** $u_1 = 1150 \times 0{,}9 + 800 = 11\,150$
$u_2 = 11\,150 \times 0{,}9 + 800 = 10\,835$.
La suite semble décroître.
b. Pour tout entier n , $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 800$.
2 **a.** Pour tout entier n , $v_n = u_n - 8\,000$
$v_0 = u_0 - 8\,000 = 3\,500$.
b. Pour tout entier n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000 = 0{,}9\,u_n + 800 - 8\,000$
$= 0{,}9\,(u_n - 8\,000) = 0{,}9\,v_n$.
La suite est géométrique de raison 0,9 et de terme initial 3 500.
c. Pour tout entier n , $v_n = 3\,500 \times 0{,}9^n$.
3 Pour tout entier n , $u_n = 3\,500 \times 0{,}9^n + 8\,000$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie C Long terme

En 2016, $n = 5$. $u_5 = 3\,500 \times 0{,}95 + 8\,000 = 10\,066{,}72$ soit 10 067 ouvrages.

$0 < 0{,}9 < 1$ et $3\,500 > 0$, donc la suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, donc la suite a pour limite 8 000, donc elle ne prendra jamais de valeurs inférieures à 8 000.

Partie D Comparaison.

a. Le nombre d'ouvrages diminue de 1 050 mais augmente de 800. il diminue de 250 chaque année.

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison -250 et de terme initial 11 500.

Pour tout entier n , $v_n = 11\,500 - 250n$.

b. On résout $v_n < 8\,000 \Leftrightarrow 11\,500 - 250n < 8\,000$

$\Leftrightarrow n > 14$.

81 Populations et immigration

1 a. Pour tout entier n, on note P_n la population, en milliers, en $2010 + n$: $P_0 = 1\,000$.

Le taux d'accroissement naturel annuel est de 1,3 % (erreur dans l'édition 1) , donc la population est multipliée par 1,013 et le solde migratoire est de 65 000 personnes donc

$P_1 = 1{,}013 \times P_0 + 65 = 1\,078$.

$P_2 = 1{,}013 \times P_1 + 65$ soit environ 1 157 habitants.

b. Pour tout entier n , $P_{n+1} = 1{,}013\,P_n + 65$.

2 Pour tout entier n , $v_n = P_n + 5000$.

a. $v_0 = P_0 + 5\,000 = 6\,000$.

b. $v_{n+1} = P_{n+1} + 5\,000 = 1{,}013\,P_n + 65 + 5\,000$

$= 1{,}013\,P_n + 5\,065 = 1{,}013\,(P_n + 5\,000)$.

Pour tout entier n , $v_{n+1} = 1{,}013\,v_n$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,013 et de terme initial 6 000 donc pour tout entier n :

$v_n = 6\,000 \times 1{,}013^n$

$P_n = 6\,000 \times 1{,}013^n - 5\,000$.

3 La question est : « À partir de quelle année, la population aura-t-elle doublée ? » .

Réponse : Au bout de 12 ans donc, en 2022.

82 Étude d'un bénéfice

1 Pour le mois de rang n , avec n entier naturel, on note R_n le montant du chiffre d'affaires, C_n le montant des frais et B_n le bénéfice, en euro.

Le chiffre d'affaires (ou recette) augmente de 1 % tous les mois, il est donc multiplié par 1,01 chaque mois.

En février, le chiffre d'affaires, en euros est égal à :

$R_1 = R_0 \times 1{,}01 = 2\,300 \times 1{,}01 = 2\,323$.

En mars, $R_2 = R_1 \times 1{,}01 = 2\,323 \times 1{,}01 = 2\,346{,}23$.

Les frais augmentent dans le même temps de 2,5 %. Ils sont donc multipliés par 1,025.

En février, les frais, en euros, se montent à :

$C_1 = 800 \times 1{,}025 = 820$.

En mars, $C_2 = 820 \times 1{,}025 = 840{,}50$.

Le bénéfice en euros, au mois de février est donc égal à $B_1 = R_1 - C_1 = 1\,503$.

Au mois de mars, il se monte à $B_2 = R_2 - C_2 = 1\,505{,}73$.

2 a. Pour tout entier n, $R_{n+1} = R_n \times 1{,}01$, la suite est donc géométrique de raison 1,01 et de terme initial 2 300 ; donc pour tout entier n , $R_n = 2\,300 \times 1{,}01^n$.

Pour tout entier n , $C_{n+1} = C_n \times 1{,}025$, la suite est donc géométrique de raison 1,025 et de terme initial 800 donc pour tout entier n , $C_n = 800 \times 1{,}025^n$.

b. Pour tout entier n :

$B_n = R_n - C_n = 2\,300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n$.

3 a. Pour tout entier n , $B_{n+1} - B_n$

$= 2\,300 \times 1{,}01^{n+1} - 800 \times 1{,}025^{n+1} - 2\,300 \times 1{,}01^n + 800 \times 1{,}025^n$.

$B_{n+1} - B_n = 2\,300 \times 1{,}01^n (1{,}01 - 1) - 800 \times 1{,}025^n (1{,}025 - 1)$

$= 23 \times 1{,}01^n - 20 \times 1{,}025^n$.

b. $\left(\dfrac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n > \dfrac{23}{20}$. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 10$.

$B_{n+1} - B_n < 0 \Leftrightarrow 23 \times 1{,}01^n - 20 \times 1{,}025^n < 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n > \dfrac{23}{20}$.

Pour tout entier $n \geqslant 10$, la suite (B_n) est décroissante.

4 Le bénéfice de cet artisan diminuera à partir du 10e mois c'est à dire à partir du mois d'octobre.

83 Placements et versements

1 a. $C_0 = 5\,000$

Le capital est placé au taux annuel de 5 % , donc il est multiplié par 1,05 chaque année puis augmenté de 5 000 €. Le capital, en euros, acquis au bout d'un an est égal à $C_1 = C_0 \times 1{,}05 + 5\,000 = 10\,250$.

Le capital, en euros, acquis au bout 2 ans est égal à $C_2 = C_1 \times 1{,}05 + 5\,000 = 15\,762{,}50$.

b. Soit C_n le capital acquis à l'année n, le capital acquis l'année suivante est multiplié par 1,05 chaque année puis augmenté de 5 000 € , donc pour tout entier n :

$C_{n+1} = C_n \times 1{,}05 + 5\,000$.

2 a. Soit C_0 le premier versement de 5000 € qui augmente de 5 % par an , il est donc multiplié chaque année par 1,05.

Au bout de 20 ans, ce capital est égal à $5\,000 \times 1{,}05^{20}$ soit environ 13 266,50 €.

b. Le premier versement de 5 000 € est multiplié par 1,05 pendant 20 années. Le deuxième versement est multiplié par 1,05 pendant 19 années, le troisième versement pendant 18 années etc.

Le p ième versement est multiplié par 1,05 pendant $20 - p$ années.

$K_p = 5\,000 \times 1{,}05^{20-p}$.

3 a. Pour un capital placé pendant n années le premier versement de 5 000 € est multiplié par 1,05 pendant n années ; le p ième versement est multiplié par 1,05 pendant $n - p$ années :

Pour tout entier n , $K_p = 5\,000 \times 1{,}05^{n-p}$.

Le capital acquis au bout de n années est égal à la somme des capitaux K_p acquis, calculés précédemment, pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

1er versement	$5\,000 \times 1{,}05^n$
2e versement	$+ 5\,000 \times 1{,}05^{n-1}$
3e versement	$+ 5\,000 \times 1{,}05^{n-2}$
	$+ \ldots$
	$+ 5\,000 \times 1{,}05$
n ième versement	$+ 5\,000$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On reconnait la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de terme initial 5 000 et de raison 1,05.
Pour tout entier n,
$C_n = 5\,000 \times \dfrac{1{,}05^{n+1} - 1}{1{,}05 - 1} = 100\,000 \times (1{,}05^{n+1} - 1)$.

c. Pour $n = 20$, on obtient un capital d'environ 178 596,26 €.

84 Calcul d'une somme

1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note d_n la distance parcourue durant le n-ième jour, en km.
Le 1er jour, il peut parcourir 50 km, donc $d_1 = 50$.
Ensuite la distance diminue de 1 % tous les jours, elle est donc multipliée par 0,99.
La suite (d_n) est géométrique de raison 0,99.
Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, on a $d_n = 50 \times 0{,}99^n$.

2 a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note L_n la distance totale parcourue en n jours : $L_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.

$$L_n = 50 \times \frac{1 - 0{,}99^n}{1 - 0{,}99} = 5\,000 \times (1 - 0{,}99^n)$$
$$= 5\,000 - 5\,000 \times 0{,}99^n.$$

b. $0 < 0{,}99 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^n = 0$,
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 5\,000$.
De plus $-5\,000 < 0$. La suite $(-5\,000 \times 0{,}99^n)$ est croissante, la suite (L_n) est donc croissante de limite 5 000.
La distance totale parcourue ne pourra pas atteindre 5 000 km. Il a donc perdu son pari.

3 L'algorithme calcule la distance parcourue au rang $n+1$ et ajoute ce résultat à la distance parcourue précédente. Il calcule donc, de proche en proche, la distance totale parcourue. On obtient $L_n > 4\,999$ pour $n \geqslant 848$.

85 Problème d'eau

1 a. Soit D_n le débit en m³ pour le n-ième jour après le 1er juin. Le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre, il est donc multiplié par 0,80.
Pour la journée du 1er juin, le débit D_0 est égal à 300 m³ par jour. Le débit pour le 2 juin est $D_1 = 0{,}8 \times 300 = 240$ m³.

b. Le débit est multiplié par 0,80 chaque jour.
La suite (D_n) est géométrique de raison 0,80 et de terme initial 300.

c. Pour tout entier n, $d_n = 300 \times 0{,}8^n$.
Au 30 juin, $n = 29$, $D_{29} \approx 0{,}5$ m³.

d. $S_{29} = D_0 + D_1 + \ldots + D_{29}$
$$= 300 \times \frac{1 - 0{,}8^{30}}{1 - 0{,}8} = 1\,500 \times (1 - 0{,}8^{30}).$$

2 a. Soit V_n le volume d'eau au n-ième matin après le 1er juillet. Le volume d'eau diminue de 4 % chaque jour, donc, il est multiplié par 0,96 et on enlève 500 m³ donc si $V_0 = 100\,000$.
$V_1 = V_0 \times 0{,}96 - 500 = 95\,500$ m³.

b. Pour tout entier n, $V_{n+1} = 0{,}96\,V_n - 500$.

3 Pour tout entier n, par $U_n = V_n + 12\,500$.
$U_{n+1} = V_{n+1} + 12\,500 = 0{,}96\,V_n - 500 + 12\,500$
$= 0{,}96\,V_n + 12\,000 = 0{,}96\,(V_n + 12\,500) = 0{,}96\,U_n$.
La suite (U_n) est géométrique de raison 0,96 et de terme initial $U_0 = 100\,000 + 12\,500 = 112\,500$.

4 Pour tout entier n, $U_n = 112\,500 \times 0{,}96^n$.
$V_n = 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500$.

5 Au 1er Aout, $n = 31$, $V_{31} \approx 19\,237$ m³.

6 On résout $V_n \leqslant 0 \Leftrightarrow 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500 < 0$.
À l'aide du tableau de valeur de la calculatrice, on obtient $n \geqslant 54$. La retenue sera « à sec » le 23 septembre.

Réinvestir... (p. 38)

86 ... en sciences

Comment dater un fossile ?

1 On estime que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue d'environ 1,24 % tous les siècles. Ce nombre est donc multiplié par 0,9876 par siècle.
30 000 ans = 300 siècles donc en 30 000 ans le nombre d'atomes a été multiplié par $0{,}987\,6^{300} = 0{,}023\,677$ soit une baisse d'environ 97,76 %.

2 Dans un squelette d'homme préhistorique, il ne reste plus que 5 % du carbone 14 qu'il contenait quand l'homme était en vie.
On cherche le nombre entier n tel que $0{,}9876^n = 0{,}95$.
D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $n \approx 4{,}1$. Le squelette a environ 400 ans.

3 Pour déterminer la période du carbone 14, on cherche l'entier n tel que $0{,}9876^n = 0{,}5$.
On obtient $n \approx 55{,}55$ soit environ 5 500 ans.

87 ... en musique

La gamme tempérée ou gamme de tempérament égal

1 Fréquence $LA_3 = (\text{fréquence } DO_3) \times q^9$
$= 264 \times 1{,}059\,46^3$ soit environ 464 Hz.
Fréquence $RÉ_4 = (\text{fréquence } DO_4) \times q^2 = 528 \times 1{,}059\,46^2$ soit environ 593 Hz.

2 a.

Note	DO_0	DO_1	DO_2	DO_3	DO_4	DO_5	DO_6	DO_7	DO_8	DO_9
Fréquence	33	66	132	264	528	1 056	2 112	4 224	8 448	16 896

Huit notes DO différentes.

b.

Note	DO_1	SI_0	$LA\#_0$	LA_0	$SOL\#_0$	SOL_0	$FA\#_0$
Fréquence	66	63	59	56	53	51	48

La plus grave est SOL_0.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c.

Note	DO_3	$DO\#_8$	$RÉ_8$	RÉ#8
Fréquence	8 448	8 909	9 396	9 908

Note	MI_8	FA_8	$FA\#_8$	SOL_8
Fréquence	10 450	11 020	**11 622**	12 257

Note	$SOL\#_8$	LA_8	$LA\#_8$	SI_8
Fréquence	12 926	13 632	**14 376**	15 161

3 **a.** Le rapport de fréquence entre deux notes formant une quinte juste ascendante est $q^7 \approx 1{,}45$.
On appelle quinte pure deux notes dont le rapport de fréquence était $\frac{3}{2}$.

b. Le rapport quinte juste est plus petit que le rapport quinte pure.
12 quintes justes : $(q^7)^{12} = (q^{12})^7 = 2^7 = 128$, soit 7 octaves et 12 quintes pures : $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}75$.

88 … en économie

Le multiplicateur keynésien et le paradoxe de l'épargne

1 **a.** $\Delta I = \Delta Y_0 = 1\,000$
$\Delta Y_1 = c \times \Delta Y_0 = 840$
$\Delta Y_2 = c \times \Delta Y_1 = 0{,}84 \times 840 = 705{,}6$.

b. Pour tout entier n, $\Delta Y_{n+1} = c \times \Delta Y_n$. La suite (ΔY_n) est géométrique de raison 0,84 et de terme initial 1 000.
Pour tout entier n, $\Delta Y_n = 1\,000 \times 0{,}84^n$.

c. La somme des revenus à l'étape n est :
$\Delta Y_0 + \Delta Y_1 + \ldots + \Delta Y_n$, somme des termes d'une suite géométrique de raison c et de terme initial ΔI
soit $\Delta I \times \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$.

d. Comme $0 < c < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c^{n+1} = 0$

$$\Sigma \Delta Y = \frac{\Delta I}{1 - c}.$$

e. $c = 0{,}84$; donc $\Sigma \Delta Y = \frac{1\,000}{1 - 0{,}84} = 6\,250$.

2 Si on donne une prime de 100 millions d'euros à des chômeurs qui consomment 99 % de leur revenu, en France : $\Sigma \Delta Y = \frac{100}{1 - 0{,}99} = 10\,000$, soit 10 milliards d'euros.
Ceci est vrai si des personnes consomment des produits fabriqués en France. D'où les politiques de relance de la consommation.

3 $s\Delta Y_0 + s\Delta Y_1 + \ldots + s\Delta Y_n = s\Delta I \times \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$.

$$\Sigma \Delta E = \frac{s\Delta I}{1 - c} = \frac{s\Delta I}{s} = \Delta I.$$

Un investissement supplémentaire n'augmente pas l'épargne.

89 … en économie

Offre et demande à l'équilibre

Soit P_n le prix à l'année n, la quantité demandée D_n s'exprime par : $D_n = 3\,000 - 10P_n$.
La quantité offerte $F_{n+1} = 6P_n + 1\,400$.

1 $P_0 = 150$ donc $D_0 = 3\,000 - 10 \times 150 = 1\,500$
$F_1 = 6 \times 150 + 1\,400 = 2\,300$.

2 **a.** À l'équilibre $F_{n+1} - D_{n+1} = 0$
$6P_n + 1\,400 - (3\,000 - 10P_{n+1}) = 0$.
$10P_{n+1} - 6P_n - 1\,600 = 0$.
Pour tout entier n, $P_{n+1} = -0{,}6P_n + 160$.

b. $P_1 = 160 - 0{,}6 \times P_0 = 70$; $P_2 = 160 - 0{,}6 \times P_1 = 118$.

3 **a.**

	A	B	C	D
1	n	P_n	D_n	F_n
2	0	150	=3000-10*B2	
3	=1+A2	=-0,6*B2+160	=3000-10*B3	=6*B2+1400

b. La valeur limite du prix d'équilibre semble être 100.

4 On pose, pour tout entier n : $u_n = P_n - 100$.

a. $u_{n+1} = P_{n+1} - 100 = -0{,}6P_n + 160 - 100 = -0{,}6P_n + 60$
$= -0{,}6(P_n - 100) = -0{,}6u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de raison $-0{,}6$ et de terme initial $u_0 = P_0 - 100 = 150 - 100 = 50$.

b. Pour tout entier n, $u_n = 50 \times (-0{,}6)^n$
$P_n = 100 + 50 \times (-0{,}6)^n = 100 + 50 \times (-1)^n \times 0{,}6^n$
Or, $0 < 0{,}6 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = 100.$$

Si $P_0 = 100$ alors $u_0 = 0$; la suite (P_n) est constante égale à 100.
La suite (D_n) est constante égale à 2 000.
La suite (F_n) est constante égale à 2 000.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 2

Continuité et convexité

Partir d'un bon pied (p. 40)

A QCM – Lire graphiquement

1 **a.** L'ordonnée du point M d'abscisse 30 est 50.
2 **c.** La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ se coupent deux fois.
3 **a.** Le **coût moyen** pour une production de 30 est égal à :

$$\frac{f(30)}{30} = \frac{50}{3} \approx 16{,}7\,.$$

C'est le coefficient directeur de la droite (OM).

B Vrai ou faux ? – Calculer une dérivée, déterminer la variation

1 **c.** $f'(x) = -0{,}2 \times 3x^2 + 6 \times 2x + 0$
$= -0{,}6x^2 + 12x$.
Donc $f'(x) = 0{,}6x(-x + 20)$.

2 **b.** On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - 2x \times x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}\,.$$

3 **b.** Comme $f'(x)$ s'annule en 2 en étant négative, puis positive, la fonction admet un minimum en 2.
Et $f(2) = 1$, minimum de la fonction f.
D'où la fonction ***f* est positive** sur $[-8\,;3]$.

C QCM – Lire des propriétés de tangence

1 **c.** Le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
On lit $f'(2) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\boldsymbol{f'(-1) = 0}$.

2 **b.** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$\boldsymbol{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}\,.$$

On lit $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = 4$. Donc l'équation réduite est :

$$y = 4 \times (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 4x - 3\,.$$

3 **c.** On parcourt la courbe de l'abscisse $x = -3$ à l'abscisse $x = 1$ en imaginant les tangentes.

Découvrir

Activité 1 Raccorder deux parties

1 **a.** Coûts fixes : $f(0) = 4$ milliers d'euros.
$f(2) = 0{,}5 \times 2^2 + 4 = 6$.
Coût total pour une production de 2 tonnes : 6 milliers d'euros.
$f(5{,}29) = 5 + 3\sqrt{5{,}29} = 11{,}9$
Coût total pour une production de 5,29 tonnes : 11,9 milliers d'euros.
b. Avant traitement : $0{,}5 \times 3^2 = 4 = 8{,}5$ milliers d'euros.
Après traitement : $5 = 3\sqrt{3} \approx 10{,}20$ milliers d'euros.
Coût du traitement : 1,70 milliers d'euros.
2 **a.** Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.
Il représente le coût moyen de production de la noix de muscade en fonction de la quantité x exprimée en tonnes.

b.
$$g(x) = \begin{cases} 0{,}5x + \dfrac{4}{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{c}{x} & \text{si } 3 < x \leqslant 9 \end{cases}$$

TICE (p. 42)

$$g'(x) = \begin{cases} 0{,}5 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{0{,}5x^2 - 4}{x^2} & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ -\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{c}{x^2} = \dfrac{-10 - 2c - 3\sqrt{x}}{2x^2} & \text{si } 3 < x \leqslant 9 \end{cases}$$

$0{,}5x^2 - 4$ s'annule en $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ sur $]0\,;3]$.

x	0		$2\sqrt{2}$		3		9
$g'(x)$	‖	−	0	+	‖	−	
$g(x)$	‖	↘		↗	‖	↘	

On retrouve le sens de variation du coefficient directeur de la droite (OM) observé sur la copie d'écran.
c. On choisit c tel que :
$5 + 3\sqrt{3} + c = 8{,}5 \Leftrightarrow c = 3{,}5 - 3\sqrt{3} \approx -1{,}70$.
On retrouve pour c la valeur du coût du traitement.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2+4 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 3\\ 5+3\sqrt{x}+3{,}5-3\sqrt{3}=8{,}5-3\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right) & \text{si } 3<x\leqslant 9\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{0{,}5x^2+4}{x} & \text{si } 0<x\leqslant 3\\ \dfrac{8{,}5-3\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x} & \text{si } 3<x\leqslant 9\end{cases}$$

Activité 2 Résoudre (presque) une équation  (p. 42)

Équation $x^3+3x^2-1=0$

1 **a.** D'après la représentation graphique, l'équation a 3 solutions.

b. 0,532 ; −0,653 ; −2,879 .

2 $f(x)=x^3+3x^2-1$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.

x	-5	α	-2	β	0	γ	5
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-51	↗	3	↘	-1	↗	199
					0		

L'équation $f(x)=0$ a trois solutions :

$\alpha\approx-2{,}9$; $\beta\approx-0{,}7$; $\gamma\approx0{,}5$.

3 **a.** $f(-2)=3$ et $f(0)=-1$.

b. Si $k\in[-1\,;3]$, l'équation $f(x)=k$ admet trois solutions.

Activité 3 Déterminer le signe d'une fonction du 3e degré TICE (p. 43)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

1 $f(x)=x^3+bx+c$ $(a=0)$

a. $f(x)=x^3+2x-1$

$f'(x)=3x^2+2$.

La dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

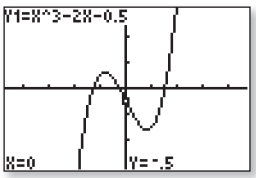
L'équation $f(x)=0$ a une seule solution $\alpha\approx0{,}5$.

x		α	
$f(x)$	$-$	0	$+$

b. Conjecture sur le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$: aucune solution.

c. $b=-2$; $c=-0{,}5$ convient.

$f(x)=x^3-2x-0{,}5$.



x		$-1{,}27$		$-0{,}26$		$-1{,}53$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2 On suppose que a est de signe quelconque.

a. $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$\Delta=(2a)^2-4\times3\times b=4(a^2-3b)$.

L'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes si et seulement si $a^2-3b>0$.

b. $a=-3{,}75$ et $b=3$.

$a^2-3b=4{,}69$; $\Delta=18{,}76$.ø

L'équation $f'(x)=0$ a deux solutions : 2 et 0,5 .

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x		$0{,}5$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)=x^3-3{,}75x^2+3x+c$

$f(0{,}5)=0{,}6875+c$

$f(2)=-1+c$

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α si et seulement si $f(2)>0$ ou $f(0{,}5)<0$.

C'est à dire $c>1$ ou $c<-0{,}6875$.

Dans ces conditions :

x		α	
$f(x)$	$-$	0	$+$

3 On suppose que $c=0$.

a. $x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0$.

$S=\{0\,;1\,;2\}$.

b. $x^3-ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(x^2-ax+b)=0$.

c. Cette équation a trois solutions si et seulement si $a^2-4ab>0$.

Activité 4 Positionner une courbe et ses tangentes  TICE (p. 43)

1 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en tout point de la parabole $\mathcal{P}$, il existe une tangente à $\mathcal{P}$.

b. Équation de T :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)\Leftrightarrow y=2a(x-a)+a^2$

$\Leftrightarrow y=2ax-a^2$.

c. $d(x)=f(x)-t(x)=x^2-2ax+a^2$

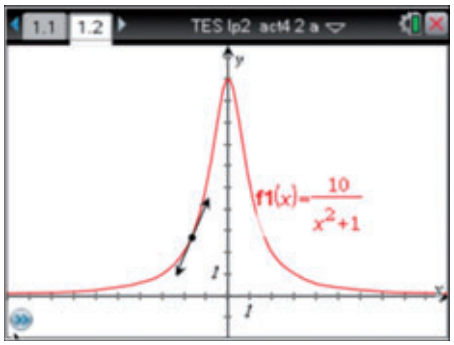
$=(x-a)^2$.

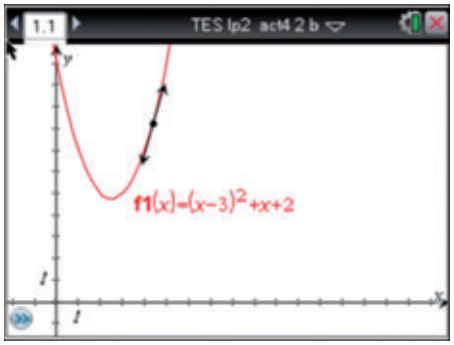
Cette différence est toujours positive ou nulle en $x=a$.

d. On en déduit que $\mathcal{P}$ est au-dessus de la tangente T en tout point d'abscisse a de la parabole.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2





3 **a.** $f(x) = x^3$
Sur $]-\infty ; 0]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de ses tangentes.
En 0, la tangente T traverse la courbe.
Sur $[0 ; +\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
b. $g(x) = 3x^2$
La dérivée de la fonction cube est strictement positive et nulle en 0.
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a pas d'extremum.
c. $g'(x) = 6x$

x		0	
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	0	↗
	$\mathscr{C}$ en dessous de T		$\mathscr{C}$ au-dessus de T

Savoir faire

1. Étudier le sens de variation d'une fonction (p. 45)

Exercices d'application

1 **1** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 33$ sur $[0 ; 8]$.
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$
$\Delta = 144$; solutions 1 et 5.
2

x	0		1		5		8
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	33	↗	40	↘	8	↗	89

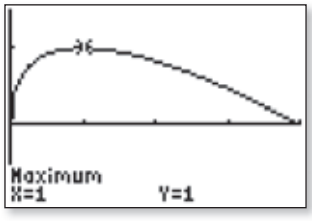
3 **a.** Droite $\mathscr{D}_1$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3, d'équation :
$y = f'(3)(x - 3) + f(3) \Leftrightarrow y = -12(x - 3) + 24$
$\Leftrightarrow y = -12x + 60$.
b. Équation de $\mathscr{D}_2$;
$y = f'(7)(x - 7) + f(7) \Leftrightarrow y = 36(x - 7) + 40$
$\Leftrightarrow y = 36x - 212$.

2 **1** Pour tout réel x de $]0 ; 4]$:
$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

2 On a : $1 - \sqrt{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Comme $\sqrt{x} \geqslant 0$ pour tout réel x de $[0 ; 4]$, on a le tableau sur $[0 ; 4]$:

x	0		1		4
$1 - \sqrt{x}$		+	0	−	
$\sqrt{x}$	0	+		+	
$g'(x)$	‖	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	1	↘	0

Car $g(0) = 2\sqrt{0} - 0 = 0$, $g(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 1$
et $g(4) = 2\sqrt{4} - 4 = 0$.
À la calculatrice :



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2. Exploiter un tableau de variations (p. 47)

Exercices d'application

3 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$ sur $[0 ; 7]$.

1 $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

x	0		1		5		7
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	3	↗	10	↘	−22	↗	10

2 **a.** Trois solutions
b. Deux solutions
c. Trois solutions

4 $g(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 12$ sur $[1 ; 10]$.

1 $g'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 12$

x	1		2		4		10
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	−4	↗	−2	↘	−4	↗	158

2 L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1 ; 4]$ car la fonction est strictement négative sur cet intervalle.
D'après la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[4 ; 10]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α appartenant à l'intervalle $[4 ; 10]$.
$\alpha \approx 5{,}4$.

3

x	1		α		10
$g(x)$		−	0	+	

3. Reconnaître un point d'inflexion (p. 49)

Exercices d'application

5 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 2x - 5$ sur $[-2 ; 1]$

1 $g(x) = f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 12x - 2$
$h(x) = g'(x) = 12x^2 + 12x + 12$.

2 Signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$:
$\Delta = -432$. L'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.
Pour tout réel x, donc en particulier sur $[-2 ; 1]$, $h(x) > 0$.

3 Sur $[-2 ; 1]$, la dérivée seconde de la fonction f est positive, donc la dérivée est croissante, on en déduit que la fonction f est convexe sur $[-2 ; 1]$.
Comme la dérivée seconde ne s'annule pas sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion.

6 **1** Pour tout réel x de $[1 ; 10]$, $g(x) = 5 \times \dfrac{1}{x+1}$.
On dérive avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$:

$g'(x) = 5 \times \dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-5}{(x+1)^2}$ (strictement négatif).

Donc g est strictement décroissante sur $[1 ; 10]$.

2 Pour étudier le sens de variation de la dérivée, on calcule $g''(x)$. On utilise la même formule avec :
$v(x) = (x+1)^2$ et $v'(x) = 2(x+1)$.

Donc $g''(x) = -5 \times \dfrac{-2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \dfrac{10}{(x+1)^3}$ positif.

La dérivée g' est strictement croissante sur $[1 ; 10]$.
Donc la fonction g est convexe sur $[1 ; 10]$.
La courbe de la fonction g n'a pas de point d'inflexion.

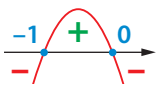
QCM (p. 51)

7 **c.** Le tracé d'un tableau de variations possible permet de le vérifier.

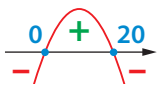
8 **b.** On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Donc :

$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2 + 4x) - (2x + 4) \times (2x + 1)}{(x^2 + 4x)^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 8x - (4x^2 + 8x + 2x + 4)}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-2x^2 - 2x - 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x^2 + x + 2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

9 **b.** L'expression factorisée de $f'(x)$ est nulle en 0 et en -1, et positive sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
Donc f est croissante sur $[-1 ; 0]$.



10 **a.** On calcule la dérivée :
$f'(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}6x = x(0{,}6 - 0{,}03x)$.
Et $0{,}6 - 0{,}03x = 0 \Leftrightarrow x = 20$.
Donc sur $[0 ; 20]$, la dérivée est positive.
La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 20]$.



11 **c.** $f(2) = -2^2 + 5 = 1$ et $\dfrac{3}{2+2} = 0{,}75$.
Donc **a.** et **b.** sont fausses.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

12 **c.** Contre-exemples ci-dessous pour **a.** et **b.** : dérivable ne suffit pas (fig. 1) et décroissante ne suffit pas (fig. 2) :

Fig. 1

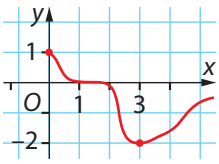
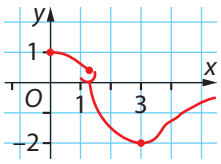
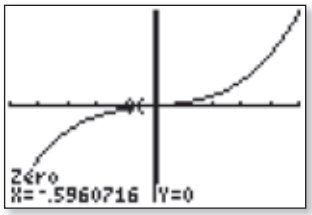


Fig. 2



Dans la figure 2, on évitera de dresser un tableau de variations : on écrira plutôt que la fonction f est décroissante sur $[\,0\,;3\,]$.

13 **a.** Pour savoir s'il y a des solutions, on étudie les variations de f définie sur $[\,-5\,;\,5\,]$ par $f(x)=x^3+3x+2$.

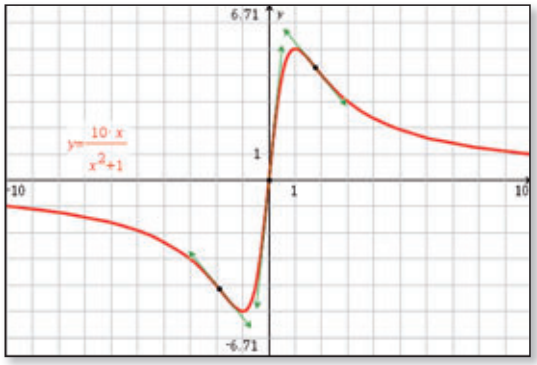


$f'(x) = 3x^2 + 3$ est strictement positif, donc f est strictement croissante sur $[-5\,;5]$.
Comme $f(-5)=-138$ et $f(5)=142$ et que f est continue (car dérivable), l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \approx -0{,}6$.
On peut vérifier à l'écran de la calculatrice en **Zoom Min-Max** sur $[\,-5\,;\,5\,]$ et recherche du « Zéro ».

14 **c.** La dérivée de la fonction racine carrée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
La fonction racine carrée est donc concave sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
Mais pas en 0, car la tangente à l'origine est verticale : on ne peut pas dire qu'elle est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

15 **a.** $f'(x)=3x^2-24x+21$ et $f''(x)=6x-24$.
La dérivée seconde f'' s'annule en 4 en étant négative, puis positive.
Donc la fonction f est concave sur $[\,0\,;4\,]$, convexe sur $[\,4\,;12\,]$ et sa courbe admet en 4 un point d'inflexion.

16 **c.** On a, à la calculatrice :



On visualise les tangentes à la courbe et leurs positions par rapport à celle-ci. Donc on obtient trois points d'inflexion.

Exercices

1 Sens de variation et dérivée (p. 52)

17 Vrai ou Faux ?

a. **Vrai :** la fonction f est décroissante sur $[\,-1\,;1\,]$, donc $f'(0)<0$.
b. **Faux :** la fonction f admet un minimum en $x=1$. D'où $f'(1)=0$.
c. **Vrai :** image de -3 donnée dans le tableau de variations.
d. **Vrai :** la fonction f est croissante sur $[\,-3\,;-1\,]$. D'où $f(-3)\leqslant f(-2) \Leftrightarrow -2\leqslant f(-2)$
e. **Faux :** la fonction f est croissante sur $[\,1\,;4\,]$ donc $f'(3)\geqslant 0$.
f. **Vrai :** $1\leqslant f(2)\leqslant 4$, donc $f(2)>0$.

18 QCM

1 **a.** $f'(1)=2$: c'est l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}'$, courbe de la fonction dérivée.
2 **a.** $f'(-2)=2$. Même raison qu'en **1**.
3 **a.**, **b.** et **c.** La fonction f est croissante sur un intervalle où la dérivée f' est positive, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathscr{C}'$ de la dérivée est au-dessus de l'axe des abscisses.

19 QCM

1 **a.** $f'(x)=3x^2-6x+5$; $\Delta=-24$ négatif.
Donc $f'(x)$ est de signe constant, positif.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2 **b.** $g'(x)=\dfrac{10(x-2)-1(10x+5)}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{-25}{(x-2)^2}$ négatif.

Donc g est strictement décroissante sur $[\,10\,;20\,]$.

20 Associer fonction et fonction dérivée

Courbe de fonction	$\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_h$
Courbe de sa dérivée	Γ_2	Γ_3	Γ_1

21 Construire un tableau de variations

On lit graphiquement le signe de la fonction dérivée et on en déduit le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b.

x		-1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$f(-1)$			

22 Nombres dérivés et tangentes

1 $f(-3)=-1$; $f'(-3)=2$; $f(0)=\frac{1}{2}$; $f'(0)=-\frac{3}{4}$; $f(3)=1$; $f'(3)=1$.

2 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$.

3 **a.** Équation de T_1 :

$y=f'(-3)(x+3)+f(-3) \Leftrightarrow y=2(x+3)-1$

$\Leftrightarrow y=2x+5$.

b. Équation de T_2 :

$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

Équation de T_3 :

$y=f'(3)(x-3)+f(3) \Leftrightarrow y=1(x-3)+1$

$\Leftrightarrow y=x-2$.

4

x	-4		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2		1		-2		$1{,}5$

23 Calculs de dérivées

a. $f'(x)=-x+3$

b. $g'(x)=6x^2-8x-3$

c. $h'(x)=0{,}6x^2+0{,}2x-1-\frac{1}{x^2}$

24 Même exercice

a. $f'(x)=3\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+2=\frac{3+4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

b. On utilise la formule $(uv)'=u'v+v'u$.

$g'(x)=(6x+1)(2x+3)+(2)(3x^2+x-1)$

$=12x^2+18x+2x+3+6x^2+2x-2$

$=18x^2+22x+1$.

c. $h'(x)=4\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(4x+1)=\frac{8x+4x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{12x+1}{2\sqrt{x}}$.

25

a. $f'(x)=\frac{11}{(4x+5)^2}$

b. $g'(x)=\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$

26 Dérivées de carrés et de cubes

1 Cas particulier de la dérivation d'un produit $f=uv$, en posant $u=v$.

$(uv)'=u'v+v'u$

Si $f=(u)^2$, alors $f'=u'u+u'u=2\times u'\times u$.

2 Si $f=(u)^3$, alors $f=(u)^2\times u$,

$f'=(2\times u'\times u)\times u+u'\times(u)^2$

$=3\times u'\times(u)^2$.

3 **a.** $f'(x)=2(2x-3)(x^2-3x)$

$=2x(2x-3)(x-3)$.

b. $g'(x)=3\times4(4x-1)^2=12(4x-1)^2$.

27

a. $f'(t)=4(2t-3)\times\sqrt{t}+(2t-3)^2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$=(2t-3)\left(4\sqrt{t}+\frac{2t-3}{2\sqrt{t}}\right)$

$=(2t-3)\left(\frac{8t+2t-3}{2\sqrt{t}}\right)=(2t-3)\left(\frac{10t-3}{2\sqrt{t}}\right)$.

b. $g'(q)=0{,}6(2q-1)^2+3$.

c. $h'(x)=3+\frac{80}{(4x+1)^3}$.

28 Étudier des variations

a. $f(x)=4x^2-12x-5$ sur $[-2\,;10]$.

$f'(x)=8x-12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	-2		$1{,}5$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	35		-14		275

b. $f(x)=x^3+6x^2-15x+10$ sur $[1\,;6]$

$f'(x)=3x^2+12x-15$

$\Delta=324$; $f'(x)=0$ pour $x=-5$ ou $x=1$.

x	1		6
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	2		352

c. $f(x)=0{,}1x^3-3x^2+30x-100$ sur $[100\,;500]$.

$f'(x)=0{,}3x^2-6x+30$

$\Delta=0$; $f'(x)=0$ pour $x=10\notin[100\,;500]$.

x	100		500
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$72\,900$		$1{,}18\times10^7$

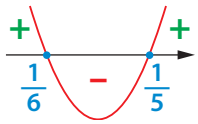
29 Confirmer ou infirmer une conjecture

1 Il semble que la fonction f soit croissante sur $[-2\,;3]$.

2 **a.** $f'(x)=180x^2-66x+6$.

b. $\Delta=36$. Donc deux solutions :

$x_1=\frac{1}{6}$ et $x_2=\frac{1}{5}$.



x	-2		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. La conjecture est fausse, car la dérivée est négative sur $\left[\frac{1}{6}\,;\frac{1}{5}\right]$, donc la fonction f est décroissante sur $\left[\frac{1}{6}\,;\frac{1}{5}\right]$.

30 Étudier un bénéfice

1 **a.** $B'(x)=-6x+33$, qui s'annule en 5,5.

D'où le tableau de variations de B :

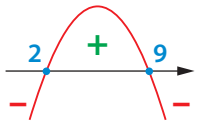
x	1		$5{,}5$		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-24		$36{,}75$		-24

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. Le bénéfice maximum est de 3 675 €, pour une production et une vente de 550 objets.

2 **a.** $B(x)=0 : \Delta=441$, d'où $x_1=2$ et $x_2=9$. Les points morts de la production sont donc de 200 et 900 objets.

b. $B(x) \geqslant 0$ a pour ensemble solution $[\,2\,;\,9\,]$. La plage de bénéfice est donc une production entre 200 et 900 objets.



31 Étudier une production

1 Coût total = « coût unitaire » × « quantité ».
D'où, sur $[\,1\,;45\,]$, $C(x) = f(x) \times x$
$= x(x^2 - 60x + 1250)$
$= x^3 - 60x^2 + 1250x$.

2 $B(x) = 950x - (x^3 - 60x^2 + 1250x)$
$= -x^3 + 60x^2 - 300x$.

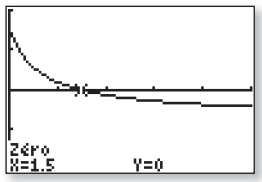
3 **a.** $B'(x) = -3x^2 + 120x - 300$
$\Delta = 10\,800$;
Les solutions de l'équation $-3x^2 + 120x - 300 = 0$ sont 37,3 et 2,7, arrondies à 0,1 près.

x	1		2,7		37,3		45
$B'(x)$		–	0	+	0	–	
$B(x)$	–241	↘	–392,3	↗	20 392	↘	16 875

b. Le bénéfice du producteur est maximal lorsque celui-ci conditionne et vend 37,3 kg de truffes dans la semaine. Le bénéfice maximal est alors de 20 400 €, à 100 € près.

32 Utiliser la calculatrice

1 $f(x) = \dfrac{-2x+3}{3x+2}$ sur $[\,0\,;5\,]$.



Il semble que la fonction f est décroissante sur $[\,0\,;5\,]$.
$f'(x) = -\dfrac{13}{(3x+2)^2}$.
D'où le tableau de variations de f sur $[\,0\,;5\,]$:

x	0		5
$f'(x)$		–	
$f(x)$	1,5	↘	$-\dfrac{7}{17}$

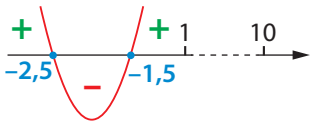
2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

33 Variations de fonctions rationnelles

1 On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$,

$f'(x) = \dfrac{(8x+8)(x+2) - 1 \times (4x^2 + 8x + 1)}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{4x^2 + 16x + 15}{(x+2)^2}$.

2 $\Delta = 16$.
Donc deux solutions :
$x_1 = -2{,}5$ et $x_2 = -1{,}5$.



3 Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $[\,1\,;10\,]$, la dérivée $f'(x)$ est positive sur $[\,1\,;10\,]$.
Donc la fonction f est croissante sur $[\,1\,;10\,]$.

x	1		10
$f(x)$	$\dfrac{13}{3}$	↗	$\dfrac{481}{12}$

34 Variations de fonctions rationnelles

a. $f(x) = \dfrac{9x^2 + 36x + 81}{x+4}$ sur $[\,-2\,;6\,]$.

$f'(x) = \dfrac{9x^2 + 72x + 56}{(x+4)^2} = \dfrac{9(x^2 + 8x + 7)}{(x+4)^2}$.

$\Delta = 2\,916$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ou $x = -1$.

x	–2		–1		6
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	22,5	↘	18	↗	62,1

b. $g(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 5}{x-1}$ sur $[\,2\,;11\,]$.

$g'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 7}{(x-1)^2}$.

$\Delta = -40$, négatif, la dérivée est strictement positive sur $[\,2\,;11\,]$.

x	2		11
$g'(x)$		+	
$g(x)$	–1	↗	21,5

35 Avec une racine carrée

Pour $1 \leqslant x \leqslant 4$, $C(x) = 2x - \sqrt{x} + 4$.

1 $C'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$.

2 **a.** $4\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{16}$
$\Leftrightarrow x \geqslant 0{,}0625$.

a. Sur $[\,1\,;4\,]$, on a $2\sqrt{x} > 0$.
Donc la dérivée est du signe de $4\sqrt{x} - 1$ sur $[\,1\,;4\,]$.

x	1		4
$C'(x)$		+	
$C(x)$		↗	

Si la production augmente, les coûts augmentent.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

36 Étudier un coût moyen

1 Coût, en euro, de x repas :
$C(x) = 0{,}1x^2 - x + 640$, $x \in [40 ; 160]$.
$C'(x) = 0{,}2x - 1$.
$0{,}2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 5$
On en déduit que $C'(x) > 0$ sur $[40 ; 60]$.
Ainsi, la fonction C est croissante sur $[40 ; 60]$.

2 a. $CM(40) = \dfrac{C(40)}{40} = 19$; pour 40 repas fabriqué, chaque repas coûte 19 €.

$CM(100) = \dfrac{C(100)}{100} = 15{,}4$.

b. $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0{,}1x - 1 + \dfrac{640}{x}$.

3 a. $CM'(x) = \dfrac{0{,}1(x^2 - 6400)}{x^2}$
$= \dfrac{0{,}1(x + 80)(x - 80)}{x^2}$.

La dérivée du coût moyen est du signe de $x - 80$ sur $[40 ; 160]$.
D'où le sens de variation du coût moyen CM :

x	40		80		160
$CM'(x)$		−	0	+	
$CM(x)$	19	↘	15	↗	19

b. Afin que le coût moyen soit minimal, il faut servir 80 repas et, dans ce cas, chaque repas revient à 15 €.

37 Coût total, coût marginal et coût moyen

Coût total de production $C(x)$, en euro, de x milliers de chaises :
$C(x) = x^3 - 3x^2 + 11\,000x + 123\,200$,
où $x \in [10 ; 50]$.

1 a. $C_m(x) = C'(x) = 3x^2 - 6x + 11\,000$
b. $\Delta = -131\,964$, négatif.
On en déduit le signe de $C'(x)$ et le tableau de variation de C sur $[10 ; 50]$.

x	10		50
$C'(x)$		+	
$C(x)$	233 900	↗	790 700

2 a. $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = x^2 - 3x + 11\,000 + \dfrac{123\,200}{x}$.

b. La dernière ligne de calcul, obtenue à l'aide d'une calculatrice formelle, donne une forme factorisée de la dérivée de la fonction coût moyen CM.

$CM'(x) = \dfrac{(x - 40)(2x^2 + 77x + 3\,080)}{x^2}$.

Le polynôme $2x^2 + 77x + 3\,080$ est strictement positif sur $[10 ; 50]$ ainsi que le dénominateur x^2.
On en déduit que la fonction dérivée du coût moyen est du signe de $x - 40$.

x	10		40		50
$CM'(x)$		−	0	+	
$CM(x)$	23 390	↘	15 560	↗	15 814

3 Le coût moyen est minimum pour la fabrication de 40 000 chaises.
On a $CM(40) = 15\,560$ et $C_m(40) = 15\,560$, en milliers d'euros.
On a vérifié que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.

38 Fonction de satisfaction

Fonction de satisfaction définie sur $[0 ; 21]$ par :
$f(x) = 0{,}02x^3 - 1{,}4x^2 + 22x$
x est la durée en jours de la croisière.

1 $f'(x) = 0{,}06x^2 - 2{,}8x + 22$
On résout l'équation :
$0{,}06x^2 - 2{,}8x + 22 = 0$.
$\Delta = \dfrac{64}{25}$, les solutions sont 10 et $\dfrac{110}{3} \approx 36{,}67$.

2 On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[0 ; 21]$.

x	0		10		21
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	100	↘	29,82

3 a. Pour qu'il y ait saturation, c'est-à-dire que les consommateurs soient pleinement satisfaits, la croisière doit durer 10 jours.
b. Il y a envie si la croisière dure moins de 10 jours et rejet si elle dure plus de 10 jours.

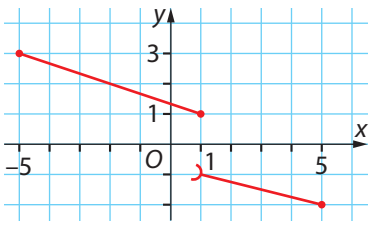
2 Continuité et équation (p. 55)

39 Vrai ou Faux ?

a. Faux : discontinuité en 1
b. Faux : $f(1) = -1$
c. Vrai
d. Vrai

40 Vrai ou Faux ?

a. Faux : ci-contre, par exemple.
b. Vrai : on applique la propriété des valeurs intermédiaires.



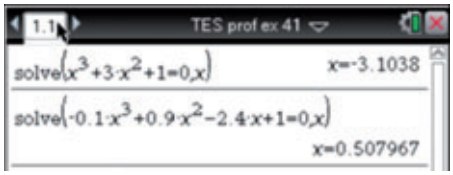
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. Vrai : car on a le tableau de variations :

x	-5		a		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

41 QCM

1 a. une solution .
2 b. 0,508 .



42 Reconnaître graphiquement la continuité

a. La fonction est continue sur [0 ; 7] .
b. La fonction est continue sur [0 ; 3] et sur] 3 ; 7] .

43 Fonction par morceaux

a. Sur [0 ; 1] , $f(x) = -3x^2 + x + 3$.
Sur] 1 ; 9] , $f(x) = \sqrt{x}$.
La fonction f est continue sur [0 ; 1] et sur] 1 ; 9] .
De plus, $f(1) = 1$ et $\sqrt{1} = 1$. Donc la fonction f est continue sur [0 ; 9] .
b. $f'(x) = -6x + 1$ sur [0 ; 1] .
D'où $f'(1) = -5$.
Le nombre dérivé de la fonction racine carrée en 1 est $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.
Sur la représentation graphique, on ne peut pas tracer une tangente au point d'abscisse 1.
La fonction f n'est pas dérivable en 1.

44 Investissement dans une entreprise

a. $C(10) = 4 \times 10 = 40$. $C(40) = 4 \times 40 = 160$.
$C(50) = 50^2 - 75 \times 50 + 1\,650 = 400$.
Le coût total de fabrication de 10 000 objets est de 4 000 €, de 16 000 € pour 40 000 objets et de 40 000 € pour 50 000 objets.
b. $C(40) = 4 \times 40 = 160$ et $40^2 - 75 \times 40 + 1\,650 = 250$.
Donc la fonction C n'est pas continue en 40.
c. Sur [10 ; 40] , la fonction C est croissante.
L'abscisse du sommet de la parabole est :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} - \frac{-75}{2} = 37{,}5 \notin]\,40\,;\,50\,] .$$

Donc la fonction C est croissante sur] 40 ; 50] .
Comme $C(40) = 160$ est inférieur à 250, la fonction C est croissante sur [10 ; 50] .

45 Demande discontinue ?

D'après la représentation graphique donnée dans l'énoncé, il semble que la fonction de demande est continue sur [1 ; 8] et que la demande diminue lorsque le prix du produit augmente de 1 à 8 euros le kg.
On vérifie la continuité au point d'abscisse 3 :
$f(3) = 4{,}5$.
$6 - 0{,}5 \times 3 = 4{,}5$.
Ainsi, la fonction est continue sur [1 ; 8] .
$f(x) = \frac{3x + 4{,}5}{x}$, pour $x \in [\,1\,;\,3\,]$.

$f'(x) = -\frac{4{,}5}{x^2}$.

On a $-\frac{4{,}5}{x^2} < 0$ sur [1 ; 3] , donc la fonction f est décroissante sur [1 ; 3] .
Sur] 3 ; 8] , la fonction f est affine décroissante.
Donc, comme la fonction f est continue sur [1 ; 8] , elle est bien décroissante sur cet intervalle.

46 Continuité de l'offre

Fonction d'offre des producteurs sur le marché des choux-fleurs :

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{6}{x+3} & \text{pour } \ 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0{,}1(x-1)^2 + 2 & \text{pour } \ 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

x est la quantité offerte, en centaines de tonnes, et $f(x)$ le prix en euro par cageot de 10 kg .
1 a. $f(3) = 4$ signifie que pour une offre de 300 tonnes, le prix du chou-fleur est à 0,4 € le kg.
$f(4{,}5) = 3{,}225$.
Pour une offre de 450 tonnes, le prix du chou-fleur est à 0,32 € le kg, à 1 centime près.
b. $f(5) = 3{,}6$
Le prix du cageot de 10 kg est 3,60 € .
500 tonnes représentent 50 000 cageots.
D'où le chiffre d'affaires (CA) dégagé par la totalité de la vente des 500 tonnes de choux-fleurs.
$CA = 50\,000 \times 3{,}60 = 180\,000$ euros.

2 a. Sur [0 ; 4] , $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$; $f'(x) > 0$.
Sur] 4 ; 8] , $f'(x) = 0{,}2(x - 1)$; $f'(x) > 0$
Ainsi, la fonction f est croissante sur [0 ; 4] et sur] 4 ; 8] .
b. $f(4) = 5 - \frac{6}{7} \approx 4{,}14$.
$0{,}1(4-1)^2 + 2 = 2{,}9$.
Comme les résultats précédents sont différents, la fonction f n'est pas continue en 4.
c. Cette fonction est monotone sur [0 ; 4] et sur] 4 ; 8] mais elle ne l'est pas sur l'intervalle [0 ; 8] .
3 Pour trouver les quantités offertes au prix de 3,6 € le cageot, il faut résoudre l'équation $f(x) = 3{,}6$.
On résout, sur [0 ; 4] , l'équation :

$$5 - \frac{6}{x+3} = 3{,}6 \Leftrightarrow \frac{6}{x+3} = 1{,}4 \Leftrightarrow x + 3 = \frac{6}{1{,}4} \Leftrightarrow x \approx 1{,}29.$$

Cette solution convient car elle est dans l'intervalle [0 ; 4] .
On résout, sur] 4 ; 8] , l'équation :
$0{,}1(x-1)^2 + 2 = 3{,}6 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -3$.
On garde la solution 5 dans l'intervalle] 4 ; 8] .
En conclusion, à 3,6 € le cageot, les producteurs offrent 129 tonnes ou 500 tonnes de chou-fleur.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

47 Discussion sur le nombre de solutions

1 a. Pour $f(x) = 1$: deux solutions sur $[1 ; 8]$.
b. Pour $f(x) = 0$: deux solutions sur $[1 ; 8]$.
c. Pour $f(x) = 3$: une solution sur $[1 ; 8]$.
2. On lit le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = k$, $k \in \mathbb{R}$.
• Si $k < -1,6$ ou $k > 5$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
• Si $k = -1,6$ ou $2 < k \leqslant 5$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.
• Si $-1,6 < k \leqslant 2$, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

48 Continuité et équation sur une courbe

a. Les fonctions f_1, f_3 et f_4 sont continues sur $[0 ; 5]$.
b. Équation $f_1(x) = k$:
Une seule solution pour tout réel $k \in [0 ; 4]$.
Équation $f_2(x) = k$:
Si $k \in [0 ; 1]$, une solution.
Si $k \in]1 ; 1,5]$, pas de solution.
Si $k \in]1,5 ; 4]$, une solution.
Équation $f_3(x) = k$:
Une seule solution pour tout réel $k \in [0 ; 4]$.
Équation $f_4(x) = k$:
Si $k \in]0 ; 2]$, deux solutions.
Si $k = 0$ ou $k \in]2 ; 4]$, une solution.

49 Extrema et signe

a.

x	1		5
$f(x)$		+	

b.

x	1		5
$f(x)$		−	

c.

x	1		5
$f(x)$		+	

d.

x	1		3		5
$f(x)$		−	0	+	

50 Tableaux de variations et de signes

a.

x	1		3		7		9
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b.

x	0		2		8		10
$f(x)$		−	0	+	0	+	

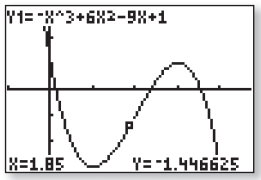
c.

x	10		30		50
$f(x)$		−	0	+	

51 Résoudre par balayage à la calculatrice

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$, $x \in [0 ; 4]$.

1 a.



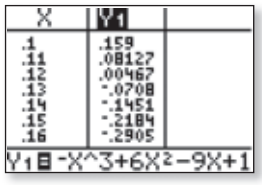
L'équation $f(x) = 0$ semble avoir 3 solutions dans l'intervalle $[0 ; 4]$.
b. $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.
On résout $-3x^2 + 12x - 9 = 0$.
$\Delta = 36$, les solutions sont 1 et 3.
D'où le signe de la dérivée et le tableau de variations de f.

x	0		1		3		4
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	1	↘	−3	↗	1	↘	−3

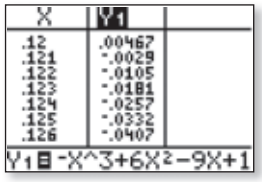
c. On applique la propriété des valeurs intermédiaires successivement sur les intervalles $[0 ; 1]$, $[1 ; 3]$ et $[3 ; 4]$.

x	0		x_1		1		x_2		3		x_3		4
$f'(x)$		−		−	0	+		+	0	−		−	
$f(x)$	1	↘	0	↘	−3	↗	0	↗	1	↘	0	↘	−3

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions, x_1, x_2 et x_3.
d. $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$; $1 \leqslant x_2 \leqslant 3$ et $3 \leqslant x_3 \leqslant 4$.
2 a. La fonction f est continue, strictement décroissante sur $[0,1 ; 0,2]$.
$f(0,1) \approx 0,159$ et $f(0,2) \approx -0,568$
La fonction f passe d'une valeur positive à une valeur négative, donc elle passe par la valeur intermédiaire 0.
Ainsi la fonction f s'annule une fois et une seule entre 0,1 et 0,2. D'où $0,1 \leqslant x_1 \leqslant 0,2$.
b. En tabulant comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :



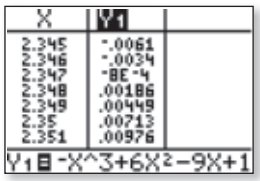
$0,12 \leqslant x_1 \leqslant 0,13$.



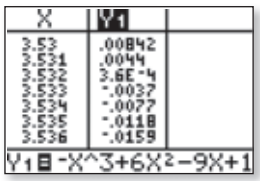
$0,120 \leqslant x_1 \leqslant 0,121$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

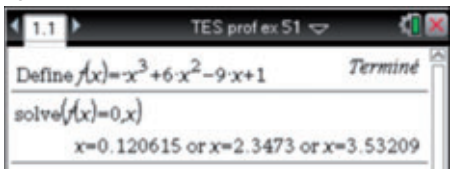
3 De la même façon



$2{,}347 \leqslant x_2 \leqslant 2{,}348$.



$3{,}532 \leqslant x_3 \leqslant 3{,}533$.

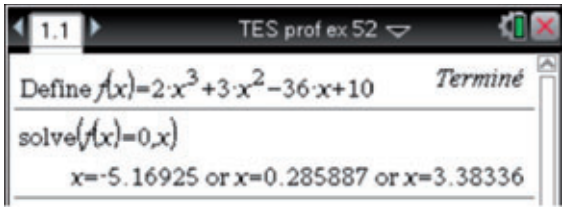


52 Résolution approchée d'équations

1 Soit l'équation :
$2x^3 + 3x^2 - 36x + 10 = 0$, $x \in [-6\,;4]$.
a. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$, sur $[-6\,;4]$.
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$.
On résout l'équation :
$$x^2 + x - 6 = 0\,.$$
$\Delta = 25$, les solutions sont -3 et 2.

x	-6		-3		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-98	↗	91	↘	-34	↗	42
			0		0		

b. L'équation $2x^3 + 3x^2 - 36x + 10 = 0$ possède trois solutions.
$-5{,}17 \leqslant x_1 \leqslant -5{,}16$
$0{,}28 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}29$
$3{,}38 \leqslant x_3 \leqslant 3{,}39$.



2 $x^3 - 30x^2 + 302x + 200 = 2\,000$ (1)
$\Leftrightarrow x^3 - 30x^2 + 302x - 1800 = 0$
Soit f la fonction définie sur $[10\,;50]$ par :
$f(x) = x^3 - 30x^2 + 302x - 1800$.
$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 302$$
$\Delta = -24$. La dérivée est positive.

x	10		α		50
$f'(x)$		$+$			
$f(x)$	-780	↗	0	↗	$63\,300$

L'équation (1) possède une unique solution $\alpha \approx 19{,}13$.

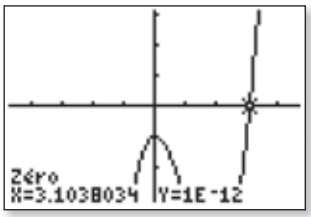
53 Utiliser le solveur de la calculatrice

1 **a.** $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
b. D'où le tableau de variations :

x	-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↗	-1	↘	-5	↗	15

• Sur $[-1\,;2]$, le maximum de f est -1.
Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1\,;2]$.
• Sur $[2\,;4]$, f est continue (car dérivable) et strictement monotone. De plus, $f(2) = -5$ et $f(4) = 15$.
Or $0 \in [-5\,;15]$. Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;4]$.
• **Conclusion :** sur $[-1\,;4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a.

2 **a.** Par la courbe représentative de f :
$3 < a < 4$.
b. Sur calculatrice :
$3{,}103 < a < 3{,}104$.



54 Tableau de signes

$f(x) = x^3 - 3x - 10$ sur $[0\,;5]$.
1 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
Sur $[0\,;5]$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	0		1		α		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	-10	↘	-12	↗	0	↗	100

2 L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0\,;1]$.
D'après la propriété des valeurs intermédiaires sur $[1\,;5]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution comprise entre 1 et 5.
D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;5]$.
$\alpha \approx 2{,}6$.
3

x	0		α		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

55 Étudier le signe d'une dérivée

$f(x) = x^2 + \dfrac{10}{x+1}$ sur $[0\,;5]$
1 $f'(x) = 2x - \dfrac{10}{(x+1)^2} = \dfrac{2x(x^2+2x+1) - 10}{(x+1)^2}$
$$= \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 10}{(x+1)^2}\,.$$
2 **a.** $g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 10$.
$g'(x) = 6x^2 + 8x + 2$.
La fonction g étant définie sur $[0\,;5]$, sa dérivée est strictement positive. Donc la fonction g est continue,

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

strictement croissante sur [0 ; 5] . Elle passe de la valeur $g(0) = -10$, négative, à la valeur $g(5) = 350$, positive. Par conséquent, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en une seule valeur.

b. $\alpha \approx 1{,}12$.

c.

x	0		α		5
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3 $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

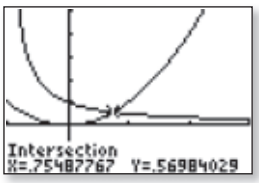
Sur [0 ; 5] , le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		α		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↘	≈ 6	↗	$\dfrac{80}{3} \approx 26{,}27$

56 Points d'intersection

Sur [0 ; 3] , on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1



D'après l'observation à la calculatrice :

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en un point d'abscisse $x_0 \approx 0{,}75$ et d'ordonnée $y_0 \approx 0{,}57$.

Sur [0 ; x_0] , $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Sur [x_0 ; 3] , $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

2 $d(x) = x^2 - \dfrac{1}{x+1}$ sur [0 ; 3] .

a. $d'(x) = 2x + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$d'(x) > 0$ comme somme de nombre positifs.

La fonction d est strictement croissante sur [0 ; 3] .

b. De plus, la fonction d est continue sur [0 ; 3] . Elle passe de la valeur $d(0) = -1$, négative, à la valeur $d(3) = 8{,}75$, positive. Par conséquent, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $d(x) = 0$ admet une unique solution α sur [0 ; 3] .

c. $\alpha \approx 0{,}755$.

d.

x	0		α		3
$d(x)$		$-$	0	$+$	

3 $d(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

On retrouve $\alpha = x_0 \approx 0{,}755$.

Lorsque $x \in [\,0 ; \alpha\,]$, on a :

$f(x) - g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$.

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Lorsque $x \in [\,\alpha ; 3\,]$, on a :

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x)$.

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

On a ainsi confirmé les résultats de la question **1**.

57 Offre, demande et prix d'équilibre

1 Fonction d'offre, définie sur [15 ; 75] par :

$$f(x) = 55{,}8x + 1340 .$$

$f'(x) = 55{,}8 > 0$.

La fonction d'offre est croissante sur [15 ; 75] .

Fonction de demande, définie sur [15 ; 75] par :

$g(x) = -0{,}03x^3 + 5x^2 - 300x + 8\,780$.

$$g'(x) = -0{,}09x^2 + 10x - 300 .$$

On étudie le signe de $g'(x)$.

$\Delta = -8$, négatif.

Comme $a = -0{,}09$, négatif, $g'(x) < 0$ sur [15 ; 75] .

Donc la fonction de demande est décroissante sur [15 ; 75] .

Concrètement, si le prix des ouvrages d'art augmente, la quantité offerte par l'éditeur augmente, mais la demande diminue.

2 **a.** Soit $d(x) = f(x) - g(x)$ sur [15 ; 75] .

$$d'(x) = f'(x) - g'(x) .$$

D'après le signe des dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ vu dans la question **1** , on a $d(x) > 0$.

x	15		x_0		75
$d'(x)$		$+$			
$d(x)$	$-3\,126{,}75$	↗	0	↗	3 776,25

Par conséquent, d'après la propriété des valeurs intermédiaires sur [15 ; 75], la fonction d s'annule en une seule valeur x_0 .

Cette valeur x_0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur [15 ; 75] . $x_0 \approx 33{,}50$.

b. Au prix d'équilibre de 33,50 €, la quantité d'équilibre est de 3 210 livres.

3 Convexité et inflexion (p. 58)

58 QCM

1 **c.** **2** **b.**

59 Vrai ou faux ?

1 **Vrai :** c'est le théorème du cours.

2 **Vrai :** si $f''(x) \geqslant 0$ sur I , alors la fonction f' est croissante sur I . Donc la fonction f est convexe sur I .

3 **Vrai :** si la dérivée seconde s'annule en a en changeant de signe, alors la dérivée f' change de sens de variation en a . Donc le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

60 Position de $\mathscr{C}$ par rapport aux tangentes

1 a. Sur $[-1 ; 2]$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de ses tangentes.
b. Sur $[-1 ; 2]$, la fonction f est concave.
2 Sur $[2 ; 4{,}5]$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes, la fonction f est convexe.
3 Au point d'abscisse 2, la tangente traverse la courbe $\mathscr{C}$. Le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de la courbe.

61 Sens de variation de la dérivée

1 a. On visualise les tangentes à $\mathscr{C}$ sur $[-3 ; 1]$: leurs coefficients directeurs sont de plus en plus petits.
Donc la dérivée f' est décroissante sur $[-3 ; 1]$.
Puis sur $[-1 ; 1]$, le coefficient directeur de la tangente est négatif, mais continue à décroître de 0 à -3.
Donc la dérivée f' est encore décroissante sur $[-1 ; 1]$.
b. La fonction f est alors concave sur $[-3 ; 1]$: la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de ses tangentes.
2 De la même façon, f' est croissante sur $[1 ; 5]$.
La fonction f est donc convexe sur $[1 ; 5]$.
3 Comme, avant 1, les tangentes sont au-dessus de $\mathscr{C}$ et après 1, les tangentes sont en dessous de $\mathscr{C}$, la tangente en 1 traverse la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

62 Variation de f' sur la courbe $\mathscr{C}_f$

a. La fonction f est croissante et concave sur $[-3 ; 3]$, on en déduit que la fonction f' est décroissante sur $[-3 ; 3]$.
b. La fonction f est décroissante et concave sur $[-3 ; 3]$, on en déduit que la fonction f' est décroissante sur $[-3 ; 3]$.
c. La fonction f est décroissante et convexe sur $[-3 ; 3]$, on en déduit que la fonction f' est croissante sur $[-3 ; 3]$.
d. La fonction f est croissante et convexe sur $[-3 ; 3]$, on en déduit que la fonction f' est croissante sur $[-3 ; 3]$.

63 Étudier la convexité d'une fonction

1 La dérivée seconde $f''(x)$ est du signe de $x - 4$ sur $[0 ; 10]$.

x	0		4		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

2 On déduit de la question **1** :
La fonction f est concave sur $[0 ; 4]$ et convexe sur $[4 ; 10]$.
3 La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 4.

64 Polynome du second degré

Sur $[-5 ; 3]$:

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$$
$$g(x) = -0{,}5x^2 - x + 3{,}5.$$

$\mathscr{C}_f$ est la parabole tournée vers le haut.
$\mathscr{C}_g$ est la parabole tournée vers le bas.

1 a. $f'(x) = x + 2$; $f''(x) = 1$.
b. $g'(x) = -x - 1$; $g''(x) = -1$.
2 Comme $f''(x) > 0$, la fonction f est convexe sur $[-5 ; 3]$.
Comme $g''(x) < 0$, la fonction g est concave sur $[-5 ; 3]$.
On l'observe en regardant l'allure des paraboles.

65 Cas général de la parabole

$$f''(x) = 2a$$

Si $a > 0$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ (parabole tournée vers le haut).
Si $a < 0$, la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$ (parabole tournée vers le bas).

66 Reconnaître un point d'inflexion

La courbe présente trois points d'inflexion.
Entre les points d'abscisses -3 et -2 ; entre les points d'abscisses 0 et 1 et entre les points d'abscisses 5 et 6.

67 Existence d'un point d'inflexion

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ pour $x \in [-3 ; 3]$.
1 $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$.
2 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-3		0		3
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

2 La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

68 Fonction polynôme du 3e degré

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $a \neq 0$, sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
$f''(x) = 6ax + 2b$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

1 Premier cas : $a > 0$.
a. Le point d'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$.
b.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
	$\mathscr{C}_f$ concave			$\mathscr{C}_f$ convexe	

2 Deuxième cas : $a < 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
	$\mathscr{C}_f$ convexe			$\mathscr{C}_f$ concave	

Le point d'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

69 Position d'une tangente

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 8$ sur $[1 ; 5]$.
1 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$.
$f(2) = -2$; $f'(2) = -1$.
Équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 :
$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -(x - 2) - 2 = -x$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 **a.** $d(x) = f(x) - (-x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
$(x-2)^3 = (x^2 - 4x + 4)(x-2) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
D'où $d(x) = f(x) - (-x) = (x-2)^3$.

b.
$d(x) = (x-2)^2(x-2)$.
$d(x)$ est du signe de $x-2$ sur $[1\,;5]$.

x	1		2		5
$d(x)$		$-$	0	$+$	

Du signe de $d(x)$, on déduit que sur $[1\,;2[$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}$ et sur $]2\,;5]$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$.

3 Comme la courbe traverse la tangente au point d'abscisse 2, ce point est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

On confirme bien le résultat puisque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 2$.

70 Réaliser des prévisions

$y = 0{,}6x^3 - 7{,}2x^2 + 21{,}6x + 10$, $x \in [0\,;7]$.

1 **a.** L'année 2007 est l'année de rang 2.
Si $x = 2$; $y = 29{,}2$.

b. On pose $f(x) = y$, alors :

$$f'(x) = 1{,}8x^2 - 14{,}4x + 21{,}6.$$

$\Delta = \dfrac{1296}{25} = 51{,}84$.

La dérivée s'annule en 2 et 6.

x	0		2		6		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↗	29,2	↘	10	↗	14,2

c. $f(8) = 29{,}2$.

En 2013, le groupe retrouve un cours équivalent à celui de début 2007.

2 $f''(x) = 3{,}6x - 14{,}4$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 4.
Sur la période 2005-2009, le cours de l'action est concave, sa croissance est ralentie.
Sur la période 2009-2012, le cours de l'action est convexe, sa croissance est accélérée, on constate une reprise économique.

71 Point d'inflexion et coût total

1 $C(q) = 0{,}005(q-40)^3 + 0{,}1q + 50$.

$C'(q) = 0{,}015(q-40)^2 + 0{,}1$
$= 0{,}015(q^2 - 80q + 1600) + 0{,}1$
$= 0{,}015q^2 - 1{,}2q + 24{,}1$.

$$C''(q) = 0{,}03q - 1{,}2.$$

2 $0{,}03q - 1{,}2 = 0 \Leftrightarrow q = 40$.
$C''(q)$ s'annule en changeant de signe pour $q = 40$.
Au point d'abscisse 40, la fonction C admet un point d'inflexion. La fonction C est concave sur $[20\,;40]$ et convexe sur $[40\,;70]$.

3 Coût marginal : $C_m(q) = C'(q)$.

$$C_m'(q) = C''(q) = 0{,}03q - 1{,}2.$$

Variations du coût marginal :

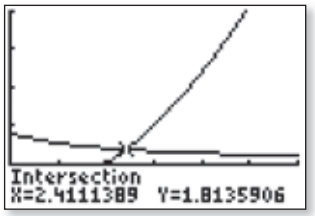
q	20		40		70
$C_m'(q)$		$-$	0	$+$	
$C_m(q)$		↘	0,1	↗	

Le coût marginal est minimum lorsque l'entreprise produit 40 000 bouteilles par mois.

Accompagnement personnalisé (p. 60)

Exercice guidé

72 **1** À la calculatrice, il semble que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;2{,}41]$ et en dessous sur $[2{,}41\,;6]$.



2 **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;6]$, la différence est :

$d(x) = \dfrac{8}{x+2} - (x^2 - 4)$ et on a $d'(x) = \dfrac{-8}{(x+2)^2} - 2x$.

Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $[0\,;6]$, alors $\dfrac{-8}{(x+2)^2} < 0$.
Or $-2x \leqslant 0$ sur $[0\,;6]$.
La dérivée est strictement négative sur $[0\,;6]$, donc la fonction d est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;6]$.

b. $d(0) = 8$ positif et $d(6) = -31$ négatif.
Comme la fonction d est continue et strictement décroissante sur $[0\,;6]$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $d(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;6]$. Par la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2{,}411$.

c. En utilisant le sens de variation de d, on obtient :

x	0		α		6
$d(x)$		$+$	0	$-$	

3 $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow d(x) \geqslant 0$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;\alpha]$ et en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[\alpha\,;6]$.
Le point d'abscisse α est le point d'intersection.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Revoir les outils de base

73 Savoir lire une courbe de coût total

1 a. Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3,5 : $C_m(3{,}5) = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}7$ € par unité.

$C_M(3{,}5) = \frac{6{,}5}{3{,}5} \approx 1{,}9$ € par unité.

b. On visualise le sens de variation du coefficient directeur de la sécante (OM) :

x	0		6		8
$C_M(q)$	‖	↘	1,5	↗	2

2 En $q = 6$, Le coût moyen est égal au coût marginal. Pour une quantité $q > 6$, la sécante est moins pentue que la tangente, le coût moyen est inférieur au coût marginal.

3 Le coût marginal est minimal au point où la tangente traverse la courbe, au point d'inflexion de la courbe du coût total. Pour $q \approx 3$.

Savoir étudier le signe d'un polynôme du second degré

74 a. En D2 =B2^2-4*A2*C2

b. En E2 , on saisit la formule donnée pour savoir si le discriminant est positif ou nul

c. En F2=(-B2-RACINE(D2))/(2*A2)

En G2 =(-B2+RACINE(D2))/(2*A2)

En ligne 4, le discriminant est négatif, l'équation n'a pas de solution.

75

x		-1		3	
$(x-3)^2$	+		+	0	+
$x+1$	−	0	+		+
$A(x)$	−	0	+	0	+

x		-3		0	
$2x$	−		−	0	+
$x+3$	−	0	+		+
$B(x)$	+	0	−	0	+

$-4x^2 + 4x - 1 = 0$. $\Delta = 0$; une solution : 0,5 .

x		$0{,}5$	
$C(x)$	−	0	−

$-3x^2 + 4x - 1 = 0$. $\Delta = 4$; deux solutions 1 et $\frac{1}{3}$.

x		$\frac{1}{3}$		1	
$D(x)$	−	0	+	0	−

$E(x) = \frac{x^2 - 4x + 16}{4x^2}$.

$x^2 - 4x + 16 = 0$. $\Delta = -48$; pas de solution.

x		0	
$E(x)$	+	‖	+

$F(x) = \frac{1-4(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{-4x^2 + 16x - 15}{(x-2)^2}$.

$-4x^2 + 16x - 15 = 0$.

$\Delta = 16$; deux solutions 2,5 et 1,5 .

x		$1{,}5$		2		$2{,}5$
$F(x)$	−	0	+	‖	+	0

Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente

76 1 $f'(3) = \frac{2}{3}$; $f'(3) = 4$.

$T : y = \frac{2}{3}(x-3) + 4 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$.

2 En A : $f'(6) = 1{,}5$; $f(6) = 9$.

$T_A : y = 1{,}5(x-6) + 9 \Leftrightarrow y = 1{,}5x$.

En M

$f'(3{,}5) = \frac{2}{3}$; $f(3{,}5) = 6{,}5$.

$T : y = \frac{2}{3}(x - 3{,}5) + 6{,}5 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{25}{6}$.

77 1 a. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$.

$f(2) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

$f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$; $f'(-2) = -\frac{2}{25} = -0{,}08$.

$T : y = -0{,}08(x-2) + 0{,}2 \Leftrightarrow y = -0{,}08x + 0{,}36$.

b. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$.

$f(4) = 7$.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f(4) = 0{,}5$.

$T : y = 0{,}5(x-4) + 7 \Leftrightarrow y = 0{,}5x + 5$.

c. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$.

$f(3) = -1$.

$f'(x) = -2x + 3$; $f'(3) = -3$.

$T : y = -3(x-3) + (-1) \Leftrightarrow y = -3x + 8$.

Savoir étudier la position relative de deux courbes

78 $f(x) = -x^2 + 2x$.

a. $f(0) = 0$.

$f'(x) = -2x + 2$; $f'(0) = 2$.

$T : y = 2(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = 2x$.

b. $d(x) = f(x) - 2x = -x^2$.

c. Comme $-x^2 \leqslant 0$, La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente T sur $\mathbb{R}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

d. $f(2)=0$; $f'(2)=-2$.
$\mathscr{D} : y = -2(x-2)+0 = -2x+4$.
$h(x) = f(x)-(-2x+4)$
$= -x^2+2x+2x-4$.
$= -(x-2)^2$, négatif ou nul en 2.
La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$.

79 **a.** $f(x)-(-3x)=x^3$.
$\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ sur $]-\infty\,;0]$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $[0\,;+\infty[$.

b. $d(x)=f(x)-(-2x)=x^3-x=x(x^2-1)$.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$d(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Sur $]-\infty\,;-1]$ et $[0\,;1]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$.
Sur $[-1\,;0]$ et $[1\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

Pour aller plus loin

80 Démontrer un théorème

1 $d'(x)=f'(x)-g'(x)$
On a $f'(x)\geqslant 0$ sur I et $g'(x)\leqslant 0$ sur I.
On en déduit $d'(x)\geqslant 0$ sur I.
On démontre ainsi que la fonction d est croissante sur I.
2 Application
a. $f'(x)=0{,}4x$.
$f'(x)\geqslant 0$ sur $[1\,;5]$.
La fonction f est croissante sur $[1\,;5]$.
$g'(x)=\dfrac{-40}{(x+3)^2}$.
$g'(x)<0$ sur $[1\,;5]$.
La fonction g est décroissante sur $[1\,;5]$.
D'après la question **1**, la différence d est croissante sur $[1\,;5]$.

b.

x	1		x_0		5
$d'(x)$		$+$			
$d(x)$	$-6{,}8$	↗	0	↗	3

On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction d sur l'intervalle $[1\,;5]$. On en déduit que l'équation $d(x)=0$ équivalente à $f(x)=g(x)$ admet une unique solution x_0 dans $[1\,;5]$.
Le prix d'équilibre pour ce bien est $x_0\approx 3{,}80$ € au centime près, obtenu à la calculatrice.

81 Raisonner et chercher à démontrer

Courbe de l'exercice 73.
1 **a.** Il y a une seule tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ passant par l'origine.
b. $T : y=f'(a)(x-a)+f(a) \Leftrightarrow y=f'(a)x+(f(a)-af'(a))$.
Cette tangente T passe par l'origine si et seulement si :
$f(a)-af'(a)=0$.
c. $CT(q)=q^3-12q^2+48q$.
$CT'(q)=3q^2-24q+48$.
On a $CT(q)=qCT'(q)$
$\Leftrightarrow q^3-12q^2+48q=3q^3-24q^2+48q$
$\Leftrightarrow 2q^3-12q^2=0$
$\Leftrightarrow 2q^2(q-6)=0$
$\Leftrightarrow q=0$ ou $q=6$.
La valeur 0 ne convient pas.
2 $C_M(q)=q^2-12q+48$ sur $]0\,;9]$.
$C_M'(q)=2q-12$.

q	0		6		8
$C_M'(q)$	‖	$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	‖	↘	$1{,}5$	↗	2

Pour $q=6$, le coût moyen est minimum.
Au point d'abscisse 6, la tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine, son coefficient directeur est le coût marginal en 6 et vaut $C_m(6)=\dfrac{C(6)}{6}=C_M(6)=1{,}5$ en euros par unité.
Dans le cas général :
$C_M'(q)=\dfrac{CT'(q)\times q-CT(q)}{q^2}$.
$C_M'(q)=0 \Leftrightarrow CT'(q)\times q-CT(q)=0$.
On retrouve la condition établie dans la question **1** **b.** vérifiée pour $q=q_0$.
On obtient alors la valeur q_0 pour laquelle le coût moyen est minimum qui est aussi l'abscisse du point de la courbe où la tangente passe par l'origine.
On en déduit $C_m(q_0)=\dfrac{C(q_0)}{q_0}=C_M(q_0)$.
On démontre ainsi que le coût moyen est égal au coût marginal quand le coût moyen est minimal.
3 Le coût marginal est minimum pour la quantité q_0 signifie la dérivée $C_m'(q)$ s'annule en changeant de signe en q_0.
Or $C_m'(q)=CT''(q)$.
Donc le coût marginal est minimum pour la quantité q_0, où la courbe de coût total admet un point d'inflexion.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réussir au Bac (p. 63)

82 QCM – Utiliser la courbe d'une fonction

1 **b.** Attention aux unités : $f'(0) = -1$.

2 **c.** La dérivée s'annule lorsque la tangente est horizontale .

3 **c.** En 1,5 la fonction change de convexité : de convexe, elle passe à concave.

4 **b.** Sur $[-1 ; 1{,}5]$, la tangente est en dessous de la courbe et la fonction f est convexe.

83 Vrai ou faux ? – Utiliser un tableau

1 **Vrai :** entre 4 et 6 .

2 **Faux :** les seules tangentes horizontales de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont pour équations $y = 1$ et $y = 5$.

3 **Vrai :** car sur $[-3 ; 4]$ le minimum vaut 1, positif.

4 **Faux :** car sur $[-3 ; 1]$ la fonction est décroissante, donc sa dérivée est négative sur $[-3 ; 1]$.

84 Sur la courbe de la dérivée

1 **a.** $S = \{-0{,}5 : 0{,}6 ; 2{,}9\}$

b.

x	-1		$-0{,}5$		$0{,}6$		$2{,}9$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2 **a.**

x	-1		0		2		3
$f'(x)$	3	↘	-1	↗	3	↘	-1

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses 0 et 2.

3 Du sens de variation de f' , on déduit le signe de f'' .

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où la représentation de la fonction f'' par $\mathscr{C}_1$

Du signe de f' , on déduit le sens de variation de la fonction f .

x	-1		$-0{,}5$		$0{,}6$		$2{,}9$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

D'où la représentation de la fonction f par $\mathscr{C}_4$.

85 Déterminer une plage de bénéfice

1 $B'(x) = -3x^2 + 6x + 9$, pour $x \in [0 ; 6]$.

$\Delta = 144$; deux solutions 3 et -1 .

x	0		α_1		3		α_2		6
$B'(x)$		$+$	0	$-$					
$B(x)$	-2	↗	0	↗	25	↘	0	↘	-56

La quantité qui optimise le bénéfice est de 3 milliers.

2 **a.** D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 0$ admet 2 solutions.

b. $0{,}208 < \alpha_1 < 0{,}209$.

$4{,}791 < \alpha_2 < 4{,}792$.

À 10 unités près, la plage de bénéfice est l'intervalle $[210 ; 480]$.

Pour une production comprise entre 210 milliers et 480 milliers, le bénéfice est positif.

86 Signe de la fonction dérivée

1 $f(x) = x - 6 + \dfrac{12}{x} + \dfrac{9}{x^2}$ sur $[1 ; 10]$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{12}{x^2} - \dfrac{2 \times 9}{x^3} = \dfrac{x^3 - 12x - 18}{x^3}$.

2 **a.** $g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	0		2		α		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-29	↘	-34	↗	0	↗	862

b. Sur $[1 ; 2]$, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution et en appliquant la propriété des valeurs intermédiaires sur $[2 ; 10]$, on démontre que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α comprise entre 2 et 10.

Donc l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α sur $[1 ; 10]$.

À la calculatrice : $4{,}05 < \alpha < 4{,}06$.

c.

x	1		α		10
$g(x)$		$-$	0	$+$	0

3 La fonction f' est du signe de g sur $[1 ; 10]$.

x	1		α		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16	↘	$f(\alpha)$	↗	$5{,}29$

À la calculatrice : $\alpha \approx 4{,}054\,5$.

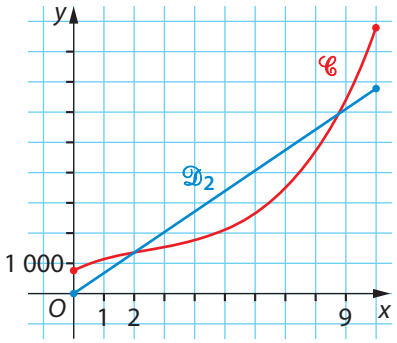
La fonction f admet un minimum en $\alpha \approx 4{,}05$ (à 0,01 près).

87 Étude d'une fonction de coût total

Partie A Étude du bénéfice

1 La droite $\mathscr{D}_1$ représente la recette et le coût étant supérieur à la recette, l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice.

2 **a.**



L'entreprise réalise un bénéfice si elle fabrique et vend entre 2 et 8,7 km de tissu.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. $B(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$
$= -15x^3 + 120x^2 + 180x + 750$.
$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.
c. $\Delta = 90\,000$, deux solutions 6 et $-\frac{2}{3}$.

x	0		6		10
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−750	↗	1 410	↘	−1 950

Pour 6 km de tissu fabriqué et vendu, le bénéfice est maximal vaut 1 410 €.

Partie B Étude du coût marginal

$C_m(x) = 45x^2 + 240x + 500$.
$C_m'(x) = 90x - 240$.

x	0		$\frac{8}{3} \approx 2{,}67$		10
$C_m'(x)$		−	0	+	
$C_m(x)$		↘		↗	

La dérivée du coût marginal, $C_{m'}$ est égale à la dérivée seconde du coût total.
Ainsi, C'' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{8}{3}$.

La courbe de coût total C admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{8}{3}$, point où le coût marginal C_m admet un minimum.

Partie C Étude du coût moyen

1 $C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$.

$C_M'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2}$

$= \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2} = \frac{30(x^3 - 4x - 25)}{x^2}$.

D'autre part,
$(x-5)(x^2 + x + 5) = x^3 + x^2 + 5x - 5x^2 - 5x - 25$
$= x^3 - 4x^2 - 25$.
D'où $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2 + x + 5)}{x^2}$.

2 On résout $x^2 + x + 5 = 0$.
$\Delta = -19$.
L'équation n'a pas de solution et le trinôme $x^2 + x + 5$ est strictement positif pour tout réel x.
Sur] 0 ; 10] $C_M'(x)$ est du signe de $x - 5$.

q	0		5		10
$C_M'(q)$	‖	−	0	+	
$C_M(q)$	‖	↘	425	↗	875

3 **a.** Le coût moyen est minimum en $x_0 = 5$.
Pour 5 km de tissu fabriqué et vendu :
$C_M(5) = 425$; coût moyen 425 € par km.
$C_m(5) = 425$; coût marginal 425 € par km.
$C(5) = 2\,125$; coût total 2 125 €.
b. $B(5) = 1\,275$ €.

88 Fonction d'offre

Partie A Étude du prix *P* proposé par le fournisseur

1 $P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$.
Sur [100 ; 1 000], $P'(x) < 0$.

2

x	100		1 000
$P'(x)$		−	
$P(x)$	2	↘	$\frac{18}{11}$

Plus la masse commandée augmente, plus le prix au kg diminue.

Partie B Étude de la somme *S* à dépenser par le supermarché

1 $S'(x)$ est du signe de $x^2 + 200x + 30\,000$.
$\Delta = -80\,000$.

x	100		x_0		1 000
$S'(x)$		+			
$S(x)$	200	↗	900	↗	$\frac{13\,000}{11} \approx 1181{,}82$

Plus la masse commandée augmente, plus la dépense augmente.

2 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction S sur l'intervalle [100 ; 1 000].
On en déduit que l'équation $S(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans l'intervalle [100 ; 1 000].
À la calculatrice : $x_0 \approx 724$.
Le supermarché peut commander au maximum 724 kg de pommes sans dépasser son budget.
b. On résout l'équation :

$\frac{x(x+300)}{x+100} = 900 \Leftrightarrow x^2 + 300x = 900x + 90\,000$
$\Leftrightarrow x^2 - 600x - 90\,000 = 0$.

$\Delta = 720\,000$.
$x_1 = \frac{600 - \sqrt{720\,000}}{2} = 300 - 300\sqrt{2}$.
$x_1 \notin$ [100 ; 1 000] ne convient pas.
$x_2 = \frac{600 + \sqrt{720\,000}}{2} = 300 + 300\sqrt{2}$.
On obtient $x_0 = x_2 = 300 + 300\sqrt{2} \approx 724$.

89 Propagation d'une maladie

Partie A Lectures graphiques

1 Il y a 2 000 malades le 10e jour et le 27e jour.
2 Le nombre de malade est maximal le 20e jour, avec 4 000 malades.
3 La vitesse de propagation de la maladie est la plus grande au point d'inflexion, le 10e jour.

Partie B Étude théorique

1 $f'(t) = -3t^2 + 60t = 3t(-t + 20)$.

t	0		20		30
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	4 000	↘	0

L'équation $f(t) = 10$ admet deux solutions :
$t_1 = 10$ et $27 < t_2 < 28$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 **a.** $f''(t) = -6t + 60$.

b.

t	0		10		30
$f''(t)$		+	0	−	
$f'(t)$	0	↗	300	↘	−900

La fonction f est convexe sur $[0 ; 10]$.
La fonction f est concave sur $[10 ; 30]$.
Les dix premiers jours, la vitesse de propagation de la maladie augmente, il y a accélération du nombre de cas. Du dixième au trentième jour, la vitesse de propagation de la maladie diminue. Jusqu'au 20e jour, le nombre de cas par jour augmente mais de moins en moins vite et ensuite le nombre de cas par jour diminue.

c. Pour $t = 10$, la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe. En ce point la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion.
C'est le 10e jour que la vitesse de propagation de la maladie est maximale.

d. $f'(10) = 300$.
Le 10e jour on a constaté 300 nouveaux cas.

90 Rythme de croissance

1 **a.** 1990 correspond à $x = 40$.
$S(40) = 92$ milliers de km^2.

b. $\dfrac{92 - 89{,}6}{89{,}6} \approx 0{,}027$.
Soit un pourcentage d'erreur de 2,7 %.

c. 2015 correspond à $x = 65$.
$S(65) = 156{,}375$ milliers de km^2.

2 **a.** $S'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}18x + 3{,}6$.
$S''(x) = 0{,}006x - 0{,}18$.

b. On étudie le signe de $S'(x)$.
$\Delta = -0{,}0108$ et $a = 0{,}003 > 0$.
D'où $S'(x) > 0$.
On en déduit que la fonction S est croissante sur $[0 ; 70]$.
Selon ce modèle, de 1950 à 2020, la superficie de l'espace urbain en France sera croissante.

3

x	0		30		70
$S''(x)$		−	0	+	
$S'(x)$		↘		↗	

Le rythme de croissance est le plus faible pour $x = 30$, c'est-à-dire en 1980.
Cette année correspond au point d'inflexion de la fonction S.

4 D'après le tableau initial, le rythme de croissance de l'espace urbain entre les recensements de 1999 et 2007 est donné par le quotient : $\dfrac{118{,}8 - 100}{2007 - 1999} = 2{,}35$.
Soit un accroissement de 2,35 milliers de km^2 par an durant cette période.
La « pente » de la courbe de la fonction S est presque identique entre les années 1999-2007 et entre les années 1950-1960.
Sur la période 1970-1990, la pente de la courbe est plus faible.

Réinvestir... (p. 256)

91 ... en décoration

Le triskel

1 **a.** $f'(x) = \dfrac{3}{32}x^2 - \dfrac{6x}{16} = \dfrac{3}{32}x(x - 4)$.

b.

x	0		4		
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		↗ 2		↘ 1	↗

c. $f''(x) = \dfrac{3}{16}x - \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{16}(x - 2)$.
Pour $x = 2$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(2 ; 1{,}5)$.

2 **a.** $g'(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{7}{4}x^2 = \dfrac{x^2}{4}(2x - 7)$.

x	0		3,5		
$g'(x)$	−	0	−	0	+
$g(x)$		↘ 2		↘ ≈ −4,25	↗

3 **a.** La courbe rouge est modélisée par la fonction f sur $[0 ; 5]$. La bleue par la fonction g sur $[0 ; 3]$.

b. Le raccordement des deux courbes se fait en $x_0 = 0$.

c. $f'(0) = g'(0) = 0$. On en déduit qu'il s'agit d'un « bon » raccordement.

92 ... en technologie

Le toboggan

1 $f'(x) = 0{,}5625x^2 - 2{,}25x$.
$f'(x) = 0$ et $f'(4) = 0$.
Aux deux extrémités de la courbe, la tangente est horizontale. Concrètement, en haut de l'échelle et au niveau du sol, la pente du toboggan est horizontale.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 $f''(x) = 1{,}125x - 2{,}25 = 1{,}125(x-2)$.

x	0		2		4
$f''(x)$		−	0	+	
$f'(x)$	0	↘	$-2{,}25$	↗	0

La pente du toboggan est la plus forte au point d'abscisse 2.

3 On résout l'équation $f(x) = 3{,}5$.

x	0		x_0		4
$f'(x)$		−			
$f(x)$	6	↘	3,5	↘	0

On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f sur $[0\,;4]$.
On en déduit que l'équation $f(x) = 3{,}5$ admet une seule solution x_0 dans $[0\,;4]$.
À la calculatrice : $1{,}776 < x_0 < 1{,}777$.
À 1 cm près, la longueur de la barre est 1,78 cm.

93 … en sciences

Test de Conconi et entraînement sportif

La VMA de Julie est environ 14 km/h.
Voir exercice 125 page 310.

94 … en économie

Rythme de production et rendement

1 $P(2) = 880$ boulons.
$P(4) = 2\,440$ boulons.

2 **a.** $V(L) = P'(L) = -45L^2 + 350L + 150$.
$V(2) = 682$ boulons par heure.
$V(4) = 830$ boulons par heure.

b. On étudie le signe de $P'(L)$.
$\Delta = 149\,500$.
Deux solutions : $L_1 \approx 8{,}19 > 8$ et $L_2 \approx -0{,}41 < 0$, à l'extérieur de $[0\,;8]$.

L	0		8
$V(L)$		+	
$P(L)$	0	↗	4 720

Plus la quantité de travail augmente, plus la production augmente.

3 **a.** $V'(L) = -90L + 350$.

$V'(L)$ s'annule en $L = \dfrac{35}{9} \approx 3{,}89$.

L	0		$\frac{35}{9}$		8
$V'(L)$		+	0	−	
$V(V)$	150	↗	$\frac{7475}{9} \approx 830{,}6$	↘	70

b. $\dfrac{35}{9} \approx 3{,}89$ h ≈ 3 h 53 min.
À 10 minutes près, le rythme de production est maximum pour une quantité de travail de 3 h 50 min, environ 4 heures.

c. Sur $[0\,;4]$ la production est en phase de rendements croissants, la courbe de la production $\mathscr{C}_P$ est convexe.
Sur $[4\,;8]$ la production est en phase de rendements décroissants, la courbe $\mathscr{C}_P$ est concave.

4 En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction P sur $[0\,;8]$, on démontre qu'il existe une seule valeur L_0 telle que $P(L_0) = 3\,000$.
$4{,}68 < L_0 < 4{,}69$.
4,68 h ≈ 4 h 40 min 8 s et 4,69 h ≈ 4 h 41 min 24 s.
À 10 min près, il faut 4 h et 40 min pour honorer la commande de 3 000 boulons.

95 … en économie

Des coûts par morceaux

1 **a.** La fonction C n'est pas continue en 20.
En 20 : $30 \times 20 + 200 = 800$.
$-20^2 + 80 \times 20 - 250 = 950$.
Il n'y a pas de raccordement entre les deux parties de la courbe en 20.
En 40 : $-40^2 + 80 \times 40 - 250 = 1\,350$
et $1\,050 - \dfrac{18\,000}{40 - 100} = 1\,350$.

b. Sur $[0\,;20[$, la fonction C est croissante.
Sur $[20\,;40[$ $C'(x) = -2x + 80 = 2(40 - x)$.
On a $C'(x) > 0$, donc la fonction C est croissante.
Sur $[40\,;80[$ $C'(x) = \dfrac{18\,000}{(x-100)^2}$.
On a $C'(x) > 0$, donc la fonction C est croissante.
La fonction C est croissante sur $[0\,;80]$.

2 Sur $[0\,;19]$, $m = C'(x) = 30$.
Chaque verre coûte 30 € à produire.

b. Sur $[20\,;40[$, $C'(x) = -2x + 80$.
$-2x + 80 = 30 \Leftrightarrow 2x = 50 \Leftrightarrow x = 25$.
Le coût de fabrication du 25e verre est 30 €.
Au point d'abscisse 25, la tangente est parallèle au segment qui représente la fonction C sur $[0\,;20]$.

c. Sur $[40\,;80]$, $C'(x) = \dfrac{18000}{(x-100)^2}$.

$$\frac{18\,000}{(x-100)^2} = 30 \Leftrightarrow (x-100)^2 = \frac{18\,000}{30}$$

$\Leftrightarrow (x-100)^2 = 600$
$\Leftrightarrow x - 100 = \sqrt{600}$ ou $x - 100 = -\sqrt{600}$
$\Leftrightarrow x = 100 + 10\sqrt{6}$ ou $x = 100 - 10\sqrt{6}$.
La première solution est supérieure à 80 et la deuxième n'est pas entière. $100 - 10\sqrt{6} \approx 75{,}5$.
Pour le 76e verre, le coût de production est proche de 30 €.

3 **a.** Soit M un point sur la courbe de coût total, le coût moyen est le coefficient directeur de la droite (OM).

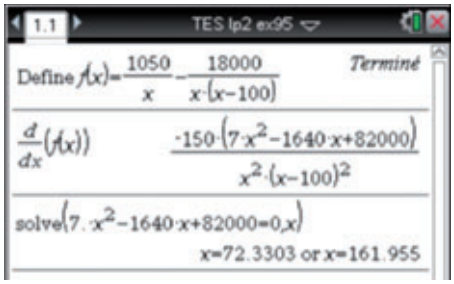
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Sens de variation par lecture graphique :

x	0		20		≈ 70		80
$CM(x)$		↘	40	↘	23,6	↗	

b. $CM(x) = \begin{cases} 30 + \dfrac{200}{x}, & \text{si } 0 \leqslant x < 20 \\ -x + 80 - \dfrac{250}{x}, & \text{si } 20 \leqslant x < 40 \\ \dfrac{1050}{x} - \dfrac{18\,000}{x(x-100)}, & \text{si } 40 \leqslant x \leqslant 80 \end{cases}$

Le coût moyen sera minimal pour une valeur de l'intervalle [40 ; 80] .



On calcule la dérivée du coût moyen sur [40 ; 80] , puis on étudie le signe de la dérivée.
Pour cela on résout l'équation $7x^2 - 1\,640x + 82\,000 = 0$.
Le coût moyen est minimal pour 72 verres de lunettes.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 3

Fonction exponentielle

Partir d'un bon pied (p. 68)

A QCM – Puissances et exposants

1 **c.** $\dfrac{(ab)^3}{b} = \dfrac{a^3b^3}{b} = a^3b^{3-1} = a^3b^2$.

2 **b.** $20 \times 0{,}8^{n-1} = \dfrac{20 \times 0{,}8^n}{0{,}8} = 25 \times 0{,}8^n$.

B Suite géométrique

1 **b.** $u_{n+1} = (1 - 0{,}2)u_n = 0{,}8u_n$.

Donc $u_n = u_1 \times 0{,}8^{n-1} = \dfrac{80 \times 0{,}8^n}{0{,}8} = 100 \times 0{,}8^n$.

2 **a.** $q^3 = \dfrac{u_4}{u_1} = 27$, donc $q = 3$.

Donc $u_n = u_1 \times 3^{n-1} = \dfrac{600 \times 3^n}{3} = 200 \times 3^n$.

Et $u_5 = u_4 \times 3 = 48\,600$.

3 **a.** $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$= 100 + 100 \times 0{,}75 + \ldots + 100 \times 0{,}75^n$

$= 100 \times (1 + 0{,}75 + \ldots + 0{,}75^n)$

$= 100 \times \dfrac{1 - 0{,}75^{n+1}}{1 - 0{,}75} = 400(1 - 0{,}75^{n+1})$

$= 400 - 400 \times 0{,}75 \times 0{,}75^n = 400 - 300 \times 0{,}75^n$.

C Modélisation en suite géométrique

a. On ne peut pas modéliser par une suite géométrique, car la croissance ne paraît pas exponentielle : elle est ralentie à un moment donné.

b. On peut modéliser par une suite géométrique, avec une raison supérieure à 1, car la croissance paraît exponentielle.

c. On peut modéliser par une suite géométrique, avec une raison comprise entre 0 et 1, car la décroissance paraît exponentielle.

D Chiffrer des évolutions

1 **Faux :** $5 \times \left(1 + \dfrac{20}{100}\right)^3 = 8{,}64 \neq 8$.

2 **Vrai :** si CM est le coefficient multiplicateur pour une demi-heure, $\text{CM}^2 = \dfrac{180\,000}{20\,000} = 9 = 3^2$.

La population est donc multipliée par 3 en une demi-heure et $20\,000 \times 3 = 60\,000$.

3. **Faux :** si $\text{CM}_{6\text{ mois}} = \sqrt{1{,}21}$, alors $\text{CM}_{1\text{ an}} = 1{,}21$.

Or $\dfrac{285\,000}{250\,000} = 1{,}14 \neq 1{,}21$.

Découvrir

Activité 1 Étudier à tout instant une population à variation relative constante (p. 70)

Partie A : Dans une culture de bactéries

1 **a.** La population de bactéries double toutes les 20 min, une heure compte trois fois 20 min.
Donc le coefficient multiplicateur est :
$\text{CM} = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

b. $P(2) = P(0) \times 8^2 = 3 \times 8^2 = 192$.
Donc la population est de 192 milliers de bactéries au bout de 2 h.
$P(3) = P(0) \times 8^3 = 3 \times 8^3 = 1\,536$.
La population est donc de 1 536 000 bactéries au bout de 3 h.
$(P(n))$ est une suite géométrique de raison $q = 8$ et de terme initial $P(0) = 3$. On a donc $P(n) = 3 \times 8^n$.

2 **a.** Dans 1 h 20, il y a 4 fois 20 min, donc la population a doublé 4 fois.
Elle est alors de $3 \times 2^4 = 48$, soit 48 milliers de bactéries.
$P\left(\dfrac{4}{3}\right) = 3 \times 8^{4/3} = 48$. On retrouve le même résultat.

b. $P(-2) = 3 \times 8^{-2} = \dfrac{3}{64} \approx 0{,}047$.
Il s'agit de la population de bactéries (en milliers) deux heures avant le début du protocole.

$P\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 3 \times 8^{-5/3} \approx 0{,}094$. Il s'agit de la population de bactéries (en milliers) 1 h 40 avant le début du protocole.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. $P(2,4) = 3 \times 8^{2,4} \approx 441$, soit 441 milliers de bactéries au bout de 2,4 h.
$P(3,4) = 3 \times 8^{3,4} \approx 3\,529$, soit 3 529 000 bactéries au bout de 3,4 h.
La variation relative du nombre de bactéries entre ces deux instants est de :

$$\frac{P(3,4)-P(2,4)}{P(2,4)} = \frac{3\,529-441}{441} \approx 7 .$$

Partie B : Application

1 En utilisant le taux de variation, on obtient :

$$t = \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} \Leftrightarrow t \times f(x) = f(x+1) - f(x)$$
$$\Leftrightarrow t \times f(x) + f(x) = f(x+1)$$
$$\Leftrightarrow (1+t) f(x) = f(x+1) .$$

Donc, pour $x = n$, on a $f(n+1) = (1+t)\, f(n)$, donc $(f(n))$ est une suite géométrique de raison $1+t$.
On obtient donc $f(n) = f(0) \times (1+t)^n$.

2 À la fin du premier trimestre 2015, il s'est écoulé 3 ans et 3 mois, soit 3 ans et $\frac{3}{12}$ d'année.

a. Au Honduras, $f(x) = f(0) \times \left(1+\frac{5}{100}\right)^x = 8{,}1 \times 1{,}05^x$.

Alors, $f\left(3+\frac{3}{12}\right) = f(3{,}25) = 8{,}1 \times 1{,}05^{3,25} \approx 9{,}5$

soit environ 9,5 millions d'habitants.

b. En Ukraine, $f(x) = f(0) \times \left(1-\frac{0{,}6}{100}\right)^x = f(0) \times 0{,}994^x$.

Alors $f(3{,}25) = 45{,}1 \times 0{,}994^{3,25} \approx 44{,}2$ soit 44,2 millions d'habitants.

Activité 2 Lire le sens de variation de $x \mapsto q^x$ (p. 70)

$(f(n))$, où n est un entier naturel est une suite géométrique de raison q.
• *Géogébra* : la fonction f est décroissante.
Cela correspond au sens de variation d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}6$, c'est-à-dire comprise entre 0 et 1.
• *TI-Nspire* : la fonction est croissante.
Cela correspond au sens de variation d'une suite géométrique de raison $q = 2 > 1$.
• *Tableur* : la fonction f est croissante.
Cela correspond au sens de variation d'une suite géométrique de raison $q = 3{,}25 > 1$.

Activité 3 Découvrir des relations fonctionnelles (p. 71)

1 **a.** $f(3+5) = f(3) \times f(5) \Leftrightarrow f(8) = f(3) \times f(5)$
$\Leftrightarrow 2^8 = 2^3 \times 2^5$.

b. $f(x+0) = f(x) \times f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(x) \times f(0)$
$\Leftrightarrow f(0) = 1 = 2^0$.

c. $f(x+(-x)) = f(x) \times f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) \times f(-x)$
$\Leftrightarrow 1 = f(x) \times f(-x)$.

Donc $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

d. $2x = x + x$ donc $f(2x) = f(x+x) = f(x) \times f(x)$.
On a donc $f(2x) = (f(x))^2$.
On peut conjecturer que $f(nx) = (f(x))^n$.

e. On a $f(1) = f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$.

Comme $f(1) = 2$ et $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} = 2^{1/2}$.

2 **a.** En C2, =$E$2^B2 . **b.** En D4, =C2*C3 .
c. En D6, 1/C2 . En D7, =C2^2 . En D9, =C2^B8 .
d. Il faut que $n = 0{,}5$.
e. Voir tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1		valeurs	image f(x)=q^x	avec les relations	base q
2	x	-3,5	0,399207109		1,3
3	y	3,5	2,504965409		
4	x+y	0	1	1	
5	0	0	1		
6	-x	3,5	2,504965409	2,504965409	
7	2x	-7	0,159366316	0,159366316	
8	n	4			
9	n*x	-14	0,025397623	0	

Activité 4 Découvrir un nouveau nombre (p. 71)

1 Quelles que soient les valeurs positives de q, la courbe représentative de la fonction f semble au-dessus de ses tangentes, donc f semble convexe.

2 **a.** $f'(1{,}5)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en M
$\approx 5{,}71$.
$f'(0)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en A
$\approx 1{,}1$.

b. Sur la figure 2, la fonction représentée est la fonction $f : x \mapsto 2^x$.
$f'(3)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3
$\approx 5{,}55$.
$f'(0)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0
$\approx 0{,}69$.

c. Il semble que si q augmente sur $]1 ; +\infty[$, alors $f'(0)$ augmente aussi.
On utilise la propriété des valeurs intermédiaires en considérant la fonction $q \mapsto f'_q(0)$, et on obtient que l'équation $f'_q(0) = 1$ (d'inconnue q) admet une unique solution.

3 On trouve la valeur $e \approx 272$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Savoir faire

1. Utiliser une fonction $x \mapsto q^x$ (p. 73)

Exercice d'application

1 **1** Chaque année, son capital augmente de 4,5 %, c'est-à-dire est multiplié par 1,045.
Au bout de 3 ans, son capital est de :
$$800 \times 1{,}045^3 \approx 912{,}93 \text{ €}.$$
2 **a.** À sa majorité, $x = 4{,}5$. Donc le capital de Thomas est : $f(4{,}5) = 800 \times 1{,}045^{4{,}5} \approx 975{,}24$ €.
b. $f(x) > 2 \times 800 \Leftrightarrow 800 \times 1{,}045^x > 2 \times 800$
$\Leftrightarrow 1{,}045^x > 2$.

On cherche x tel que $1{,}045^x > 2$.
On utilise la calculatrice graphique.
On en déduit que $1{,}045^x > 2$, c'est-à-dire que Thomas doublera son capital, au bout de 16 ans.

X	Y_1
13	1.7722
14	1.8519
15	1.9353
16	2.0224
17	2.1134
18	2.2085
19	2.3079

2. Calculer avec une exponentielle (p. 75)

Exercices d'application

2 $A = \dfrac{e^2 \times e^3}{(e^{-1})^3} = \dfrac{e^2}{e^{-3}} = e^8$.

$B = (e^3)^{-1} \times \dfrac{e^4}{e^{-2}} = e^{-3} \times e^6 = e^3$.

3 • $e^{2x} + 2e^x + 1 = (e^x)^2 + 2e^x + 1 = (e^x + 1)^2$ (identité remarquable).
• $(e^x - 1)(2e^x - 1) = 2(e^x)^2 - e^x - 2e^x + 1$
$= 2e^{2x} - 3e^x + 1$.
• $2(x-2)e^x = (2x-4)e^x = 2xe^x - 4e^x$.
• $(e^{-x} + 1)(e^x - 1) = e^0 - e^{-x} + e^x - 1 = e^x - e^{-x} = e^x - \dfrac{1}{e^x}$.

4 **a.** $e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b. $e^{-x+1} = e^2 \Leftrightarrow -x + 1 = 2 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

5 **a.** $e^{-x+3} = e \Leftrightarrow e^{-x+3} = e^1 \Leftrightarrow -x + 3 = 1$
$\Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$.

b. $e^{-2x} - e^{x+3} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = e^{x+3} \Leftrightarrow -2x = x + 3$
$\Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

6 **a.** $3e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 1$
$\Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

b. $e^{-x+3} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-x+3} = e^{-1} \Leftrightarrow -x + 3 = -1$
$\Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$.

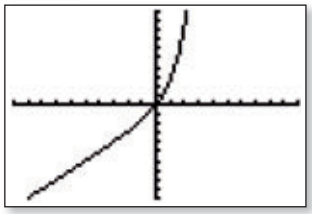
7 **a.** $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1$
$= 2e^{2x} - e^x - 1$.

b. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ ou $2e^x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^x = e^0$ ou $e^x = -\dfrac{1}{2}$: impossible puisque $e^x > 0$ pour tout réel x.
$\Leftrightarrow x = 0$.

3. Étudier une fonction avec e^x (p. 77)

Exercices d'application

8 **1** On obtient le graphique ci-contre. On en déduit que la fonction f semble croissante sur $\mathbb{R}$.



2 $f'(x) = e^x + 1$.
Or, $e^x > 0$ pour tout réel x.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
3 On en déduit donc l'exactitude de la conjecture : f est croissante sur $\mathbb{R}$.

9 **1** $g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$.
2 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $g'(x)$ est du signe de $2x + 3$.
On a $2x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{3}{2}$.
3 On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$-2e^{-3/2}$	↗	

4 $h'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x = g(x)$ pour tout réel x.
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

On obtient donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)=g(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	↘			↗	

avec $h'(x)=g(x)$.
On a donc h' décroissante, donc h concave sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$, et h' croissante, donc h convexe sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

10 **1** $f'(x)=0,5-0,5\mathrm{e}^{x}$.
On cherche pour quelles valeurs de x la dérivée est positive ou nulle : $0,5-0,5\mathrm{e}^{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\leqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant 0$.

D'où le tableau de variations de f sur $[-10;3]$:

x	-10		0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$3,5$	↘	

Avec $f(-10)=-1-0,5\mathrm{e}^{-10}\approx -1$
et $f(3)=3,5-0,5\mathrm{e}^{3}\approx -4,5$.

2 Sur $[-10;0]$, f est continue et strictement croissante. $f(-10)\approx -1$ et $f(0)=3,5$ donc la fonction f prend la valeur intermédiaire 0. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-10;0]$.
On raisonne de la même façon sur $[0;3]$. Ainsi, sur $[-10;3]$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions.

4. Étudier une fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ (p. 79)

Exercices d'application

11 **1** $f'(x)=2\mathrm{e}^{-0,5x}-0,5(2x+1)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
$=(2-x-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}=(1,5-x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Or, une exponentielle est toujours positive.
Donc $f'(x)$ est du signe de $1,5-x$.
$f''(x)=-\mathrm{e}^{-0,5x}-0,5(1,5-x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
$=0,5(-2\mathrm{e}^{-0,5x})-0,5(1,5-x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
$=0,5(x-3,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$4\mathrm{e}^{-0,75}$	↘	

3 $f''(x)=0,5(x-3,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 0,5(x-3,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}=0$
$\Leftrightarrow x-3,5=0$ (une exponentielle ne s'annule jamais et est toujours strictement positive)
$\Leftrightarrow x=3,5$.
De plus, $f''(x)$ est du signe de $x-3,5$, donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en 3,5.
D'où le point de la courbe représentative de la fonction f d'abscisse 3,5 est un point d'inflexion.

12 **1** **a.** $g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2=2(\mathrm{e}^{2x}-1)$.
b. $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}\geqslant \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow 2x\geqslant 0$
$\Leftrightarrow x\geqslant 0$.
Donc $g'(x)$ est positif sur $[0;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty;0]$.
c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		2	↗	

d. $g''(x)=2\times 2\mathrm{e}^{2x}=4\mathrm{e}^{2x}>0$ pour tout réel x.
Donc la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.
2 $g(x)\geqslant 2$ d'après le tableau de variations précédent, donc $g(x)>0$ pour tout réel x.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

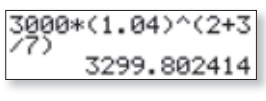
3 $h'(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x+1=g(x)$.
Donc $h''(x)=g'(x)$ et $h''(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
Donc h admet un point d'inflexion : le point d'abscisse 0 de sa courbe représentative.

QCM (p. 81)

13 **b.** Sur $\mathbb{R}$, $0,95^{x}$ est toujours strictement positif.

14 **c.** $P(x)=3\,000\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^{x}$.

15 **b.** 2 semaines et 3 jours est : $2+\frac{3}{7}$ semaines.
$P\left(2+\frac{3}{7}\right)=3\,000\times 1,04^{2+\frac{3}{7}}$
$\approx 3\,300$, à l'unité près.



16 **b.** On développe :
$(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}+4)=(\mathrm{e}^{x})^{2}+4\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}-4=\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{x}-4$.

17 **a.** Comme e^{-x} apparaît au dénominateur en **a.**, on multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{x} et on utilise $\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}=1$.

18 **a.** $\mathrm{e}^{1-x^{2}}=1 \Leftrightarrow 1-x^{2}=0 \Leftrightarrow x^{2}=1$
$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.

19 **a.** $\mathrm{e}^{x}+1$ est toujours strictement positif.
Donc $f(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-x}-1$.
Or $\mathrm{e}^{-x}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\geqslant 1 \Leftrightarrow -x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 0$.

20 **c.** Toutes les valeurs positives sauf 1 sont solutions.

21 **c.** $f(x)$ un produit et $(\mathrm{e}^{u})'=u'\times\mathrm{e}^{u}$.
D'où : $f'(x)=2\times\mathrm{e}^{-x}+(-\mathrm{e}^{-x})\times(2x-1)$.

22 **b.** $f'(x)=-(-2x)\mathrm{e}^{-x^{2}}=2x\,\mathrm{e}^{-x^{2}}$ s'annule en 0 en changeant de signe (négative, puis positive).
Donc, en 0, la fonction f admet un minimum égal à $f(0)=9$.
Donc f est positive sur $[-3;3]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Exercices

1 Fonctions $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$ (p. 82)

23 Vrai ou faux ?

1 **Faux :** si $0 < q < 1$, alors la fonction $x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2 **Vrai :** $4 \times 2^x = 2^2 \times 2^x = 2^{2+x}$.

3 **Vrai :** $\dfrac{5^{x+3}}{2^x} = \dfrac{5^x \times 5^3}{2^x} = 125 \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 125 \times 2{,}5^x$.

4 **Vrai :** $\dfrac{(2^x)^3}{4^{x+1}} = \dfrac{2^{3x}}{(2^2)^{x+1}} = 2^{3x-2x-2} = 2^{x-2}$.

24 QCM

1 **c.** $f(t+1) - f(t) = 0{,}7^{t+1} - 0{,}7^t = 0{,}7^t(0{,}7 - 1)$
$= -0{,}3 \times 0{,}7^t$.

2 **b.** $\dfrac{g(t+1)}{g(t)} = \dfrac{3 \times 1{,}5^{t+1}}{3 \times 1{,}5^t} = 1{,}5$.

25 Associer courbes et fonctions

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives de fonctions décroissantes, donc de fonctions $x \mapsto q^x$, où $0 < q < 1$.
De plus, $h(-1) = 0{,}5^{-1} = 2$, donc $\mathscr{C}_2$ représente la fonction h et $\mathscr{C}_1$ représente la fonction k.
$\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sont les courbes représentatives de fonctions croissantes, donc de fonctions $x \mapsto q^x$, où $q > 1$.
De plus, $f(1) = 2^1 = 2$, donc $\mathscr{C}_3$ représente la fonction f et $\mathscr{C}_4$ représente la fonction g.

26 Comparer les nombres q

a. On constate que :
$f_1(1) = q_1^{\,1} = q_1$; $f_2(1) = q_2^{\,1} = q_2$; $f_3(1) = q_3^{\,1} = q_3$.
Or, $f_1(1) = 2$, donc $q_1 = 2$.
De plus, $f_1(1) > f_2(1) > f_3(1)$. Donc $q_1 > q_2 > q_3$.

b. On constate que :
$f_1(-1) = q_1^{\,-1} = \dfrac{1}{q_1}$; $f_2(-1) = q_2^{\,-1} = \dfrac{1}{q_2}$; $f_3(-1) = q_3^{\,-1} = \dfrac{1}{q_3}$.
$f_1(-1) = 2$, donc $q_1 = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $f_3(-1) > f_1(-1) > f_2(-1)$.
Donc $\dfrac{1}{q_3} > \dfrac{1}{q_1} > \dfrac{1}{q_2}$. D'où $q_3 < q_1 < q_2$.

27 Variations absolue et relative

a. $f(t+1) - f(t) = 3 \times 0{,}75^{t+1} - 3 \times 0{,}75^t$
$= 3 \times 0{,}75^t \times (0{,}75 - 1)$
$= 3 \times 0{,}75^t \times (-0{,}25)$.
D'où : $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{3 \times 0{,}75^t \times (-0{,}25)}{3 \times 0{,}75^t} = -0{,}25$.

b. $f(t+1) - f(t) = 0{,}3 \times 1{,}94^{t+1} - 0{,}3 \times 1{,}94^t$
$= 0{,}3 \times 1{,}94^t \times (1{,}94 - 1)$
$= 0{,}3 \times 1{,}94^t \times 0{,}94$.
D'où : $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{0{,}3 \times 1{,}94^t \times 0{,}94}{0{,}3 \times 1{,}94^t} = 0{,}94$.

28 Transformer des expressions

$A = \dfrac{2^x \times (2^{3x})^2}{2^{x+3}} = \dfrac{2^x \times 2^{6x}}{2^{x+3}} = 2^{7x-(x+3)} = 2^{6x-3}$.

$B = \dfrac{1{,}3^{2x} \times (1{,}3)^{-x+2}}{2 \times 1{,}3} = \dfrac{1{,}3^{x+2}}{2 \times 1{,}3} = \dfrac{1}{2} \times 1{,}3^{x+1}$.

29 Calcul de sommes

1 On a :
$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = \dfrac{1 - q^7}{1 - q}$.
D'où, pour $q = 2{,}5$,
$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = \dfrac{1 - q^7}{1 - q} = \dfrac{1 - 2{,}5^7}{1 - 2{,}5} \approx 406{,}23$.
et pour $q = 0{,}93$,
$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = \dfrac{1 - q^7}{1 - q} = \dfrac{1 - 0{,}93^7}{1 - 0{,}93} \approx 5{,}69$.

2 $1 + q^x + q^{2x} + q^{3x} + q^{4x} + q^{5x} + q^{6x}$
$= 1 + (q^x) + (q^x)^2 + (q^x)^3 + (q^x)^4 + (q^x)^5 + (q^x)^6$
$= \dfrac{1 - (q^x)^7}{1 - (q^x)} = \dfrac{1 - q^{7x}}{1 - q^x}$.

Pour les exercices 30 et 31

Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

30 **a.** $0 < 0{,}35 < 1$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
b. $1{,}94 > 1$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

31 **a.** $2{,}8 > 1$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. $0 < 0{,}99 < 1$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

32 Modéliser une évolution

1 $f(x) = 3\left(1 + \dfrac{8}{100}\right)^x = 3 \times 1{,}08^x$ en m^2,
x correspondant au nombre de mois.

2 $f(x) = 2\left(1 - \dfrac{30}{100}\right)^x = 2 \times 0{,}7^x$ en mL,
x correspondant au nombre d'heures.

33 Taux d'évolution

a. Chaque année, la population double, donc est multipliée par 2. On a donc un coefficient multiplicateur égal à 2.
Par conséquent, $P(x) = 5 \times 2^x$.

b. 25 ans correspondent à 2,5 dizaines d'années.
La population sera de $P(2{,}5) = 5 \times 2^{2{,}5} \approx 17$ millions.

c. $t = \dfrac{P(0{,}1) - P(0)}{P(0)} = \dfrac{3 \times 2^{0{,}1} - 3}{3} = 2^{0{,}1} - 1 \approx 0{,}07$
soit une augmentation d'environ 7 % par an.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

34 Production continue en augmentation

1 **a.** Au 1er février 2012, il s'est écoulé un mois.
La production est donnée par $P(1) = 3 \times 1{,}04^1 = 3{,}12$ soit 3 120 briques.
Au 15 mars, il s'est écoulé 2,5 mois.
La production est donnée par $P(2{,}5) = 3 \times 1{,}04^{2{,}5} \approx 3{,}31$ soit 3 310 briques.

b. $t = \dfrac{P(0{,}5) - P(0)}{P(0)} = \dfrac{3 \times 1{,}04^{0{,}5} - 3}{3}$
$= 1{,}04^{0{,}5} - 1 \approx 0{,}0198$
soit environ 1,98 % d'augmentation tous les 15 jours.

2 $1{,}04 > 1$, donc la fonction P est croissante sur son ensemble de définition.

3 **a.** On lit graphiquement qu'à partir du 8e mois, c'est-à-dire du mois d'août, la production dépasse les 4 000 briques.

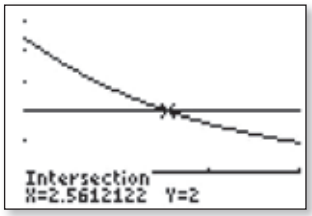
b. Pour $x = 7$, la production n'est que d'environ 3 948 briques, alors que pour $x = 8$, on a une production d'environ 4 106 briques. On retrouve donc le résultat de la question précédente : c'est à partir du mois d'août que la production dépasse les 4 000 briques.

X	Y1
7	3.796
8	3.9478
9	4.1057
10	4.2699
11	4.4407
12	4.6184
13	4.8031

35 Étude d'une demande

1 Comme $q = 0{,}6 \in]0\,;1[$, la fonction f est décroissante sur $[1\,;4]$. Plus le prix p augmente, plus la demande Q diminue.

2 **a.** $f(1) = 7{,}4 \times 0{,}6 = 4{,}44 > 2$ et $f(4) = 7{,}4 \times 0{,}6^4 \approx 0{,}9 < 2$.
Sur $[1\,;4]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. f prend la valeur intermédiaire 2.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;4]$.



b. À la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 2{,}56$.

c. Pour écouler totalement les 2 tonnes de fruits, le prix maximal est $p = 2{,}56$ € par kg.

36 Prix d'équilibre

1 • $1{,}05 > 1$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[10\,;30]$.

• $g(x) = 7 \times \left(\dfrac{7}{1{,}05}\right)^x$, avec $0 < \dfrac{7}{1{,}05} < 1$, donc g est strictement décroissante sur $[10\,;30]$.
Plus le prix augmente, plus l'offre augmente et la demande diminue.

2 **a.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1{,}05^x = \dfrac{7}{1{,}05^x} \Leftrightarrow (1{,}05^x)^2 = 7$
$\Leftrightarrow (1{,}05^2)^x = 7 \Leftrightarrow 1{,}1025^x = 7$.

b.



X	Y1
19.94	6.9982
19.941	6.9989
19.942	6.9996
19.943	7.0003
19.944	7.0009
19.945	7.0016
19.946	7.0023

On en déduit que $\alpha \approx 19{,}94$.

3 On est au prix d'équilibre lorsque l'offre et la demande sont égales, c'est-à-dire lorsque $f(x) = g(x)$.
Ce prix est donc de 19,94 € le livre.
La quantité de livres offerte ou demandée est alors de $f(19{,}94) \approx 2{,}65$ milliers.

37 Réaliser des prévisions

1 En 2011, $t = 31$. $f(31) = 4{,}54 \times 1{,}014^{31} \approx 6{,}99 < 7$.
L'estimation de l'ONU est très proche du modèle.

2 $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{f(t+1)}{f(t)} - 1$
$= \dfrac{4{,}54 \times 1{,}014^t \times 1{,}014}{4{,}54 \times 1{,}014^t} - 1$
$= 1{,}014 - 1 = 0{,}014$.
soit un taux annuel d'évolution de 1,4 %.

3 La population devrait donc dépasser les 10 milliards de personnes au cours de la 56e année, c'est-à-dire au cours de l'année $1980 + 56 = 2036$.

X	Y1
55	9.7531
56	9.8897
57	10.028
58	10.169
59	10.311
60	10.455
61	10.602

2 Exponentielle de base e (p. 84)

38 Vrai ou faux ?

1 **Vrai :** une exponentielle est toujours strictement positive.

2 **Vrai :** $e^x \times e = e^x \times e^1 = e^{x+1}$.

3 **Faux :** en 0, $e^0 = 1$ et non 0. Et $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$.

3 **Faux :** $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

39 Simplifier avec le nombre e

$A = \dfrac{\times}{4} = \dfrac{}{4} = e^{-1}$. $B = (e^{-2})^2 \times e^3 = e^{-4} \times e^3 = e^{-1}$.

$C = \dfrac{1}{} = e^{-2}$.

40 Simplifier avec le nombre e

$D = \dfrac{\times \quad - \quad 4 \quad \times}{-1} = e^3 \times e^{-8} \times e^1 \times e^1 = e^{-3}$.

$E = (e^3)^4 \times \dfrac{-}{5} = e^{12} \times e^{-7} = e^5$.

41 Simplifier une expression

1 Voir exercice 23 4
Donc $f(x) = e^{x-1}$ et $g(x) = e^{2-x}$.

2 $f(x) = e^{2x+5}$ et $g(x) = e^{2x+3}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

42 Justifier des égalités

a. $(e^x-1)(e^x+3)=(e^x)^2+3e^x-e^x-3=e^{2x}+2e^x-3$.

b. $1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-2e^x}{e^x+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

c. $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\times\dfrac{e^x}{e^x}=\dfrac{e^x-e^0}{e^x+e^0}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

43 Justifier des résultats

1 $(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2=e^{4x}+2e^{2x}+1-e^{4x}+2e^{2x}-1$
$=4e^{2x}$.

2 $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$
$=e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}$
$=4e^x\times e^{-x}=4e^0=4$.

44 Calculs de sommes

1 Soit (e^n) la suite géométrique de terme initial $e^0=1$ et de raison e.
$1+e+e^2+\ldots+e^{10}=\dfrac{1-e^{11}}{1-e}$.

2 De même, (e^{nx}) est une suite géométrique de raison e^x et de terme initial $e^0=1$. Alors :

$1+e^x+e^{2x}+\ldots+e^{11x}=\dfrac{1-(e^x)^{12}}{e^x-1}=\dfrac{1-e^{12x}}{1-e^x}$.

3 Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0=e^0=1$ et de raison e^{2x}. Alors :

$1+e^{2x}+e^{4x}+e^{6x}+e^{8x}+e^{10x}=\dfrac{1-(e^{2x})^6}{1-e^{2x}}=\dfrac{1-e^{12x}}{1-e^{2x}}$.

45 Mettre e^x en facteur

$f(x)=2xe^x-x^2e^x=xe^x(2-x)$.
$g(x)=e^x-4xe^x=e^x(1-4x)$.

46 Factoriser des expressions

$f(x)=x^2e^x-2xe^x+3e^x=e^x(x^2-2x+3)$
Calcul du discriminant de x^2-2x+3 :
$\Delta=b^2-4ac=4-4\times3=-8<0$.
Donc le polynôme n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
$g(x)=3x^2e^x+xe^x+e^x=e^x(3x^2+x+1)$
Calcul du discriminant de $3x^2+x+1$:
$\Delta=b^2-4ac=1-4\times3=-11$
Donc le polynôme n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

Pour les exercices 47 à 50

Résoudre des équations

47

a. $e^{2x}-1=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow e^{2x}=e^0\Leftrightarrow 2x=0$
$\Leftrightarrow x=0$.

b. $e^{4x-1}=e^2\Leftrightarrow 4x-1=2\Leftrightarrow 4x=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$.

48

a. $(2x-5)(e^x+1)=0\Leftrightarrow 2x-5=0$ ou $e^x+1=0$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ ou $e^x=-1$: impossible

$x=\dfrac{5}{2}$ est la seule solution.

b. $e^{2x+1}=\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow e^{2x+1}=e^{-1}\Leftrightarrow 2x+1=-1$
$\Leftrightarrow 2x=-2\Leftrightarrow x=-1$.

49

a. $e^{-3x}-1=0\Leftrightarrow e^{-3x}=1\Leftrightarrow e^{-3x}=e^0\Leftrightarrow -3x=0$
$\Leftrightarrow x=0$.

b. $\dfrac{1}{e^{x-2}}+2=0\Leftrightarrow e^{-x+2}=-2$ pas de solution
(une exponentielle est toujours strictement positive).

50

a. $e^x-xe^x=0\Leftrightarrow e^x(1-x)=0$
$\Leftrightarrow e^x=0$ (impossible !) ou $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

b. $x^2e^x-3xe^x+2e^x=0\Leftrightarrow e^x(x^2-3x+2)=0$
$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$.

Calcul du discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=9-4\times2=1>0$.
Donc il y a deux solutions.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-1}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+1}{2}=2$

51 Avec changement de variable

1 $e^{2x}+5e^x-6=(e^x)^2+5e^x-6=X^2+5X-6$,
d'où l'écriture de l'équation (E).

2 $\Delta=49$; deux solutions : $X_1=1$ et $X_2=-6$.
$X_1=1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$;
mais $e^x=-6$ n'est pas possible. Donc $S=\{0\}$.

52 Équation d'inconnue e^x

1 $(X-1)(2X+1)=0\Leftrightarrow X-1=0$ ou $2X+1=0$
$\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-\dfrac{1}{2}$.

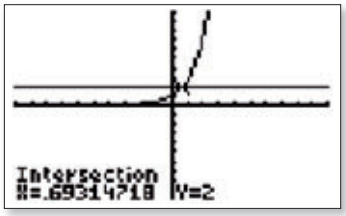
2 **a.** $(E)\Leftrightarrow 2e^{2x}=e^x+1\Leftrightarrow 2(e^x)^2-e^x-1=0$.
En posant $X=e^x$, on a : $(E)\Leftrightarrow 2X^2-X-1=0$.
De plus, $(X-1)(2X+1)=2X^2+X-2X-1=2X^2-X-1$.
Donc $(E)\Leftrightarrow(X-1)(2X+1)=0$.

b. D'où $(E)\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=-\dfrac{1}{2}$: impossible (une exponentielle est toujours strictement positive)
$\Leftrightarrow e^x=e^0$
$\Leftrightarrow x=0$.

53 Résolution approchée

1 En regardant l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle avec la droite d'équation $y=2$, on obtient $0<\alpha<1$.

2 On obtient $\alpha\approx0{,}693$.



Utiliser le bouton « Calcul » de la calculatrice et sélectionner « intersection ».

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$ (p. 85)

54 Vrai ou faux ?

1 **Vrai :** $f(-2) = 0 \times e^0 = 0$.
2 **Vrai :** $f'(x) = 1 \times e^x + e^x(x+2) = (x+3)e^x$.
3 **Vrai :** $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$.

55 QCM

1 **a.** $g(0) = 2 \times 0e^0 = 0$.
2 **b.** $g'(0) = 2e^x + 2xe^x = (2x+2)e^x$.
3 **c.** $g'(-1) = (2(-1)+2)e^{-1} = 0$.

Pour les exercices 56 à 61
Calculs de dérivées

56 $f(x) = e^x + x^2$, donc $f'(x) = e^x + 2x$
et $g'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x-2) = (x-1) \times e^x$.

57 $f'(x) = 3 \times 2x - 2e^x = 6x - 2e^x$
$g'(x) = -2xe^x + (4-x^2)e^x = e^x(-x^2 - 2x + 4)$.

58 $f'(x) = (2x+3)e^x + (x^2+3x+1)e^x = e^x(x^2+5x+4)$
$g'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2+x^3)e^x$.

59 $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

$g'(x) = \dfrac{1 \times e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(1-x)}{e^x \times e^x} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

60 $f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

$g'(x) = \dfrac{1 \times e^x - (x+2)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(-x-1)}{e^x \times e^x} = -\dfrac{x+1}{e^x}$.

61 $f'(x) = \dfrac{e^x \times e^x - (e^x+1)e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{1}{e^x}$.

$g'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1}{e^x}$.

Pour les exercices 62 à 64
Résolutions d'inéquations

62 **a.** $2e^x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. $S = [0 ; +\infty[$.
b. $2e^x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant -1$, toujours vrai : $S = \mathbb{R}$.

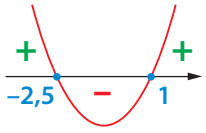
63 **a.** $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $(x-2)e^x$ est du signe de $x-2$.
Or, $x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.
$S = [2 ; +\infty[$.
b. $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $\dfrac{-0{,}5x+3}{e^x}$ est du signe de $-0{,}5x+3$.
Or, $-0{,}5x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}5x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant 6$.
$S =]-\infty ; 6]$.

64 **a.** $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $(4-x^2)e^x$ est du signe de $4-x^2$.
$4 - x^2$ est un polynôme de degré 2 de racines 2 et -2, donc $4 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.
$S = [-2 ; 2]$.
b. $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x puisque $e^x > 0$ pour tout réel x.
Donc $\dfrac{1-e^x}{e^x+1}$ est du signe de $1 - e^x$.
Or, $1 - e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant e^x \Leftrightarrow e^0 \geqslant e^x \Leftrightarrow x \leqslant 0$.
$S =]-\infty ; 0]$.

Pour les exercices 65 à 70
Tableaux de signes

65 $e^x > 0$ pour tout réel x ; donc $f(x)$ est du même signe que $2x^2 + 3x - 5$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-5) \times 2 = 49 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-7}{4} = -\dfrac{5}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+7}{4} = 1$



x	$-\infty$		$-2{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

66 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x + 3 > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, $f(x)$ est du signe de son numérateur : $-x^2 + 4x - 4$.
$-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

67 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x. Par conséquent, $f(x)$ est du signe de $2x + 5$.
Donc :

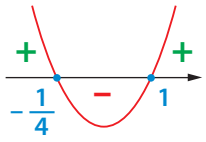
x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

68 $3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$;
$e^x - e \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$3x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - e$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

69 • Calcul du discriminant de $4x^2 - 3x - 1$:
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1) \times 4 = 25 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{8} = -\dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{8} = 1$



• $e^x - e^2 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^2 \Leftrightarrow x > 2$.
• Donc :

x	$-\infty$		$-2{,}5$		1		2		$+\infty$
$4x^2 - 3x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e^2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

70 • $e^x > 0$ pour tout réel x donc $e^x + 3 > 0$ pour tout réel x. Par conséquent, $f(x)$ est du signe de $e^x - e^2$.
• $e^x - e^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^2 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.
• Donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

71 Prolongement par continuité

a. On ne peut pas diviser par 0, donc $x = 0$ est une valeur interdite. D'où l'erreur mentionnée à l'écran de la calculatrice pour $x = 0$.
b. Lorsqu'on remplace x par des valeurs suffisamment proches de 0 dans l'expression f de $f(x)$, on trouve un résultat de plus en plus proche de 0,5. On peut donc penser que si on prend $g(0) = 0{,}5$, g sera continue en 0.
c. On pose $g(0) = 0{,}5 > 0$.
Il ne reste plus qu'à étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.
• $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
• $2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	‖	$+$	

Donc $g(x) > 0$ pour tout réel x.

Pour les exercices 72 à 78

Étude de variations

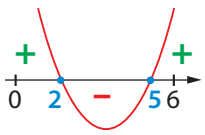
72 $f'(x) = 3e^x + 2$.
Or, $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;5]$.

73 $f'(x) = 3e^x - 3 = 3(e^x - 1)$.
Or, $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
Donc f est décroissante sur $[-1\,;0]$ et est croissante sur $[0\,;3]$.

74 $f'(x) = 2 \times e^x + e^x(2x+3) = (2x+5)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		$-2e^{-2{,}5}$	↗	

75 $f'(x) = (2x-9)e^x + (x^2 - 9x + 19)e^x$
$= (x^2 - 7x + 10)e^x$.
$e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 7x + 10$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 10 = 9 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{7-3}{2} = 2$ $= \dfrac{7+3}{2} = 5$

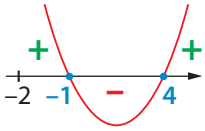


On a donc :

x	0		2		5		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

f est donc croissante sur $[0\,;2]$ et sur $[5\,;6]$ et est décroissante sur $[2\,;5]$.

76 $f'(x) = \dfrac{(-2x+1)e^x - (-x^2 + x + 5)e^x}{(e^x)^2}$
$= \dfrac{x^2 - 3x - 4}{e^x}$.
$e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 3x - 4$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-4) = 25 > 0$.
Donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{3-5}{2} = -1$ $= \dfrac{3+5}{2} = 4$



On a donc sur $[-2\,;4]$:

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘	

f est croissante sur $[-2\,;-1]$ et est décroissante sur $[-1\,;4]$.

77 $f'(x) = \dfrac{2e^x(1+e^x) - 2e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.
$e^x > 0$ pour tout réel x, et un carré réel est toujours positif, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0\,;10]$.

78 $f'(x) = \dfrac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$.
$e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x - 1$.
Avec $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 < 0$ pour tout réel x.
Donc f est décroissante sur $[-4\,;1]$.

79 Doublement de population

1 a. Au bout de 6 heures, $x = 6$. La population de bactéries est alors donnée par :
$f(6) = 2 \times e^6 \approx 807$ milliers de bactéries.
b. Au bout de 2,5 heures, $x = 2{,}5$. La population de bactéries est alors donnée par :
$f(2{,}5) = 2 \times e^{2{,}5} \approx 24$ milliers de bactéries.
2 a. $f'(x) = 2e^x$.
b. $f'(2{,}5) \approx 24$ milliers de bactéries pas heure.
3 a. $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{2e^{x+1} - 2e^x}{2e^x} = \dfrac{2e^x(e-1)}{2e^x}$
$= e - 1 \approx 1{,}718$
soit une augmentation de 171,8 % par heure.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. $t = \dfrac{f\left(x+\frac{1}{6}\right)-f(x)}{f(x)} = \dfrac{2e^{x+\frac{1}{6}}-2e^{x}}{2e^{x}}$

$= e^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}181$

soit une augmentation de 18,1 % par tranche de 10 min.

4 On cherche t tel que :

$f(x+t) = 2f(x) \Leftrightarrow 2e^{x+t} = 4e^{x} \Leftrightarrow e^{x} \times e^{t} = 2e^{x}$

$\Leftrightarrow e^{t} = 2$.

En entrant dans la calculatrice la fonction $t \mapsto e^{t}$, on obtient le tableau de valeurs ci-contre :

X	Y1
.69	1.9937
.691	1.9957
.692	1.9977
.693	1.9997
.694	2.0017
.695	2.0037
.696	2.0057

On en déduit que la population de bactéries a doublé au bout de 0,69 heure environ.

80 Interpréter graphiquement

1 **a.** $f'(x) = -2xe^{x} + (3-x^{2})e^{x} = (-x^{2}-2x+3)e^{x}$.

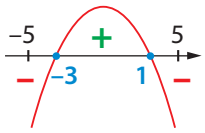
b. $e^{x} > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $-x^{2}-2x+3$. $a = -1$ négatif.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^{2} - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{2-4}{-2} = 1$ $= \dfrac{2+4}{-2} = -3$



On a donc :

x	-5		-3		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-0{,}15$	↘	$-0{,}3$	↗	$5{,}44$	↘	$-3\,265{,}09$

c. $f'(x) = 0$ pour $x = -3$ et $x = 1$, donc la courbe représentative de la fonction f admet deux tangentes horizontales : une au point d'abscisse –3 et l'autre au point d'abscisse 1.

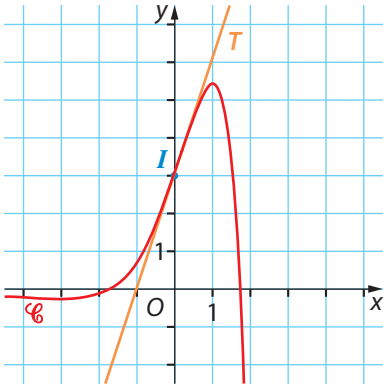
2 **a.** $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 3x + 3$.

b. $3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc T coupe l'axe des abscisses en $I(-1\,;0)$.

3



81 Utiliser une fonction auxiliaire

1 **a.** $g'(x) = 1 \times e^{x} + e^{x} \times x - e^{x} = xe^{x}$.

b. Pour tout réel x, $e^{x} > 0$.

D'où la dérivée a le signe de x :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		1	↗	

c. $g(0) = 1$. Comme le minimum de g est 1, la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2 **a.** $f'(x) = 1 \times e^{x} + e^{x} \times x - 2e^{x} + 1 = xe^{x} - e^{x} + 1$

Donc $f'(x) = g(x)$. On utilise le signe de $g(x)$.

b. La dérivée a le signe de $g(x)$, strictement positif.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Comme $f'(x) = g(x)$, alors $f''(x) = g'(x)$.

Donc en $x = 0$, la dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 0$.

82 Variations pour connaître le signe

Partie A :

a. $g'(x) = e^{x} - 1$.

b. $e^{x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x} \geqslant e^{0} \Leftrightarrow x \geqslant 0$. $S = [\,0\,;+\infty\,[$.

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		2	↗	

$g(x) \geqslant 2 > 0$, pour tout réel x, donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

1 **a.** Pour tout réel $x \geqslant -1$,

$f'(x) = 1 + \dfrac{1 \times e^{x} - xe^{x}}{e^{2x}} = 1 + \dfrac{1-x}{e^{x}} = \dfrac{e^{x} - x + 1}{e^{x}} = \dfrac{g(x)}{e^{x}}$.

b. $e^{x} > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [\,-1\,;+\infty\,[$.

D'où f est strictement croissante sur $[\,-1\,;+\infty\,[$.

2 $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1$.

3 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f continue, strictement croissante sur $[\,-1\,;0\,]$, avec $f(-1) = -e \approx -2{,}7$, négatif et $f(0) = 1$, positifs.

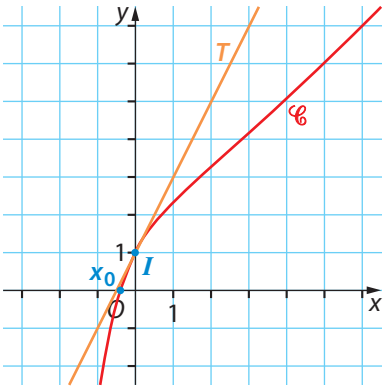
$0 \in [\,f(-1)\,;f(0)\,]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[\,-1\,;0\,]$.

b. On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f continue, strictement croissante sur $[\,-0{,}5\,;-0{,}4\,]$, avec $f(-0{,}5) \approx -0{,}3 < 0$ et $f(-0{,}4) \approx 0{,}003 > 0$.

$0 \in [\,f(-0{,}5)\,;f(-0{,}4)\,]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0, telle que $-0{,}5 < x_0 < -0{,}4$.

c. f est croissante sur $[\,-1\,;+\infty\,[$ et $f(x_0) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[\,x_0\,;+\infty\,[$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\,-1\,;x_0\,]$.

4



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

83 Prix d'équilibre

1 **a.** $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0{,}05\,e^x - 5 \times \left(-\dfrac{e^x}{e^{2x}}\right)$

$$= 0{,}05\,e^x + 5e^{-x} = \frac{5(0{,}01e^{2x} + 1)}{e^x}.$$

b. $e^x > 0$ pour tout réel x et $5 > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $0{,}01\,e^{2x} + 1$.
Or, $e^{2x} > 0$ pour tout réel x.
Donc $h'(x) > 0$ pour tout réel x.
On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[1 ; 4]$.

2 **a.** Le prix d'équilibre est x tel que :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}05\,e^x = \frac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = 100 \Leftrightarrow (e^x)^2 = 100$$

$\Leftrightarrow e^x = 10$ (une exponentielle est toujours strictement positive).

b. Le prix d'équilibre est donc de 2,30 €.

3 Lorsqu'on est à l'équilibre, l'offre et la demande sont de $0{,}05 \times e^{x_0} \approx 0{,}05 \times 10 = 0{,}5$ dizaine de milliers de fourchettes, soit 5 000 fourchettes.
Le chiffre d'affaires est alors de $5\,000 \times 2{,}3 = 11\,500$ €.

84 Justifier des positions relatives

1 On peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}$ est comprise entre les droites Δ et $\mathscr{D}$.

2 **a.** $f(x) - x = \dfrac{4}{1 + e^x}$.

Or, $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f(x) - x > 0$ pour tout réel x.

b. On en déduit que $f(x) > x$ pour tout réel x, donc que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

3 **a.** $f(x) - (x+4) = \dfrac{4}{1+e^x} - 4 = \dfrac{4 - 4 - 4e^x}{1+e^x} = \dfrac{-4e^x}{1+e^x}$.

b. $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f(x) - (x-4) < 0$.
On en déduit que $f(x) < x - 4$ sur $\mathbb{R}$.
D'où la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la droite $\mathscr{D}$.

4 **a.** $f'(x) = 1 + 4 \times \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2}.$$

b. On sait qu'un carré est toujours positif ou nul, donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale si, et seulement si, il existe un réel x tel que $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - e^x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0$

$\Leftrightarrow x = 0$.

D'où la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en 0.

85 Recherche d'un point d'inflexion

1 $f'(x) = \dfrac{4e^x(e^x+1) - 4e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

pour tout réel $x \in [-5 ; 5]$.

2 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [-5 ; 5]$.

3 **a.** L'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f semble être 0.

b. $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x + 1 > 0$ et $f''(x)$ est du signe de $-(e^x - 1)$.
$-(e^x - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow -e^x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \leqslant e^0$

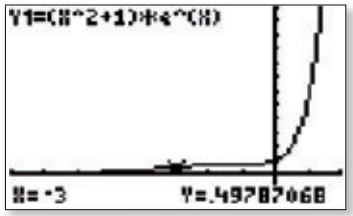
$\Leftrightarrow x \leqslant 0$.

D'où $f''(x) \geqslant 0$ sur $[-5 ; 0]$ et $f''(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; 5]$.

c. L'abscisse du point d'inflexion est l'abscisse où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
D'après ce qui précède, le point d'inflexion est donc le point d'abscisse 0.

86 Points d'inflexion

1



On conjecture que la courbe admet 2 points d'inflexion.

2 **a.** $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$

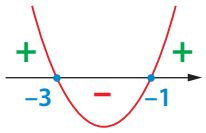
$= (x+1)^2 e^x$.

Un carré réel est toujours positif, ainsi qu'une exponentielle.
D'où $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. • $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 + 4x + 3$. $a = 1 > 0$.
• Calcul du discriminant de $x^2 + 4x + 3$:
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 = 4 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-4-2}{2} = -3$ $= \dfrac{-4+2}{2} = -1$



D'où :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$		+	0	−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

c. La courbe admet donc deux points d'inflexion :
en $x = -3$ et $x = -1$.

4 Fonction e^u (p. 88)

87 Vrai ou faux ?

1 **Vrai :** $-0{,}5$ est la dérivée de l'exposant.

2 **Faux :** $f'(x) = e^x - e^{-x} \neq f(x)$.

3 **Faux :** $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times (x+5) = e^{-x}(-x-4)$.

Pour les exercices 88 à 93

Calculs de dérivées

88 $f'(x) = 3e^{3x}$
et $g'(x) = 10 \times (-0{,}5) \times e^{-0{,}5x} = -5e^{-0{,}5x}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

89 $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$.
$g'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$.

90 $f'(x) = 2e^{-0,1x} + (2x-3)(-0,1)e^{-0,1x}$
$= (2 - 0,2x + 0,3)e^{-0,1x} = (2,3 - 0,2x)e^{-0,1x}$.
$g'(x) = -0,1e^{2x} + 2(5 - 0,1x)e^{2x} = (9,9 - 0,2x)e^{2x}$.

91 $f'(x) = 4e^{-x+1} + 4x(-1)e^{-x+1} = 4(1-x)e^{1-x}$.
$g'(x) = 3 \times (-2x)e^{1-x^2} = -6xe^{1-x^2}$.

92 $f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2+1)(-1)e^{-x} = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x}$
$= -(x-1)^2 e^{-x}$.
$g'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}$.

93 $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \frac{x - 1 - (x-3)}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$
$= \frac{2}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$.
$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2x}{2}\right)e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Pour les exercices 94 à 101
Étude de variations

94 $f'(x) = -2 \times 5e^{-2x} = -10e^{-2x}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

95 $f'(x) = -0,5 \times 100e^{-0,5x+1,5} = -50e^{-0,5x+1,5}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

96 $f'(x) = 2(e-1)e^{2x+1}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive et $e > 1$, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

97 $f'(x) = 1,2 \times 0,01e^{1,2x} + 2 = 0,012e^{1,2x} + 2$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0 ; 20]$.

98 $f'(x) = \frac{1}{2}(4-x)e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.
Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.
D'où :

x	0		2		4
$f'(x)$		+	0	−	

Donc f est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 4]$.

99 $f'(x) = \frac{-10 \times 2(-0,2)e^{-0,2x}}{(1+2e^{-0,2x})^2} = \frac{4e^{-0,2x}}{(1+2e^{-0,2x})^2}$.
C'est un quotient de réels strictement positifs : la fonction f est donc strictement croissante sur $[-2 ; 10]$.

100 $f'(x) = 25 \times \frac{-2(-0,5)e^{-0,5x}}{(5+2e^{-0,5x})^2} = \frac{25e^{-0,5x}}{(5+2e^{-0,5x})^2} > 0$
pour tout réel x (une exponentielle et un carré sont toujours positifs).
Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 15]$.

101 $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$.
$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$.
Or, une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		+	0	−	0	+	

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et est décroissante sur $[0 ; 1]$.

102 Réaliser une prévision

1 a. $f'(t) = -0,2 \times 0,025e^{0,025t} = -0,005e^{0,025t}$.
b. une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(t) < 0$ pour tout réel t.
On en déduit que la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, c'est-à-dire que la longueur du glacier diminue au fil du temps.
2 En 2013, il s'est écoulé 113 ans depuis 1900.
D'où la longueur du glacier peut être estimée par :
$f(113) = 25,6 - 0,2 \times e^{0,025 \times 113} \approx 22$ km.
3 On établit le tableau de valeur de la fonction f sur la calculatrice graphique.
On obtient :

X	Y1
192	1.2979
193	.68271
194	.05192
195	-.5948
196	-1.258
197	-1.938
198	-2.635

Soit une disparition du glacier au bout d'un peu plus de 194 ans, donc au cours de l'année 2094.
4 À partir de $t \geqslant 195$, on a une longueur de glacier négative, ce qui est impossible : la longueur réelle est alors de 0 km. Le modèle n'est donc plus valable.

103 Décote exponentielle

1 $f(0) = 26\,315 \times e^{-0,15 \times 0} = 26\,315$ donc au 1er mars 2009, la voiture de Lydia est cotée à 26 315 €.
2 $f'(x) = 26\,315(-0,15) \times e^{-0,15x} = -3\,947,25e^{-0,15x}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; 20]$, c'est-à-dire que la cote Argus de la voiture décroit au fil du temps.
3 a. $\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{26\,315e^{-0,15(x+1)} - 26\,315e^{-0,15x}}{26\,315e^{-0,15x}}$
$= \frac{26\,315e^{-0,15x} \times e^{-0,15}}{26\,315e^{-0,15x}} - 1$
$= e^{-0,15} - 1 \approx -0,14$
soit une baisse annuelle de la cote de la voiture d'environ 14 % par an.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. Au 1er septembre 2013, il s'est écoulé 4,5 ans.
La cote Argus de la voiture est alors de :
$f(4{,}5) = 26\,315 \times e^{-0{,}15\times 4{,}5} \approx 13\,400$ €.
Le taux de diminution est alors de :

$$t = \frac{13\,400 - 26\,315}{26\,315} \approx -0{,}49$$

soit une baisse d'environ 49 %.

c. Sur 6 mois, le taux de diminution de la cote est de :

$$\frac{f(x+0{,}5) - f(x)}{f(x)} = \frac{26\,315e^{-0{,}15(x+0{,}5)} - 26\,315e^{-0{,}15x}}{26\,315e^{-0{,}15x}}$$

$$= \frac{26\,315e^{-0{,}15x} \times e^{-0{,}075}}{26\,315e^{-0{,}15x}} - 1$$

$$= e^{-0{,}075} - 1 \approx -0{,}07$$

soit une baisse d'environ 7 % tous les 6 mois.

104 Croissance exponentielle

1 a. $f'(x) = 86{,}6 \times 0{,}35\, e^{0{,}35x} = 30{,}31\, e^{0{,}35x}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
La fonction f est donc strictement croissante sur [0 ; 19]
On constate donc que le nombre de domaines en « .fr » augmente depuis janvier 2001.

b. $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{86{,}6e^{0{,}35(x+1)} - 86{,}6e^{0{,}35x}}{e^{0{,}35x}}$

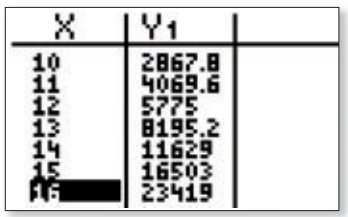
$$= \frac{86{,}6e^{0{,}35x}(e^{0{,}35} - 1)}{86{,}6e^{0{,}35x}}$$

$$= e^{0{,}35} - 1 \approx 0{,}42.$$

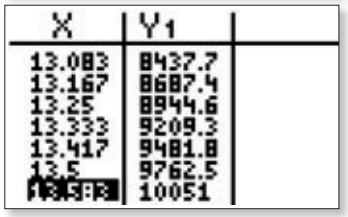
soit une augmentation de 42 % chaque année du nombre de domaines en « .fr ».

2 $f(8{,}5) = 86{,}6\, e^{0{,}35\times 8{,}5} \approx 1696{,}46$ soit 1696,46 milliers de domaines en « .fr » au 1er septembre 2009.

3 a. Sur [0 ; 19], la fonction f est dérivable donc continue, strictement croissante,
avec $f(0) = 86{,}6$ et $f(19) \approx 66\,923$.
On a donc $f(0) < 10\,000 < f(19)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10\,000$ admet une unique solution sur [0 ; 19].
On utilise le tableur de la calculatrice graphique pour déterminer une valeur approchée de cette solution :
Les 10 000 milliers de domaines en « .fr » ont été atteints au cours de la 13e année, soit plus précisément, en choisissant n par pas de 1/12 entre les valeurs du tableau :



X	Y1
10	2867.8
11	4069.6
12	5775
13	8195.2
14	11629
15	16503
16	23419



X	Y1
13.083	8437.7
13.167	8687.4
13.25	8944.6
13.333	9209.3
13.417	9481.8
13.5	9762.5
13.583	10051

$x_0 \approx 13{,}59$, c'est-à-dire $13{,}5 < x_0 < 13 + \dfrac{7}{12}$.

b. La fonction f étant strictement croissante, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 10\,000$ dans [0 ; 19] est donc l'intervalle $[x_0 ; 19]$.

c. Selon le modèle, c'est donc au cours du mois de septembre 2014 que le nombre de domaines en « .fr » dépassera les 10 millions.

4 $f(x) = 86{,}6(e^{0{,}35})^x$.
Donc $f(x)$ s'écrit $K \times q^x$ où $K = 86{,}6$ et $q = e^{0{,}35}$.

105 Factoriser la dérivée

1 $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x - 6$.
Or, $2(e^x - 1)(e^x + 3) = 2(e^{2x} + 3e^x - e^x - 3)$
$= 2e^{2x} + 4e^x - 6 = f'(x)$.

2 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x + 3 > 0$.
D'où $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.
$e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
Donc $f'(x)$ s'annule en 0, en étant négatif sur $]-\infty ; 0[$ et positif sur $]0 ; +\infty[$.

3

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	5	↗	

106 Déterminer un maximum

1 Comme $e^{-0{,}2x} > 0$ pour tout x de [2 ; 15],
alors $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4x - 13 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3{,}25$.
Donc $S = [2 ; 3{,}25]$.

2 a. On applique la dérivée d'un produit :
$f'(x) = 4 \times e^{-0{,}2x} + (-0{,}2e^{-0{,}2x}) \times (4x - 13)$.
Donc $f'(x) = (6{,}6 - 0{,}8x) \times e^{-0{,}2x}$.

b. $e^{-0{,}2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $6{,}6 - 0{,}8x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 8{,}25$.
D'où :

x	2		3,25		8,25		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	$\approx -7{,}4$	↗	0	↗	$\approx 3{,}84$	↘	$\approx 2{,}34$

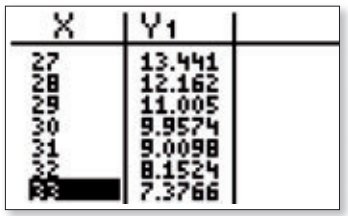
3 Le résultat d'exploitation est maximum pour une quantité extraite de 8 250 tonnes.

107 Offre, demande et prix d'équilibre

1 a. Pour un prix de vente de 23 €, la demande sera de : $f(23) = 200\, e^{-0{,}1\times 23} \approx 20{,}05$, soit 20 050 appareils environ.

b. $f'(x) = 200(-0{,}1)e^{-0{,}1x} = -20e^{-0{,}1x}$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x) < 0$ pour tout réel x, donc f est strictement décroissante sur [15 ; 40].
On peut en déduire que plus le prix de vente augmente, moins la demande est forte.

c. On cherche x tel que $f(x) < 9$.
On obtient à la calculatrice le tableau ci-contre :
On en déduit que le prix doit être compris entre 15 et 31 € pour maintenir une demande supérieure ou égale à 9 000 unités.



X	Y1
27	13.441
28	12.162
29	11.005
30	9.9574
31	9.0098
32	8.1524
33	7.3766

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 a. $h'(x) = f'(x) - g'(x) = -20e^{-0,1x} - 4$, somme de nombres négatifs.
Par conséquent, h est strictement décroissante sur $[15 ; 40]$.

x	15		40
$h(x)$	44,63	↘	−96,34

b. Sur $[15 ; 40]$, h est une fonction dérivable donc continue, strictement décroissante, avec $h(15) < 0 < h(40)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $h = 0$ admet une unique solution sur $[15 ; 40]$.

X	Y1
21.04	.23352
21.05	.16913
21.06	.10478
21.07	.04045
21.08	-.0239
21.09	-.0881
[redacted]	-.1524

On établit le tableau de valeurs de la fonction h à la calculatrice.
On obtient $x_0 \approx 21,08$.
c. Le prix d'équilibre est donc d'environ 21,1 €.
Il permet de vendre $g(21,1) = 4 \times 21,1 - 60 = 24,8$ milliers d'appareils, soit environ 25 milliers d'appareils.
d. Le chiffre d'affaires réalisé à l'équilibre est de :
$25 \times 21,1 = 527,5$ milliers d'euros environ.
Sur le graphique, ce chiffre d'affaires se retrouve en ordonnée du point d'intersection des deux courbes représentatives.

108 Cote maximale d'une œuvre d'art

1 a. $f'(x) = 0,5(2 \times (-0,4)x + 2)\exp(-0,4x^2 + 2x)$
$= (-0,4x + 1)\exp(-0,4x^2 + 2x)$.
b. et **c.** Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $-0,4x + 1$.

x	0		2,5		5,5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0,5	↗	6,09	↘	0,17

2 a. Sur $[0 ; 2,5]$, la fonction f est dérivable donc continue, strictement croissante, avec $f(0) < 3 < f(2,5)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2,5]$.
Sur $[2,5 ; 5,5]$, la fonction f est dérivable donc continue, strictement décroissante, avec $f(5,5) < 3 < f(2,5)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution β sur $[2,5 ; 5,5]$.
b.

X	Y1
[redacted]	2.4765
1.25	3.2604
1.5	4.0831
1.75	4.864
2	5.5116
2.25	5.9409
2.5	6.0912

On trouve $1 < \alpha < 1,25$.

X	Y1
[redacted]	4.0831
3.75	3.2604
4	2.4765
4.25	1.7894
4.5	1.2298
4.75	.80401
5	.5

On trouve $3,75 < \beta < 4$.
3 a. La fonction f atteint son maximum pour $x = 2,5$, donc l'œuvre atteint sa valeur maximale au bout de 2,5 années.
Cette valeur maximale est :
$f(2,5) = 0,5\exp(-0,4 \times 2,5^2 + 2 \times 2,5) \approx 6,09$
soit environ 6 100 € .
b. La plage de temps où l'œuvre atteint une valeur supérieure ou égale à 3 000 € est l'ensemble des abscisses des points de la courbe situés au-dessus ou sur la droite d'équation $y = 3$.
On trouve de telles valeurs entre 1,2 et 3,8 ans environ.
c. Plus précisément, la plage de temps où l'œuvre atteint une valeur supérieure ou égale à 3 000 € est l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

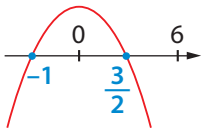
109 Étude d'une production

1 a. $f'(x) = (4x + 3)e^{-x} - (2x^2 + 3x)e^{-x}$
$= (-2x^2 + x + 3)e^{-x}$ pour tout réel $x \in [0 ; 6]$.
b. $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 3$. $a = -2$ négatif.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-2) \times 3 = 25 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-1 - 5}{-4} = \dfrac{3}{2}$ $= \dfrac{-1 + 5}{-4}$

$= -1 \notin [0 ; 6]$



D'où :

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0,22

c. La production journalière sera donc maximale au bout de 2,5 centaines de jours, soit 250 jours après l'ouverture du site.
Cette production est alors d'environ 2 milliers de tonnes.
2 a. Sur $[0 ; 1,5]$, la fonction f est dérivable donc continue, strictement croissante, avec $f(0) < 1 < f(1,5)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[0 ; 1,5]$.
Sur $[2,5 ; 5,5]$, la fonction f est dérivable donc continue, strictement décroissante, avec $f(6) < 1 < f(1,5)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution β sur $[1,5 ; 6]$.
En utilisant le graphique, on obtient $0 < \alpha < 1$ et $3 < \beta < 4$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On tabule à la calculatrice pour la fonction f :

X	Y1
3.603	1.0017
3.604	1.0012
3.605	1.0007
3.606	1.0002
3.607	.99964
3.608	.99911
X=3.6	.99858

On obtient $\beta \approx 3{,}61$.
Cela revient à dire que la production journalière sera revenue à 1 000 tonnes au bout de 361 jours environ.

110 Étude de coûts

1 a. $f'(x) = \dfrac{1{,}32 \times 0{,}02\mathrm{e}^{0{,}02x}x - 1{,}32\mathrm{e}^{0{,}02x}}{x^2}$

$= \dfrac{1{,}32\mathrm{e}^{0{,}02x}(0{,}02x - 1)}{x^2}$.

b. et **c.** Une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(x)$ est du signe de $0{,}02x - 1$. D'où :

x	1		50		100
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1,35	↘	0,07	↗	0,10

d. Le coût moyen est minimum pour $x_0 = 50$, soit 500 articles fabriqués par jour.
Le coût total de production est alors : $f(50) \times 500 \approx 35$ €.

2 a. x est en dizaine d'articles et $f(x)$ est en euro, donc $C(x)$ est exprimé en dizaine d'euros.

b. $C'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x)$

$= \dfrac{1{,}32\mathrm{e}^{0{,}02x}}{x} + \dfrac{1{,}32\mathrm{e}^{0{,}02x}(0{,}02x - 1)}{x}$

$= \dfrac{0{,}02x \times 1{,}32\mathrm{e}^{0{,}02x}}{x} = 0{,}0264\mathrm{e}^{0{,}02x} > 0$

pour tout réel x.
Donc la fonction C est strictement croissante sur $[1 ; 100]$.

c. $C'(x_0) = C'(50) = 0{,}0264 \times \mathrm{e}^{0{,}02 \times 50} = 0{,}0264\mathrm{e}$

$\approx 0{,}07 \approx f(50) = f(x_0)$.

Donc, lorsque le coût moyen est minimum ($x = x_0 = 50$) le coût marginal est égal au coût moyen.

111 Taux d'équipement

1 $f'(x) = 100 \times \dfrac{-(-0{,}4) \times 6\mathrm{e}^{-0{,}4x}}{(1{,}5 + 6\mathrm{e}^{-0{,}4x})^2} = \dfrac{240\mathrm{e}^{-0{,}4x}}{(1{,}5 + 6\mathrm{e}^{-0{,}4x})^2}$.

2 Une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
D'où :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	13,3	↗	

Le taux d'équipement en micro-ordinateurs connectés à Internet est en progression au cours du temps.

3 Pour tout réel x, on a :

$\mathrm{e}^{-0{,}4x} > 0 \Leftrightarrow 1{,}5 + 6^{\mathrm{e}^{-0{,}4x}} > 1{,}5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1{,}5 + 6^{\mathrm{e}^{-0{,}4x}}} < \dfrac{1}{1{,}5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{100}{1{,}5 + 6^{\mathrm{e}^{-0{,}4x}}} < \dfrac{100}{1{,}5}$

$\Leftrightarrow f(x) < \dfrac{200}{3}$

avec $\dfrac{200}{3} \approx 66{,}7$.

D'où, suivant le modèle, au maximum $\dfrac{2}{3}$ de la population sera connecté à Internet. On n'atteindra jamais les 100 % de la population équipée.

112 Utiliser un graphique

1 a. $f(0) = 1$ (ordonnée du point A de la courbe, d'abscisse 0).
$f'(0)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en A
$= -1$.

b. $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\mathrm{e}^0 = 1 \\ -\mathrm{e}^0(-a + 0{,}5b) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -a + 0{,}5b = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} b = 1 \\ -a + 0{,}5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -a + 0{,}5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -0{,}5 \end{cases}$

D'où $f(x) = (-0{,}5x + 1)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

2 a. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}5x}(-0{,}25x + 0{,}5 + 0{,}5)$

$= -\mathrm{e}^{-0{,}5x}(-0{,}25x + 1) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}(0{,}25x - 1)$.

Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $0{,}25x - 1$.
D'où :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	−0,14	↗	

b. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est d'environ $-0{,}14$. Il est atteint pour $x = 4$.

3 $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 1$.

113 Modèle exponentiel sur tableur

1 a. $f(0) = 460 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0 = 460 \Leftrightarrow k = 460$.

b. Dans B4, on entre =460×e^(0,0583×B2). Par recopie vers la droite, on obtient le nombre de bouquetins pour toutes les années, suivant ce modèle.

c. D'après le nuage de points obtenu, le modèle « colle » assez bien aux valeurs observées en 1976, 1993, 1998 et 2005 (quand les points du nuage sont très proches de la courbe représentative de la fonction f).

2 a. $f'(x) = 460 \times 0{,}0583\ \mathrm{e}^{0{,}0583x} = 26{,}818\ \mathrm{e}^{0{,}0583x}$.
Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

b. En 2020, $x = 44$. La population de bouquetins peut être évaluée par $f(44) = 460 \times \mathrm{e}^{0{,}0583 \times 44} \approx 5\,981$.
D'après ce modèle, il y aura donc environ 6 000 bouquetins en 2020.

c. $f(x) = 460 \times (\mathrm{e}^{0{,}0583})^x \approx 460 \times 1{,}06^x$.
Le taux d'évolution annuel est alors de :

$\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{460 \times 1{,}06^{x+1} - 460 \times 1{,}06^x}{460 \times 1{,}06^x}$

$= \dfrac{460 \times 1{,}06^x(1{,}06 - 1)}{460 \times 1{,}06^x} = 0{,}06$

soit une augmentation de environ 6 % par an.

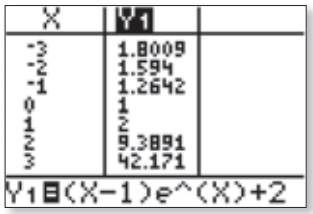
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Accompagnement personnalisé (p. 92)

Exercice guidé

114 **1** $f(-2) = 2 - 3e^{-2} \approx 1{,}59$;
$f(0) = -e^0 + 2 = -1 + 2 = 1$
et $f(2) = 2 + e^2 \approx 9{,}39$.

2 Dérivée d'un produit :
$f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x-1)$
$= x \times e^x$.



Comme e^x **est toujours strictement positive**, la dérivée est du signe de x.

D'où :

x	-2		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

3 Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - e - 2}{0 - 1} = e.$$

On a : $f'(1) = 1 \times e^1 = e$, qui est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Ces deux droites sont donc confondues.

Revoir les outils de base

Savoir utiliser les règles de calcul sur les puissances

115 **a.** $2^3 \times 3^2 \times 2^{-1} = 2^2 \times 3^2$.

b. $3^2 \times 3(3 \times 2)^{-2} = 3^3 \times 3^{-2} \times 2^{-2} = 2^{-2} \times 3$.

c. $(3 \times 2^3)^2 \times 2^3 \times 3^{-4} = 3^2 \times 2^6 \times 2^3 \times 3^{-4} = 2^9 \times 3^{-2}$.

d. $\dfrac{3^2}{2^3} \times \dfrac{2^{-1}}{3^3} = 2^{-1} \times 2^{-3} \times 3^2 \times 3^{-3} = 2^{-4} \times 3^{-1}$.

116 • $1\,210 \times (1{,}1)^{n-1} = 1\,100 \times 1{,}1 \times (1{,}1)^{n-1}$
$= 1\,100 \times 1{,}1 \dfrac{(1{,}1)^n}{1{,}1}$
$= 1\,100 \times (1{,}1)^n$.

• $\dfrac{40(1-(0{,}8)^{n+1})}{1-0{,}8} = \dfrac{40(1-(0{,}8)^{n+1})}{0{,}2}$
$= 200(1-(0{,}8)^{n+1})$
$= 200 - 200 \times 0{,}8 \times (0{,}8)^n$
$= 200 - 160 \times (0{,}8)^n$.

117 Savoir se donner un modèle : suite ou fonction

a. Le nombre de cas de maladie déclarées est totalisé sur un mois : la modélisation ne peut se faire que par une suite.

b. La production évolue en continu : modélisation par une fonction.

c. Suite géométrique

d. Se modélise par une suite : on ne connaît le coût que tous les ans et certainement pas en continu.

e. Se modélise par une suite : on ne connaît le coût que tous les ans et certainement pas en continu.

Savoir résoudre à l'aide de la calculatrice

118 et **119** Cf. aide.

120 **a.** D'après le tableau de valeurs, on a une solution sur $[-2 ; -1]$ et une solution sur $[1 ; 2]$.

b. Cf. aide.

Pour aller plus loin

121 Démontrer

a. Pour tout réel x, $e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \times e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x}$.

b. $t = \dfrac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \dfrac{\exp(h) - 1}{h}$.

Quand h tend vers 0, t tend vers $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

c. $t = \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \dfrac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h}$.

d. Or, $\dfrac{\exp(h) - 1}{h}$ tend vers 1 d'après **b.**, donc le taux d'accroissement de exp entre $x+h$ et x tend vers $\exp(x)$.

122 Appliquer des techniques de calcul pour transformer une écriture

a. La fonction f étant continue, elle peut modéliser le nombre de PACS de façon continue.
Ceci dit, une modélisation trop précise peut poser plus de problèmes qu'une modélisation plus globale, année par année.

b. $f(x) = e^{0{,}32x+2{,}96} = e^{0{,}32x} \times e^{2{,}96} = (e^{0{,}32})^x \times e^{2{,}96}$
$\approx 1{,}38^x \times 19{,}3$.

La croissance du nombre de PACS contractés entre 2002 et 2008 est exponentielle, donc très rapide.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

123 Modéliser par une fonction logistique ou une courbe en S

1 Sur TI, la fonction est donnée par : $f(x)=\dfrac{100}{1+30e^{-0,50x}}$.

Sur Casio, elle est donnée par : $f(x)=\dfrac{80}{1+12e^{-0,10x}}$.

2 **a.** Pour tout réel x,

$\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

et $1-\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1}{e^x+1}-\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}$.

b. $f(x)=\dfrac{c}{1+a\times e^{-bx}}=\dfrac{ce^{bx}}{e^{bx}(1+a\times e^{-bx})}=\dfrac{ce^{bx}}{e^{bx}+a}$.

c. Une exponentielle est toujours strictement positive, et $a>0$, donc le dénominateur de $f(x)$ ne s'annule pas. f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

d. • D'après **c.**, $ce^{bx}>0$ et $e^{bx}+a>0$ pour tout réel x, donc $f(x)>0$ pour tout réel x.

• De plus, $ae^{bx}>0$ pour tout réel x, donc $1+ae^{bx}>1$ pour tout réel x.

Par conséquent, $\dfrac{1}{1+ae^{-bx}}<1$ sur $\mathbb{R}$.

D'où $f(x)<c$.

On a donc $0<f(x)<c$ sur $\mathbb{R}$.

3 **a.** $f'(x)=c\times\dfrac{-(-ab)e^{-bx}}{(1+ae^{-bx})^2}=\dfrac{abce^{-bx}}{(1+ae^{-bx})^2}$.

a, b et c étant tous les trois strictement positifs, comme l'exponentielle et le carré, on en déduit que $f'(x)>0$ pour tout réel x.

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. D'après les considérations de signe du **a.**, on en déduit que $f''(x)$ s'annule et change de signe si et seulement si $e^{bx}-a$ s'annule et change de signe.

$e^{bx}-a=0 \Leftrightarrow e^{bx}=a$.

Or, $a>0$, donc il existe un reel x tel que $e^{bx}=a$.

De plus, $e^{bx}-a>0 \Leftrightarrow e^{bx}>a$.

Or, la fonction $x\mapsto e^{bx}$ est strictement croissante et strictement positive.

Par conséquent, il existe un unique réel x_0 tel que $f''(x_0)=0$ et f'' change de signe en x_0.

Donc la fonction f admet un point d'inflexion en x_0.

4 Comme le taux d'équipement d'un bien de consommation, les fonctions logistiques sont bornées, croissantes, et possèdent un point d'inflexion (moment d'un renversement de tendance).

Réussir au Bac

124 Consommation d'un véhicule

1 Le nuage de points est constitué de points non alignés, dont la progression semble accélérer.

On peut penser le modéliser par une fonction exponentielle de base q, où q représente le coefficient multiplicateur de l'augmentation de consommation.

2 **a.** Dans C2, on écrit : =0,6×1,025^A2.

b. Le coefficient multiplicateur est $1,025>1$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. À 60 km/h, la consommation est de :

$f(60)=0,6\times1,025^{60}\approx2,64$,

soit environ 2,64 L / 100 km.

À 150 km/h, la consommation est de :

$f(150)=0,6\times1,025^{150}\approx24,36$,

soit environ 24,36 L / 100 km.

x	60	150
$f(x)$	2,64 ↗	24,36

3 **a.** $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}=\dfrac{0,6\times1,025^{x+1}}{0,6\times1,025^x}-1$

$=\dfrac{0,6\times1,025^x\times1,025}{0,6\times1,025^x}-1$

$=1,025-1=0,025$.

On a donc une augmentation de consommation de 2,5 % par km/h supplémentaire.

b. Si on augmente la vitesse de 10 km/h, on augmente la consommation de $1,025^{10}-1\approx0,28$ soit d'environ 28 %.

125 Élasticité de la demande

1 $0,9<1$; donc la fonction de demande est strictement décroissante sur $[4;10]$.

2 **a.** $f(4)=400\times0,9^4\approx262$ objets demandés pour un prix de 4 €.

$f(5)=400\times0,9^5\approx236$ objets demandés pour un prix de 5 €.

b. $\dfrac{f(5)-f(4)}{f(4)}=\dfrac{400\times0,9^5-400\times0,9^4}{400\times0,9^4}$

$=\dfrac{400\times0,9^4(0,9-1)}{400\times0,9^4}=-0,1$.

Il y a donc une baisse de 10 % de la quantité demandée lorsqu'on passe d'un prix de 4 € à un prix de 5 €.

c. $E=\dfrac{\dfrac{236-262}{262}}{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{-26}{262}\times4\approx-0,40$.

3 **a.** $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}=\dfrac{400\times0,9^{x+1}-400\times0,9^x}{400\times0,9^x}$

$=\dfrac{400\times0,9^x(0,9-1)}{400\times0,9^x}$

$=-0,1$ constante.

b. $E(x)=\dfrac{\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-0,1}{\dfrac{1}{x}}=-0,1x$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

126 QCM

1 **b.**

2 **a.** (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1{,}1^x$).

127 QCM

1 **b.** **2** **b.** **3** **a.**

128 QCM

1 **a.** **2** **a.**

129 Étudier les grands excès de vitesse

1 La fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $0{,}5 < 1$.
$4{,}3 > 0$, donc $x \mapsto 4{,}3 \times 0{,}5^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'où f est strictement croissante sur $[0\,;18]$.

2 Fin 2015, il s'est écoulé 14 ans depuis le 1er janvier 2002.
D'où la proportion de grands excès de vitesse est donnée par : $f(14) = 4{,}3 \times 0{,}5^{14} + 0{,}62 \approx 0{,}62$.

3 Pour tout réel x, $0{,}5^x > 0$.
Donc $4{,}3 \times 0{,}5^x > 0$.
D'où $f(x) > 0{,}62$ pour tout réel x.
On ne peut donc pas espérer que la proportion de grands excès de vitesse devienne inférieure à 0,62 %.

130 Utiliser une fonction auxiliaire

Partie A :

1 et **2** $g'(x) = 1 \times e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x$ pour tout réel $x \in [0\,;4]$.
Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $g'(x)$ est du signe de $x-2$.

x	0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	7	↘	$10-e^2$	↗	$10+e^4$

3 $g(2) = 10 - e^2 \approx 2{,}61 > 0$.
Or, $g(2)$ est le minimum de la fonction g. Donc la fonction g est strictement positive sur $[0\,;4]$.

Partie B :

1 $f'(x) = 10 + 1 \times e^x + (x-4)e^x = 10 + (x-3)e^x = g(x)$ pour tout $x \in [0\,;4]$.

2 $f'(x) = g(x) > 0$ pour tout $x \in [0\,;4]$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;4]$.

Partie C :

1 Coûts fixes : $f(0) = 14 - 4 = 10$ milliers d'euros.

2 **a.** On cherche x_0 tel que $f'(x_0) = 11 \Leftrightarrow g(x_0) = 11$.
On applique la propriété des valeurs intermédiaires : une unique solution sur $[2\,;4]$.

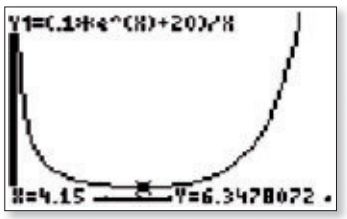
b. À l'aide du tableur de la calculatrice, on obtient $x_0 \approx 3{,}047$ soit environ 3 050 kg.

3 **a.** Le point d'inflexion semble être le point d'abscisse 2.

b. $f''(x) = g'(x)$. Or, $g'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = 2$ (*cf.* **A**).
Donc le point d'inflexion a pour coordonnées :
$(2\,;f(2)) \approx (2\,;2{,}61)$.
C'est le point à partir duquel les coûts de fabrication commencent à flamber.

131 Étude d'une fonction coût moyen

1 On obtient la courbe représentative ci-contre :



a. Le coût moyen de fabrication semble décroissant sur $]0\,;4{,}15]$ et croissant sur $[4{,}15\,;6]$.

b. Le minimum est atteint pour une production de 4,15 tonnes. Le coût moyen de fabrication est alors d'environ 6,35 milliers d'euros par tonne.

2 $C'(x) = \dfrac{0{,}1xe^x - (0{,}1e^x + 20)}{x^2}$

$= \dfrac{0{,}1xe^x - 0{,}1e^x - 20}{x^2}$

pour tout réel $x \in]0\,;6]$.

3 **a.** $f'(x) = 0{,}1\,e^x + 0{,}1\,x\,e^x - 0{,}1\,e^x = 0{,}1\,x\,e^x$ pour tout $x \in [0\,;6]$.

b. Sur $]0\,;6]$, on a $x > 0$ et $e^x > 0$.
Donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;6]$.
D'où la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;6]$.

c. $f(0) = -20{,}1$ et $f(6) \approx 181{,}71$.
Sur $[0\,;6]$, la fonction f est dérivable, donc continue, strictement croissante et $f(0) < 0 < f(6)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;6]$.
À l'aide du tableur de la calculatrice graphique, on trouve $\alpha \approx 4{,}2$.

d. On a donc :

x	0		α		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4 **a.** $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Le minimum du coût moyen de production est atteint lorsque $C'(x) = 0$, donc lorsque $f(x) = 0$.
Il est donc atteint pour α tonnes de vis produites.

b. On sait que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 0{,}1\,\alpha e^\alpha - 0{,}1\,e^\alpha - 20 = 0$
$\Leftrightarrow 0{,}1\,\alpha e^\alpha = 0{,}1\,e^\alpha + 20$.

D'où $C(\alpha) = \dfrac{0{,}1e^\alpha + 20}{\alpha} = \dfrac{0{,}1\alpha e^\alpha}{\alpha} = 0{,}1e^\alpha$.

132 Confirmer ou infirmer une conjecture graphique

1 On peut supposer que f est croissante sur $[-3\,;2]$.

2 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - \dfrac{3}{4} \times 2x = \dfrac{4xe^x + 2x^2e^x - 3x}{2}$

$= \dfrac{x(4e^x + 2xe^x - 3)}{2} = \dfrac{x((2x+4)e^x - 3)}{2}$.

3 **a.** $g'(x) = 2e^x + (2x+4)e^x = (2x+6)e^x = 2(x+3)e^x$.
Or, $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $g'(x)$ est du signe de $x+3$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On obtient donc :

x	-3		2
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	$-3{,}1$	↗	$56{,}1$

c. Sur $[-3\,;2]$, g est une fonction dérivable, donc continue, strictement croissante et $g(-3)<0<g(2)$.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-3\,;2]$.
$g(-0{,}19)\approx -0{,}006<0$ et $g(-0{,}18)\approx 0{,}04>0$.
D'où $-0{,}19\leqslant\alpha\leqslant -0{,}18$ (PVI encore).
d. On obtient donc :

x	-3		α		2
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4 **a.** et **b.** $f'(x)=0{,}5x\,g(x)$.
D'où :

x	-3		α		0		2
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		$0{,}003$	↘	0	↗	

c. La conjecture faite au **1** était donc fausse. Il aurait fallu une fenêtre beaucoup plus précise en y.
Par exemple : $y_{\min}=0$ et $y_{\max}=0{,}005$.

133 Modéliser une propagation

1 **a.** $f'(x)=2\,\mathrm{e}^{-x}-2x\,\mathrm{e}^{-x}=2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.
b. On a donc :

x	0		1		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$0{,}74$	↘	$0{,}03$

2 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires sur les deux intervalles : $[0\,;1]$ et $[1\,;6]$, et on trouve une solution sur chacun de ces 2 intervalles.
b. À l'aide de la calculatrice graphique, on trouve :
$x_1\approx 0{,}5810$ et $x_2\approx 1{,}5836$.
3 Le taux de 0,65 ppm est dépassé entre x_1 et x_2 soit pendant un temps de $x_2-x_1\approx 1{,}0026>1$ min.
Le personnel a donc été affecté par la fuite de gaz.

134 Positions par rapport à une tangente

Partie A :

1 **a.** $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+2)\mathrm{e}^{-x}=-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
b. Une exponentielle réelle étant toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $-(x+1)$.
c.

x	-2		-1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$2{,}7$	↘	$0{,}05$

2 $\mathscr{D}: y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$y=-x+2$.

Partie B :

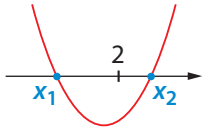
1 À la ligne 2, on a calculé $d'(x)$; à la ligne 3, on a calculé $d''(x)$.
2

x	-2		0		5
$d''(x)$		$-$	0	$+$	
d'	↘		0	↗	
signe de d'		$+$	0	$+$	
d	$-2\,\mathrm{e}^{2}$	↗	0	↗	$5\,\mathrm{e}^{-5}$

3 D'après le tableau de variation de d, on a $d(x)\leqslant 0$ sur $[-2\,;0]$ et $d(x)\geqslant 0$ sur $[0\,;5]$.
D'où $f(x)\leqslant 2-x$ sur $[-2\,;0]$ et $f(x)\geqslant 2-x$ sur $[0\,;5]$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ sur $[-2\,;0]$ et au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $[0\,;5]$.
4 $f''(x)=d''(x)$.
On a donc $f''(x)$ qui s'annule en changeant de signe en 0.
Par conséquent, le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe représentative de la fonction f.

135 Exponentielle de $u(x)$

1 **a.** $u'(x)=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$.
Calcul du discriminant de x^2-4x+1 :
$\Delta=b^2-4ac=16-4=12$.
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\notin\,]-\infty\,;2[$.



On a donc :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	↗		$4-2\sqrt{3}$	↘	

b. $u(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$ (et $x-2\neq 0$)
$\Leftrightarrow x^2=1$ (et $x\neq 2$)
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.
Or, $x\in\,]-\infty\,;2[$, donc $S=\{-1\,;1\}$.
La courbe représentative de la fonction u coupe l'axe des abscisses en 2 points d'abscisses respectives -1 et 1.
2 **a.** $f'(x)=u'(x)\exp(u(x))=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\exp\left(\dfrac{x^2-1}{x-2}\right)$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $u'(x)$.
On a donc :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		$\mathrm{e}^{4-2\sqrt{3}}$	↘	

b. $f(x)=1 \Leftrightarrow \exp(u(x))=\mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow u(x)=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

136 Étude d'un bénéfice

Partie A :

1 $f'(x) = 20\,e^{-0,5x} - 0,5 \times 20\,(x-1)\,e^{-0,5x}$
$= 20\,e^{-0,5x}\,(1 - 0,5\,(x-1))$
$= 20\,e^{-0,5x}\,(0,5\,(3-x)$
$= 10\,(-x+3)\,e^{-0,5x}$.

2 Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-x+3$.

x	0,5		3		8
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	–7,8	↗	8,9	↘	2,6

Partie B :

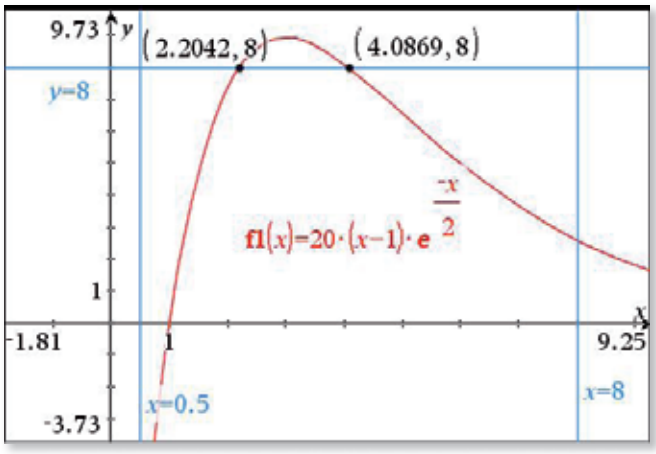
1 **a.** $x = 2,2$. Le bénéfice est alors de :
$f(2,2) = 20\,(2,2-1)\,e^{-0,5\times 2,2} \approx 7,989$
soit environ 7 989 €.

b. $x = 4,8$. Le bénéfice est alors de :
$f(4,8) = 20\,(4,8-1)\,e^{-0,5\times 4,8} \approx 6,895$
soit environ 6 895 €.

2 **a.** On cherche x tel que :
$f(x) \geqslant 0 \iff 20\,(x-1)\,e^{-0,5x} \geqslant 0 \iff x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$
(une exp est toujours strictement positive).
L'entreprise doit donc produire au minimum une centaine de bicyclettes pour ne pas travailler à perte.

b. D'après le tableau de variation de la **partie A**, le bénéfice est maximum pour 3 centaines de bicyclettes produites.
Le bénéfice est alors de $f(3) \approx 8,925$ soit 8 925 € environ.

c. On cherche x tel que $f(x) \geqslant 8$.
• Dans un premier temps, on utilise la propriété des valeurs intermédiaires pour déterminer que l'équation $f(x) = 8$ admet exactement 2 solutions sur $[0,5 ; 8]$.
• On utilise la calculatrice pour obtenir les valeurs approchées de ces solutions : $x \approx 2,21$ (par excès) et $x \approx 4,08$ (par défaut).
• D'après le tableau de variation de la fonction f, l'entreprise doit donc produire entre 221 et 408 bicyclettes pour un bénéfice supérieur ou égal à 8 000 €.



137 Offre, demande et prix d'équilibre

Partie A :

1 **a.** $f'(x) = 10\,e^{x}$, strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $[4 ; 6]$.

b. $g'(x) = -10^{6}\,e^{-x}$, strictement négative.
Par conséquent, g est strictement décroissante sur $[4 ; 6]$.

2 **a.** $h'(x) = g'(x) - f'(x)$ somme de réels négatifs.
D'où h est strictement décroissante sur $[4 ; 6]$.

b.

x	4		6
$h(x)$	17 356	↘	–33 364

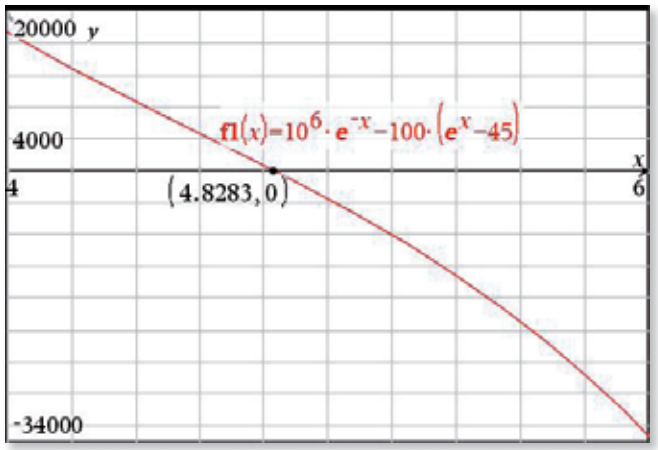
c. On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction h sur $[4 ; 6]$.

3 **a.** Sur tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5
2	$h(x)$	17400	12800	8600	4600	600	-3600

	H	I	J	K	L
1	5,2	5,4	5,6	5,8	6
2	-8100	-13100	-18800	-25500	-33400

b.



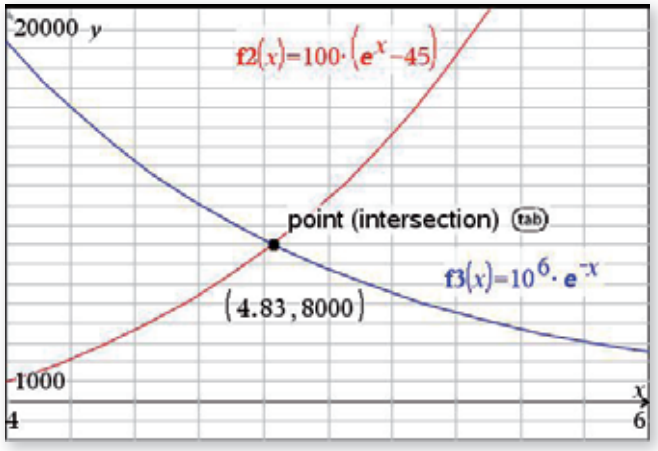
c. On lit graphiquement $4,82 < \alpha < 4,83$.

Partie B :

1 Quand le prix augmente, l'offre augmente et la demande diminue.

2 P est le prix tel que $h(P) = 0$.
On a vu en **partie A** que cette équation admet exactement une solution α sur $[4 ; 6]$.
La calculatrice permet d'obtenir $\alpha \approx 4,83$.
Donc le prix d'équilibre est d'environ 4,83 €.

3 La quantité de paquets de capsules correspondant au prix d'équilibre est $g(P) = 10^{6} \times e^{-4,83} \approx 8\,000$
ou $f(P) = 100\,(e^{4,83} - 45) \approx 8\,000$.
Le chiffre d'affaires est alors de $8\,000 \times 4,83$ soit 38 640 €.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

138 Taux d'équipement en lecteur de DVD

1 a. $f'(x) = 85 \times \dfrac{150e^{-x}}{(1+150e^{-x})^2} = \dfrac{12750e^{-x}}{(1+150e^{-x})^2}$.

Une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. • En 2010, $x = 12$. Le taux d'équipement est alors estimé à $f(12) \approx 84{,}92$, soit environ 84,92 %.

• En 2012, $x = 14$. Le taux d'équipement est alors estimé à $f(14) \approx 84{,}99$, soit environ 84,99 %.

2 a. Le taux d'équipement augmente d'abord de plus en plus vite, puis augmente de plus en plus lentement.

On lit graphiquement que le rythme de croissance est maximum au bout de 5 ans environ.

b. Le rythme de croissance est donc maximal au point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

3 $f(x) = 90 \Leftrightarrow \dfrac{85}{1+150e^{-x}} = 90$

$\Leftrightarrow 85 = 90 + 1\,350e^{-x} \Leftrightarrow -5 = 1\,350e^{-x}$.

Impossible puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

Selon ce modèle, le taux d'équipement des ménages n'atteindra donc jamais 90 %.

139 Coût total, recette et bénéfice

Partie A :

1 a. $f'(x) = 0{,}2 - 0{,}2e^{-0{,}2x+1} = 0{,}2(1 - e^{-0{,}2x+1})$

b. $1 - e^{-0{,}2x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant e^{-0{,}2x+1} \Leftrightarrow e^0 \geqslant e^{-0{,}2x+1}$

$\Leftrightarrow -0{,}2x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}2x \leqslant -1$

$\Leftrightarrow x \geqslant 5$.

c.

x	5		15
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	3	↗	4,135

Partie B :

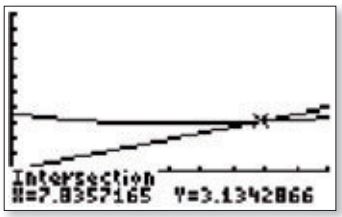
1 a. • Pour 900 objets, le coût total de production est donné par $f(9) \approx 3{,}249$, soit 3 249 €.

• Pour 1 000 objets, le coût total de production est donné par $f(10) \approx 3{,}368$, soit 3 368 €.

b. $t = \dfrac{f(10) - f(9)}{f(9)} \approx 0{,}036$

soit environ 3,6 % d'augmentation.

2 a.



b. On lit graphiquement que l'entreprise réalise un bénéfice à partir d'environ $x_0 \approx 7{,}8$ soit 780 objets.

c. $x_0 \approx 7{,}84$ soit 784 objets.

140 Bénéfice mensuel maximal

1 Une exponentielle étant toujours strictement positive, $B(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

2 a. $u'(x) = -0{,}04x + 0{,}2$

$B'(x) = 10e^{u(x)} + 10(x-5)(-0{,}04x + 0{,}2)e^{u(x)}$

$= 10e^{u(x)}(1 - 0{,}04x^2 + 0{,}2x + 0{,}2x - 1)$

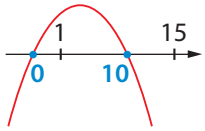
$= (-0{,}4x^2 + 4x)e^{u(x)}$.

b. Une exponentielle étant toujours strictement positive, $B'(x)$ est du signe de $-0{,}4x^2 + 4x$.

c. $-0{,}4x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - 0{,}1x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10$.



x	1		10		15
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−29,05	↗	30,33	↘	13,53

3 Le bénéfice est maximum pour 10 centaines de jouets, soit 1 000 jouets.

Ce bénéfice est alors de 30,33 milliers d'euros.

Le bénéfice moyen est donc de 30,33 €.

141 Élasticité instantanée

1 a. $f'(x) = e^{x+1} > 0$ pour tout réel x. Donc f est strictement croissante sur $[3 ; 8]$.

b. Si $x < 2{,}8$ €/kg, $f(x) < f(2{,}8)$ (puisque f est strictement croissante).

Or, $f(2{,}8) \approx -0{,}3$: il est impossible d'avoir une offre négative !

2 $g'(x) = -10^4 e^{-x-1} < 0$ pour tout réel x. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[3 ; 8]$.

3 a. $h'(x) = f'(x) - g'(x) = e^{x+1} + 10^4 e^{-x-1} > 0$ pour tout réel x comme somme de deux fonctions strictement positives.

Donc h est une fonction strictement croissante sur $[3 ; 8]$.

x	3		8
$h(x)$	−58	↗	8 057

b. On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction h sur $[3 ; 8]$.

On trouve une unique solution α à l'équation $h(x) = 0$ sur $[3 ; 8]$.

c. Le prix d'équilibre vérifie $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $h(x) = 0$.

À l'aide de la calculatrice graphique, on trouve que ce prix d'équilibre est $\alpha \approx 3{,}83$ €.

La quantité demandée est alors $g(3{,}83) \approx 80$ tonnes.

4 a. $E(x) = x\dfrac{-10^4 e^{-x-1}}{10^4 e^{-x-1}} = -x$.

b. $E(3{,}83) = -3{,}83$.

À l'équilibre, pour une augmentation de 1 % du prix, il y a une baisse de la demande de 3,83 %.

142 Coût total, coût marginal et coût moyen

Partie A :

1 $C_m(x) \approx C'(x) = 2 + e^{-x+2} - xe^{-x+2}$

$= (1-x)e^{-x+2} + 2$.

$C_m'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+2} = (x-2)e^{-x+2}$.

2 a. Une exponentielle étant toujours strictement positive, $C_m'(x)$ est du signe de $x - 2$ pour tout réel x.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b.

x	0,5		2		5
$C_m'(x)$		−	0	+	
C_m	4,24	↘	1	↗	1,80

3 Le minimum de C_m sur $[0{,}5\,;5]$ est 1, donc $C_m(x) > 0$ pour tout $x \in [0{,}5\,;5]$.

Partie B :

1 $C'(x) = C_m(x) > 0$ pour tout $x \in [0{,}5\,;5]$.
Donc la fonction C est strictement croissante sur $[0{,}5\,;5]$.

2 $C''(x) = C_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$,
et $C''(x)$ change de signe en 2.
Donc le point d'abscisse 2 est le point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction C.

Partie C :

1 $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{2x + xe^{-x+2} + 10}{x}$

$= 2 + e^{-x+2} + \dfrac{10}{x}$.

2 $CM'(x) = -e^{-x+2} - \dfrac{10}{x^2}$.

Or, une exponentielle réelle et un carré réels sont toujours positifs, donc $CM'(x) < 0$ pour tout réel x.
On en déduit que la fonction CM est strictement décroissante sur $[0{,}5\,;5]$.

143 Fonction logistique et coût total

Partie A :

1 $f(0) = 16$
$f(20) \approx 79{,}21$.

2 $f'(x) = \dfrac{-80(-0{,}3 \times 4e^{-0{,}3x})}{(1+4e^{-0{,}3x})^2} = \dfrac{96e^{-0{,}3x}}{(1+4e^{-0{,}3x})^2}$.

Une exponentielle et un carré étant toujours positifs, $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

x	0		20
$f(x)$	16	↗	79,21

3 f est strictement croissante sur $[0\,;20]$, donc pour tout $x \in [0\,;20]$, $f(x) \leqslant f(20) \Leftrightarrow f(x) \leqslant 79{,}21$.
Par conséquent, pour tout $x \in [0\,;20]$, $f(x) < 80$.
Graphiquement, la courbe représentative de la fonction f reste en-dessous de la droite d'équation $y = 80$.

4 Graphiquement, on lit :

x	0		x_0		20
$7x - f(x)$		−	0	+	

Partie B :

1 Coûts fixes : $f(0) = 16$, donc les coûts fixes sont de 16 000 €.

2 $f(x) < 80$ pour tout réel $x \in [0\,;20]$, donc le coût total de production ne peut pas dépasser les 8 000 €.

3 $B(x) = R(x) - f(x) = 7x - f(x)$.
D'après **B 4**, l'entreprise réalise des bénéfices pour une production journalière supérieure à x_0 centaines de thermomètres, soit plus de 902 thermomètres.

144 Comparer des modèles d'évolution

Partie A :

1 $f'(x) = 0{,}472 \times 0{,}655\,e^{0{,}655x} > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2 **a.** Au bout de 6 semaines, le modèle semble s'éloigner de la réalité, car la croissance de ce modèle est trop forte. Il ne semble donc pas que le modèle soit très pertinent pour $x > 5$.

b. $f(9) \approx 171{,}43 > 100$.
Le résultat est totalement incohérent : les ventes ne peuvent dépasser 100 % des ventes de haut de gamme.

Partie B :

1 **a.** $g'(x) = \dfrac{-30(-0{,}75 \times 60e^{-0{,}75x})}{(1+60e^{-0{,}75x})^2}$

$= \dfrac{1\,350e^{-0{,}75x}}{(1+60e^{-0{,}75x})^2}$.

b. Une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $g'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2 À l'aide du tableur de la calculatrice, on trouve que $g(x)$ semble tendre vers 30 environ lorsque x devient très grand.
Il semble qu'avec ce modèle, le pourcentage des ventes semble stagner vers 30 % du segment du marché.

3 On cherche à résoudre $g(x) \geqslant 25$.
A l'aide du tableur de la calculatrice, on obtient $x \geqslant 7{,}6$.
Les objectifs commerciaux sont atteints au cours de la 7e semaine.

Réinvestir... (p. 102)

145 ... en calcul financier

Une approche du nombre e par capitalisation instantanée des intérêts

1 **a.** Au bout d'un an, le capital est de :
$1\,000(1+1) = 2\,000$ €.
Au bout de 2 ans, le capital est de $2\,000 \times 2 = 4\,000$ €.

b. Chaque mois, le capital augmente de $\dfrac{m}{100}$ %, donc est multiplié par $(1+m)$.
Au bout d'un an, le capital est donc multiplié par : $(1+m)^{12}$, d'où $C_{12} = 1\,000 \times (1+m)^{12}$.

- $C_{12} = 1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{12}\right)^{12} \approx 2\,613{,}04$ €.

- $C_{24} = 1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{12}\right)^{24} \approx 6\,827{,}95$ €.

c. Dans une année, il y a 365 jours, donc le capital au bout d'un an est de :
$1\,000 \times (1+j)^{365} = 1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{365}\right)^{365} \approx 2\,714{,}567\,5$ €.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 **a.** Dans un an, il y a 365×24, soit 8 760 h et $8\,760 \times 60$, soit 525 600 minutes.

• Par heure, le capital acquis en un an est de :

$1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{8\,760}\right)^{8760} \approx 2\,718{,}126\,7$ €.

• Par minute, le capital acquis au bout d'un an est de :

$1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{525\,600}\right)^{525\,600} \approx 2\,718{,}279\,2$ €.

b. Dans une telle année, il y a :

$365{,}26 \times \left(23 + \dfrac{56}{60}\right)$ heures,

soit $s = 365{,}26 \times \left(23 + \dfrac{56}{60}\right) \times 3\,600$ secondes.

Le capital acquis au bout d'un an est alors de :

$1\,000 \times \left(1 + \dfrac{1}{s}\right)^{s} \approx 2\,718{,}281\,8$ €.

3 **a.** Si la capitalisation est instantanée, le capital va être multiplié par 2,718 281 828.

Le capital va donc être multiplié par e :

b. Quand n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n}$ est infiniment petit.

La formule donnée correspond tout à fait à la réponse du **a.**

146 … en sociologie

Modéliser la société

Partie A :

1 $f'(x) = 15(-0{,}018 \times 2(x-30))\,e^{-0{,}018(x-30)^2}$

$= -0{,}54(x-30)\,e^{-0{,}018(x-30)^2}$.

Or, une exponentielle réelle est toujours positive, donc $f'(x)$ est du signe de $-0{,}54(x-30)$ soit de $30-x$.

x	15		30		50
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	15	↘	

Le taux de fécondité maximal est de 15 %, pour les femmes de 30 ans.

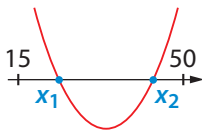
2 $f''(x)) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 540x + 7\,850 = 0$ (une exponentielle est strictement positive).

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 9\,000$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\approx 24{,}73$ $\approx 35{,}27$



On a donc :

x	15		24,73		35,27		50
$f(x)$		+	0	−	0	+	

La courbe représentative de la fonction f admet donc 2 points d'inflexion, d'abscisses respectives 24,73 et 35,27.

Le taux de fécondité accélère d'abord, avant de décélérer.

Partie B :

1 $f'(x) = 0{,}115\exp\left(\dfrac{(x-44)^2}{400}\right) + 0{,}115x \times \dfrac{2(x-44)}{400}\exp\left(\dfrac{(x-44)^2}{400}\right)$

$= 0{,}115(1 + 0{,}005x^2 - 0{,}22x)\exp\left(\dfrac{(x-44)^2}{400}\right)$.

2 Une exponentielle étant strictement positive,

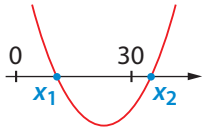
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}005x^2 - 0{,}22x + 1 = 0$.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}0284$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\approx 5{,}148$ $\approx 38{,}85 \notin [0\,;30]$



x	0		5,148		30
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−3 679	↗	4,399	↘	5,532

3 En 2009, le taux de divorces est maximal pour environ 5 ans de mariage.

Cela se confirme graphiquement.

4 On constate graphiquement qu'après 7 années de mariage, le taux de divorce diminue franchement.

147 … dans la vie courante

Alcoolémie et conduite

1 Au bout de 2 h 30, l'alcoolémie de l'individu est de :

$f(2{,}5) = 2{,}5\,e^{-0{,}6 \times 2{,}5 + 0{,}4} \approx 0{,}83$ g/L.

Au bout de 4 h 45, le taux d'alcoolémie de l'individu est de :

$f(4{,}75) \approx 0{,}41$ g/L.

2 $f'(t) = e^{-0{,}6t+0{,}4} - 0{,}6te^{-0{,}6t+0{,}4} = (1 - 0{,}6t)\,e^{-0{,}6t+0{,}4}$.

$f'(t)$ est du signe de $1 - 0{,}6t$ vu qu'une exponentielle est toujours strictement positive.

x	0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	0,91	↘	

3 On cherche t tel que $f(t) \leqslant 0{,}5$.

• En utilisant la propriété PVI, on détermine que l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet deux solutions :

une sur $[0\,;5/3]$ et une sur $[5/3\,;+\infty[$.

On considère qu'un conducteur ne peut pas prendre la voiture pendant la montée de l'alcoolémie.

• On cherche à l'aide du tableur de la calculatrice la solution de l'équation $f(t) = 0{,}5$ appartenant à $[5/3\,;+\infty[$.

On obtient $t \approx 4{,}22$ h.

• Donc l'individu pourra prendre sa voiture sans être en infraction après près de 4 h 15 (4,22 h environ).

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

148 … en dynamique de population

Modèle logistique

1 $f'(x) = \dfrac{147\,000(-2{,}74 \times 10^{26}(-0{,}032)\mathrm{e}^{-0{,}032t})}{(1+2{,}74\times 10^{26}\,\mathrm{e}^{-0{,}032t})^2}$

$= \dfrac{12\,888{,}96 \times 10^{26}\,\mathrm{e}^{-0{,}032t}}{(1+2{,}74\times 10^{26}\,\mathrm{e}^{-0{,}032t})^2}$.

Or, une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 À l'aide du logiciel de calcul formel, on cherche l'expression de $f''(x)$, puis la(les) solutions de l'équation $f''(x) = 0$.
En constatant que $f''(x)$ change de signe autour de la solution α obtenue, on trouve l'abscisse du point d'inflexion telle que $\alpha \approx 1\,870{,}85$:
À partir de 1871, l'augmentation de la population américaine commence à ralentir.

3 a.

Année	Population (milliers)	Modèle (milliers)	Erreur relative
1790	3 929	3 928	−0,00025
1800	5 308	5 356	0,00904
1820	9 638	9 836	0,02054
1880	50 156	48 283	−0,0373
1919	91 972	92 631	0,00717

Le modèle est donc très proche de la réalité.
b. En 1960, le modèle donne : $f(1960) \approx 126\,937$.
La variation relative est donc d'environ −0,29, soit 29 % d'erreur : le modèle ne semble plus très valable.
En 1980, le modèle donne : $f(1980) \approx 135\,692$.
La variation relative est donc d'environ −0,40, soit 40 % d'erreur : le modèle ne semble plus du tout valable.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 4

Fonction ln

Partir d'un bon pied (p. 104)

A QCM – Relation fonctionnelle de l'exponentielle

1 **c.** L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles.

2 **a.** $e^{2x+1} - e = e \times (e^x)^2 - e \times 1$
et $e(e^x - 1)(e^x + 1) = e((e^x)^2 - 1)$.

3 **b.** $(e^x)^2 \times e^{3x-1} = e^{2x+3x-1} = \dfrac{e^{5x}}{e}$.

B Équation avec exponentielle

1 **a.** $e^{0,02x-1} = e^0 \Leftrightarrow 0,02x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{0,02} = 50$.

Donc $\mathbf{S = \{50\}}$.

b. $e^{-0,5x+1} = e^2 \Leftrightarrow -0,5x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{-0,5} = -2$.

Donc $\mathbf{S = \{-2\}}$.

c. $e^{-3x+1} = 0$. $\mathbf{S = \varnothing}$, car une exponentielle est toujours strictement positive.

2 $(e^x - 1)(3e^x + 2) = e^x \times 3e^x + 2e^x - 3e^x - 2$

$= 3e^{2x} - e^x - 2$.

Alors $3e^{2x} = e^x + 2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - e^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(3e^x + 2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = \dfrac{-2}{3}$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = \dfrac{-2}{3}$ n'a pas de solution, car e^x est strictement positive. Donc $\mathbf{S = \{0\}}$.

C Vrai ou faux ? Calcul de dérivée

On utilise la formule $(e^u)' = u' \times e^u$.

1 **Faux :** $f'(x) = 2 \times (-0,5)e^{-0,5x+1} = -e^{-0,5x+1}$.

2 **Vrai :** $f'(x) = \dfrac{e}{e^{-1}} \times 1e^{x-1} = f(x)$.

3 **Faux :** $f'(x) = -e^{-x} - e^x = -(e^{-x} + e^x)$.

4 **Vrai :** on utilise $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$.

$f'(x) = 1e^{-0,1x+2} + (-0,1)e^{-0,1x+2} \times (x + 5)$

$= 0,1 \times (10 - x - 5)e^{-0,1x+2}$

$= 0,1(5 - x)e^{-0,1x+2}$.

D Coefficient multiplicateur

1 **a.** $CM = 1 + \dfrac{2,5}{100} = \mathbf{1,025}$.

b. $CM_{global} = 1,025^{10} \approx 1,28008$, soit une augmentation globale de **28 % environ**.

c. $4,67 \times 1,025^{10} \approx 5,978$ soit environ 6 millions d'habitants.

2

$CM_{global} = 1,02 \times 1,018 \times 0,985 \times 0,97 \times 0,995 \times 1,04$

$\approx 1,0266 \approx 1,027$.

Donc $taux_{global} = CM_{global} - 1 \approx 0,027$,
soit une augmentation globale d'environ 2,7 %.

Découvrir

Activité 1 Résoudre graphiquement $e^x = k$ (p. 106)

1 **a.** La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $k = \exp x_P > 0$.

b. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, et $0 < \exp x$ pour tout réel x.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

- Lorsque $k = 1 = e^0$, $P(0 ; 1)$.
- Lorsque $k = e = e^1$, $P(1 ; e)$.

c. Fig. 1 : $S = \{0,69\}$. Fig. 2 : $S = \{1,79\}$.
Fig. 3 : $S = \{1,1\}$.

2 **a.** $x_M = y_P > 0$, donc lorsque P parcourt $\mathscr{C}_{exp}$, l'abscisse de M varie dans $]0 ; +\infty[$.
$y_M = x_P$. Or, $x_P \in \mathbb{R}$, donc y_M peut être négatif.

b. • $k = 2$, $M(2 ; 0,69)$ (utilisation de fig. 1)
$k = 3$, $M(3 ; 1,1)$ (fig. 3)
$k = 6$, $M(6 ; 1,79)$ (fig. 2)
$k = 0,5$, $M(0,5 ; -0,69)$ à l'aide de la calculatrice graphique.

- $f(2) + f(3) \approx 0,69 + 1,1 = 1,79 \approx f(6)$
$f(0,5) = -f(2)$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 2 Découvrir les propriétés de la fonction ln (p. 106)

1

x	1	e	e^2	e^3	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$
y tel que $e^y = x$	0	1	2	3	-1	-2

2 **a.** $\ln 2 \approx 0{,}69$ $\ln 3 \approx 1{,}1$ $\ln 6 \approx 1{,}79$.
b. $\ln(-2)$: IMPOSSIBLE, la calculatrice indique une erreur donc $\neq -\ln 2$
$\ln(0{,}5) = -\ln 2$.

3 **a.** La courbe représentative de la fonction ln est « croissante ».
b. Cette courbe traverse l'axe des abscisses pour $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

c. $\ln(10^9) \approx 20{,}7$, $\ln(10^{99}) \approx 228$.
ln x est croissante, mais très doucement d'où « l'escargot ».

4 **a.** $e^x \times e^y = e^{x+y}$.
b. $e^{y_1} \times e^{y_2} = e^{y_1+y_2} \Leftrightarrow x_1 \times x_2 = e^{\ln(x_1)+\ln(x_2)}$
$\Leftrightarrow e^{\ln(x_1 \times x_2)} = e^{\ln(x_1)+\ln(x_2)}$
$\Leftrightarrow \ln(x_1 \times x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

Activité 3 Conjecturer la dérivée de la fonction ln (p. 107)

1 **a.** $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout réel x.
b. Le nombre dérivé de exp en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction exp au point d'abscisse x. C'est l'ordonnée du point P.
c. $y = 4(x - \ln 4) + 4$.

2 **a.** Fig. 2 : $\ln'(2) = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ (coefficient directeur de la tangente en M à la courbe représentative de la fonction ln).
Fig. 3 : $\ln'(5) = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ (coefficient directeur de la tangente en M à la courbe représentative de la fonction ln).
b. La fonction dérivée de la fonction ln semble être la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$.

Activité 4 Comparer des croissances exponentielles (p. 107)

1 **a.** Pour l'Afrique, la croissance est la plus forte sur la figure 2.
b. Pour l'Asie et le Monde, les deux courbes sont « parallèles » : l'une est la translatée de l'autre. La croissance est la même.

2 Lorsque les taux de croissance sont pratiquement identiques (Monde, Asie, Amérique latine, Océanie), les courbes ont même « perte » dans un repère semi-log.

Savoir faire

1. Utiliser les formules sur ln (p. 109)

Exercices d'application

1 **a.** $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$.
b. $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln 2$.
c. $e^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \ln 2 \Leftrightarrow x = -1 + \ln 2$.
d. $4e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln 4$.

2 **a.** $\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.
b. $0{,}5 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.
c. $4 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \exp\left(-\frac{1}{4}\right) = e^{-0{,}25}$.
d. $\ln x(3 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $3 - \ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^3$.

3 $A = \ln 2 + \ln 3 - \ln 5$.
$B = 3 \ln 2 + 2 \ln 5$.

4 $A = \ln(6e)$.
$B = \ln\left(\frac{3^2 \times 2^3}{5}\right) = \ln\left(\frac{72}{5}\right) = \ln(14{,}4)$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2. Étudier les variations d'une fonction avec ln (p. 111)

Exercices d'application

5 **a.** $f(1)=\ln 1=0$ et $g(1)=0{,}5(1^2-1)=0$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent en $A(1\,;0)$.
b. $d(x)=f(x)-g(x)=\ln x-0{,}5\,(x^2-1)$.
$d'(x)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x^2$		+	0	−	
x	0	+		+	
$d'(x)$	‖	+	0	−	0
$d(x)$	‖	↗	0	↘	

$d(x)\leqslant 0$ pour tout réel x, donc $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout réel x.
La courbe représentative de la fonction ln est donc située en-dessous de la courbe représentative de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$. De plus $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes en 1.

6 **a.** $f'(x)=0{,}5\times 2x+\dfrac{1}{x}$ et $f''(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.
b. $f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1$ sur $[0{,}2\,;4]$, donc la dérivée seconde s'annule en 1 en changeant de signe.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

3. Déterminer un seuil (p. 113)

Exercices d'application

7 Soit t le taux d'évolution moyen annuel.
$(1+t)^{20}=\dfrac{143}{311} \Leftrightarrow 1+t=\left(\dfrac{143}{311}\right)^{\frac{1}{20}}$.
Donc $t\approx -0{,}0381$ soit une baisse d'environ 38,1 ‰.
En 2018, il se sera écoulé 8 ans. Le taux de mortalité sera alors d'environ $143\times\left(1-\dfrac{38{,}1}{1000}\right)^8\approx 104{,}8$. Soit 104,8 ‰.

8 On cherche n tel que :
$10{,}9\left(1+\dfrac{3{,}5}{100}\right)^n>20 \Leftrightarrow 1{,}035^n>\dfrac{20}{10{,}9}$
$\Leftrightarrow n\ln 1{,}035>\ln\left(\dfrac{20}{10{,}9}\right) \Leftrightarrow n>\dfrac{\ln\left(\dfrac{20}{10{,}9}\right)}{\ln 1{,}035}$.
La population du Niger devrait donc dépasser 20 millions d'habitants au bout de 18 ans, c'est-à-dire en 2018.

QCM (p. 115)

9 **b.** Sur $\mathbb{R}$, $\ln(e^a)=a$.
$e^{\ln(a)}=a$ est vraie seulement pour $a>0$.

10 **b.** $\ln\left(\dfrac{e^x}{y}\right)=\ln(e^x)-\ln(y)=x-\ln(y)$.

11 **b.** On factorise : $3e^x-2e^{2x}=e^x(3-2e^x)$.
Comme $e^x>0$ pour tout réel x, on résout $3-2e^x\geqslant 0$
$\Leftrightarrow e^x\leqslant 1{,}5 \Leftrightarrow x\leqslant\ln(1{,}5)$.

12 **b.** $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$.

13 **c.** Sachant que la dérivée de $(u)^2$ est $2u'u$:
$f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$. La dérivée f' s'annule en 1 en changeant de signe (négative, puis positive).
Donc la fonction f admet un minimum en 1.

14 **b.** $(\ln(x))^2+2\ln(x)=0$ *on factorise par ln (x)*
$\Leftrightarrow \ln(x)\,(\ln(x)+2)=0$
$\Leftrightarrow \ln(x)=0$ ou $\ln(x)=-2$
$\Leftrightarrow x=e^0=1$ ou $x=e^{-2}$.

15 **b.** Comme le coût est en millier d'euros et la quantité x en centaine d'objets, le coût moyen est en dizaine d'euros par objet.

16 **b.** $f'(x)=x-3+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2}$.
Au numérateur $\Delta=-7$ négatif. Donc sur [0,5 ; 8] , la dérivée est positive et la fonction est croissante.

17 **a.** $CM_{global}=\dfrac{21{,}91}{80{,}30}=(1+t_{annuel})^{10}$.
D'où $t_{annuel}=\left(\dfrac{21{,}91}{80{,}30}\right)^{\frac{1}{10}}-1\approx -0{,}12$,
soit une baisse d'environ 12 % par an.

18 **c.** $12{,}5\times 0{,}95^n\leqslant 7 \Leftrightarrow 0{,}95^n\leqslant 0{,}56$.
On applique la fonction ln, strictement croissante :
$\ln(0{,}95^n)\leqslant\ln(0{,}56) \Leftrightarrow n\times\ln(0{,}95)\leqslant\ln(0{,}56)$.
Or $0{,}95\in]0\,;1[$, donc $\ln(0{,}95)<0$.
Ainsi, l'inégalité change de sens : $n\geqslant\dfrac{\ln(0{,}56)}{\ln(0{,}95)}$.
Or $\dfrac{\ln(0{,}56)}{\ln(0{,}95)}\approx 11{,}3$ et n est entier.
Il faut donc avoir n entier supérieur ou égal à 12.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Exercices

1 Logarithme népérien d'un réel strictement positif (p. 116)

19 QCM

1 **b.** e^x est strictement positif pour tout réel x, donc $\ln(e^x)$ existe et $\ln(e^x) = x$ sur $\mathbb{R}$.
2 **c.** $\ln(x)$ existe seulement pour $x > 0$.
3 **b.** Sur $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. Donc l'équation s'écrit $x = -3$.

20 Vrai ou faux ?

1 **Vrai.** **2** **Faux.**
3 **Vrai :** $\ln(e^2 + e) = \ln(e(e+1)) = \ln e + \ln(e+1)$
$= 1 + \ln(e+1)$.
4 **Faux :** par exemple, pour $x = -2$: $\ln(x^2 + x) = \ln 6$, mais $\ln x$ n'existe pas !

Résolution d'équations avec exp

21 **a.** $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.
b. $e^x + 2 = 3 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$.

22 **a.** $e^{-0,03x} = 0,25 \Leftrightarrow -0,03x = \ln(0,25)$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(0,25)}{-0,03} \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 4}{0,03}$.
b. $(e^x - 1)(3e^x - 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ ou $3e^x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

Résolution d'équations avec ln

23 **a.** $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
b. $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

24 **a.** $2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{0,5}$.
b. $(x+2)\ln x = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $\ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$.

25 **a.** $\ln x = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln 3^2 \Leftrightarrow x = 9$.
b. $\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$
$\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$.

Tableaux de signes avec exp

26 **a.** Pour étudier le signe, on résout $3e^x - 4 \geqslant 0$.
$\Leftrightarrow e^x \geqslant \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x \geqslant \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$. D'où le tableau de signes :

x	-1		$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b. $1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$
et $e^x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(4)$.
D'où :

x	0		1		$\ln(4)$		5
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$e^x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

27 **a.** $1 - 2e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2e^x$
$\Leftrightarrow e^x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x < -\ln 2$.
$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

x	-2		$-\ln 2$		$\ln 2$		2
$1-2e^x$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$e^x - 2$		$-$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. $f(x) = e^x(e^x - 5)$.
$e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f(x)$ est du signe de $e^x - 5$.
$e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$.

x	0		$\ln 5$		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

28 Preuves de cours

1 $\ln(1) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Or $\ln(1) = 0$. Donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

2 $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

29 Justifier des résultats

1 **a.** $\ln(25e) = \ln(5^2 \times e) = \ln(5^2) + \ln(e) = 2\ln(5) + 1$.
b. $\ln(e^2) + 4\ln(1) = 2\ln(e) + 4 \times 0 = 2 \times 1 = 2$.
c. $\ln(e^{-1}) + \ln(e^3) = -1 + 3 = 2$.
2 • $\ln(2) - 2\ln(5) + 3\ln(2) = 4\ln(2) - \ln(5^2)$
$= \ln(2^4) - \ln(5^2) = \ln\left(\dfrac{16}{25}\right) = \ln(0,64)$.
• $\ln(e^3) - 2\ln(1) + 4\ln(5e)$
$= 3\ln(e) - 2 \times 0 + 4\ln(5) + 4\ln(e)$
$= 3 + 4\ln(5) + 4 = 7 + 4\ln(5)$
$= 7 + \ln(5^4) = 7 + \ln(625)$.
• $\ln(2+3) - 3\ln(5) + 4\ln(3) = \ln(5) - \ln(5^3) + \ln(3^4)$
$= \ln\left(\dfrac{5 \times 3^4}{5^3}\right) = \ln\left(\dfrac{81}{25}\right)$.

30 Transformer une écriture

• $\ln(3e) + 2\ln 3 - \ln 27 = \ln 3 + \ln e + 2\ln 3 - \ln(3^3)$
$= 3\ln 3 + 1 - 3\ln 3 = 1$.
• $\ln(4e^2) - \ln 8 = \ln 4 + \ln(e^2) - \ln(2^3) = 2\ln 2 + 2 - 3\ln 2$
$= 2 - \ln 2$.
• $\ln\left(\dfrac{25e}{4 \times 90}\right) = \ln 25 + \ln e - \ln 4 - \ln 90$
$= 2\ln 5 + 1 - 2\ln 2 - \ln(2 \times 5 \times 3^2)$
$= 2\ln 5 + 1 - 2\ln 2 - \ln 2 - \ln 5 - 2\ln 3$
$= 1 + \ln 5 - 3\ln 2 - 2\ln 3$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

31 Écrire à l'aide d'un seul algorithme

$A = \ln\left(\dfrac{10^2 \times 2}{5^3}\right) = \ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$.

$B = \ln\left(\dfrac{4^7}{2^3 \times 8^4}\right) = \ln\left(\dfrac{2^{14}}{2^3 \times 2^{12}}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

$C = -\ln 2 - \ln(2^4) + \ln(2^4) = -\ln 2$

$D = \ln e + \ln(2^3) = \ln(2^3 e) = \ln(8e)$

32 Logarithme d'une racine carrée

1 $\ln x = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x} = 2\ln\sqrt{x}$.

On a $\ln x = 2\ln\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$.

2 $E = 3 \times \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(2^3) = \dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln 2 = 0$.

$F = \dfrac{1}{2}\ln e - 12\ln e = \dfrac{1}{2} - 12 = -\dfrac{23}{2}$.

33 Calculs d'images

1 $f(e) = e\ln e = e$

$f(e^2) = e^2\ln(e^2) = 2e^2$

$f(e^3) = e^3\ln(e^3) = 3e^3$

$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ln\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}\sqrt{e}$.

2 $f(e) = 2e - \ln e = 2e - 1$

$f(e^2) = 2e^2 - \ln(e^2) = 2e^2 - 2 = 2(e^2 - 1)$

$f(e^3) = 2e^3 - \ln(e^3) = 2e^3 - 3$

$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \ln\sqrt{e} = 2\sqrt{e} - \dfrac{1}{2}$.

34 Étude d'une fonction exponentielle

1 $f'(x) = 2e^{2x} - 5e^x = e^x(2e^x - 5)$.

2 $2e^x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^x \geqslant 5 \Leftrightarrow e^x \geqslant \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

3 $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $2e^x - 5$.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{4}$	↗	

35 Variations et équations

1 **a.** $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3)$.

b. et **2** $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.

$e^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 3$.

x	0		$\ln 3$		$\ln 6$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-7	↗	2

3 On pense à appliquer la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f. On obtient :

- Si $k < -7$, aucune solution
- Si $k = -7$: une solution
- Si $-7 < k \leqslant -3$: deux solutions
- Si $-3 < k \leqslant 2$: une solution
- Si $k > 2$: aucune solution.

36 Modèle exponentielle de la consommation de sucre

1 $f(50) = 20\,e^{-0{,}03 \times 50} \approx 4{,}46$.

En 2020, la consommation moyenne de sucre sera d'environ 4,46 kg par habitant et par an.

2 $f'(x) = 20(-0{,}03)e^{-0{,}03x} = -0{,}6e^{-0{,}03x}$.

Or, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x. D'où la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

3 **a.** $f(x) = 5 \Leftrightarrow 20e^{-0{,}03x} = 5 \Leftrightarrow e^{-0{,}03x} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow -0{,}03x = \ln(0{,}25) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(4)}{0{,}08} \approx 46{,}2$.

b. f étant strictement décroissante, on a :

$f(x) \leqslant 5 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln(4)}{0{,}08} \approx 46{,}2$.

c. La consommation moyenne de sucre deviendra inférieure à 5 kg par personne et par an à partir de 1970 + 47 soit 2 017.

37 Offre, demande et prix d'équilibre

1 **a.** On cherche à résoudre :

$f(x) = 200 \Leftrightarrow 10\,e^{0{,}65x} = 200 \Leftrightarrow e^{0{,}65x} = 20$

$\Leftrightarrow 0{,}65x = \ln 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 20}{0{,}65} \approx 4{,}61$.

Pour un prix de 4,61 € par savon, l'offre est de 200 000 savons.

b. On cherche à résoudre :

$g(x) = 200 \Leftrightarrow 600\,e^{-0{,}35x} = 200 \Leftrightarrow e^{-0{,}35x} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -0{,}35x = \dfrac{\ln\frac{1}{3}}{-0{,}35} = \dfrac{\ln 3}{0{,}35} \approx 3{,}14$.

Pour un prix de 3,14 € par savon, la demande est de 200 000 savons.

2 **a.** On est à l'équilibre pour :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10\,e^{0{,}65x} = 600\,e^{0{,}35x} \Leftrightarrow e^{0{,}65x}\,e^{0{,}35x} = \dfrac{600}{10}$

$\Leftrightarrow e^x = 60 \Leftrightarrow x = \ln 60 \approx 4{,}09$.

Le prix d'équilibre est de 4,09 €.

b. La quantité offerte et demandée à l'équilibre est $f(4{,}09) = g(4{,}09) \approx 143$ milliers de savons.

38 Différence de deux exponentielles

1 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{0{,}1x} - 2e^{0{,}2x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{0{,}1x} = 2e^{0{,}2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = e^{-0{,}1x}e^{0{,}2x} \Leftrightarrow e^{0{,}1x} = 1{,}5$

$\Leftrightarrow 0{,}1x = \ln(1{,}5) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(1{,}5)}{0{,}1}$

$\Leftrightarrow x = 10\ln(1{,}5) \approx 4{,}05$.

2 **a.** $f'(x) = 0{,}3e^{0{,}1x} - 0{,}4e^{0{,}2x} = e^{0{,}1x}(0{,}3 - 0{,}4e^{0{,}1x})$.

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}4e^{0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow 0{,}4e^{0{,}1x} = 0{,}3$

$\Leftrightarrow e^{0{,}1x} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 0{,}1x = \ln(0{,}75)$

$\Leftrightarrow x = 10\ln(0{,}75) \approx -2{,}88$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c.

x	$-\infty$		$10\ln(0{,}75)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$1{,}125$	↘	

3 $\mathscr{D} : y = f'(0)x + f(0)$
$y = -0{,}1x + 1$.

4 $f''(x) = 0{,}3 \times 0{,}1\,e^{0{,}1x} - 0{,}4 \times 0{,}2\,e^{0{,}2x}$
$= 0{,}03\,e^{0{,}1x} - 0{,}08\,e^{0{,}2x} = e^{0{,}1x}(0{,}03 - 0{,}08\,e^{0{,}1x})$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}03 - 0{,}08\,e^{0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}1x} = \dfrac{3}{8}$

$\Leftrightarrow 0{,}1x = \ln(0{,}375) \Leftrightarrow x = 10\ln(0{,}375) \approx -9{,}8$.

x	$-\infty$		$10\ln(0{,}375)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Donc la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion de coordonnées $(10\ln(0{,}375) ; 0{,}84375)$.

39 Vitesse d'un cycliste

1 $v'(x) = -30(-0{,}1)e^{-0{,}1t} = 3e^{-0{,}1t} > 0$ pour tout réel t. Donc la fonction v est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
La vitesse augmentant, on peut dire que le mouvement est accéléré.

2 $v''(t) = 3(-0{,}1)e^{-0{,}1t} = -0{,}3e^{-0{,}1t} < 0$ pour tout réel t. Donc la fonction v' est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$. L'accélération est décroissante sur $[0 ; +\infty[$. De plus, $v'(t) > 0$ pour tout réel t d'après **1**, donc l'accélération est positive sur $[0 ; +\infty[$.

3 $t = 10\ln 3 \approx 11$ s.

40 Coût moyen exponentiel

1 a. $f'(x) = -1 + 2 \times 0{,}12\,e^{0{,}12x} = -1 + 0{,}24\,e^{0{,}12x}$

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 0{,}24\,e^{0{,}12x} = 0 \Leftrightarrow 0{,}24\,e^{0{,}12x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{0{,}12x} = \dfrac{1}{0{,}24} \Leftrightarrow 0{,}12x = -\ln(0{,}24)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-\ln(0{,}24)}{0{,}12} \approx 11{,}9$.

c. et **2 a.**

x	4		$11{,}9$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$6{,}23$	↘	$3{,}44$	↗	$9{,}04$

b. Le coût moyen de production est minimal pour une production de 11,9 tonnes de sel environ. Ce coût est alors d'environ 3,44 €.

3 a. • Sur $[4 ; 11{,}9]$, le maximum est $f(4) \approx 6{,}23 < 7$. L'équation $f(x) = 7$ n'a pas de solution.
• Sur $[11{,}9 ; 20]$, on applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f.
On obtient une unique solution à l'équation $f(x) = 7$.

b. On utilise le tableur de la calculatrice et on trouve $\alpha = 18{,}570$.

c. D'après les questions précédentes, Il faut une masse de sel de 18 570 kg pour que le coût moyen de production soit de 700 €.

41 Fonction de satistaction

1 a. $v(x) = f'(x) = -0{,}2\,e^{0{,}5x} + 0{,}5(0{,}4 - 0{,}2x)\,e^{0{,}5x} + 5x$
$= -0{,}1x\,e^{0{,}5x} + 5x = x(5 - 0{,}1\,e^{0{,}5x})$.

b. $5 - 0{,}1\,e^{0{,}5x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 5 \geqslant 0{,}1\,e^{0{,}5x} \Leftrightarrow e^{0{,}5x} \leqslant 50$
$\Leftrightarrow 0{,}5x \leqslant \ln(50) \Leftrightarrow x \leqslant 2\ln(50)$
soit environ 7,82. $S = [0 ; 2\ln(50)]$.

c. $x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0 ; 10]$, donc il y a envie si et seulement si :
$v(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 5 - 0{,}1\,e^{0{,}5x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; 2\ln(50)]$.

2 a. On utilise le fait que $f'(x) = v(x)$ pour tout $x \in [0 ; 10]$.

x	0		$2\ln(50)$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$0{,}4$	↗	$94{,}8$	↘	$12{,}54$

b. Le niveau de satisfaction est maximal pour $2\ln(50)$ soit environ 7,8 min.

c. Le niveau de satisfaction maximal est de $f(2\ln(50)) \approx 94{,}8 < 100$. On ne peut donc pas atteindre un niveau de satisfaction de 100 %.

2 Étude de la fonction ln : $x \mapsto \ln(x)$ (p. 119)

42 QCM

1. c. $\ln(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant e^0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$.

2. c. $\ln(x) \geqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-2}$ et $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

3. a. $\ln(x) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{1/2}$ et $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

43 Vrai ou faux ?

1 Faux : $f(x) = 3\ln x + 3x \times \dfrac{1}{x} = 3(\ln x + 1) \neq 3$.

2 Vrai : $f'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x$.

3 Vrai : $f'(x) = \dfrac{\frac{3}{x} \times x - 3\ln(x)}{x^2} = \dfrac{3(1 - \ln(x))}{x^2}$.

4 Vrai : $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$.

44 Signe de ln (x)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

$g(x)=f(x)-1$ donc $g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\geqslant 1$.

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$h(x)=f(x)-2$ donc $h(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\geqslant 2$.

x	0		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Résolution d'inéquations

45 **a.** $\ln x+2\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\geqslant -2 \Leftrightarrow x\geqslant e^{-2}$.
b. $\ln x-1<0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$.

46 **a.** $2\ln x+1\leqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x\leqslant -1 \Leftrightarrow \ln x\leqslant -0{,}5$
$\Leftrightarrow x\leqslant e^{-0{,}5} \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
b. $2\ln x+1\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x\geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x\geqslant -0{,}5$
$\Leftrightarrow x\geqslant e^{-0{,}5} \Leftrightarrow x\geqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

47 **a.** $\ln x+4\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\geqslant -4 \Leftrightarrow x\geqslant e^{-4}$.
b. $\ln x\,(2-\ln x)\geqslant 0$
• $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$
$2-\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\leqslant 2 \Leftrightarrow x\leqslant e^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2-\ln x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=[1\,;e^2]$.

Calculs de dérivées

48 **a.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$.
b. $g'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=1+\ln x$.

49 **a.** $f'(x)=6x-\dfrac{4}{x}=\dfrac{6x^2-4}{x}$.
b. $g'(x)=\dfrac{1}{x}\times(\ln(x)-2)+\dfrac{1}{x}\times(\ln(x)+1)$.
Donc $g'(x)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}$.

50 **a.** $f'(t)=2\times\dfrac{1}{t}\times\ln t-3\times\dfrac{1}{t}=\dfrac{2\ln t-3}{t}$.
b. $g'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=x(1+2\ln x)$.

51 **a.** $f'(q)=\dfrac{\frac{1}{q}\times q-(\ln q+1)}{q^2}=\dfrac{-\ln q}{q^2}$.
b. $g'(x)=\dfrac{5\times\frac{1}{x}\times x-5(\ln x+2)}{x^2}=\dfrac{-5(1+\ln x)}{x^2}$.

52 **a.** $f'(x)=1-\dfrac{4}{x}$.
b. $g'(x)=2(\ln x+1)+\dfrac{2x-1}{x}=\dfrac{2x\ln+4x-1}{x}$.

53 **a.** $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}-1=\dfrac{\ln x-x}{x}$.
b. $g'(x)=\dfrac{2}{x}(1-\ln x)-\dfrac{1}{x}(2\ln x+1)=\dfrac{1-4\ln x}{x}$.

Étude des variations

54 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$.
Sur $[1\,;9]$, $x>0$, et $2x-1>0$.
Donc $f'(x)>0$ sur $[1\,;9]$.
D'où :

x	1		9
$f(x)$	2	↗	$18-\ln 9$

avec $18-\ln 9\approx 15{,}803$.

55 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x-2}{x^2}$.
Or, un carré est toujours positif ou nul, donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$.

x	1		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$1+\ln 2$	↗	$\frac{2}{5}+\ln 5$

avec $\dfrac{2}{5}+\ln 5\approx 2{,}009$ et $1+\ln 2\approx 1{,}693$.

56 $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$.
Sur $\left[\dfrac{1}{10}\,;2\right]$, $x>0$, donc $f'(x)$ est du signe de
$x^3-1=x^3-1^3$ qui est lui-même du signe de $x-1$.
D'où :

x	$\frac{1}{10}$		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6,909	↘	1	↗	5,921

avec $f\left(\dfrac{1}{10}\right)=10^{-3}+3\ln 10\approx 6{,}909$
et $f(2)=8-3\ln 2\approx 5{,}921$.

57 $f'(x)=1\times\ln(x)+\dfrac{1}{x}\times x-1=\ln(x)$.
La dérivée s'annule en 1 et $f(1)=1\ln(1)-1=-1$.
$f(0{,}01)=0{,}01\ln(0{,}01)-0{,}01\approx -0{,}05605\approx -0{,}0\mathbf{561}$.
$f(10)=10\ln(10)-10\approx -13{,}026\approx \mathbf{13{,}0}$.

x	0,01		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

58 $f'(x) = 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2(1+\ln x)$.

$1+\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{e}$. D'où :

x	$\frac{1}{2e}$		$\frac{1}{e}$		e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1-\ln 2$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	$4e^2$

avec $-1-\ln 2 \approx -0{,}623$; $-\frac{2}{e} \approx -0{,}736$ et $4e^2 \approx 29{,}556$.

59 Étudier un modèle graphique

$f(x) = 109{,}3 + 31{,}5\ln x$ définie sur $[1;+\infty[$.

$f'(x) = \frac{31{,}5}{x} > 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

En 2015, $x = 10$. Le nombre de séniors actifs sera alors de :

$f(10) = 109{,}3 + 31{,}5\ln 10 \approx 182$

soit 182 milliers de séniors actifs.

60 Étudier une consommation

1. a. $f'(x) = \frac{2{,}15}{x}$ positif, donc f est croissante sur $[4;+\infty[$.

Lorsque la taille de la pièce augmente, la quantité de bois de chauffe consommée augmente.

b. $f''(x) = \frac{-2{,}15}{x^2}$ négatif. Donc la fonction f est concave.

Cela signifie que l'augmentation de la consommation de bois est ralentie.

2. a. Sur $[4;+\infty[$, on résout :

$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2{,}15\ln(x) - 1{,}98 = 3$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{4{,}98}{2{,}15} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{4{,}98}{2{,}15}\right) \approx 10{,}14$.

La solution est comprise entre 10,1 et 10,2.

b. Pour une consommation de 3 kg, la surface de la pièce est environ 10,1 m^2.

3. Sur l'intervalle $[4;+\infty[$:

$f(x) \leqslant 5 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \frac{5+1{,}98}{2{,}15} \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant \exp\left(\frac{6{,}98}{2{,}15}\right)$.

Or $\exp\left(\frac{6{,}98}{2{,}15}\right) \approx 25{,}7005$. On arrondit par défaut.

Donc la surface maximale recherchée est 25,7 m^2.

61 Autre modèle pour la consommation de sucre

1 a. $f'(x) = -\frac{6{,}4}{x} < 0$ pour tout $x \in [5;+\infty[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[5;+\infty[$.

b. $f''(x) = \frac{6{,}4}{x^2} > 0$ pour tout réel x.

f' est donc une fonction croissante et négative, donc $|f'|$ est décroissante.

La décroissance est donc ralentie.

2 $f(x) = 5 \Leftrightarrow 29{,}7 - 6{,}4\ln x = 5 \Leftrightarrow 6{,}4\ln x = 24{,}7$

$\Leftrightarrow \ln x = \frac{24{,}7}{6{,}4} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{24{,}7}{6{,}4}\right)$.

Donc $x \approx 48$.

3 a. La consommation moyenne annuelle est de 5 kg/hab en $1\,970 + 48 = 2\,018$.

b. En 2074, $x = 104$.

$f(104) = 29{,}7 - 6{,}4\ln 104 \approx -0{,}02 < 0$ impossible : une consommation de sucre ne peut être négative.

Le modèle n'est donc plus valable en 2074.

62 Étudier la convexité d'une fonction

1 La fonction f semble convexe sur $[1;9]$.

2 a. $f'(x) = 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x-4}{x}$.

Sur $[1;9]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x-4$.

b.

x	1		2		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$4-4\ln 2$	↗	$18-4\ln 9$

3 a. $f''(x) = -4 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$.

b. $f''(x) > 0$ pour tout réel $x \in [1;9]$, donc f est convexe sur $[1;9]$.

4 a. $T : y = f'(e)(x-e) + f(e) = \left(2 - \frac{4}{e}\right)(x-e) + 2e - 4$

$= \left(2 - \frac{4}{e}\right)x - 2e + 4 + 2e - 4 = \left(2 - \frac{4}{e}\right)e$.

b. f est convexe, donc la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la tangente T.

63 Étude d'une fonction-produit

1 a. $f'(x) = \frac{1}{x}(2-\ln x) - \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2(1-\ln x)}{x} = \frac{-2(\ln x - 1)}{x}$.

b. $\ln x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant e$ $\quad S = [e;8]$.

c. et **d.** Sur $[0{,}5;8]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2(\ln x - 1)$, soit du signe contraire de $\ln x - 1$.

x	0,5		e		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-1{,}87$	↗	1	↘	$-0{,}17$

2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$.

La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en 1 et e^2.

3 $\mathscr{D} : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(x-1)$.

64 Fonction définie sur $[e^{-1};e]$

1 $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(1+2\ln x)$.

2 a. $2\ln x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geqslant e^{-0{,}5}$.

$S = [e^{-0{,}5};e]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. $x > 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2\ln x + 1$ sur $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

x	$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3 **a.** $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

$f(e) = e^2 \ln e = e^2$.

b. On obtient :

x	$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	e^2

65 Convexité

1 **a.** $f'(x) = -1 + \frac{3}{x} = \frac{3-x}{x}$.

b. Sur $[1 ; 12]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $3 - x$.

2

x	1		3		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	$4{,}3$	↘	$-0{,}5$

3 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f en regardant sur $[1 ; 3]$ et sur $[3 ; 12]$.
On obtient l'existence d'une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur $[3 ; 12]$.
La courbe représentative de la fonction f traverse donc l'axe des abscisses une seule fois : au point d'abscisse α.

b. La courbe représentative de la fonction f est donc située au-dessus de l'axe des abscisses sur $[1 ; \alpha]$.
Or, $11{,}2 < \alpha < 11{,}3$.
Donc le plus grand intervalle de bornes entières telles que la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses est $[1 ; 11]$.

4 **a.** $f''(x) = -\frac{3}{x^2}$.

b. Un carré est toujours positif, donc $f''(x) < 0$ pour tout réel x de $[1 ; 12]$.

c. On en déduit que la fonction f est concave.

66 Point d'inflexion

1 **a.** $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Un carré est toujours positif, donc $f'(x)$ est du même signe que $1 - \ln x$.

b. $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \ln x \Leftrightarrow e \geqslant x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1}{e}$	↘	

2 **a.** $f'(e) = 0$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point d'abscisse e.

b. La courbe représentative de la fonction f semble admettre un point d'inflexion au point d'abscisse environ 5.

3 $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 + 2\ln x)}{x^4}$.

$= \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

$f''(x)$ s'annule quand $2\ln x - 3$ s'annule, soit pour $x = e^{1{,}5} \approx 4{,}48 \approx 5$.

67 Position relative

1 $\mathscr{D} : y = \ln'(1)(x - 1) + \ln 1$

$y = x - 1$.

2 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$.

$x > 0$ pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

La fonction f admet un maximum de 0.
On en déduit que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.

3 $f(x) = \ln x - (x - 1) \leqslant 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est située en-dessous de la tangente $\mathscr{D}$ sur $]0 ; +\infty[$.

68 Position relative

1 **a.** $f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x}$.

b. Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 2x - 4$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2(-4) = 36 > 0$.
Donc :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{4} = -2 \notin]0 ; +\infty[$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{4} = 1$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. Le minimum de f est 2 sur $]0;+\infty[$, donc $f(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.

2 **a.** $f''(x)=\dfrac{(4x+2)x-(2x^2+2x-4)}{x^2}$

$=\dfrac{2x^2+4}{x^2}>0$.

Donc la fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$.

b. $\mathscr{D}: y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=2(x-2)+7-4\ln 2$

$\Leftrightarrow y=2x+3-4\ln 2$.

La fonction f est convexe, donc sa courbe représentative est située au-dessus de la tangente $\mathscr{D}$.

3 Équations avec exponentielle (p. 122)

69 Vrai ou faux ?

1 **Faux :** $(1+t)^5=1{,}20$.

Donc $t=1{,}2^{(1/5)}-1\approx 0{,}0371$, soit environ 3,7 %.

2 **Faux :** De 2005 à 2011, il y a eu 6 augmentations.

$(1+t)^6=1{,}65$.

$t=1{,}65^{(1/6)}-1\approx 0{,}0870$, soit environ 8,7 %.

3 **Vrai :** $t=\left(\dfrac{22{,}7}{26{,}1}\right)^{1/8}\approx -0{,}017$, soit une baisse d'environ 1,7 %.

70 Résolution d'équations

a. $x=2^{1/10}\approx 1{,}072$.

b. $x=1{,}5^{1/4}-1\approx 0{,}107$.

c. $x=0{,}5^{1/3}\approx 0{,}794$.

d. $x=1-0{,}4^{1/7}\approx 0{,}123$.

71 Taux moyen d'augmentation

1 **a.** $\text{CM}=\dfrac{151{,}1}{133{,}7}\approx 1{,}1301$.

b. Soit t le taux moyen annuel.

Alors, $\text{CM}=(1+t)^{10} \Leftrightarrow (1+t)^{10}=\dfrac{151{,}1}{133{,}7}$.

c. $1+t=\left(\dfrac{151{,}1}{133{,}7}\right)^{\frac{1}{10}}$ donc $t\approx 0{,}012$ soit environ 1,2 %.

d. En 2015, il s'est écoulé 7 ans, donc la consommation en eau minérale est de :

$$151{,}1\times\left(1+\frac{1{,}2}{100}\right)^7\approx 164{,}3 \text{ L}.$$

2 idem

72 Taux moyen de diminution

1 **a.** Variation absolue : $51{,}7-61{,}7=-10$ kg.

Variation relative : $\dfrac{51{,}7-61{,}7}{61{,}7}\approx -0{,}162$.

b. Soit t ce taux annuel.

$(1+t)^{18}=\dfrac{51{,}7}{61{,}7}$; donc $t=\left(\dfrac{51{,}7}{61{,}7}\right)^{\frac{1}{18}}-1\approx -0{,}0098$

soit 0,98 % de diminution.

2 **a.** En 2003, soit 13 ans après 1990, la consommation devrait être de :

$61{,}7\times\left(\dfrac{51{,}7}{61{,}7}\right)^{\frac{13}{18}}-1\approx 54{,}3$ kg par an et par habitant.

b. Taux de variation : $\dfrac{57{,}6-54{,}3}{54{,}3}\approx 0{,}057$ soit plus de 5 % d'erreur.

73 Taux moyen équivalents

1 **a.** $t'=\left(1+\dfrac{4{,}5}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\approx 0{,}00367$, soit 3,67 ‰.

b. $t'=\left(1+\dfrac{20{,}64}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\approx 0{,}0158$, soit 1,58 %.

2 $t'=\left(1+\dfrac{19{,}15}{100}\right)^{\frac{1}{360}}-1\approx 0{,}00049$, soit environ 0,05 %.

3 Dans une année, il y a deux semestres, donc

$t=\left(1+\dfrac{10}{100}\right)^2-1=0{,}21$ soit 21 % par an.

74 Taux de croissance du PIB

1 **a.** En C2, on écrit = 1 + B2 / 100.

b. En C9, la valeur est de $1+\dfrac{16{,}3}{100}=1{,}163$.

2 **b.** **3** **c.**

4 **a.** On applique les formules vues en **2** et **3**.

On obtient :

Qatar : $t_M\approx 15{,}67$ % ; Chine : $t_M\approx 10{,}91$ %.

Le taux de croissance a donc été en moyenne meilleur au Qatar qu'en Chine.

b. PIB du Qatar : $23{,}5\times\left(1+\dfrac{15{,}67}{100}\right)^8\approx 75{,}3$ milliards de dollars.

PIB de la Chine : $1\,641\times\left(1+\dfrac{10{,}91}{100}\right)^8\approx 3\,757{,}3$ milliards de dollars.

75 Calcul du taux moyen

a. C représente le coefficient multiplicateur global.

Q représente le coefficient multiplicateur moyen.

T représente le taux d'évolution moyen.

b. D'après l'écran des résultats, le taux annuel est d'environ 11,49 %.

c. Arabie saoudite, en 4 ans, on obtient un taux annuel d'environ 2,16 %.

(Faire le programme sur la calculatrice, ou effectuer le calcul.)

76 Résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a. $3\times 1{,}5^x\geqslant 12\,000 \Leftrightarrow 1{,}5^x\geqslant 4\,000$

$\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{\ln(4\,000)}{\ln(1{,}5)}$, car $\ln(1{,}5)>0$.

Or $\dfrac{\ln(4\,000)}{\ln(1{,}5)}\approx 20{,}4556$, d'où $x\geqslant$ **20,5**.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. $1-0{,}5^x \geqslant 0{,}999 \Leftrightarrow 0{,}5^x \leqslant 0{,}001$
$\Leftrightarrow x\ln(0{,}5) \leqslant \ln(0{,}001) \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5)}$,
car $0{,}5 \in]0\,;1[$, donc $\ln(0{,}5)$ négatif.
Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5)} \approx 9{,}96578$, d'où $x \geqslant 9{,}97$.

77 Résolution d'inéquations dans ℕ

a. $0{,}8^n \leqslant 0{,}0001 \Leftrightarrow e^{n\ln 0{,}8} > 0{,}0001$
$\Leftrightarrow n\ln 0{,}8 > \ln(0{,}0001) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}8)} \approx 41{,}3$.
Le plus petit entier n vérifiant cette inéquation est donc $n = 42$.
b. $10 \times 1{,}1^n \geqslant 5\,000 \Leftrightarrow e^{n\ln 1{,}1} \geqslant 500$
$\Leftrightarrow n\ln 1{,}1 \geqslant \ln 500 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(500)}{\ln(1{,}1)} \approx 65{,}2$.
Le plus petit entier n vérifiant cette inéquation est donc $n = 66$.
c. $1-0{,}4^n \geqslant 0{,}999 \Leftrightarrow -e^{n\ln 0{,}4} \geqslant -0{,}001$
$\Leftrightarrow e^{n\ln 0{,}4} \leqslant 0{,}001$
$\Leftrightarrow n\ln 0{,}4 \geqslant \ln(0{,}001) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}4)} \approx 7{,}5$.
Le plus petit entier n vérifiant cette inéquation est donc $n = 6$.
d. $50 \times 2^n \geqslant 10^6 \Leftrightarrow e^{n\ln 2} \geqslant 20\,000$
$\Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln(20\,000) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(20\,000)}{\ln 2} \approx 14{,}3$.
Le plus petit entier n vérifiant cette inéquation est donc $n = 15$.

78 Recherche de seuil

1 a. $1{,}04^n > 2 \Leftrightarrow e^{n\ln 1{,}04} > 2 \Leftrightarrow n\ln 1{,}04 > \ln 2$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}04} \approx 17{,}7$. $S = [18\,;+\infty[$.
b. $0{,}99^n < 0{,}1 \Leftrightarrow e^{n\ln 0{,}99} < 0{,}1 \Leftrightarrow n\ln 0{,}99 < \ln 0{,}1$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99} \approx 229{,}1$. $S = [230\,;+\infty[$.
2 L'algorithme présenté fonctionne pour les deux inéquations ci-dessus. Le problème de cet algorithme se pose pour :
$q^n < k$ lorsque $q > 1$ et $q^n > k$ lorsque $0 < q < 1$.
b. À faire avec algorithme.
c. Il faut résoudre l'inéquation :
$3\,000 \times 1{,}04^n > 5\,000 \Leftrightarrow e^{n\ln 1{,}04} > \dfrac{5}{3}$
$\Leftrightarrow n\ln 1{,}04 > \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}04)} \approx 13{,}02$.
Au bout de 14 ans, soit en 2014, le capital dépasse les 5 000 €.

79 Réaliser des prévisions

1 En 2009, la capacité mondiale était de :
$$\frac{194{,}4}{1+\frac{22{,}5}{100}} \approx 158{,}69 \text{ GW}.$$
En 2011, la capacité mondiale sera de :
$$194{,}4 \times \left(1+\frac{22{,}5}{100}\right) \approx 238{,}14 \text{ GW}.$$
2 a. Chaque année, la capacité mondiale augmente de 22,5 %, elle est multipliée par $1+\dfrac{22{,}5}{100}$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,225.
b. On a donc $u_n = u_0 \times q^n = 194{,}4 \times 1{,}225^n$.
3 a. $1{,}225^p > \dfrac{500}{194{,}4} \Leftrightarrow p\ln 1{,}225 > \ln\left(\dfrac{500}{194{,}4}\right)$
$\Leftrightarrow p > \dfrac{\ln\left(\frac{500}{194{,}4}\right)}{\ln 1{,}225} \approx 4{,}66$.
Le plus petit entier p vérifiant l'inéquation est $p = 5$.
b. $1{,}225^p > \dfrac{500}{194{,}4} \Leftrightarrow u_p > 500$.
On en déduit qu'au bout de 5 ans, c'est-à-dire en 2015, la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 500 GW.
4 a. On calcule le coefficient multiplicateur entre 2009 et 2010 :
$$\text{CM} = \frac{42{,}3}{25{,}8} \approx 1{,}64.$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,64.
D'où $v_n = v_0 \times q_n = 42{,}3 \times 1{,}64^n$.
b. $v_n > u_n \Leftrightarrow 42{,}3 \times 1{,}64^n > 194{,}4 \times 1{,}225^n$
$\Leftrightarrow \dfrac{42{,}3}{194{,}4}\left(\dfrac{1{,}64}{1{,}225}\right)^n > 1$.
c. $\dfrac{42{,}3}{194{,}4}\left(\dfrac{1{,}64}{1{,}225}\right)^n > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1{,}64}{1{,}225}\right)^n > \dfrac{194{,}4}{42{,}3}$
$\Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{1{,}64}{1{,}225}\right) > \ln\left(\dfrac{194{,}4}{42{,}3}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\frac{1{,}64}{1{,}225}\right)}{\ln\left(\frac{194{,}4}{42{,}3}\right)} \approx 0{,}19$.
On en déduit qu'en 2011, la capacité de production de la Chine dépassera celle mondiale.

80 Seuil en probabilité

1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on obtient le premier 4 au n-ième lancer si on a obtenu un des cinq numéros autres que 4 lors des $n-1$ premiers lancers, puis un 4.
Donc $P_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{6}$. On en déduit que la suite (P_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$ et de premier terme $P_1 = \dfrac{1}{6}$.
2 Comme $\dfrac{5}{6} \in]0\,;1[$, la limite de (P_n) est 0.
Donc la probabilité d'obtenir un 4 seulement après un grand nombre de lancers est pratiquement nulle.
3 On résout : $P_n < 0{,}0001 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} < 0{,}0001$
$\Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < \ln(0{,}0006)$
$\Leftrightarrow n > 1+\dfrac{\ln(0{,}0006)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$, car $\dfrac{5}{6} \in]0\,;1[$ et $\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < 0$.
Or $1+\dfrac{\ln(0{,}0006)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 41{,}7$ et n est entier.
Donc le plus petit entier n cherché est 42.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Accompagnement personnalisé (p. 124)

Exercice guidé

81 **1** **a.** $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times (2\ln(x)+1)}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln(x) - 1}{x^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$.

b. Sur $[1 ; 5]$, x^2 est strictement positif, donc la dérivée a le signe de $1 - 2\ln(x)$.

$1 - 2\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leqslant e^{(1/2)}$.

Et $e^{(1/2)} = \sqrt{e} \approx 1{,}6487 \in [1 ; 5]$.

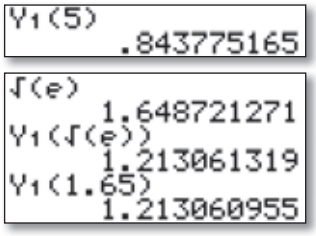
x	1		$\sqrt{e}$		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	↘	

$f(1) = \dfrac{2\ln(1)+1}{1} = 1$;

$f(5) = \dfrac{2\ln(5)+1}{5} \approx 0{,}84$;

$f(\sqrt{e}) = \dfrac{2\ln(\sqrt{e})+1}{\sqrt{e}}$;

$= \dfrac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}213$, qui est le maximum.



2 **a.** Le bénéfice unitaire est maximum pour une production d'environ 1,649 milliers de pièces, soit 1 650 pièces à 10 pièces près.

b. $f(1{,}65) \approx 1{,}213$.

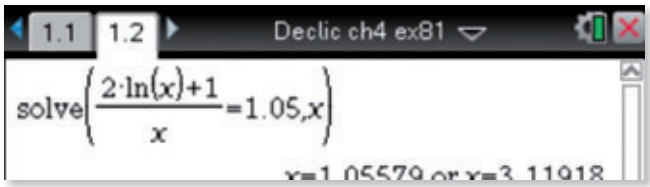
Le bénéfice unitaire correspondant est environ 1,21 €.

c. Le bénéfice total réalisé est, en euro :

$$1\,000 \times \sqrt{e} \times \frac{2}{\sqrt{e}} = 2\,000 .$$

3 D'après le tableau de variations, sur $[1 ; \sqrt{e}]$, la fonction f est continue et strictement croissante et 1,05 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{e}) \approx 1{,}21$, donc l'équation $f(x) = 1{,}05$ admet une première solution α.

De même, sur l'intervalle $[\sqrt{e} ; 5]$, 1,05 est intermédiaire entre $f(\sqrt{e}) \approx 1{,}21$ et $f(5) \approx 0{,}84$, donc l'équation $f(x) = 1{,}05$ admet une seconde solution β.



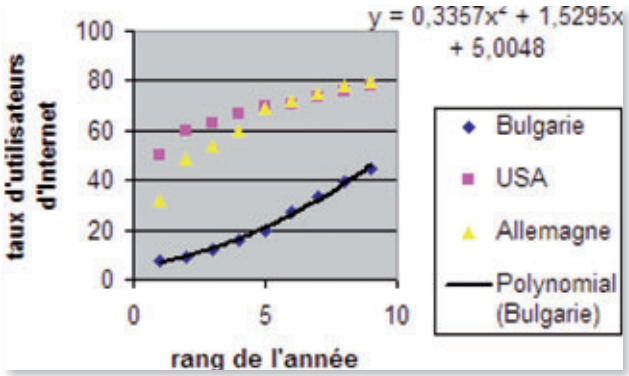
Par balayage ou par solveur graphique, on obtient :
$\alpha \approx 1{,}056$ et $\beta \approx 3{,}119$, donc le bénéfice unitaire est de 1,05 € pour une production de 1 056 ou de 3 119 objets.

Revoir les outils de base

82 Savoir représenter une série chronologique sur tableur

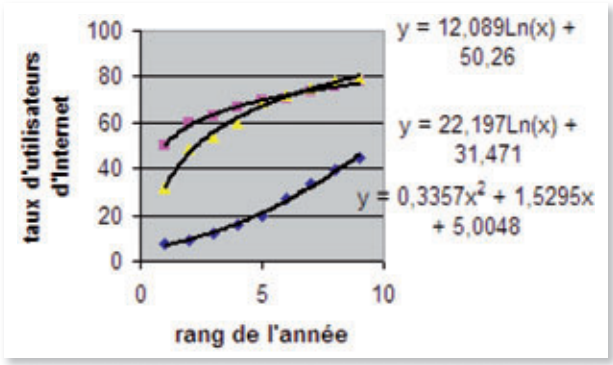
a. A3-2000.

b. et **c.**



C'est une régression polynomiale qui paraît la plus adaptée (du 2e ou 3e degré).

d. Pour les USA et l'Allemagne, la régression la plus adaptée semble être une régression logarithmique.



On peut aussi approcher par une régression polynomiale pour l'Allemagne.

83 Savoir calculer un taux d'évolution global

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	CM global	Taux global
2	Chine	4,1	1,8	1,5	4,8	5,9	-0,7	5		
3	CM annuel	1,041	1,018	1,015	1,048	1,059	0,993	1,05	1,2447	24,47
4	Egypte	9,5	4,9	6,5	9,5	18,3	11,9	12,8		
5	CM annuel	1,095	1,049	1,065	1,095	1,183	1,119	1,128	2,0002	100,02
6	Tunisie	4,4	2,4	4,6	3,1	5	3,5	4,5		
7	CM annuel	1,044	1,024	1,046	1,031	1,05	1,035	1,045	1,3093	30,93

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Pour aller plus loin

84 Autre écriture de la fonction $x : \mapsto q^x$

1 a. $f'(x) = (\ln 2)\, e^{x \ln 2}$.
b. $f(x) = 2^x$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 2^x \ln 2$ où $q = 2$.
c. On a $\ln 2 > 0$.
D'où $f'(x) > 0$ pour tout réel x, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
d. $g(x) = 0{,}8^x$ et $g'(x) = (\ln 0{,}8)\, e^{x \ln 0{,}8} = 0{,}8^x \ln 0{,}8$
$\ln 0{,}8 < 0$, donc $g'(x) < 0$ pour tout réel x.
D'où la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2 $f(x) = e^{x \ln q} = q^x$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = (\ln q)\, e^{x \ln q} = q^x \ln q$.
• Si $q > 1$, $\ln q > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$, donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $q = 1$, $\ln q = 0$, donc $f'(x) = 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, f est constante sur $\mathbb{R}$.
3 a. $h(x) = 121{,}5 \times 0{,}86^x = e^{\ln 121{,}5} \times e^{x \ln 0{,}86}$
$= e^{x \ln 0{,}86 + \ln 121{,}5}$.
$a = \ln 0{,}86 \approx -0{,}15$ et $b = \ln 121{,}5 \approx 4{,}80$.
b. $h'(x) = \ln 0{,}86 \times e^{x \ln 0{,}86 + \ln 121{,}5}$.

85 Expérimenter et découvrir une autre fonction : le logarithme décimal

1 $\log 1 = 0$ $\log 10 = 1$ $\log 100 = 2$ $\log 10^9 = 9$
2 a. $A = 1{,}245 \times 10^1$ $B = 1{,}245 \times 10^{-2}$ $C = 1{,}245 \times 10^5$
b. $\log A \approx 1{,}095$ $\log B \approx -1{,}095$ $\log C \approx 5{,}095$
Or, $\log 1{,}245 \approx 0{,}095$.
Il semble donc que $\log(d \times 10^n) = n + \log d$.
c. En choisissant deux nombres quelconques A et B, on obtient $\log A + \log B = \log(A \times B)$.
3 a. $\log 10^n = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
b. $\log(A \times B) = \dfrac{\ln(A \times B)}{\ln 10} = \dfrac{\ln A + \ln B}{\ln 10} = \dfrac{\ln A}{\ln 10} + \dfrac{\ln B}{\ln 10}$
$= \log A + \log B$
pour tous les réels A et B strictement positifs.

86 Approcher

1 a. $T : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{1}(x-1) + 0$
D'où : $y = x - 1$.
b.

x	0,8	0,9	1,1	1,2
$x-1$	−0,2	−0,1	0,1	0,2
$\ln x$	−0,223	−0,105	0,095	0,182

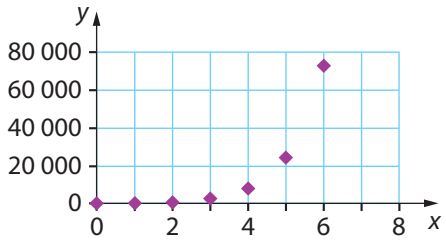
2 a. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
$x > 0$ sur $[0{,}75 ; 1{,}3]$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	0,75		1		1,3
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0,038	↘	0	↗	0,038

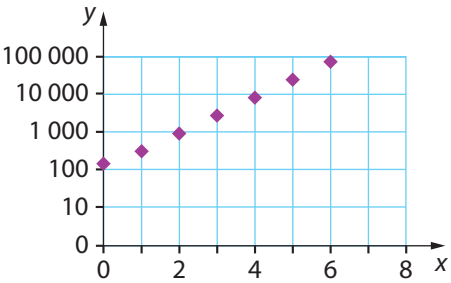
b. Sur $[0{,}75 ; 1{,}3]$, le maximum de la fonction f est $f(0{,}75) = f(1{,}3) \approx 0{,}038 < 0{,}04$.
Donc pour tout réel $x \in [0{,}75 ; 1{,}3]$,
$f(x) < 0{,}04 \Leftrightarrow x - 1 - \ln x < 0{,}04$.
3 a. $P(x) = 150\,200 \times \left(1 - \dfrac{1{,}3}{100}\right)^x$
$= 150\,200\, e^{x \ln 1{,}013} \approx 150\,200\, e^{0{,}013x}$.
b. Ce taux de variation semble être de 0,006, soit 0,6 %
$\dfrac{L(x+1) - L(x)}{L(x)} = \dfrac{1{,}256 e^{0{,}006(x+1)} - 1{,}256 e^{0{,}006x}}{1{,}256 e^{0{,}06x}}$
$= \dfrac{e^{0{,}006} - 1}{e^{0{,}006}} \approx 0{,}006$ soit 0,6 %.

87 Le repère semi-log

1 a. $\log y = \log(100 \times 3^x) = \log 100 + \log(3^x)$
$= 2 + x \log 3 \approx 2 + 0{,}48x$.
b. $y \approx A \times B^x \Leftrightarrow \log y \approx \log(A \times B^x)$
$\Leftrightarrow \log y \approx \log A + \log B^x$
$\Leftrightarrow \log y \approx \log A + x \log B$.
2 a.



b.



Le nuage de points obtenu est constitué de points alignés.
3 a. $\log f(x) = \log 100 + x \log 3 \approx 2 + 0{,}48x$
$\log g(x) = \log 1000 + x \log 3 \approx 3 + 0{,}48x$
$\log h(x) = \log 1000 + x \log 2 \approx 3 + 0{,}30x$
b. Les fonctions $\log f$ et $\log g$ ont le même coefficient directeur, donc les courbes représentatives de ces fonctions, sont parallèles.
Par conséquent, les courbes représentatives des fonctions f et g sont parallèles dans un repère semi-logarithmique.
c. $f(x) = h(x) \Leftrightarrow \log f(x) = \log h(x)$
$\Leftrightarrow 2 + 0{,}48x = 3 + 0{,}30x \Leftrightarrow 0{,}18x = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{0{,}18} \approx 5{,}56$ dans $[0 ; 6]$.
Par conséquent, les représentations de f et h se coupent en $x \approx 5{,}56$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réussir au Bac

88 QCM

1 **c.** : $\ln e^3 - \ln\dfrac{1}{e^2} + 2\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}} = 3 + 2 - 1 = 4$.

2 **c.** : $\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou -1.

3 **a.** 6 931.

4 **a.** : $f'(x) = \ln x - 1 + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x$.

5 **c.** : $g'(1)(x-1) + g(1) = \left(1 + \dfrac{1}{1}\right)(x-1) + 1 + \ln 1$
$= 2x - 2 + 1 = 2x - 1$.

D'où $T : y = 2x - 1$.

89 Exponentielle et plage de bénéfice

1 **a.** $f'(x) = -0{,}01x(e^{0{,}1x} - 10)$

$f'(x) = 0{,}1x + 0{,}1(1 - 0{,}1x)e^{0{,}1x} - 0{,}1e^{0{,}1x}$
$= 0{,}1x - 0{,}01x\,e^{0{,}1x} = 0{,}01x(10 - e^{0{,}1x})$.

b. $e^{0{,}1x} = 10 \Leftrightarrow 0{,}1x = \ln 10 \Leftrightarrow x = 10\ln 10$

$e^{0{,}1x} - 10 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{0{,}1x} \geqslant 10 \Leftrightarrow 0{,}1x \geqslant \ln 10$
$\Leftrightarrow x \geqslant 10\ln 10$ $\quad S = [10\ln 10 ; 30]$.

c.

x	0		$10\ln 10$		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	6,48	↗	$-2{,}171$

2 Le bénéfice maximum est d'environ 6,48 milliers d'euros, soit environ 6 480 €, atteint pour $10\ln 10$ centaines de jouets, soit environ 2 300 jouets produits.

3 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f sur $[0 ; 10\ln 10]$ et $[10\ln 10 ; 30]$ et on obtient l'existence d'exactement deux solutions à l'équation $f(x) = 0$.

b. On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice associé à la fonction f. On obtient les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$, soit les deux points morts de la production : $\alpha \approx 12{,}57$ et $\beta \approx 29{,}21$ (1 257 objets et 2 921 objets).

c. On cherche à résoudre $f(x) \geqslant 0$.

D'après ce qui précède, la plage de bénéfice est située entre 1 257 et 2 921 objets fabriqués.

90 Offre, demande et prix d'équilibre

1 **a.** $f'(x) = -\dfrac{1{,}3}{x} < 0$ pour tout $x \in [1 ; 8]$.

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[1 ; 8]$.

b. $f(x) \leqslant 3{,}5 \Leftrightarrow 6 - 1{,}3\ln x \leqslant 3{,}5 \Leftrightarrow -1{,}3\ln x \leqslant -2{,}5$
$\Leftrightarrow \ln x \geqslant \dfrac{2{,}5}{1{,}3} \Leftrightarrow x \geqslant \exp\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}3}\right)$.

$S = \left[\exp\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}3}\right) ; 8\right]$.

La demande est inférieure ou égale à 3 500 tonnes à partir d'un prix de $\exp\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}3}\right) \approx 1{,}923$ dizaines d'euros, soit 19,2 € la tonne environ.

2 **a.** $d'(x) = -\dfrac{1{,}3}{x} - 0{,}2e^{1-0{,}2x}$.

Or, une exponentielle est toujours strictement positive et $x > 0$ sur $[1 ; 8]$.

Par conséquent, $d'(x) < 0$ sur $[1 ; 8]$.

La fonction d est donc strictement décroissante sur $[1 ; 8]$.

b. $d(1) \approx 3{,}23$ et $d(8) \approx -1{,}15$.

On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction d.

On obtient l'existence d'une unique solution x_0 sur $[1 ; 8]$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $x_0 \approx 4{,}80$.

c. Le prix d'équilibre est le prix x pour lequel $d(x) = 0$, soit 48 € par tonne environ.

La demande est alors $f(48) \approx 3{,}96$ milliers de tonnes, soit environ 3 960 tonnes.

91 Exponentielle et abonnement

1 **a.** Il y a 1 500 abonnés au 1er janvier 2009.

b. Il y a au maximum 4 600 abonnés environ (au 1er juillet 2010).

c. La courbe est située au-dessus de ses tangentes sur $[0 ; 2{,}5]$, soit du 1er janvier 2007 au 1er juillet 2009.

2 **a.** $f'(x) = 10(-x + 3{,}5)e^{-0{,}5x^2+3{,}5x}$.

Une exponentielle réelle est toujours positive, donc $f'(x)$ est du signe de $3{,}5 - x$ sur $[0 ; 5]$.

b.

x	0		3,5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↗	4 571,45	↘	1 484,13

Il y a donc au maximum environ 4 571 abonnés, et ce au 1er juillet 2010 (réponse du **1** **b.**).

3 **a.** $10x^2 - 70x + 112{,}5 = 0$.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 70^2 - 4 \times 10 \times 112{,}5 = 400 > 0$.

Donc :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5}{2}$.

x	0		2,5		4,5		5
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve la réponse à la question **1** **c.** : la fonction f est convexe et croissante sur $[0 ; 2{,}5]$, donc le nombre d'abonnés a été croissant de façon accéléré du 1er janvier 2007 au 1er juillet 2009.

4 **a.** $f(x) = 200 \Leftrightarrow e^{-0{,}5x^2+3{,}5x} = 20$
$\Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 3{,}5x - \ln 20 = 0$.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 3{,}5^2 - 4 \times 0{,}5 \times \ln 20 \approx 6{,}25$.

Donc :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 6$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 1$.

b. Le journal devra donc cesser de paraître au bout de 6 ans, c'est-à-dire au 1er janvier $2007 + 6 = 2013$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

92 Construire une tangente

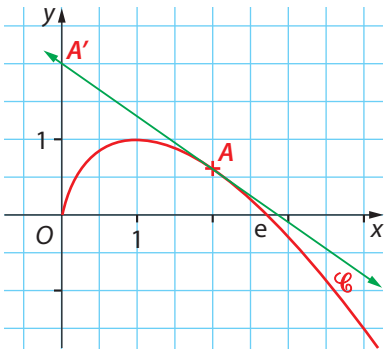
1 a. $f'(x) = 1 - \ln x + x \times \dfrac{-1}{x} = -\ln x$.

b.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	↗	1	↘	

2 a. $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}(1 - \ln \mathrm{e}) = \mathrm{e}(1-1) = 0$.
Donc la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\mathrm{e}\,;0)$.

b.



3 a. $\mathscr{D} : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$\Leftrightarrow y = -(\ln 2)(x-2) + 2(1 - \ln 2)$
$\Leftrightarrow y = -x\ln 2 + 2$.

b. Cela revient à calculer :
$y = -0 \times \ln 2 + 2 = 2$.
Le point A' a pour coordonnées $(0\,;2)$.
$\mathscr{D}$ se construit donc à l'aide des points A et A'.

93 Fonction ln et bénéfice

1 a. $f'(x) = \dfrac{18}{x} - 2x + 16 = \dfrac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$.

b. Sur $[0{,}5\,;25]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de :
$-2x^2 + 16x + 18$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 + 4 \times 2 \times 18 = 400 > 0$.
Donc :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 9$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$.

x	0,5		9		25
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	−19,7	↗	87,6	↘	−182

2 a. On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f sur les intervalles $[0{,}5\,;9]$ et $[9\,;25]$.
On obtient deux solutions à l'équation $f(x) = 0$:
$\alpha = 1$ et $\beta \approx 18{,}05$.

b.

x	0,5		1		β		25
$f(x)$	‖	−	0	+	0	−	

3 a. L'entreprise doit donc produire entre 100 et 1 805 panneaux pour réaliser des bénéfices.

b. Le maximum de la fonction f étant d'environ $87{,}6 < 100$, l'entreprise ne pourra pas réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 €.

94 Étude d'un coût moyen

1 a. $f'(x) = \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)x - (x + 1 - \ln x)}{x^2}$

$= \dfrac{x - 1 - x - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$.

b. $\ln x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^2$. $S = [\mathrm{e}^2\,;14]$.

2 a.

x	1		e^2		14
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	2	↘	0,864	↗	0,883

b. Le coût moyen sera donc minimal pour e^2 centaines, soit 7,4 centaines, soit 740 exemplaires fabriqués.
Le coût moyen minimal est alors d'environ 0,86 € pièce.

3 a. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x + 1 - \ln x = x \ (x \neq 0) \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.

b. Il faut fabriquer $q = \mathrm{e} \approx 2{,}72$ centaines de pièces, soit 272 pièces, pour un coût moyen de fabrication d'un euro pièce.

c.

x	1		e		e^2		14
$f'(x)$		−	0	+			
$f(x)$	2	↘	1	↘	0,864	↗	0,883

Le coût moyen reste donc inférieur à 1 € pour toute quantité entre 272 et 1 400 pièces.

95 Signe de la dérivée

1 a. $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} = \dfrac{x + \mathrm{e}}{x^2} > 0$, pour tout réel $x > 0$.
La fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b. $g(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 - 1 = 0$.

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	−	0	+	

2 a. $f'(x) = \ln x - 1 + (x - \mathrm{e}) \times \dfrac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x}$
$= \ln x - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = g(x)$, pour tout réel $x > 0$.

b. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \mathrm{e} = 0$ ou $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ ou $\ln x = 1$
$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.
La courbe représentative de la fonction f coupe donc l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

96 Coût total et croissance

1 a. $f'(x) = 2x - 5 + \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x}$.

b. Sur $[0{,}25\,;8]$, $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de : $2x^2 - 5x + 8$.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 2 \times 8 < 0$.

Donc le polynôme n'admet pas de racines et $f'(x) > 0$ sur $[0{,}25\,;8]$.

2 a. $g'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$.

$x^2 > 0$, pour tout réel $x \in [0{,}25\,;8]$, donc $g'(x)$ est du signe de $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$.

b.

x	0,25		2		8
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	2,75	↘	3	↗	12

3 $f'(x) = g(x)$; donc $f''(x) = g'(x)$ pour tout $x \in [0{,}25\,;8]$. Donc $f''(x) = 0$ pour $x = 2$, avec changement de signe. On en déduit donc que la courbe de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.

4 a. Le coût total $f(x)$ s'exprime en millier d'euros, la quantité x s'exprime en centaine de litres, donc le coût moyen s'exprime en millier d'euros par centaine de litres, c'est-à-dire en dizaine d'euros par litre.

b. Pour 200 L, coût marginal $= f'(2) = 2 \times 2 - 5 + \dfrac{8}{2} = 3$ soit 30 € par litre.

Le coût moyen est de :

$\dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{2^2 - 5 \times 2 + 30 + 8\ln 2}{2} = 12 + 4\ln 2 \approx 14{,}77$.

c. D'après **3**, le coût total est concave sur $[0{,}25\,;2]$: la croissance est ralentie ; et le coût total est convexe sur $[2\,;8]$: la croissance est accélérée.

5 a. On retrouve le point d'inflexion en 2.

b. Le coût marginal minimal est $f'(6) \approx 8{,}3$.

Si le laboratoire vend ce médicament à moins de 83 € le litre, le 6e litre lui coûtera plus cher à produire que le prix de vente.

97 Coût et bénéfice

Partie A :

1 a. $f'(x) = 0{,}4 - \dfrac{1{,}6}{x} = \dfrac{0{,}4x - 1{,}6}{x} = \dfrac{0{,}4(x-4)}{x}$.

Or, pour tout $x \in [4\,;30]$, $x - 4 \geqslant 0$ et $x > 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

b. $f'(x) \geqslant 0$ sur $[4\,;30]$, donc f est croissante sur $[4\,;30]$. Le coût de production augmente lorsque le nombre de villas augmente.

2 $f''(x) = \dfrac{1{,}6}{x^2} > 0$, pour tout réel x non nul ; donc la fonction f' est strictement croissante sur $[4\,;30]$. Le coût marginal est donc de plus en plus grand.

Partie B :

1 La droite $\mathscr{D}$ représente la recette après vente des maisons, la courbe $\mathscr{C}$ leur coût de production. Pour réaliser un bénéfice, il faut que la recette soit supérieure aux coûts de production, donc il faut au minimum 8 villas.

2 En $x = 18$, la tangente à $\mathscr{C}$ semble être parallèle à $\mathscr{D}$.

Partie C :

1 $B(n) = R(n) - C(n) = 0{,}3n - 0{,}4n - 2{,}5 + 1{,}6\ln n$
$= -0{,}1n - 2{,}5 + 1{,}6\ln n$.

2 a. $g'(x) = -0{,}1 + \dfrac{1{,}6}{x} = \dfrac{1{,}6 - 0{,}1x}{x}$.

Sur $[4\,;30]$, $x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $1{,}6 - 0{,}1x$:

$1{,}6 - 0{,}1x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 16$.

x	4		16		30
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	−0,7	↗	0,34	↘	−0,6

b. On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction g sur les deux intervalles $[4\,;16]$ et $[16\,;30]$. On trouve deux solutions à l'équation $g(x) = 0$:

$x_1 \approx 7{,}7$ et $x_2 \approx 28{,}7$.

3

x	4		7,7		28,7		30
$g(x)$		−	0	+	0	−	

4 a. On déduit du **2** que le bénéfice maximal est d'environ 34 000 €.

b. On déduit du **3** que le promoteur réalise des bénéfices pour des ventes comprises entre 8 et 28 maisons.

98 Résultats avec calcul formel

Partie A :

1 La courbe représentative de la fonction B coupe l'axe des abscisses en $x = e$ et $x = e^2$, et elle est au-dessus de l'axe des abscisses entre ces deux valeurs.

2

x	1		$e^{\frac{3}{2}}$		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−10	↗	1,25	↘	−1,97

3 le bénéfice est maximal pour $x = e^{\frac{3}{2}}$ milliers de jouets soit environ 4 480 jouets.

Partie B :

1 $B(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 1$ ou $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e$ ou $x = e^2$.

2 a. $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$: $S =]0\,;e]$

$\ln x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant e^2$: $S = [e^2\,;+\infty[$

b.

x	0		e		e^2		$+\infty$
$1 - \ln x$	‖	+	0	−	‖	−	
$\ln x - 2$	‖	−	‖	−	0	+	
$B(x)$	‖	−	0	+	0	−	

On démontre la ligne 3.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 **a.** $B'(x)=5\times\dfrac{-1}{x}(\ln x-2)+5\times\dfrac{1}{x}(1-\ln x)$

$=\dfrac{5(-\ln x+2+1-\ln x)}{x}=\dfrac{5(3-2\ln x)}{x}$.

b. Sur $[1\,;10]$, $x>0$; donc $B'(x)$ est du signe de $3-2\ln x$.

$3-2\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x\leqslant 3 \Leftrightarrow \ln x\leqslant\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x\leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

x	1		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-10	↗	1,25	↘	$-1{,}97$

c. D'après **2**, il faut produire entre $x=\mathrm{e}$, soit environ 2 719, et $x=\mathrm{e}^2$, soit environ 7 389 jouets, pour ne pas travailler à perte (bénéfice positif).

4 **a.** En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires, on obtient deux solutions à l'équation $B(x)=1$:

$x_1\approx 3{,}583$ et $x_2\approx 5{,}605$.

b. Il faut donc fabriquer entre 3 583 et 5 605 jouets. (cf. tableau de variation et **4** **a.**).

99 Variation du bénéfice marginal

1 **a.** $f'(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^2-x}{x}-\ln x=-\ln x+\dfrac{3\mathrm{e}^2}{x}-1$.

b. $f''(x)<0$ pour tout reel $x\in[1\,;25]$, donc f' est strictement décroissante sur $[1\,;25]$.

c. $f''(x)<0$ pour tout reel $x\in[1\,;25]$, donc f est concave sur $[1\,;25]$.

Le bénéfice croit donc de moins en moins vite.

d. $f'(\mathrm{e}^2)=-\ln\mathrm{e}^2+\dfrac{3\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}-1=-2+3-1=0$.

x	1		e^2		25
$f'(x)$		+	0	−	

2 **a.** $f(\mathrm{e}^2)=2+(3\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2)\times\ln\mathrm{e}^2=2+2\mathrm{e}^2\times 2$

$=2+4\mathrm{e}^2$.

b.

x	1		e^2		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗	31,6	↘	$-7{,}1$

c. Il faut donc produire e^2 milliers, soit environ 7 389 DVD, pour un bénéfice maximum de 31 600 € environ.

3 **a.** On applique la propriété des valeurs intermédiaires à la fonction f et on obtient une solution a sur $[\mathrm{e}^2\,;25]$ à l'équation $f(x)=0$. $\alpha\approx 22{,}8$.

b.

x	1		α		25
$f'(x)$		+	0	−	

c. Il faut donc fabriquer au plus 22 800 DVD pour réaliser des bénéfices.

100 Retour sur une croissance de population

1 **a.** En C3, on écrit : =C2/$B2 .

b. Soit t le taux de croissance moyen annuel de la population d'Afrique entre 1950 et 2010.

$(1+t)^{60}=\dfrac{1\,011}{227{,}3}$, donc $t=\left(\dfrac{1\,011}{227{,}3}\right)^{\frac{1}{60}}-1\approx 0{,}025$

soit environ 2,5 % d'augmentation par an.

2 **a.** $f(x)\geqslant 2\,022 \Leftrightarrow 1{,}026^x\geqslant 2 \Leftrightarrow x\ln 1{,}026\geqslant\ln 2$

$\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}026}\approx 27{,}005$.

b. La population sera double de celle de 2010 en 2010+27, soit en 2037.

101 Retour sur les suites

1 **a.** Le capital diminue chaque mois de 10 %, donc est multiplié par $1-\dfrac{10}{100}=0{,}9$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de terme initial $u_0=30\,000$ et de raison $q=0{,}9$.

Par conséquent, $u_n=30\,000\times q^n=30\,000\times 0{,}9^n$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, puisque $0<0{,}9<1$.

c. $u_n\leqslant 10\,000 \Leftrightarrow 0{,}9^n\leqslant\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow n\ln 0{,}9\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow n\ln 0{,}9\leqslant-\ln 3 \Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{-\ln 3}{\ln 0{,}9}\approx 10{,}4\Leftrightarrow n\geqslant 11.$

Le capital injecté devient inférieur à 10 000 € au bout de 11 mois.

2 **a.** $1+0{,}9+0{,}92+\ldots+0{,}9^n=\dfrac{1-0{,}9^{n+1}}{1-0{,}9}=10(1-0{,}9^{n+1})$.

b. $S_n=30\,000(1+0{,}9+0{,}9^2+\ldots+0{,}9^n)$

$=30\,000\times 10(1-0{,}9^{n+1})$

$=300\,000-300\,000\times 0{,}9\times 0{,}9^n$

$=300\,000-270\,000\times 0{,}9^n$.

c. On a $0<0{,}9<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}9^n=0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=300\,000$.

d. $300\,000-270\,000\times 0{,}9^n\geqslant 250\,000$

$\Leftrightarrow -27\times 0{,}9^n\geqslant -5$

$\Leftrightarrow 0{,}9^n\leqslant\dfrac{5}{27}$

$\Leftrightarrow n\ln 0{,}9\leqslant\ln 5-\ln 27$

$\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{\ln 5-\ln 27}{\ln 0{,}9}\approx 16{,}01$

$\Leftrightarrow n\geqslant 17$.

L'investissement total dépassera les 250 000 € au bout de 17 mois.

102 Suite arithmético-géométrique

1 **a.** Fin 2011 : $15\,000\left(1-\dfrac{5}{100}\right)=15\,250$ ouvrages.

Fin 2012 : $15\,250\times 0{,}95+1\,000=15\,487$ ouvrages.

b. $u_{n+1}=u_n\times 0{,}95+1\,000$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 a. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{20\,000 - u_{n+1}}{20\,000 - u_n} = \dfrac{20\,000 - u_n \times 0{,}95 - 1\,000}{20\,000 - u_n}$

$= \dfrac{0{,}95(20\,000 - u_n)}{20\,000 - u_n} = 0{,}95$.

Donc le suite (v_n) est géométrique de raison 0,95.

b. On a donc $v_n = v_0 \times 0{,}95^n = (20\,000 - 15\,000) \times 0{,}95^n$
$= 5\,000 \times 0{,}95^n$.

D'où $u_n = 20\,000 - v_n = 20\,000 - 5\,000 \times 0{,}95^n$.

c. On a $0 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20\,000$.

3 $u_n > 19\,000 \Leftrightarrow 20\,000 - 5\,000 \times 0{,}95^n > 19\,000$
$\Leftrightarrow -5\,000 \times 0{,}95^n > -1\,000$
$\Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}2 \Leftrightarrow n \ln 0{,}95 < \ln 0{,}2$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}95}{\ln 0{,}2} \approx 31{,}4 \Leftrightarrow n \geqslant 32$.

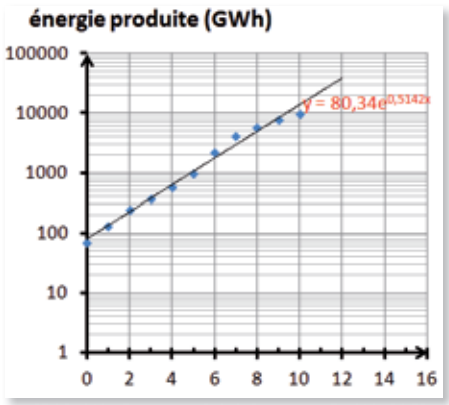
Réinvestir... (p. 132)

103 ... en sciences

Pourquoi choisir une croissance exponentielle ?

Partie A :

1



2 Il faut résoudre :
$f(x) > 170\,000 \Leftrightarrow 80\,e^{0{,}5142x} > 170\,000$
$\Leftrightarrow e^{0{,}5142x} > 2\,125 \Leftrightarrow 0{,}5142x > \ln 2\,125$
$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 2121}{0{,}5142} \approx 14{,}95$.

Donc l'énergie produite dépassera les 170 000 GWh en $2\,000 + 15$ soit en 2015.

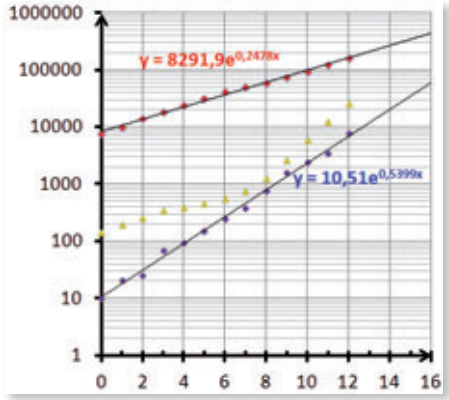
3 $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{80\,e^{0{,}5142(x+1)}}{80\,e^{0{,}5142x}} = e^{0{,}5142} \approx 1{,}6723$.

Cela correspond à une augmentation annuelle de 67,23 % environ.

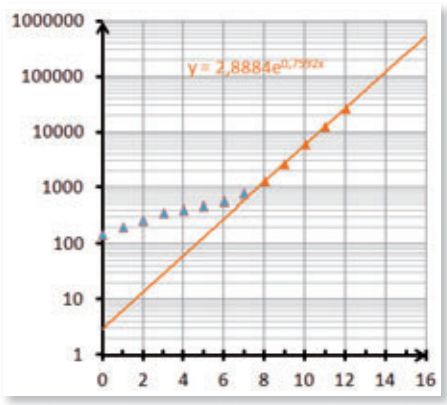
Partie B :

1 En 2013, $x = 16$. La puissance sera alors estimée à $y = 8\,300\,e^{0{,}2478} \times 16 \approx 437\,500$ MW.

2 $y = 10{,}5\,e^{0{,}54} \times 16 \approx 59\,400$ MW.



3 a.



Dans un repère semi-log, les points sont alignés sur [8 ; 12] on peut alors modéliser par une exponentielle.

b. $\left(\dfrac{N4}{J4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{26\,010}{1\,266}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 2{,}13$: Coefficient multiplicateur annuel moyen.

Alors, $k(x)$ = valeur en $2005 \times CM^{x-8}$ (En 2005, $x = 8$.)
D'où $k(x) = 1\,266 \times 2{,}13^{x-8} = 1\,266 \times e^{(\ln 2{,}13)(x-8)}$
$= 1\,266 \times e^{0{,}756(x-8)}$.

En 2013, $k(16) = 1\,266 \times e^{0{,}756(16-8)} \approx 536\,000$ MW.

Le résultat est trop élevé (supérieur à la production mondiale): soit le modèle n'est pas valable, soit la production mondiale va augmenter dans les années à venir.

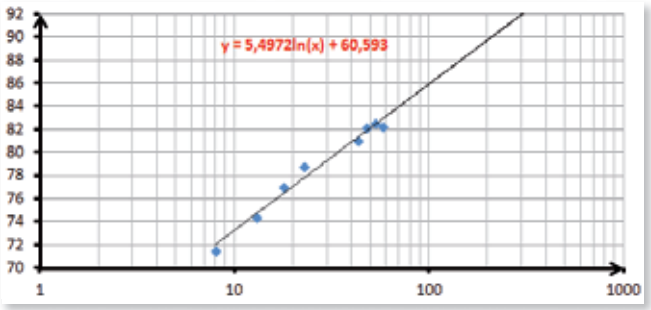
104 ... en modélisation

Modéliser une croissance « lente »

Partie A :

1 a. On constate que les points sont à peu près alignés.

b.



Les points semblant alignés avec une échelle logarithmique en abscisse, on peut penser à tester un modèle logarithmique.

D'après la courbe de tendance du tableur, on peut modéliser la population allemande par : $f(x) = 5{,}5 \ln x + 60{,}6$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 En 2015, $x = 65$.
La population allemande est alors estimée à :
$f(65) = 5{,}5 \ln 65 + 60{,}6 \approx 83{,}56$ millions de personnes.

3 $f(x) > 90 \Leftrightarrow 5{,}5 \ln x + 60{,}6 > 90$

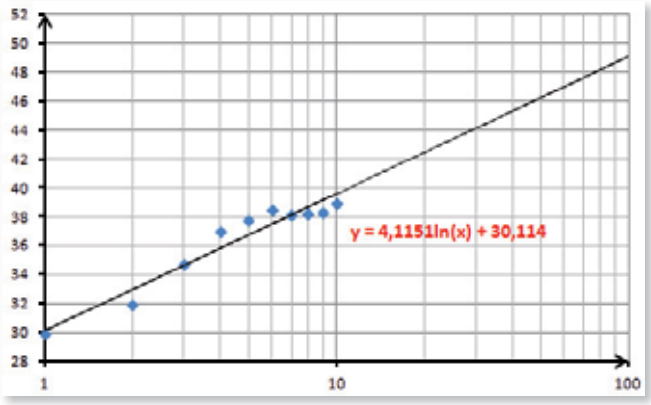
$\Leftrightarrow 5{,}5 \ln x > 29{,}4 \Leftrightarrow \dfrac{29{,}4}{5{,}5}$

$\Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{\frac{29{,}4}{5{,}5}} \approx 209{,}6$.

Il faudra donc 210 ans après 1950 pour que la population allemande dépasse les 90 millions, c'est-à-dire en 2160.

Partie B :

1 On utilise le tableur et l'échelle semi-log en abscisse et les courbes de tendances. On obtient :



On peut donc modéliser ce taux d'emploi par :

$f(x) = 4 \ln x + 30$.

2 $f(x) \geqslant 50 \Leftrightarrow 4 \ln x + 30 \geqslant 50 \Leftrightarrow 4 \ln x \geqslant 20$

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant 5 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^5 \approx 148{,}4$.

Il faudra donc attendre 149 ans depuis 1999, soit l'année 2148, pour que la France atteigne son objectif.

105 … en musique

Intensité et niveau sonore

1 $L_0 = 10 \log \dfrac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 10 \times 0 = 0$ dB.

2 **a.** $L(I) = 10 \log 10^{17} = 170$ dB.

b. $110 = 10 \log \dfrac{I}{I_0} \Leftrightarrow \log \dfrac{I}{I_0} = 11 \Leftrightarrow \ln \dfrac{I}{I_0} = 11 \ln 10$

$\Leftrightarrow \ln \dfrac{I}{I_0} = \ln 10^{11} \Leftrightarrow \dfrac{I}{I_0} = 10^{11}$

$\Leftrightarrow I = I_0 \times 10^{11} = 10^{-1}$ W/m^2.

3 **a.** $30 = 10 \log \dfrac{I}{I_0} \Leftrightarrow \log \dfrac{I}{I_0} = 3 \Leftrightarrow \ln \dfrac{I}{I_0} = 3 \ln 10$

$\Leftrightarrow \ln \dfrac{I}{I_0} = \ln 10^3 \Leftrightarrow \dfrac{I}{I_0} = 10^3$

$\Leftrightarrow I = 10^{-9}$ W/m^2.

b. $L(I_2) = 10 \log \dfrac{2I_1}{I_0} = 10 \log \dfrac{I_1}{I_0} + 10 \log 2 \approx L(I_1) + 3$.

On ajoute donc 3 dB, soit un total de 33 dB.

4 $L(I_2) - L(I_1) = 50 - 20 = 30$

$\Leftrightarrow 10 \log \dfrac{I_2}{I_0} - 10 \log \dfrac{I_1}{I_0} = 30$

$\Leftrightarrow \log \dfrac{I_2}{I_0} - \log \dfrac{I_1}{I_0} = 3$

$\Leftrightarrow \log \dfrac{I_2}{I_1} = 3$

$\Leftrightarrow I_2 = I_1 \times 10^3$.

L'intensité acoustique a donc été multipliée par 1 000.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 5

Intégration

Partir d'un bon pied (p. 134)

A Vrai ou faux ? Calculer une aire

1 **Vrai**, car l'aire du triangle ① est :
$\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

2 **Faux**, car l'aire du rectangle ② est :
$\text{Base} \times \text{Hauteur} = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2$,
et l'aire du trapèze ③ est :
$\frac{\text{base} + \text{Base}}{2} \times \text{Hauteur} = \frac{2+3}{2} \times 3 = 7{,}5 \text{ cm}^2$.

3 **Vrai**, car le domaine ④ est inclus dans un rectangle de largeur 4 cm et de longueur 5 cm, et donc d'aire 20 cm^2.

4 **Vrai** (voir question **2**.)

B QCM – Dériver une fonction

1 **b.** car $f'(x) = 3 \times 2x - 4 \times 1 + 0 = 6x - 4$.

2 **c.** car si $G(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$,
alors $G'(x) = 2 \times 3x^2 + 2x - 1 = g(x)$.

3 **c.** car en utilisant la dérivée d'un produit,
$h'(x) = 2 \times e^{-0{,}5x} + (2x - 3) \times (-0{,}5e^{-0{,}5x})$
$= (2 - x + 1{,}5)e^{-0{,}5x} = (3{,}5 - x)e^{-0{,}5x}$.

C Vrai ou faux ? Utiliser un graphique

1 **Faux**, car la dérivée f' est négative sur $[-2 ; -1]$, la fonction f est donc décroissante sur $[-2 ; -1]$.

2 **Faux**, car la dérivée f' est positive sur $[-1 ; 4]$ et ne s'annule qu'en $x = -1$ et en $x = 2$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[-1 ; 4]$.

3 **Vrai**, car graphiquement $f'(0) = 1$, égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4 **Vrai**, en lisant le signe de la dérivée f'.

Découvrir

Activité 1 Approcher une somme (p. 136)

Partie A : Aire sous une fonction croissante : somme de recettes

1 **a.** La recette totale est $5 \times 6 = 30$ €.

b. La somme des recettes unitaires de 1 à 20 kg est $5 \times 20 = 100$ €.

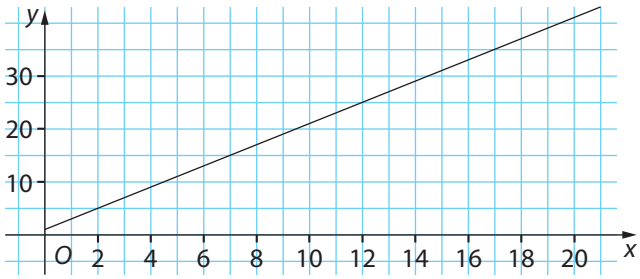
2 **a.** $F(x) = 5x$. Sur le **graphique 1**, il s'agit de l'aire de la partie verte entre les abscisses 1 et x.

b. Sur le **graphique 2**, $F(6)$ est la hauteur du bâton à l'abscisse 6, soit $F(6) = 30$ €.
De même $F(20) = 100$.
Sur le **graphique 2**, $F(x)$ est la hauteur du bâton placé à l'abscisse x.

3 La fonction F est linéaire, de coefficient 5.

Partie B : Aire sous une fonction affine : somme de coûts marginaux

1 **a.** On obtient :



b. On obtient :

Masse	1	2	3	4	5	6	7	Total
Coût marginal	3	5	7	9	11	13	15	63

Le coût total des 7 kg de poudre est donc de 63 centimes d'euros, soit 0,63 €.

2 En C3 =2*C2+1.

3 **a.** En C4 =B4+C3

b. Le coût total de 10 kg de poudre est de 120 centimes d'euros, soit 1,20 €.

c. On peut penser à une fonction carrée.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

4 **a.** $CT(n) = (2\times 1+1)+(2\times 2+1)+\ldots+(2\times n+1) = 2\times(1+2+\ldots+n)+(1+1+\ldots+1)$.

Donc en utilisant la formule admise, $CT(n) = 2\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n = n(n+1)+n = n^2+2n$.

b. On remplace n par 20.

Donc $CT(20) = 20^2+2\times 20 = 440$. Le coût total de 20 kg est donc de 4,40 €.

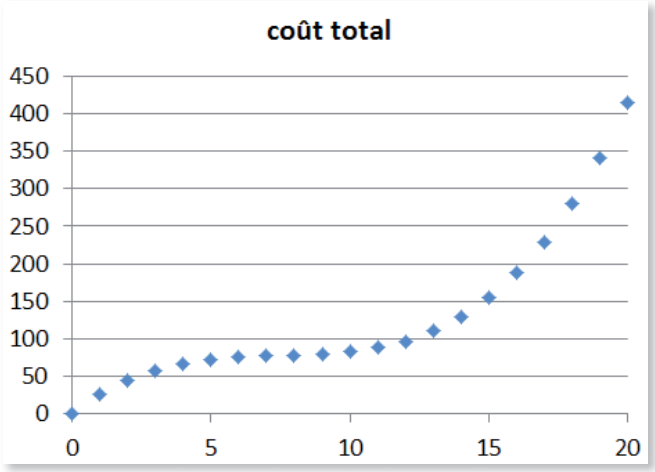
b. L'aire du trapèze dessiné sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[1\,;20]$ est : $\dfrac{3+41}{2}\times 20 = 440$. On retrouve le même résultat.

Partie C : Pour aller plus loin

On obtient :

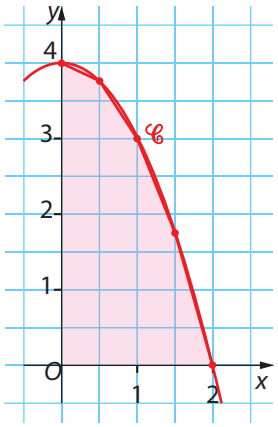
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	coût marginal $c(x)=0{,}5x^2-8x+33$																					
2	quantité	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	coût marginal		25,5	19	13,5	9	5,5	3	1,5	1	1,5	3	5,5	9	13,5	19	25,5	33	41,5	51	61,5	73
4	coût total	0	25,5	44,5	58	67	72,5	75,5	77	78	79,5	82,5	88	97	110,5	129,5	155	188	229,5	280,5	342	415

Et le nuage de points ci-contre :
Le coût total de 10 kg de produit est de 82,5 centimes d'euros.
On peut penser à une fonction cube.



Activité 2 Découvrir un nouvel intervalle de fluctuation à 95 % (p. 137)

1 **a.** En utilisant par exemple le polygone inscrit ci-dessous, on obtient que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ est environ de 5,25 cm².



2 **a.** Lorsque $n = 10$, la largeur des rectangles est :

$$\frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ cm}.$$

Le 1er rectangle a pour hauteur $f(0{,}2) = 3{,}96$ cm ;
le 2e rectangle a pour hauteur $f(0{,}4) = 3{,}84$ cm ;
le 5e rectangle a pour hauteur $f(1) = 3$ cm.

b. Lorsque $n = 20$, la largeur des rectangles est :

$$\frac{2}{20} = 0{,}1 \text{ cm}.$$

La hauteur du k-ième rectangle est :

$$f\left(\frac{2k}{n}\right) = 4-4\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

L'aire obtenue pour $n = 20$ est environ 5,13 cm².

c. Pour $n = 100$, l'aire obtenue est environ 5,293 2 cm².

Par la formule d'Archimède, on obtient :

$$\frac{4}{3}\times\frac{4\times 2}{2} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33 \text{ cm}^2.$$

3 $F(2)-F(0) = \left(4\times 2-\dfrac{2^3}{3}\right)-0 = \dfrac{16}{3}$.

On obtient la même valeur qu'à la question **2** **c.**.

Activité 3 Rechercher une fonction de dérivée donnée (p. 137)

1 **a.** $f'(x) = 3x^2+2x-5\times 1 = g(x)$. Donc g est la dérivée de la fonction f.

b. f n'est pas LA fonction dont la dérivée est g, car les fonctions $x\mapsto f(x)+k$, où $k\in\mathbb{R}$, ont aussi pour dérivée la fonction g.

2 **a.** Les fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes.

b Les fonctions dont la dérivée est 3 sont les fonctions $x\mapsto 3x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

3 **a.** Par exemple $F(x) = x^3$.

b. Par exemple $F(x) = \dfrac{1}{x}$.

c. Par exemple $F(x) = e^x$.

d. Par exemple $F(x) = \ln(x)$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Savoir faire

1. Encadrer une aire (p. 139)

Exercices d'application

1 **1** **a.** $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

$= \frac{1{,}25+1}{2}\times 1 + \frac{1+0{,}5}{2}\times 1$

$= 1{,}875$.

b. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{0{,}5+1{,}5}{2}\times 2 = 2$.

c. $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$= \frac{1{,}5+1}{2}\times 1 + \frac{1\times 1}{2} = 1{,}75$.

d. $\int_{1}^{3} f(t)\,dt = \int_{1}^{3} f(x)\,dx = 1{,}75$.

2 En utilisant la relation de Chasles,

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$.

Donc $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 1{,}875 + 2 + 1{,}75 = 5{,}625$.

En multipliant par l'unité d'aire $1 \times 2 = 2$ cm^2 , l'aire demandée est $2 \times 5{,}625 = 11{,}25$ cm^2 .

2. Vérifier et utiliser une primitive (p. 141)

Exercices d'application

2 **1** Pour tout réel x de $[0\,;3]$,

$F'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x) = b(x)$.

Donc F est une primitive de b sur $[0\,;3]$.

2 Le bénéfice total est en dizaines de milliers d'euros .

Pour tout réel q de $[0\,;3]$,

$$B(q) = \int_0^q b(x)\,dx = F(q) - F(0) = q\ e^{-q}.$$

3 **1** Pour tout réel x , $F'(x) = 3x^2 - 2\times 2x + 3 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$x \mapsto F(x) + k = x^3 - 2x^2 + 3x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

On résout $F(2) + k = 0$, soit $k = -F(2) = -6$.

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ que s'annule en 2 est :

$$x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 6.$$

4 **1** Pour tout réel x de $[0\,;5]$,

$F'(x) = 10\times e^{-0{,}1x} + (10x+50)\times(-0{,}1e^{-0{,}1x})$

$= (10 - x - 5)e^{-0{,}1x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0\,;5]$.

2 $\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0)$

$= (10\times 5 + 50)e^{-0{,}1\times 5} - 50e^0$

$= 100e^{-0{,}5} - 50$.

3. Déterminer une primitive usuelle (p. 143)

Exercices d'application

5 **a.** $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x$.

b. $f(q) = q + 1 - \frac{4}{q}$ et $F(q) = \frac{q^2}{2} + q - 4\ln(q)$.

6 **a.** $F(x) = -3e^{-x}$.

b. $F(x) = -e^{2x} + x$.

c. $F(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{3}e^{-6x}$.

d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x$.

7 **a.** Pour tout réel x de $[1\,;4]$, $f(x) = 2x - 1 - \frac{4}{x^2}$.

Donc la primitive F cherchée est de la forme :

$$F(x) = x^2 - x + \frac{4}{x} + k \text{ , où } k \in \mathbb{R}.$$

Or $F(2) = 0$, donc $2^2 - 2 + \frac{4}{2} + k = 0$, soit $k = -4$.

Donc la primitive cherchée est définie sur $[1\,;4]$ par :

$$F(x) = x^2 - x + \frac{4}{x} - 4 .$$

8 **a.** Le bénéfice B est la primitive de B_m sur $[0{,}5\,;3]$ qui s'annule en 1 .

Donc $B(q) = 3\ln(q) + \frac{q^3}{3} - 2q^2 + 1{,}75q + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $B(1) = 0 = 3\ln(1) + \frac{1^3}{3} - 2\times 1^2 + 1{,}75 + k$.

Donc $k = \frac{-1}{12}$.

Donc $B(q) = 3\ln(q) + \frac{q^3}{3} - 2q^2 + 1{,}75q - \frac{1}{12}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

9 **a.** L'unité de coût total est 1 centaine d'euros par kg $\times$ 1 kg, soit 1 centaine d'euros.

Pour tout réel $q \in [0\,;8]$, $C(q) = 2 + \int_0^q C_m(q)\ \mathrm{d}q$.

Or une primitive de la fonction C_m est :

$q \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-0,2q}}{-0,2} + 0,5\dfrac{q^2}{2} + 5q = -5\mathrm{e}^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q$.

Donc $C(q) = 2 + (-5\mathrm{e}^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q) - (-5\mathrm{e}^{0})$, soit $C(q) = 7 - 5\mathrm{e}^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q$.

4. Vérifier et utiliser une primitive (p. 145)

Exercices d'application

10 Le surplus des consommateurs est :

$S_C = \int_0^{1,2} (g(x) - 30)\ \mathrm{d}x = \int_0^{1,2} g(x)\ \mathrm{d}x - 30 \times 1,2$

$= \int_0^{1,2} g(x)\ \mathrm{d}x - 36$,

avec $g(x) = -17x + 50$

Or une primitive de g sur $[0\,;1,2]$ est définie par :

$G(x) = -\dfrac{17x^2}{2} + 50x$.

Donc :

$S_C = G(1,2) - G(0) - 36 = \left(-\dfrac{17 \times 1,2^2}{2} + 50 \times 1,2\right) - 0 - 36$.

Ainsi $S_C = 11,76$. Le surplus des consommateurs est de 117,6 millions d'euros.

11 **1** On résout :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,3x^2 + 0,5x + 2 = -0,32x^2 + 20$

$\Leftrightarrow 0,62x^2 + 0,5x - 18 = 0$.

$\Delta = 44,89$; $x_1 = -\dfrac{180}{31}$ et $x_2 = 5$.

Comme $x > 0$, la quantité d'équilibre est $x = 5$ tonnes.

Le prix d'équilibre est $f(5) = 12$ euros par kilo.

2 • L'unité des prix de vente est 1 euro par kilo, soit 1 000 euro par tonne. Les quantités sont en tonne. Donc les surplus sont en milliers d'euros.

• Le surplus des producteurs est :

$S_P = \int_0^5 (12 - f(x))\ \mathrm{d}x = 12 \times 5 - \int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Or une primitive de f sur $[0\,;5]$ est :

$F(x) = 0,1x^3 + 0,25x^2 + 2x$.

Donc $S_P = 60 - (F(5) - F(0)) = 31,25$.

Le surplus des producteurs est de 31 250 €.

• Le surplus des consommateurs est :

$S_C = \int_0^5 (g(x) - 12)\ \mathrm{d}x = \int_0^5 g(x)\ \mathrm{d}x - 12 \times 5$.

Or une primitive de g sur $[0\,;5]$ est $G(x) = -\dfrac{0,32x^3}{3} + 20x$.

Donc $S_C = 60 - (G(5) - G(0)) = \dfrac{80}{3} \approx 26,667$.

Le surplus des consommateurs est d'environ 26 667 €.

5. Appliquer le calcul intégral (p. 147)

Exercices d'application

12 **1** Par définition, la fonction f est continue sur $[0\,;0,4[$ et sur $[0,4\,;1]$. Or $f(0,4) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - 1}{\mathrm{e}^{0,6} - 1} = 0$.

Donc la fonction f est continue en 0,4.

On en déduit que la fonction f est continue sur $[0\,;1]$.

2 Pour tout réel x de $[0,4\,;1]$, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(x-0,4)} - 1}{\mathrm{e}^{0,6} - 1} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0,4\,;1]$.

3 **a.** $\int_{0,4}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0,4)$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{0,6} - 1}{\mathrm{e}^{0,6} - 1} - \dfrac{1 - 0,4}{\mathrm{e}^{0,6} - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,6} - 1,6}{\mathrm{e}^{0,6} - 1}$.

b. L'indice de Gini de la répartition est :

$\gamma = 2\int_0^1 (x - f(x))\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\ \mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Donc :

$\gamma = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} - 0\right) - 2\left(\int_0^{0,4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0,4}^1 f(x)\ \mathrm{d}x\right)$

$= 1 - 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,6} - 1,6}{\mathrm{e}^{0,6} - 1}$.

Donc $\gamma = \dfrac{2,2 - \mathrm{e}^{0,6}}{\mathrm{e}^{0,6} - 1} \approx 0,46$.

QCM (p. 243)

13 **a.** Une intégrale sur l'intervalle $[0\ ;2]$ est un nombre, ici positif, car la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'axe des abscisses. Donc f est positive sur $[0\ ;2]$ et l'intégrale est positive.

14 **b.** On sait que $g'(x) = f(x)$. On lit $g'(0) = 1$, comme coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 et $f(0) = 1$. Ainsi $g'(0) = f(0) = 1$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

15 **c.** Comme g est une primitive de f sur $[0 ; 3]$, en unité d'aire, l'aire du domaine coloré est :

$$\int_0^{2,5} f(x)\ dx = g(2,5) - g(0) \approx 8 - 3 \approx 5.$$

16 **a.** Si $f(x)$ est positif sur $[a ; b]$, alors par définition de F, la fonction F est croissante.
Le signe de F ne donne aucune indication sur f.

17 **b.** Si $F(x) = \frac{1}{3}(x+2)^3 - 3x$,

alors $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3(x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1 = f(x)$.

18 **b.** Si $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 5$, alors $F'(x) = e^{3x} = f(x)$.

19 **a.** Si $F(x) = 0{,}25x^2 + x - 2 + 2e^{0,5x}$,
alors $F(0) = 0 + 0 - 2 + 2 = 0$ et $F'(x) = 0{,}5x + 1 + e^{0,5x} = f(x)$.

20 **a.** Une primitive de $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$ sur $[1 ; 2]$ est définie par $F(x) = x^2 - \ln(x)$.
Donc :

$$\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx = F(2) - F(1)$$
$$= (4 - \ln(2)) - (1 - \ln(1)) = 3 - \ln(2).$$

21 **b.** $\int_{-1}^2 f(x)\ dx \leqslant \int_{-1}^2 (2x+1)\ dx$.

Or $\int_{-1}^2 (2x+1)\ dx = 6$, d'où $\int_{-1}^2 f(x)\ dx \leqslant 6$.

Donc l'intégrale $\int_{-1}^2 f(x)\ dx$ peut être négative.

22 **a.** La valeur moyenne sur $[1 ; e]$ est :

$$\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{e-1}(\ln(e) - \ln(1)) = \frac{1}{e-1}.$$

Exercices

1 Intégrale d'une fonction (p. 150)

23 Vrai ou Faux ?

1 **Vrai :** la variable d'intégration est « muette ».

2 **Vrai :** il y a plus de 16 carreaux sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-2 ; 0]$ et un carreau a pour aire $0{,}5 \times 0{,}5$ u.a. $= 0{,}25$ u.a. et $16 \times 0{,}25 = 4$. Donc $\int_{-2}^0 f(x)\ dx \geqslant 4$.

3 **Vrai :** le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[2 ; 4]$ est inclus dans un triangle rectangle isocèle de côté 2 unités.

4 **Faux :** il y a au moins 8 carreaux complets, d'aire 0,25 u.a. sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; 2]$.

5 **Vrai :** il y a au moins 24 carreaux sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.

24 Fonction affine par morceaux

a. $\int_{-5}^{-3} f(x)\ dx = \frac{2+3}{2} \times 2 = 5$.

$\int_{-3}^2 f(x)\ dx = \frac{1+3}{2} \times 5 = 10$.

$\int_2^5 f(x)\ dx = 3 \times 1 = 3$.

b. En utilisant la relation de Chasles,

$\int_{-5}^5 f(x)\ dx = 5 + 10 + 3 = 18$.

25 Segments de droite

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

$\int_{-5}^5 f(x)\ dx = \int_{-5}^{-3} f(x)\ dx + \int_{-3}^2 f(x)\ dx + \int_2^5 f(x)\ dx$.

Donc $\int_{-5}^5 f(x)\ dx = \frac{4+1}{2} \times 2 + 1 \times 5 + \frac{2+1}{2} \times 3 = 14{,}5$.

26 Justifier un encadrement d'une intégrale

1 La courbe $\mathscr{C}$ est toujours située en dessous de ses tangentes, donc la fonction f est concave sur $[0 ; 5]$.
La courbe $\mathscr{C}$ se trouve donc au-dessus des cordes $[AD]$, $[DB]$ et $[BC]$.

2 **a.** En utilisant des trapèzes et des rectangles, on obtient :

- $\frac{1+2,5}{2} \times 1 \leqslant \int_0^1 f(x)\ dx \leqslant \frac{1,5+2,5}{2} \times 1$,

soit $1{,}75 \leqslant \int_0^1 f(x)\ dx \leqslant 2$.

- $\frac{2,5+3}{2} \times 1 \leqslant \int_1^2 f(x)\ dx \leqslant \frac{2,5+3}{2} \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 3$,

soit $2{,}75 \leqslant \int_1^2 f(x)\ dx \leqslant 2{,}875$.

En ajoutant membre à membre, on a donc :

$$4{,}5 \leqslant \int_0^2 f(x)\ dx \leqslant 4{,}875.$$

De même : $\frac{3+2}{2} \times 3 \leqslant \int_2^5 f(x)\ dx \leqslant 1 \times 3 + \frac{3+2}{2} \times 2$.

Donc $7{,}5 \leqslant \int_2^5 f(x)\ dx \leqslant 8$.

b. Comme $\int_0^5 f(x)\ dx = \int_0^2 f(x)\ dx + \int_2^5 f(x)\ dx$, en ajoutant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient : $12 \leqslant \int_0^5 f(x)\ dx \leqslant 12{,}875$.

27 Déterminer l'unité d'aire

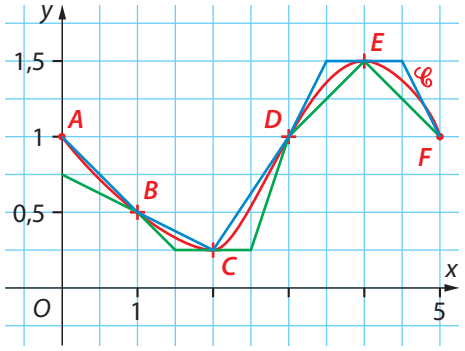
a. 1 u.a. $= 1$ u.x. $\times 1$ u.y. $= 0{,}5$ cm $\times 0{,}5$ cm $= 0{,}25$ cm^2.

b. 1 u.a. $= 1$ u.x. $\times 1$ u.y. $= 0{,}5$ cm $\times 0{,}2$ cm $= 0{,}1$ cm^2.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

28 Donner une valeur approchée en u.a.

On trace par exemple les polygones inscrit (vert) et circonscrit (bleu) ci-dessous :



• L'aire sous le polygone vert, en u.a. , est :

$$\frac{0,75+0,5}{2}+\frac{0,5+0,25}{2}\times 0,5+0,25\times 1+\frac{0,25+1}{2}\times 0,5 + \frac{1+1,5}{2}+\frac{1,5+1}{2}=3,875.$$

• L'aire sous le polygone bleu, en u.a. , est :

$$\frac{1+0,5}{2}+\frac{0,5+0,25}{2}+\frac{0,25+1}{2}+\frac{1+1,5}{2}\times 0,5+1,5\times 1 + \frac{1,5+1}{2}\times 0,5=4,5.$$

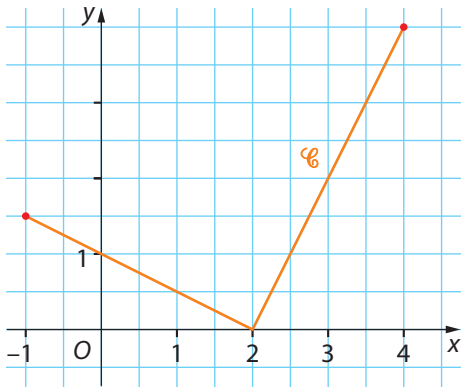
• Donc $3,875 \leqslant \int_0^5 f(x)\ dx \leqslant 4,5$.

Ainsi $\int_0^5 f(x)\ dx \approx 4$ à 0,5 près.

On en déduit que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur [0 ; 5] est égale à 4 u.a. , à 0,5 u.a. près.

29 Calculer la valeur exacte d'une aire

1 Tracé de la courbe $\mathscr{C}$, formée de deux segments :



$f(2) = -0,5\times 2+1 = 0$ et $2\times 2-4=0$.

Donc f est continue et positive sur [−1 ; 4].

2 Comme la fonction est positive, l'intégrale cherchée est égale à la somme des aires de deux triangles rectangles :

$$\int_{-1}^{4} f(x)\ dx = \frac{1,5\times 3}{2}+\frac{4\times 2}{2}=6,25.$$

3 L'unité d'aire est 2 cm × 2 cm = 4 cm² .

Donc l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur [−1 ; 4] , en cm² est : 6,25 × 4 = 25 cm² .

30 Calculer un impôt par tranches

1 **a.** 26 000 = 6 000 + (12 000 − 6 000) + (26 000 − 12 000).

Donc l'impôt, en k€ , pour un revenu imposable de 26 000 € est :

$$\text{IR} = 6\times 0+(12-6)\times\frac{5,5}{100}+(26-12)\times\frac{14}{100}=2,29.$$

b. Pour un revenu de 71 k€ , l'impôts, en k€ , est :

$$\text{IR} = 6\times 0+(12-6)\times\frac{5,5}{100}+(26-12)\times\frac{14}{100} + (71-26)\times\frac{30}{100}=15,79.$$

2 **a.** Pour $x \in [\,26\,;\,71\,]$, $\int_{26}^{x} 0,3\ dR$ est le montant de l'impôt de la tranche [26 ; x] .

b. En utilisant l'aire d'un rectangle,

$$\int_{26}^{x} 0,3\ dR = 0,3\times(x-26) = 0,3x-7,8.$$

c. Pour $x \in [\,26\,;\,71\,]$, l'impôt est la somme de 2,29 k€ (voir **1** **a.**) et de l'intégrale $\int_{26}^{x} 0,3\ dR$.

Donc IR = 2,29 + 0,3x − 7,8 = 0,3x − 5,51.

31 Aire en utilisant la calculatrice

1 On lit : $\int_0^1 f(x)\ dx \approx 0,785$.

2 **a.** 1 u.a. = 1 cm × 2 cm = 2 cm² . Donc l'aire sous $\mathscr{C}$ sur [0 ; 1] est environ 2 × 0,785 = 1,57 cm² .

b. 1 u.a. = 2 cm × 3 cm = 6 cm² . Donc l'aire sous $\mathscr{C}$ sur [0 ; 1] est environ 6 × 0,785 = 4,71 cm² .

32 Aire sous la courbe

1 Pour tout réel $x \in [\,-2\,;\,0\,]$, $x+2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$.

Par produit, la fonction f est positive sur [−2 ; 0] .

Par produit de fonctions continues, la fonction f est aussi continue sur [−2 ; 0] .

2 Comme 1 u.a. = 1 cm² , on obtient que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur [−2 ; 0] est environ égale à 4,39 cm² , à 0,01 cm² près.



33 Utiliser des positions relatives

1 Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,6\,]$, $f'(x) = \frac{-24}{(x+6)^2}$. Donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc décroissante sur [0 ; 6] .

De plus $f''(x) = \frac{48}{(x+6)^3}$ (positif) . Donc la fonction f est convexe sur [0 ; 6] .

2 **a.** Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,6\,]$,

$$d(x) = \frac{24}{x+6}+\frac{x}{3}-4 = \frac{72+x(x+6)-12(x+6)}{3(x+6)} = \frac{x^2-6x}{3(x+6)} = \frac{x(x-6)}{3(x+6)}.$$

Comme $x \geqslant 0$, $x-6 \leqslant 0$ et $x+6 > 0$, on a : $d(x) \leqslant 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc située en dessous de la droite (AB) sur [0 ; 6] .

b. • Comme la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite (AB) sur [0 ; 6] , le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ est inclus dans un trapèze d'aire $\frac{4+2}{2}\times 6 = 18$ u.a.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

• Comme la fonction f est convexe sur $[0;6]$, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente T en B.

Comme $f(6)=2$ et $f'(6)=\dfrac{-1}{6}$, cette tangente admet pour équation $y=\dfrac{-1}{6}(x-6)+2=\dfrac{-x}{6}+3$. La tangente T coupe donc l'axe des ordonnées au point $(0;3)$.
Donc le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0;6]$ contient un trapèze d'aire $\dfrac{3+2}{2}\times 6=15$ u.a.

• On en déduit que $15 \leqslant \int_0^6 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 18$.

3 On obtient : $\int_0^6 f(x)\ \mathrm{d}x \approx 16{,}64$ à 0,01 près.



2 Intégrale et notion de primitive (p. 152)

34 Vrai ou faux ?

1 **Vrai**, d'après le théorème du cours.
2 **Faux**, car si $f(x)=x^3$, alors $f'(x)=3x^2\neq x^2$.
3 **Vrai**, d'après le théorème du cours.
4 **Faux**, la fonction F ne s'annule pas forcément en 0.

35 QCM

1 **b.**, **c.** et **d.** : on dérive toutes les fonctions données et on retrouve $F'(x)=f(x)$.
2 **a.**, **b.**, **c.** et **d.** : on calcule la dérivée des fonctions F données. On développe $F(x)$ si nécessaire et on vérifie qu'elles ont toutes pour dérivée f.
3 **d.** On vérifie que sa dérivée est f et que $F(1)=0$.

36 Cas d'une fonction constante

1 **a.** $F(x)$ est, en unité d'aire, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0;x]$, soit celle du rectangle de largeur 2 et de longueur x.
b. Donc $F(x)=2x$.

2 L'intégrale $F(x)=\int_0^2 k\ \mathrm{d}x$ est l'aire du rectangle de largeur k et de longueur x. Donc $F(x)=kx$.

37 Cas d'une fonction linéaire

a. Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{C}$ est 4, donc $f(t)=4t$.
b. En utilisant l'aire d'un triangle rectangle de côtés x et $f(x)$, on obtient : $F(x)=\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t=\dfrac{x\times f(x)}{2}=2x^2$.
c. $F'(x)=4x=g'(x)$. Donc F et g ont même dérivée, égale à f.

38 Cas d'une fonction affine

1 **a.** Le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[1;x]$ est un trapèze, donc :
$F(x)=\dfrac{1{,}5+(1+0{,}5x)}{2}\times(x-1)=(0{,}25x+1{,}25)(x-1)$
$=0{,}25x^2+x-1{,}25$.
b. $F(6)=13{,}75$.
2 **a.** $F'(x)=0{,}25\times 2x+1=f(x)$ et $F(1)=0$. Donc F est la primitive de f qui s'annule en 1.
b. Lorsque x augmente dans $[1;6]$, le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[1;x]$ grandit, donc son aire augmente. On en déduit que la fonction F est croissante sur $[1;6]$.

39 Justifier des primitives

• Ligne de commande 1 :
$f(x)=2x^3+4x-1$ et $F(x)=\dfrac{x^4}{2}+2x^2-x$.
Or $F'(x)=\dfrac{4x^3}{2}+2\times 2x-1=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
• Ligne de commande 2 :
$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{2x}$ et $F(x)=\dfrac{1}{4}(2x-3)\mathrm{e}^{2x}$.
Or :
$F'(x)=\dfrac{1}{4}[2\mathrm{e}^{2x}+(2x-3)(2\mathrm{e}^{2x})]=\mathrm{e}^{2x}\times\dfrac{2+4x-6}{4}$
$=\mathrm{e}^{2x}(x-1)=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
• Ligne de commande 3 :
$f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x)=(-x^2-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$.
Or :
$F'(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^{-x}+(-x^2-2x-3)(-\mathrm{e}^{-x})$
$=\mathrm{e}^{-x}(-2x-2+x^2+2x+3)=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

40 Vérifier des primitives

$F'(x)=3(x-2)^2+2=3(x^2-4x+4)+2=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

41 Vérifier des primitives

$F'(x)=3\times 3x^2-\dfrac{4}{x^2}=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

42 Vérifier des primitives

$F'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-2x(x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x+1}{(x+2)^2}=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

43 Vérifier des primitives

$F'(x)=2\mathrm{e}^{-0{,}1x}+(2x+1)(-0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1x})$
$=\mathrm{e}^{-0{,}1x}(2-0{,}2x-0{,}1)=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

44 Vérifier des primitives

$F'(x)=4x^3-3+\dfrac{1}{x}=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

45 Vérifier des primitives

$F'(x) = 2\ln(x) + (2x+3) \times \dfrac{1}{x} + 1$

$= 2\ln(x) + 2 + \dfrac{3}{x} + 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

46 Lien entre primitive et intégrale

1 a. Pour $f(x) = x^2 - x + 1$, $\Delta = -3$ négatif. Et $a = 1$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

b. $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{2x}{2} + 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 a. $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ dt = F(2) - F(1)$

$= \left(\dfrac{2^3}{3} - \dfrac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\dfrac{1^3}{3} - \dfrac{1^2}{2} + 1\right)$

$= \dfrac{11}{6}$.

b. $\displaystyle\int_{-2}^3 f(t)\ dt = F(3) - F(-2)$

$= \left(\dfrac{3^3}{3} - \dfrac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\dfrac{(-2)^3}{3} - \dfrac{(-2)^2}{2} + (-2)\right)$

$= \dfrac{85}{6}$.

3 a. $\displaystyle\int_1^x f(t)\ dt = F(x) - F(1)$

$= \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\right) - \left(\dfrac{1^3}{3} - \dfrac{1^2}{2} + 1\right)$

$= \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{5}{6}$.

b. La primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est définie par $G(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ dt = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{5}{6}$.

47 Calculer des intégrales

1 a. $F'(x) = (-1)e^{-0,5x} - (x+5)(-0,5e^{-0,5x})$

$= e^{-0,5x}(-1 + 0,5x + 2,5) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\ dx = F(4) - F(0)$

$= -(4+5)e^{-2} + 5e^0 = 5 - 9e^{-2} \approx 3,782$.

c. On obtient :



Ce qui confirme le résultat obtenu à la question **b.**.

2 a. $F'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\ dx = F(4) - F(0) = 4^2 e^{-4} - 0 = 16e^{-4} \approx 0,293$.

On obtient :



Ce qui confirme le résultat obtenu à la question **b.**.

48 Interpréter une aire

1 En unité d'aire, l'aire noircie est :

$\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\ dx = \int_{-1}^5 (x+1)^2 e^{-x}\ dx$.

2 $F'(x) = (-2x-4)e^{-x} + (-x^2 - 4x - 5)(-e^{-x})$

$= e^{-x}(-2x - 4 + x^2 + 4x + 5)$

$= e^{-x}(x^2 + 2x + 1) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3 $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\ dx = F(5) - F(-1)$.

$= (-5^2 - 4 \times 5 - 5)e^{-5} - (-(-1)^2 - 4 \times (-1) - 5)e^1$

$= 2e - 50e^{-5}$

En unité d'aire, l'aire noircie est $2e - 50e^{-5}$, soit environ 5,10 u.a. à 0,01 près.

49 Calculer une aire sous une courbe

1 a. Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

b. La fonction f est positive sur $[1 ; 2]$ et

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx = F(2) - F(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Donc l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $\ln(2)$ u.a..

c. $\displaystyle\int_1^4 f(t)\ dt = F(4) - F(1) = \ln(4) - \ln(1) = 2\ln(2)$.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 4$ est égale à $2 \times \ln(2)$ u.a..

2 a. $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{t}\ dt = F(9) - F(1) = \ln(9) - \ln(1) = 2\ln(3)$ et

$\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t}\ dt = F(3) - F(1) = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$.

Donc $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{t}\ dt = 2 \times \int_1^3 \frac{1}{t}\ dt$.

b. Pour $a > 0$:

$\displaystyle\int_1^{a^2} \frac{1}{t}\ dt = F(a^2) - F(1) = \ln(a^2) - \ln(1) = 2\ln(a)$ et

$\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t}\ dt = F(a) - F(1) = \ln(a)$.

Donc $\displaystyle\int_1^{a^2} \frac{1}{t}\ dt = 2 \times \int_1^a \frac{1}{t}\ dt$.

50 Vérifier un coût total

1 La fonction C est la primitive de C_m sur $\mathbb{R}$ telle que $C(0) = 2\,000$.

Or les primitives de C_m sont les fonctions :

$q \mapsto 0,005q^3 - 0,89q^2 + 137q + k$.

On en déduit que :

$C(q) = 0,005q^3 - 0,89q^2 + 137q + 2\,000$.

2 $C(150) = 0,005 \times 150^3 - 0,89 \times 150^2 + 137 \times 150 + 2\,000$

$= 19\,400$.

Le coût total de fabrication de 150 cafetières est de 19 400 €.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 Primitives usuelles (p. 154)

51 QCM

1 **b.** Ne pas confondre dérivée et primitive.

2 **b.** et **d.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax+b}$ est : $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$ et $\frac{1}{0,5} = 2$.

3 **a.** La dérivée de $x \mapsto x^4$ est $x \mapsto 4x^3$.

52 Déterminer des primitives

$F(x) = 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x$.

53 Déterminer des primitives

$F(x) = \frac{2}{3} \times (x-4)^3 + x$.

54 Déterminer des primitives

$F(x) = 2e^x + 3e^{-x}$.

55 Déterminer des primitives

$F(x) = 0,05x^2 - 2e^{-x}$.

56 Déterminer des primitives

$F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - 4e^x + x$.

57 Déterminer des primitives

$F(x) = 0,3x - 25e^{-0,2x}$.

58 Déterminer des primitives

$F(x) = 0,6x^2 + 10x + 6,4e^{0,5x}$.

59 Déterminer des primitives

$F(x) = 4e^{0,5x+1} + 2e^{-0,5x+2}$.

60 Déterminer des primitives

$F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x)$.

61 Déterminer des primitives

$f(x) = 0,3x^2 - 2 + \frac{1}{x}$ et $F(x) = 0,1x^3 - 2x + \ln(x)$.

62 Primitives sous condition

a. Les primitives sur $[0 ; +\infty[$ de f sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 40x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

b. On cherche k tel que $G(5) = 8$.

$\frac{5^3}{3} - 5 \times 5^2 + 40 \times 5 + k = 8 \Leftrightarrow k = -\frac{326}{3}$.

Donc $G(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 40x - \frac{326}{3}$.

c. $\int_0^5 f(t)\ dt = G(5) - G(0) = 8 - \frac{-326}{3} = \frac{350}{3}$.

63 Coût total à partir d'un coût marginal

Les primitives de la fonction C_m sur $[0 ; 3]$ sont les fonctions $q \mapsto q^3 - 6q^2 + 13q + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or le coût total C est la primitive de C_m qui vaut 1 en 0.

Donc $C(q) = q^3 - 6q^2 + 13q + 1$.

64 Bénéfice marginal et bénéfice total

1 Les primitives de f sur $[0 ; 6]$ sont les fonctions $x \mapsto x - 3e^{-x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or le bénéfice total B est la primitive de f telle que $B(1) = 0$.

Donc $1 - 3e^{-1} + k = 0$, soit $k = 3e^{-1} - 1$.

Donc $B(x) = x - 3e^{-x} + 3e^{-1} - 1$.

Le bénéfice marginal étant en euro par kilo, soit en millier d'euros par tonne, et les quantités étant en tonne, on obtient que le bénéfice total est en millier d'euros.

2 **a.** $B'(x) = f(x) = 1 + 3e^{-x}$. Or $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x de $[0 ; 6]$, $B'(x) > 0$. La fonction B est donc croissante sur $[0 ; 6]$.

b. Vu à la question **a.**.

c. $B(6) = 6 - 3e^{-6} + 3e^{-1} - 1 = 5 - 3e^{-6} + 3e^{-1} \approx 6,1$.

Le bénéfice total pour 6 tonnes de poudre est d'environ 6 100 €.

65 Production et capital

1 **a.** Une primitive F de p sur $[0 ; 5]$ est définie par exemple par : $F(x) = -500\exp\left(-\frac{x}{500}\right)$.

b. Les primitives de p sur $[0 ; 5]$ sont les fonctions : $x \mapsto -500\exp\left(-\frac{x}{500}\right) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

On résout $-500\exp(0) + k = 0 \Leftrightarrow k = 500$.

La primitive de p qui s'annule en 0 est donc : $x \mapsto -500\exp\left(-\frac{x}{500}\right) + 500$.

2 **a.** $P(x) = -500\exp\left(-\frac{x}{500}\right) + 500$.

b. $P(5) = -500\exp(-0,01) + 500 \approx 4,975$. Pour un investissement de 5 millions d'euros, la production est d'environ 4,975 tonnes.

c. $P'(x) = p(x) = \exp\left(-\frac{x}{500}\right) > 0$. Donc la production P est croissante sur $[0 ; 5]$: lorsque l'investissement augmente, la production augmente.

$P''(x) = p'(x) = -\frac{1}{500}\exp\left(-\frac{x}{500}\right) < 0$. Donc la fonction P est concave : lorsque l'investissement augmente, la production augmente, mais de moins en moins vite.

66 Revenu

1 Pour tout réel x de $[0 ; 50]$, $f'(x) = -1 - 29,4e^{-0,7x}$.

Donc $f'(x) \leqslant 0$.

Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0 ; 50]$.

2 Comme f est décroissante sur $[0 ; 50]$, le minimum de f sur $[0 ; 50]$ est $f(50) = 42e^{-35} > 0$.

Donc la fonction f est strictement positive sur $[0 ; 50]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Le revenu marginal est une valeur positive : lorsque les ventes augmentent, le revenu total augmente.

3 Le revenu total est défini par :

$$R(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \left(50x - \frac{x^2}{2} - 60e^{-0,7x}\right) - (-60)$$
$$= 50x - \frac{x^2}{2} - 60e^{-0,7x} + 60 .$$

4 Propriétés de l'intégrale

(p. 155)

67 Vrai ou faux ?

a. Faux : il n'y a pas de lien entre ces deux intégrales.
$\int_1^0 f(x)\ dx = F(0) - F(1)$.
Contre-exemple : la fonction F peut être décroissante sur $[0 ; 1]$.

b. Faux : $\int_2^{-1} f(x)\ dx = -\int_{-1}^2 f(x)\ dx$.

c. Vrai : $\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0$.

d. Vrai : $\int_1^0 f(x)\ dx = -\int_0^1 f(x)\ dx$.

68 Vrai ou faux ?

a. Faux : c'est f qui est la dérivée de F .

b. Vrai : c'est la définition.

c. Vrai : $F' = f$ positif , donc F est croissante.

d. Faux : contre-exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ et $F(x) = \ln(x)$ sur $]0 ; 5]$.

e. Faux : contre-exemple $f(x) = 0$ et $F(x) = 1$ sur $[-5 ; 5]$.

69 QCM

1 b. Une primitive de $f : x \mapsto 3x - x^2$ est :
$F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}$. Donc $\int_0^1 f(x)\ dx = F(1) - F(0) = \frac{7}{6}$.

2 b. Une primitive de $f : x \mapsto e^{2x}$ est $F : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$.
Donc $\int_{-2}^2 f(x)\ dx = F(2) - F(-2) = \frac{e^4}{2} - \frac{e^{-4}}{2}$.

3 a. Une primitive de $f : x \mapsto \frac{4}{x}$ est $F : x \mapsto 4\ln(x)$.
Donc $\int_3^9 f(x)\ dx = F(9) - F(3)$
$= 4\ln(9) - 4\ln(3) = 4\ln\left(\frac{9}{3}\right) = 4\ln(3)$.

70 Vrai ou faux ?

1 Vrai : $\int_0^3 f(x)\ dx = F(3) - F(0) = (-1) - (-1) = 0$.

2 Vrai : $\int_2^3 f(x)\ dx = F(3) - F(2) = (-1) - (-2,4) = 1,4$.

3 Faux : $\int_{-1}^1 f(x)\ dx = F(1) - F(-1) = (-1,6) - (-2,4) = 0,8$.

4 Faux : $\int_0^4 f(x)\ dx = F(4) - F(0) = (4,4) - (-1) = 5,4$.

5 Faux : $\int_{-1}^0 f(x)\ dx = F(0) - F(-1) = (-1) - (-2,4) = 1,4$
et $\int_0^1 f(x)\ dx = F(1) - F(0) = (-1,6) - (-1) = -0,6$.

4 Faux : $\int_{-1}^3 f(x)\ dx + \int_{-1}^1 f(x)\ dx = (F(3) - F(-1)) + 0,8$
$= (-1) - (-2,4) + 0,8 = 2,2$
et $\int_0^3 f(x)\ dx = 0$.

71 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = -x^2 + 3x$.
Donc $\int_{-1}^2 f(x)\ dx = F(2) - F(-1) = 6$ car :
$F(2) = -4 + 6 = 2$ et $F(-1) = -1 - 3 = -4$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :
$F(x) = x^3 - x^2 - x$.
Donc $\int_{-1}^5 f(x)\ dx = F(5) - F(-1) = 96$ car :
$F(5) = 5^3 - 5^2 - 5 = 95$ et $F(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$.

72 Calculs d'intégrales

a. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est F telle que $F(x) = x + \frac{1}{x}$.
Donc $\int_1^2 f(x)\ dx = F(2) - F(1) = 0,5$ car :
$F(2) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$ et $F(1) = 1 + 1 = 2$.

b. $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$. Donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est F telle que $F(x) = 2x - \frac{1}{x}$.
Donc $\int_1^5 f(x)\ dx = F(5) - F(1) = 8,8$ car :
$F(5) = 10 - 0,2 = 9,8$ et $F(1) = 2 - 1 = 1$.

73 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = e^x$.
Donc $\int_{-1}^0 f(x)\ dx = F(0) - F(-1) = 1 - e^{-1} \approx 0,63$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :
$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2e^x$.
Donc $\int_0^3 f(x)\ dx = F(3) - F(0) = 6,5 - 2e^3 \approx -33,67$
car $F(3) = 4,5 - 2e^3$ et $F(0) = -2$.

74 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = x + e^{-x}$.
Donc $\int_0^{\ln(2)} f(x)\ dx = F(\ln(2)) - F(0) = \ln(2) - 0,5 \approx 0,19$
car $F(\ln(2)) = \ln(2) + e^{-\ln(2)} = \ln(2) + 0,5$ et $F(0) = 1$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :
$F(t) = t^2 + 2e^{-0,1t}$.
Donc $\int_0^{10} f(t)\ dt = F(10) - F(0) = 98 + 2e^{-1} \approx 98,74$
car $F(1) = 100 + 2e^{-1}$ et $F(0) = 2$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

75 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(x) = 2e^{x} - e^{-x}.$$

Donc $\int_0^{\ln(2)} f(x)\ dx = F(\ln(2)) - F(0) = 2{,}5$ car :

$F(\ln(2)) = 2e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)} = 4 - 0{,}5 = 3{,}5$

et $F(0) = 2 - 1 = 1$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(t) = \frac{t^3}{3} - 0{,}4e^{0{,}5t}.$$

Donc $\int_0^1 f(t)\ dt = F(1) - F(0) = \frac{11}{15} - 0{,}4e^{0{,}5} \approx 0{,}07$

car $F(1) = \frac{1}{3} - 0{,}4e^{0{,}5}$ et $F(0) = -0{,}4$.

76 Calculs d'intégrales

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = -e^{-x^2}$.

Donc $\int_0^1 f(x)\ dx = F(1) - F(0) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$

et $\int_{-1}^0 f(x)\ dx = F(0) - F(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$.

77 Intégrales à l'aide de *Xcas*

• Ligne de commande 1 : On calcule $\int_0^{10} f(x)\ dx$ avec :

$$f(x) = 30e^{-\frac{x}{5}} + 1.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(x) = -150e^{-\frac{x}{5}} + x.$$

Donc $\int_0^{10} f(x)\ dx = F(10) - F(0) = -150e^{-2} + 160$

car $F(10) = -150e^{-2} + 10$ et $F(0) = -150$.

• Ligne de commande 2 : On calcule $\int_1^4 f(x)\ dx$ avec :

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^2 - 4x + 1.$$

Une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est F telle que :

$$F(x) = 3\ln(x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x.$$

Donc $\int_1^4 f(x)\ dx = F(4) - F(1) = 3\ln(4) - 6$

car $F(4) = 3\ln(4) - \frac{20}{3}$ et $F(1) = -\frac{2}{3}$.

78 Vrai ou faux ?

On lit le signe de f sur $\mathbb{R}$ et on en déduit le sens de variation de la primitive F. Donc :

a. Faux : f est positive sur $]-\infty ; 1]$, donc F est croissante sur $]-\infty ; 1]$.

b. Faux : f n'est pas de signe constant sur $[2 ; +\infty[$, donc F n'est pas monotone sur $[2 ; +\infty[$.

c. Vrai : f est positive sur $[5 ; +\infty[$, donc F est croissante sur $[5 ; +\infty[$.

d. Vrai : f est négative sur $[1 ; 5]$, donc F est décroissante sur $[1 ; 5]$.

79 Intégrale et aire

1 $\mathscr{A} = \int_1^3 x\ dx - \int_1^3 \ln(x)\ dx = \int_1^3 (x - \ln(x))\ dx$,

avec 1 u.a. = 1 cm × 1 cm = 1 cm².

2 On obtient à la calculatrice :

```
intégrFonct(X-ln
(X),X,1,3)
      2.704163134
```

Donc $\mathscr{A} \approx 2{,}70$ u.a. $= 2{,}70$ cm².

3 Soit $G(x) = x\ln(x) - x$.

$G'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

Donc G est une primitive de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$.

Donc une primitive de f telle que $f(x) = x - \ln(x)$ est F telle que $F(x) = \frac{x^2}{2} - G(x) = \frac{x^2}{2} - x\ln(x) + x$.

Ainsi, $\mathscr{A} = F(3) - F(1) = 6 - 3\ln(3)$ en cm², car :

$F(3) = 7{,}5 - 3\ln(3)$ et $F(1) = 1{,}5$.

80 Lien entre aire et intégrale

1 a. Pour tout réel $x \in [0{,}5 ; 6]$, $f(x) = \frac{-x^2 + 7x - 10}{x}$,

est du signe de $-x^2 + 7x - 10$ sur $[0{,}5 ; 6]$.

Pour le numérateur, $\Delta = 9$, $x_1 = 5$ et $x_2 = 2$.

Comme $a = -1$ négatif, on a le tableau de signes :

x	0,5		2		5		6
$f(x)$		−	0	+	0	−	

b. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[2 ; 5]$, et en dessous de l'axe des abscisses sur $[0{,}5 ; 2]$ et sur $[5 ; 6]$.

2 a. Une primitive de f sur $[0{,}5 ; 6]$ est F telle que :

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x).$$

b. Les primitives de f sur $[0{,}5 ; 6]$ sont les fonctions :

$x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Comme $G(1) = 0$, on résout :

$-\frac{1^2}{2} + 7 - 10\ln(1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -6{,}5$.

Donc G est définie sur $[0{,}5 ; 6]$ par :

$G(x) = -\frac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x) - 6{,}5$.

c. $\int_2^5 \left(-x + 7 - \frac{10}{x}\right) dx = F(5) - F(2) = 10{,}5 - 10\ln(2{,}5)$

car $F(5) = 22{,}5 - 10\ln(5)$ et $F(2) = 12 - 10\ln(2)$.

Il s'agit de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[2 ; 5]$, exprimée en unité d'aire.

81 Fonction, dérivée et primitive

1 Pour la fonction f_1 :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f_1'(x)$			+		0		−		
$f_1(x)$		↗	0	↗	2	↘	0	↘	
$f_1(x)$	−		0	+			0	−	

Pour la fonction f_2 :

x	$-\infty$		$-3{,}5$		-2		0		2		3,5		$+\infty$
$f_2'(x)$			−		0		+		0		−		
$f_2(x)$		↘	0	↘	$-2{,}5$	↗	0	↗	2,5	↘	0	↘	
$f_2(x)$	+		0	−			0	+			0	−	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Pour la fonction f_3 :

x	$-\infty$	-5	$-3{,}5$		0		$3{,}5$	5	$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$		0	6		0		6	0	
$f_2(x)$	$-$	0		$+$	0	$+$		0	$-$

2 Le signe de f' donne le sens de variation de f ; le signe de f donne le sens de variation de F.
Donc $f = f_2$, $f' = f_1$ et $F = f_3$.

82 Lectures graphiques d'intégrale

1 On sait que $F' = f$. Le signe de f donne le sens de variation de F.
Donc la fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$, et la fonction F est représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.

2 L'aire du domaine bleue, en unité d'aire, est égale à :
$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 3 - 2 = 1$.

3 $\int_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(-1) = 3 - 0 = 3$.

4 Comme $g' = F$ et $F' = f$, alors $g'' = f$.
La dérivée seconde g'' s'annule en changeant de signe en $x = -1$ et en $x = 2{,}2$.
Donc la courbe de g présente deux points d'inflexion, aux abscisses -1 et $2{,}2$.

83 Lectures graphiques diverses

1 **a.** Tableau des variations :

x	0		1		$3{,}5$
$f(x)$	0		2		$1{,}2$

b. Le coefficient directeur de (OA), tangente en O, est : $\dfrac{2}{0{,}5} = 4$.
Donc $f'(0) = 4$. La tangente en B est horizontale, donc $f'(1) = 0$.
c. La droite (OA) a pour équation $y = 4x$.
d. Le point C a pour coordonnées $(2{,}75 ; 2{,}75)$.
e. On regarde la partie de la courbe située sous la droite Δ : $S = [2{,}75 ; 3{,}5]$.

2 **a.** On sait que la courbe traverse sa tangente au point E d'abscisse $2{,}25$.
Donc la fonction f est concave sur $[0 ; 2{,}25]$ et convexe sur $[2{,}25 ; 3{,}5]$.
b. En unité d'aire, l'aire colorée est $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.
c. En utilisant les segments $[OF]$ et $[FB]$ en dessous de Γ et les segments $[OA]$ et $[AB]$ au-dessus de Γ, on obtient : $1{,}25 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1{,}5$.

3 **a.** La fonction f est positive sur $[0 ; 3{,}5]$, donc une fonction F qui n'est pas toujours croissante ne peut pas convenir : la courbe $\mathscr{C}_3$ ne peut pas convenir.
De plus $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = F(1)$ doit être supérieure à $1{,}25$. Or pour la courbe $\mathscr{C}_1$, on lit $F(1) = 1{,}2$; donc $\mathscr{C}_1$ ne peut convenir.
Donc F est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$.
b. $\mathscr{A} = F(1) - F(0) = F(1) = 1{,}3$.

84 Surplus

• La quantité d'équilibre est $x_0 = 600$ et le prix d'équilibre est $y_0 = 4$.
• Le surplus des consommateurs est $S_C = \int_0^{600} (g(x) - 4)\ \mathrm{d}x$, où g est la fonction de demande, représentée par la droite Δ. Donc $S_C = \dfrac{(10 - 4) \times 600}{2} = 1\,800$.
Le surplus des consommateurs est de 1 800 milliers d'euros.
• Le surplus des producteurs est $S_P = \int_0^{600} (4 - f(x))\ \mathrm{d}x$, où f est la fonction d'offre, représentée par la droite $\mathscr{D}$.
Donc $S_P = \dfrac{(4 - 1) \times 600}{2} = 900$.
Le surplus des producteurs est de 900 milliers d'euros.

85 Surplus des producteurs et des consommateurs

1 Pour tout réel x de $[0 ; 2{,}5]$, $f'(x) = 6x + 6 > 0$.
Donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 2{,}5]$.

2 **a.** Pour tout réel x de $[0 ; 2{,}5]$, $g'(x) = -1{,}5x^2 + 6x - 18$.
$\Delta = -72$ négatif. Comme $a = -1{,}5$ négatif, pour tout réel x de $[0 ; 2{,}5]$, $g'(x) < 0$. Donc la fonction g est décroissante sur $[0 ; 2{,}5]$.
b. Pour tout réel x de $[0 ; 2{,}5]$, $g''(x) = -3x + 6$, qui s'annule en changeant de signe en $x = 2$.
Donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion à l'abscisse 2.
Pour tout réel x de $[0 ; 2[$, $g''(x) > 0$: la demande est accélérée.
Pour tout réel x de $]2 ; 2{,}5]$, $g''(x) < 0$: la demande est ralentie.

3 **a.** $f(2) = 3 \times 2^2 + 6 \times 2 = 24$
et $g(2) = -0{,}5 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 18 \times 2 + 52 = 24$.
Donc la quantité d'équilibre est de 2 millions d'articles.
b. $p = f(2) = 24$. Donc le prix d'équilibre est de 24 euros par article.
c. $2 \times 24 = 42$. Le chiffre d'affaires à l'équilibre est de 42 millions d'euros.

4 **a.** S_P est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre le segment $[AE]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées, où A est le point de coordonnées $(0 ; 24)$.
b. Une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$ est la fonction F telle que $F(x) = x^3 + 3x^2$.
c. $S_P = 2 \times 24 - \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 42 - (F(2) - F(0))$
$= 42 - 20 = 22$.
Le surplus des producteurs est de 22 millions d'euros.

5 **a.** L'intégrale donnée est l'expression de la primitive de g sur $[0 ; +\infty[$ qui s'annule en 0.
b. En prenant $x = 2$ dans l'expression de la calculatrice, on obtient :
$\int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{-2(2^3 - 8 \times 2^2 + 72 \times 2 - 416)}{8} = 74$.
c. $S_C = \int_0^2 g(x)\ \mathrm{d}x - 2 \times 24 = 74 - 42 = 32$.
Le surplus des consommateurs est de 32 millions d'euros.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

5 Valeur moyenne et applications (p. 158)

86 Vrai ou faux ?

1 **c.** Une primitive de $f : x \mapsto 2x - 8$ est : $F : x \mapsto x^2 - 8x$. Donc :
$\frac{1}{4}\int_0^4 (2x-8)\ dx = \frac{1}{4}(F(4) - F(0)) = \frac{1}{4}(4^2 - 8\times 4) = -4$.

2 **b.** Une primitive de $f : x \mapsto x^2$ est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$.
Donc $\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^3 x^2\ dx = \frac{1}{6}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right) = 3$.

3 **b.** Une primitive de $f : x \mapsto e^{0,5x}$ est $F : x \mapsto 2e^{0,5x}$.
Donc $\frac{1}{2}\int_0^2 e^{0,5x}\ dx = \frac{1}{2}(2e^1 - 2) = e - 1$.

4 **b.** Une primitive de la fonction inverse est la fonction ln. Donc $\frac{1}{4-2}\int_2^4 \frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

87 Valeur moyenne

a. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
Une primitive de f est $F : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.
Donc la valeur moyenne de f sur $[1 ; 4]$ est :
$\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\ dx = \frac{1}{3}(F(4) - F(1)) = 5 + \frac{1}{3}\ln(4)$, car :
$F(4) = 16 + \ln(4)$ et $F(1) = 1$.

b. Une primitive de f est $F : x \mapsto 2x - 10e^{-0,1x}$.
Donc la valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$ est :
$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\ dx = \frac{1}{10}(F(10) - F(0)) = 3 - e^{-1}$, car :
$F(10) = 20 - 10e^{-1}$ et $F(0) = -10$.

88 Aplanissement

1 Une primitive de f sur $[-1 ; 3]$ est :
$F : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 30x$.
Donc $m = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^3 f(x)\ dx = \frac{1}{4}(F(3) - F(-1)) = 22$,
car $F(3) = 63$ et $F(-1) = -25$.

2 Pour tout réel $x \in [-1 ; 3]$,
$f'(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.
D'où le tableau de variations de f sur $[-1 ; 3]$:

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	14	↗	30	↘	14	↗	30

3 **a.** L'équation $f(x) = 22$ admet trois solutions sur $[-1 ; 3]$.

b. Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement décroissante, et passe de $f(0) = 30$ à $f(2) = 14$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 22$ admet une unique solution α.
En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha = 1$.

89 Valeur moyenne d'un bénéfice

1 $f'(x) = 100e^{-x} + 100(-e^{-x})(x-1) = 100e^{-x}(2-x)$, qui est du signe de $(2-x)$, car $100\,e^{-x}$ est toujours strictement positive. Le bénéfice est donc croissant sur $[0 ; 2]$ et décroissant sur $[2 ; 5]$.

2 $F'(x) = -100e^{-x} - 100x(-e^{-x})$
$= 100e^{-x}(x-1) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $[1 ; 5]$.

3 Valeur moyenne du bénéfice, en millier d'euros :
$\frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\ dx = \frac{1}{4}(F(5) - F(1))$
$= 25e^{-1} - 125e^{-5} \approx 8,35$,
car $F(5) = -500e^{-5}$ et $F(1) = -100e^{-1}$.
La valeur moyenne du bénéfice est environ 8 350 €.

90 Population moyenne

1 On résout $(1+t)^{10} = \frac{18,3}{15} \Leftrightarrow t = \left(\frac{18,3}{15}\right)^{1/10} - 1 \approx 0,02$.
Le taux moyen annuel d'évolution est d'environ 2 %, à 0,1 % près.

2 **a.** $\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = \frac{15e^{0,02t+0,02} - 15e^{0,02t}}{15e^{0,02t}}$
$= e^{0,02} - 1 \approx 0,02$.

b. On retrouve le taux d'évolution obtenu à la question **1**.

3 **a.** Une primitive de P sur $[0 ; 20]$ est la fonction F telle que $F(t) = 750e^{0,02t}$.

b. La valeur moyenne de la population entre 2000 et 2020, en millions, est :
$\frac{1}{20}\int_0^{20} P(t)\ dt = \frac{1}{20}(F(20) - F(0))$
$= 37,5e^{0,4} - 37,5 \approx 18,443$.
La valeur moyenne de la population entre 2000 et 2020 est environ 18 443 milliers.

91 Valeur moyenne d'un prix

1 **a.** $p'(t) = 0,2 + 2(-0,1e^{-0,1t+2}) = 0,2 - 0,2e^{-0,1t+2}$.

b. $p'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 0,2 - 0,2\,e^{-0,1t+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-0,1t+2} \leqslant 1$
$\Leftrightarrow -0,1t + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 20$.
Donc $S = [20 ; 60]$.

c. D'après la question **b.**, la fonction p est décroissante sur $[0 ; 20]$ et croissante sur $[20 ; 60]$.
Donc la fonction p admet un minimum est 20, égal à :
$p(20) = 40 + 0,2 \times 20 + 2e^0 = 44$.

2 **a.** On a le tableau de variation :

t	0		20		60
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	$40 + 2e^2$	↘	44	↗	$52 + 2e^{-4}$

Comme $40 + 2e^2 \approx 54,78$ et $52 + 2e^{-4} \approx 52,04$, l'équation $p(t) = 50$ admet deux solutions α et β sur $[0 ; 60]$, où $\alpha \in [0 ; 20]$ et $\beta \in [20 ; 60]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. En tabulant à la calculatrice , on obtient :

X	Y1
45	49.164
46	49.349
47	49.534
48	49.722
49	49.91
50	50.1
51	50.29

X=50

Le prix du mètre cube de sapin dépassera de nouveau 50 € au bout de 50 mois , soit au 1er mars 2016.

3 **a.** Une primitive de p sur [0 ; 60] est la fonction P telle que $P(t) = 40t + 0{,}1t^2 - 20\mathrm{e}^{-0{,}1t+2}$.

b. $\int_0^{20} p(t)\ \mathrm{d}t = P(20) - P(0)$.

Comme $P(20) = 820$ et $P(0) = -20\mathrm{e}^2$,

$\int_0^{20} p(t)\ \mathrm{d}t = 820 + 20\mathrm{e}^2 \approx 967{,}78$, soit environ 968.

c. La valeur moyenne du prix sur les 20 premiers mois, en euros, est :

$$\frac{1}{20}\int_0^{20} p(t)\ \mathrm{d}t = 41 + \mathrm{e}^2 \approx 48{,}39 .$$

La valeur moyenne du prix sur les 20 premiers mois est environ 48,39 € .

92 Revenus disponibles en France en 2008

1 **a.** $f(0) = 0$ et $f(1) = 1{,}75 - 2{,}8 + 2{,}1 - 0{,}05 = 1$.

La proportion des ménages les plus pauvres détenant 0 % des revenus disponibles est nulle , et celle de ceux détenant 100 % des revenus disponibles est de 100 % .

b. $f(0{,}2) = 0{,}054\,4$.

La proportion des ménages les plus pauvres détenant 20 % des revenus disponibles est de 5,44 % .

2 **a.** Une primitive de f sur [0 ; 1] est la fonction F telle que $F(x) = 0{,}35x^5 - 0{,}7x^4 + 0{,}7x^3 - 0{,}025x^2$.

b. $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 0{,}325$.

L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur [0 ; 1] est égale à 0,325 u.a. .

3 **a.** En unité d'aire, le domaine $\mathscr{D}$ a pour aire :

$0{,}5 - \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0{,}5 - (F(1) - F(0))$.

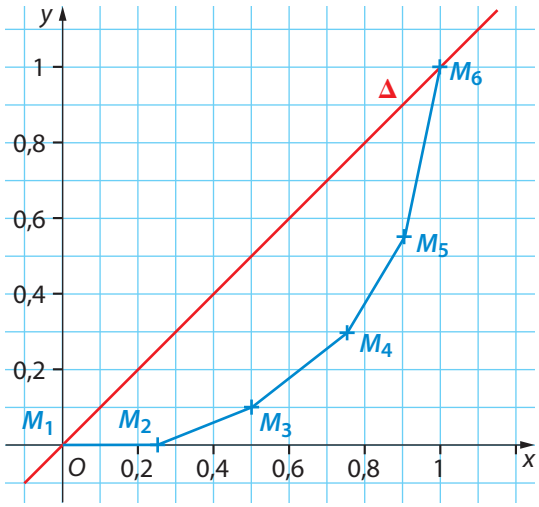
Donc $\gamma = \dfrac{0{,}5 - (F(1) - F(0))}{0{,}5} = 1 - 2F(1) + 2F(0)$.

b. $\gamma = 1 - 2 \times 0{,}325 + 2 \times 0 = 0{,}35$.

c. On a obtenu à la question **b.** un résultat très proche de 0,346 . L'erreur commise est due à la modélisation, qui n'est pas exactement la situation réelle.

93 Patrimoine

1 **a.** , **b.** et **c.**



2 **a.** En unité d'aire, l'aire sous la courbe de Lorenz est :

$$0 + \frac{0{,}25 \times 0{,}1}{2} + \frac{0{,}1 + 0{,}3}{2} \times 0{,}25 + \frac{0{,}3 + 0{,}55}{2} \times 0{,}15 + \frac{0{,}55 + 1}{2} \times 0{,}1 = 0{,}203\,75 .$$

b. L'indice de Gini pour le patrimoine du pays A est :

$\gamma_A = \dfrac{0{,}5 - 0{,}203\,75}{0{,}5} = 0{,}592\,5$.

3 **a.** $f(0{,}6) = 0$. Donc f est continue en 0,6 , et donc sur [0 ; 1] .

b. $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{(1 - 0{,}6)^4}{0{,}4^4} = 1$.

c. Une primitive de f sur [0,6 ; 1] est la fonction F telle que $F(x) = \dfrac{1}{0{,}4^4} \times \dfrac{(x - 0{,}6)^5}{5} = 7{,}812\,5(x - 0{,}6)^5$.

d. $\int_{0{,}6}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0{,}6) = 7{,}812\,5(1 - 0{,}6)^5 = 0{,}08$.

e. L'indice de Gini pour le patrimoine du pays B est :

$\gamma_B = \dfrac{0{,}5 - 0{,}08}{0{,}5} = 0{,}84$.

4 **a.** Dans le pays A, 90 % des ménages les plus pauvres détiennent 55 % du patrimoine total. Donc dans le pays A, les 10 % des ménages les plus riches détiennent 45 % du patrimoine total.

b. $f(0{,}9) \approx 0{,}316$. Dans le pays B, 90 % des ménages les plus pauvres détiennent environ 31,6 % du patrimoine total. Donc dans le pays B, les 10 % des ménages les plus riches détiennent environ 68,4 % du patrimoine total.

c. $\gamma_A < \gamma_B$. C'est dans le pays B que la détention du patrimoine est la plus inégalitaire.

Accompagnement personnalisé

Exercice guidé

94 **1** **a.** $f'(t) = 30(-0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}15t}) = -4{,}5\mathrm{e}^{-0{,}15t}$ négatif.

Donc la fonction f est décroissante sur [0 ; 12] .

b. $f(12) = 30\mathrm{e}^{-1{,}8} \approx 4{,}959$ mg/L .

2 **a.** $F'(t) = -200(-0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}15t}) = 30\mathrm{e}^{-0{,}15t} = f(t)$.

Donc F est une primitive de f sur [0 ; 12] .

b. $I = \int_0^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = F(10) - F(0) = 200 - 200\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 155{,}37$.

c. La quantité moyenne de substance médicamenteuse pendant les 10 premières heures est :

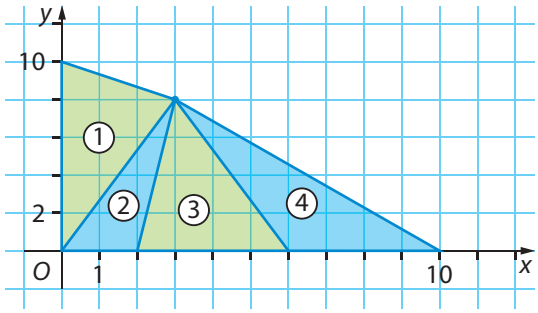
$\dfrac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = 20 - 20\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 15{,}5$ mg/L .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Revoir les outils de base

95 Savoir calculer une aire en unité d'aire

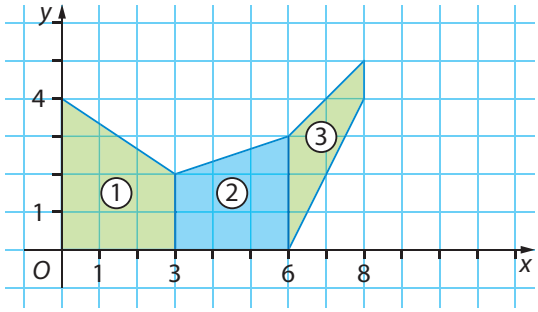
On numérote les triangles comme ci-dessous :



- le triangle ① a pour aire : $\frac{3\times 10}{2} = 15$ u.a..
- le triangle ② a pour aire : $\frac{2\times 8}{2} = 8$ u.a..
- le triangle ③ a pour aire : $\frac{4\times 8}{2} = 16$ u.a..
- le triangle ④ a pour aire : $\frac{4\times 8}{2} = 16$ u.a..

96 Savoir calculer une aire en unité d'aire

On numérote les trapèzes comme ci-dessous :



- le trapèze ① a pour aire : $\frac{4+2}{2}\times 3 = 9$ u.a..
- le trapèze ② a pour aire : $\frac{2+3}{2}\times 3 = 7{,}5$ u.a..
- le trapèze ③ a pour aire : $\frac{3+1}{2}\times 2 = 4$ u.a..

97 Savoir faire apparaître un coefficient

a. $f(x) = \frac{3}{2}\times 2e^{2x+1}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = \frac{3}{2}\times e^{2x+1}$.

b. $f(x) = -0{,}5\times(-e^{-x})$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = -0{,}5\times e^{-x}$.

c. $f(x) = 0{,}5\times(2xe^{x^2})$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = 0{,}5\times e^{x^2}$.

d. $f(x) = -(2x-1)\times e^{x^2-x}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = -e^{x^2-x}$.

e. $f(x) = -2\left(-x\times\frac{e^{-x^2}}{2}\right)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = -2\frac{e^{-x^2}}{2}$.

f. $f(x) = \frac{4}{-0{,}01}(-0{,}01e^{-0{,}01x}) = -400(-0{,}01e^{-0{,}01x})$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = -400e^{-0{,}01x}$.

Pour aller plus loin

98 Démontrer une formule

1 **a.** $H'(x) = u'(x)\times u(x) + u(x)\times u'(x) = 2u'(x)\times u(x)$.
Donc $\frac{1}{2}H'(x) = u'(x)\times u(x)$.
Donc une primitive de $x \mapsto u'(x)\times u(x)$ est :
$x \mapsto \frac{1}{2}(u(x))^2$. Le théorème est vrai pour $n = 1$.

b. $H'(x) = u'(x)\times(u(x))^2 + u(x)\times(2u'(x)\times u(x))$
$= 3u'(x)\times(u(x))^2$.
Donc $\frac{1}{3}H'(x) = u'(x)\times(u(x))^2$.
Donc une primitive de $x \mapsto u'(x)\times(u(x))^2$ est :
$x \mapsto \frac{1}{3}(u(x))^3$. Le théorème est vrai pour $n = 2$.

2 On suppose qu'une primitive de $x \mapsto u'(x)\times(u(x))^n$ est $x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$.
Alors, la dérivée de $x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$ est :
$x \mapsto u'(x)\times(u(x))^n$, autrement dit : la dérivée de $x \mapsto (u(x))^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)u'(x)\times(u(x))^n$.

On pose $H(x) = (u(x))^{n+2} = u(x)\times(u(x))^{n+1}$.
Alors :
$H'(x) = u'(x)\times(u(x))^{n+1} + u(x)\times(n+1)u'(x)\times(u(x))^n$.
Donc $H'(x) = (n+2)u'(x)\times(u(x))^{n+1}$.
Le théorème est donc vrai au rang $n+1$.

99 Appliquer

1 **a.** $F(x) = \frac{1}{3}(x-4)^3$.

b. $F(x) = \frac{1}{4}(x-5)^4 + \frac{x^2}{2} + 2x$.

c. $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-3x+2)^3$.

d. $F(x) = \frac{-1}{2}(x^2-x+3)^2$.

2 **a.** $F(x) = \frac{-1}{3}(1-e^x)^3$.

b. $F(x) = -5(2-e^{0{,}1x})^2$.

c. $F(x) = 0{,}5(x+e^x)^2$.

d. $F(x) = \frac{-1}{3}(3-e^x)^3$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

100 Chercher

1 On cherche c tel que $\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$, c'est-à-dire $F(c) - F(a) = F(b) - F(c)$, ou encore $F(c) = \dfrac{F(a)+F(b)}{2}$.

2 a. Une primitive de $f : t \mapsto 4 - t^2$ est $F : t \mapsto 4t - \dfrac{t^3}{3}$.
Donc $\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t = F(2) - F(0) = \dfrac{16}{3}$.

b. F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 ;
$F(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.
$F(c) = \dfrac{F(0)+F(2)}{2} \Leftrightarrow F(c) = \dfrac{8}{3}$.

c. Pour tout réel $x \in [0\,;2]$, $F'(x) = f(x) = 4 - x^2 \geqslant 0$, strictement positive sur $[0\,;2[$.
Donc la fonction F est strictement croissante sur $[0\,;2]$.

d. La fonction F est continue (car dérivable), strictement croissante, et passe de la valeur $F(0) = 0$ à $F(2) = \dfrac{16}{3}$.
D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $F(x) = \dfrac{8}{3} = \dfrac{F(2)}{2}$ admet une unique solution c.

e. On obtient $c \approx 0{,}69$.

3 La fonction inverse a pour primitive la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \ln(c) - \ln(a) = \ln\left(\dfrac{c}{a}\right)$
et $\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \ln(b) - \ln(c) = \ln\left(\dfrac{b}{c}\right)$.
Donc $\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{c}{a}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{c}\right) \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}$
$\Leftrightarrow$ les réels a, c et b, dans cet ordre, sont en progression géométrique.

101 Déterminer une primitive

1 Pour tout réel x,
$(ax + a + b)\mathrm{e}^x = (3x-1)\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$.

2 a. $F'(x) = a \times \mathrm{e}^x + (ax+b) \times \mathrm{e}^x = (ax + a + b) \times \mathrm{e}^x$.

b. F est une primitive de $f \Leftrightarrow$ pour tout réel x,
$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (2x+1)e^x$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$.

3 $F'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-ax + a - b) \times \mathrm{e}^{-x}$.
F est une primitive de $f \Leftrightarrow$ pour tout réel x,
$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Donc $F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

4 $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$. En utilisant la question **3**, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que :
$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x-1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$.

5 On pose $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$.
$F'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^x + (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$
$= (ax^2 + (2a+b)x + b + c)\mathrm{e}^x$.
On résout : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$.
Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x$.

Réussir au Bac

102 QCM

1 b. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2 c. Le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;2]$ contient un rectangle d'aire $2 \times 3 = 6$ u.a., et est contenu dans un rectangle d'aire $2 \times 4 = 8$ u.a..
Donc $6 < \mathscr{A} < 8$.

3 c. Le signe de f donne le sens de variation de F.

103 QCM – Pour réviser

1 c. On utilise la formule $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

2 b. On utilise la propriété des valeurs intermédiaires.

3 b. $h'(1) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

4 b. La fonction h est positive sur $[1\,;2{,}8]$, donc ses primitives sont croissantes sur cet intervalle.

104 Ne pas confondre fonction, dérivée et primitive

1 Vrai : on utilise la propriété des valeurs intermédiaires.

2 Faux : la fonction f n'est pas décroissante sur $]3\,;+\infty[$.

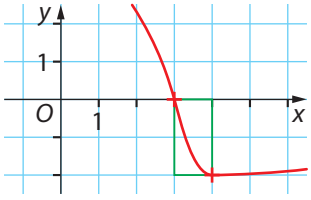
3 Vrai : f est strictement croissante sur $]4\,;12[$, donc $f'(x) > 0$ sur $]4\,;12[$.

4 Vrai : $f(x) < 0$ sur $[10\,;+\infty[$.

5 Vrai : f est positive sur $]1\,;3]$, et négative sur $[3\,;+\infty[$, donc F est croissante sur $]1\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;+\infty[$.

6 On ne sait pas : f est décroissante sur $]1\,;4]$ et $[12\,;+\infty[$, donc f' est négative sur ces intervalles. Mais on ne connait pas exactement les valeurs prises par f'.

7 Vrai : On a le schéma suivant :



8 On ne sait pas : F n'est pas définie comme la primitive de f s'annulant en 3.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

105 Fonction et primitive

1 Le signe de f donne le sens de variation de F. Donc la fonction f est représentée par la courbe Γ et la fonction F est représentée par la courbe $\mathscr{C}$.

2 $\int_0^1 f(t)\ dt = F(1) - F(0) = \frac{3}{e} - 0 = \frac{3}{e}$.

Il s'agit de l'aire sous la courbe Γ sur $[0\,;1]$, exprimée en unité d'aire.

106 Calcul d'aire entre deux courbes

1 **a.** La fonction f paraît concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ paraît avoir un point d'inflexion à l'abscisse 2.

b. $f'(x) = 2\times e^{-0,5x} + (4+2x)(-0,5e^{-0,5x}) = -xe^{-0,5x}$.

Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. $f''(x)$ est du signe de $0,5x - 1$. Donc $f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;2]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[2\,;+\infty[$.

d. On en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$, et que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion à l'abscisse 2.

2 **a.** $h(x) = 0 \Leftrightarrow (4+2x)e^{-0,5x} = 4xe^{-0,5x}$

$\Leftrightarrow 4+2x = 4x \Leftrightarrow x = 2$.

Comme $f(2) = 8e^{-1}$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ se coupent au point $A(2\,;8e^{-1})$.

b. $h(x) = (4+2x)e^{-0,5x} - 4xe^{-0,5x} = (4-2x)e^{-0,5x}$ est du signe de $(4-2x)$.

Donc h est positive sur $]-\infty\,;2]$ et négative sur $[2\,;+\infty[$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe Γ sur $]-\infty\,;2]$ et en dessous de la courbe Γ sur $[2\,;+\infty[$.

3 **a.** Le résultat obtenu est l'expression de la primitive de h qui s'annule en 0.

b. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe Γ sur $[0\,;2]$, donc l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire est :

$$\int_0^2 f(x)\ dx - \int_0^2 g(x)\ dx = \int_0^2 (f(x)-g(x))\ dx = \int_0^2 h(x)\ dx = H(2) - H(0) = 8e^{-1}.$$

Donc $\mathscr{A} \approx 2,94$ u.a..

107 Coût marginal et coût total

1 **a.** $f'(q) = -2 - 10(-0,2e^{-0,2q}) = -2 + 2e^{-0,2q}$.

b. $-2 + 2e^{-0,2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-0,2x} \geqslant 1 \Leftrightarrow -0,2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

Donc $S =]-\infty\,;0]$.

c. On en déduit que $f'(q) \leqslant 0$ sur $[0\,;5]$. Donc la fonction f est décroissante sur $[0\,;5]$.

Comme $f(5) = 5 - 10e^{-1} \approx 1,32$ (positif), la fonction f est strictement positive sur $[0\,;5]$.

2 **a.** Pour tout réel $q \in [0\,;5]$, $C'(q) = f(q) > 0$. Donc la fonction coût total C est strictement croissante sur $[0\,;5]$.

b. Pour tout réel $q \in [0\,;5]$, $C''(q) = f'(q) \leqslant 0$. Donc la fonction C est concave et sa croissance est ralentie.

3 **a.** La fonction F est la primitive du coût marginal f qui s'annule en 0 : il s'agit de la fonction coût variable.

b. Comme le coût variable est en euro par ouvrage, soit en millier d'euros par milliers d'ouvrages, et que les quantités sont en milliers, le coût total est en milliers d'euros.

Pour tout réel $q \in [0\,;5]$, $F(q) = -q^2 + 15q + 50e^{-0,2q} - 50$.

Donc $C(q) = F(q) + 3 = -q^2 + 15q + 50e^{-0,2q} - 47$.

4 $C(3) = 50e^{-0,6} - 14$ et $C(5) = 50e^{-1}$.

Donc $C(3) + C(5) \approx 31,83$.

$C(4) = 50e^{-0,8} - 6$. Donc $2 \times C(4) \approx 32,93$.

La 1re option est donc celle qui revient le moins cher.

108 Réaliser des prévisions

1 $f(11) = 17\,280 \times e^{-0,264} \approx 13\,271$. En 2011, on estime à 13 271 billions le nombre de barils à découvrir.

2 $f'(x) = -414,72e^{-0,024x} < 0$. Donc la fonction f est décroissante sur $[11\,;50]$.

3 **a.** $f(11) < 15\,000$ et f est décroissante sur $[11\,;50]$. Il n'est donc pas envisageable qu'au cours d'une même année 15 000 billions de barils soient découverts.

b. $f(50) = 17\,280e^{-1,2} \approx 5\,205 < 6\,000$. Donc selon le modèle, on ne peut pas envisager qu'au moins 6 000 billions de barils soient découverts chaque année jusqu'en 2050.

On résout $f(x) < 6\,000 \Leftrightarrow 17\,280e^{-0,024x} < 6\,000$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-1}{0,024}\ln\left(\frac{6\,000}{17\,280}\right).$$

Comme $\frac{-1}{0,024}\ln\left(\frac{6\,000}{17\,280}\right) \approx 44,07$, les découverts devien-

draient inférieures à 6 000 billions de barils à partir de 2044.

4 **a.** Une primitive de f sur $[11\,;50]$ est la fonction F telle que $F(x) = -720\,000 \times e^{-0,024x}$.

b. $\int_{11}^{21} f(x)\ dx = F(21) - F(11) = 720\,000(e^{-0,264} - e^{-0,504}) \approx 117\,982$.

c. La valeur moyenne entre les années 2011 et 2021, en billion de barils par an, est :

$$\frac{1}{10}\int_{11}^{21} f(x)\ dx = 72\,000(e^{-0,264} - e^{-0,504}) \approx 11\,798.$$

109 Primitive de ln

1 **a.** Pour tout réel $x \in [0,1\,;2]$,

$f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - x + 1}{x}$.

b. Sur $[0,1\,;2]$, $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 - x + 1$.

$\Delta = 9$, $x_1 = 0,5$ et $x_1 = -1$. Comme $a < 0$, on a :

x	0,1		0,5		2
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	$3,89 + \ln(0,1)$	↗	$3,25 - \ln(2)$	↘	$-2 + \ln(2)$

2 **a.** • $f(0,1) \approx 1,59 > 0$ et f est croissante sur $[0,1\,;0,5]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0,1\,;0,5]$.

• Sur $[0,5\,;2]$, f est continue (car dérivable), strictement décroissante, et passe de la valeur $f(0,5) \approx 2,56 > 0$ à la valeur $f(2) \approx -1,3 < 0$. D'après la propriété des

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur $[0,5 ; 2]$.
À la calculatrice, on obtient : $1,68 < \alpha < 1,69$.

b. En utilisant le tableau de variations de f :

x	0,1		α		2
$f(x)$		+	0	−	

3 a. $F'(x) = -\dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{2x}{2} + 3 + 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}$

$= -x^2 - x + 3 + \ln(x) + 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0,1 ; 2]$.

b. Comme $\alpha > 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur $[0,5 ; 1]$.

Donc $\mathscr{A} = \int_{0,5}^{1} f(x)\ dx = F(1) - F(0,5)$.

Comme $F(1) = \dfrac{13}{6}$ et $F(0,5) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{\ln(2)}{2}$,

$\mathscr{A} = \dfrac{5}{6} + \dfrac{\ln(2)}{2}$ u.a..

110 Vente « flash » sur Internet

Partie A :

1 a. $f'(x) = 3 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) = 2 - \ln(x)$.

b. $2 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant e^2$.
Donc $S =]0 ; e^2]$.

c. D'où le tableau de variations de f :

x	0		e^2		e^3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	e^2	↘	0

Car $f(e^2) = 3e^2 - e^2 \ln(e^2) = 3e^2 - 2e^2 = e^2$
et $f(e^3) = 3e^3 - e^3 \ln(e^3) = 3e^3 - 3e^3 = 0$.

d. Le maximum de f sur $]0 ; e^3]$ est e^2.

e. À la calculatrice, lorsque x devient très proche de 0, $f(x)$ devient très proche de 0.
En utilisant le tableau de variations de f, on obtient que f est positive sur $[0 ; e^3]$, et ne s'annule qu'en 0 et e^3.

2 a. L'équation $f(x) = 4$ admet comme solutions $x_1 \approx 1,57 \approx 2$ et $x_2 \approx 15,52 \approx 15$.

b. À la calculatrice :

```
intégrFonct(3X-X
ln(X),X,1,20)
      99.10354529
```

Donc $\int_1^{20} f(x)\ dx \approx 99,10$.

Partie B :

1 La fonction f est positive sur $[1 ; 20]$, donc S est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 20$.

2 D'après la question **A 2 a.** et le tableau de variations de la fonction f, le flux est supérieur à 4 000 € par minute entre 2 minutes et 15 minutes.

3 D'après la question **A 2 b.**, $S \approx 99,10$.
Donc la somme totale transférée est d'environ 99 100 €.

111 Coût marginal, coût total et coût moyen

Partie A :

1 $CT'(q) = 4 - (2q \times e^{-0,2q} + q^2 \times (-0,2e^{-0,2q}))$
$= 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q} = C_m(q)$.
Donc CT est une primitive de C_m sur $[1 ; 20]$.

2 a. $CM(q) = \dfrac{4q - q^2 e^{-0,2q}}{q} = 4 - qe^{-0,2q}$.

b. $CM'(q) = -(1e^{-0,2q} + q(-0,2e^{-0,2q}))$
$= e^{-0,2q}(0,2q - 1)$.

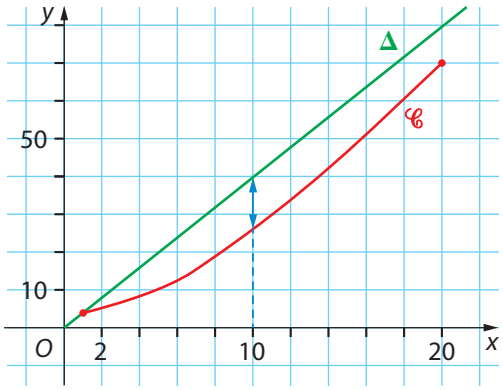
c. $CM'(q)$ s'annule pour $q = 5$, est négatif sur $[1 ; 5]$ et positif sur $[5 ; 20]$.
Donc la fonction CM est décroissante sur $[1 ; 5]$ et croissante sur $[5 ; 20]$.
L'entreprise a un coût moyen minimal pour $q = 5$ tonnes.
Le coût moyen minimal est :
$CM(5) = 4 - 5e^{-1} \approx 2,16$ millier d'euros par tonne.

3 $C_m(5) = 4 - 5e^{-1} = CM(5)$. Le coût marginal est égal au coût moyen pour une quantité de 5 tonnes.

Partie B :

1 Les amandes sont vendues 4 000 € la tonne, soit 4 milliers d'euros la tonne.
Donc pour une quantité de q tonnes d'amandes vendues, $R(q) = 4q$.

2 On recherche l'abscisse q pour laquelle la différence d'ordonnées $R(q) - CT(q)$ est la plus grande possible.



Graphiquement, il semble que le bénéfice soit maximal lorsque l'entreprise conditionne et vend 10 tonnes d'amandes.

112 Bénéfice marginal et bénéfice total

Partie A :

1 a. $f'(x) = -1 + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$.

b. et **c.** D'où le tableau de variations de f :

x	1		2		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$\dfrac{-5}{3}$

2 a. $f(4) = -4 + 5 - \dfrac{4}{4} = 0$.

b. En utilisant le tableau de variations de f :

x	1		4		6
$f(x)$	0	+	0	−	

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie B :

1 La fonction f est la dérivée de la fonction B, et B s'annule en $x = 1$ centaine. Donc B est la primitive de f sur $[1 ; 6]$ qui s'annule en 1.

2 $F'(x) = -0{,}5 \times 2x + 5 - 4 \times \dfrac{1}{x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[1 ; 6]$.

3 Les primitives de f sur $[1 ; 6]$ sont les fonctions $x \mapsto -0{,}5x^2 + 5x - 4\ln(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

On résout : $-0{,}5 + 5 - 4\ln(1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -4{,}5$.

Donc $B(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 4\ln(x) - 4{,}5$.

Le bénéfice marginal est en dizaine de milliers d'euros par dizaine de pièces, les quantités sont en dizaine de pièces. Donc le bénéfice total est en dizaine de milliers d'euros.

Partie C :

1 $B'(x) = f(x)$. Donc en utilisant la question **A 2 b.**, on a :

x	1		4		6
$f(x)$		+	0	−	
$B(x)$	0	↗	$7{,}5 - 4\ln(4)$	↘	$7{,}5 - 4\ln(6)$

Avec $B(1) = 0$, $B(4) = 7{,}5 - 4\ln(4)$ et $B(6) = 7{,}5 - 4\ln(6)$.

Comme $B(6) \approx 0{,}33 > 0$, d'après le tableau de variations de B, la fonction B est positive sur $[1 ; 6]$.

2 Le bénéfice est maximal pour $x = 4$ (dizaines de pièces). Le bénéfice maximal est $B(4) \approx 1{,}95$ (dizaines de milliers d'euros), soit environ 19 500 €.

3 $B''(x) = f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$.

En utilisant la question **A 1 b.**, $B''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 2$. Donc la courbe de B admet un point d'inflexion à l'abscisse 2.

Sur $[1 ; 2]$, $B''(x) \geqslant 0$: la croissance du bénéfice est accélérée ; sur $[2 ; 6]$, $B''(x) \leqslant 0$: la croissance du bénéfice est ralentie.

4 Comme $B(4) = 7{,}5 - 4\ln(4) \approx 1{,}95$ et $B(6) \approx 0{,}33$, d'après le tableau de variation de la question **C 1** et la calculatrice, l'équation $B(x) = 1$ admet deux solutions $x_1 \approx 2{,}78$ (par excès) et $x_2 \approx 5{,}54$ (par défaut).

La plage de rentabilité est donc $[278 ; 554]$.

113 Surplus des producteurs

1 a. $g'(x) = \dfrac{-5(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-10x-5}{(x^2+x+1)^2}$.

b. Sur $\mathbb{R}$ $(x^2+x+1)^2 > 0$. Donc $g'(x)$ est du signe de $(-10x - 5)$, et donc est strictement négatif sur $[0 ; 3]$.

c. La fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 3]$.

2 $f'(x) = 0{,}25\mathrm{e}^{0{,}5x} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 3]$.

3 a. $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ avec $f'(x) > 0$ et $g'(x) < 0$.

Donc $h'(x) > 0$ sur $[0 ; 3]$.

La fonction h est donc strictement croissante sur $[0 ; 3]$.

b. Sur $[0 ; 3]$, la fonction h est continue (car dérivable), strictement croissante, et passe de la valeur $h(x) = -4{,}5$ à la valeur $h(3) \approx 1{,}86$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution q_0 sur $[0 ; 3]$.

c. À la calculatrice, on obtient :

$$q_0 \approx 1{,}50 \quad \text{et} \quad p_0 = f(q_0) \approx 1{,}06.$$

4 a. On a :

$$S_P = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{q_0} (p_0 - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Comme la fonction f est croissante sur $[0 ; q_0]$ et que $p_0 = f(q_0)$, la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite d'équation $y = p_0$ sur $[0 ; q_0]$.

Donc l'intégrale S_P est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre cette droite, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées.

b. Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{0{,}5x}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = 2\mathrm{e}^{0{,}5x}$.

Donc $I = F(1{,}5) - F(0) = 2\mathrm{e}^{0{,}75} - 2 \approx 2{,}234$.

c. $S_P = 1{,}06 \times 1{,}5 - \displaystyle\int_0^{1{,}5} 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}5x}\,\mathrm{d}x = 1{,}59 - 0{,}5I$.

Donc $S_P \approx 0{,}47$.

Le surplus des producteurs est d'environ 0,47 millions d'euros.

114 Taux de fécondité et descendance finale

Partie A :

1 a. $f'(x) = -0{,}45x\mathrm{e}^{-0{,}015x^2}$.

b. La dérivée f' est positive sur $[-15 ; 0]$ et négative sur $[0 ; 20]$. Donc la fonction f est croissante sur $[-15 ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; 20]$.

2 On obtient :

Donc $\displaystyle\int_{-15}^{20} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 216$.



Partie B :

La descendance finale est d'environ 216 naissances annuelles, pour 100 femmes.

115 Courbes de Lorenz

Partie A :

1 f est bien définie sur $[0 ; 1]$.

$f(0) = 0$ et $f(1) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$: la condition ① est vérifiée.

2 a. $f'(x) = 4x^4 + 0{,}2 > 0$. Donc f est croissante sur $[0 ; 1]$.

$f''(x) = 16x^3 \geqslant 0$ sur $[0 ; 1]$. Donc f est convexe sur $[0 ; 1]$.

b. La condition ② est donc vérifiée d'après la question **1 a.**.

3 a. $h(x) = x - f(x) = 0{,}8x - 0{,}8x^5 = 0{,}8x(1 - x^4) \geqslant 0$ sur $[0 ; 1]$.

b. La condition ③ est vérifiée d'après la question **3 a.**.

Partie B :

1 $g(0) = 0$ et $g(1) \approx 0{,}99 \approx 1$.

2 a. $g'(x) = 0{,}2(\mathrm{e}^{1{,}6x} + 1{,}6x\mathrm{e}^{1{,}6x}) = 0{,}2\mathrm{e}^{1{,}6x}(1 + 1{,}6x) > 0$ sur $[0 ; 1]$.

b. Donc la fonction g est croissante sur $[0 ; 1]$.

3 D'après les questions **1** et **2**, la fonction g vérifie les conditions ① et ②.

De plus $g''(x) = 0{,}512(x + 1{,}25)\mathrm{e}^{1{,}6x} > 0$ sur $[0 ; 1]$, donc g est convexe sur $[0 ; 1]$.

Donc la fonction g vérifie aussi la condition ③.

Donc la courbe ⑤ de g est une courbe de Lorenz.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie C :

1 $f(0{,}9) \approx 0{,}65$: dans l'entreprise A, les 90 % des personnes ayant les salaires les plus bas représentent environ 65 % de la masse salariale.
$g(0{,}9) \approx 0{,}76$: dans l'entreprise B, les 90 % des personnes ayant les salaires les plus bas représentent environ 76 % de la masse salariale.

2 **a.** Une primitive de f sur $[0 ; 1]$ est la fonction F telle que $F(x) = \frac{2}{15}x^6 + 0{,}1x^2$.

b. $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{7}{30} \approx 0{,}233$.

c. Donc $\gamma_A = 1 - 2\mathscr{A} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$.

3 **a.** En utilisant le résultat de la copie d'écran,
$\gamma_B = 1 - 2\int_0^1 g(x)\,dx \approx 1 - 2 \times 0{,}310\,3 \approx 0{,}379$.

b. $\gamma_A > \gamma_B$. Donc la répartition de la masse salariale est la plus irrégulièrement répartie dans l'entreprise A.
Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}$ de f se trouve en dessous de la courbe Γ de g. Donc l'aire entre Δ et $\mathscr{C}$ est plus grande que l'aire entre Δ et Γ.

116 Bénéfice moyen et valeur moyenne d'un bénéfice

1 **a.** On lit :

x	0,8		2,52		10
$f(x)$	−4,3	↗	5,22	↘	−1,08

b. Le bénéfice est maximal pour $x_0 \approx 2{,}52$ milliers d'objets, soit environ 2 520 objets, à 10 objets près.

c. Le bénéfice maximal est environ 5,22 dizaines de milliers d'euros, soit environ 52 200 €.

d. Lorsqu'on vend x_0 milliers d'objets, le bénéfice moyen est $\frac{52\,200}{2\,520} \approx 20{,}71$ € par objet.

2 **a.** $f(1) = 9 - 1 - \frac{8}{1^2} = 0$. Le bénéfice est nul pour la vente d'un millier d'objets.

b. Sur $[2{,}52 ; 10]$, la fonction f est continue et strictement décroissante, et passe de la valeur 5,22 à la valeur −1,08. Donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une 2e solution α sur $[2{,}52 ; 10]$.

c. À la calculatrice, $\alpha \approx 8{,}8$ (par défaut). La plage de bénéfice est donc $[1\,000 ; 8\,800]$.

3 **a.** Une primitive de f sur $[0{,}8 ; 10]$ est la fonction F telle que $F(x) = 9x - 0{,}5x^2 + \frac{8}{x}$.

b. $\int_1^6 f(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 6$.

c. La valeur moyenne du bénéfice, en dizaine de milliers d'euros, entre 1 et 6 milliers d'objets est :
$\frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,dx = \frac{1}{5}(F(6) - F(1)) = \frac{8\,275}{6} \approx 1\,379{,}17$,
soit environ 13 792 700 €.
Car $F(6) = \frac{112}{3}$ et $F(1) = \frac{33}{2} = 16{,}5$.

117 Comparer deux répartitions

1 **a.** $f(0) = \frac{100}{e^3 - 1}(e^0 - 1) = 0$
et $f(100) = \frac{100}{e^3 - 1}(e^3 - 1) = 100$.

b. $f(x) = 5{,}25(e^{0{,}03x} - 1)$.
Donc $f'(x) = 0{,}1\,575e^{0{,}03x} > 0$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

c. $F'(x) = 175 \times 0{,}03e^{0{,}03x} - 5{,}25 = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $[0 ; 100]$.
Comme $F(100) = 175e^3 - 525$ et $F(0) = 175$, on a :
$\int_0^{100} f(x)\,dx = F(100) - F(0) = 175e^3 - 700 \approx 2\,815$.

2 **a.** En utilisant la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$,
$G'(x) = \frac{94\,900}{(x - 130)^2 - 5} = g(x)$.
Donc G est une primitive de g sur $[0 ; 100]$.

b. Comme $G(100) = \frac{7\,990}{3}$ et $G(0) = 730$, on a :
$\int_0^{100} g(x)\,dx = G(100) - G(0) = \frac{5\,800}{3} \approx 1\,933$.

3 **a.** $\gamma_F = \frac{1}{100^2}\left(100^2 - \int_0^{100} f(x)\,dx\right) \approx 0{,}72$.

b. $\gamma_G = \frac{1}{100^2}\left(100^2 - \int_0^{100} g(x)\,dx\right) \approx 0{,}81$.

c. $\gamma_F < \gamma_G$. Donc la région la plus égalitaire est la France métropolitaine.
Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}$ de f se trouve au-dessus de la courbe Γ de g. Donc l'aire entre Δ et $\mathscr{C}$ est plus petite que l'aire entre Δ et Γ.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réinvestir... (p. 170)

118 ... en économie

Comparer des répartitions en France

Partie A :

1 Voir manuel.

2 **a.** En C3 =0.1*C2/2 .

b. En D3 =0.1*(C2+D2)/2 .

c. La somme de la plage C3 : L3 est environ 0,357 . Donc $\mathcal{A} \approx 0{,}357$ u.a. .

d. $\gamma \approx \dfrac{0{,}5 - 0{,}357}{0{,}5} \approx 0{,}286.$

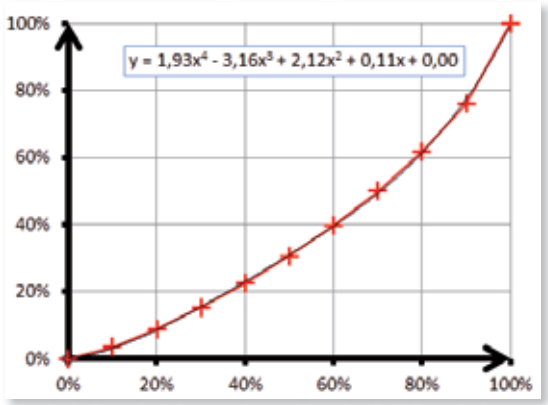
3 **a.** On obtient le schéma ci-contre, en arrondissant les coefficients à 0,01 près.

Donc $f(x) = 1{,}93x^4 - 3{,}16x^3 + 2{,}12x^2 + 0{,}11x$.

b. Une primitive de f sur $[0\,;1]$ est la fonction F telle que :

$F(x) = 0{,}386x^5 - 0{,}79x^4 + \dfrac{2{,}12}{3}x^3 + 0{,}055x^2$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) \approx 0{,}357$.



On obtient la même estimation de l'indice de Gini du niveau de vie en 2009 qu'à la question **2 d.** .

4 Les résultats sont très proches.

5 L'indice de Gini diminue légèrement entre 1970 et 1997 : la répartition du niveau de vie devient donc légèrement plus égalitaire.

L'indice de Gini reste néanmoins quasiment constant depuis 2000 .

Partie B :

1 On obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Part des ménages les moins riches en patrimoine	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%	
2	Masse du patrimoine détenu	0%	0,0%	0,15%	0,7%	2,5%	7,2%	14,3%	23,7%	36,1%	54,2%	100%	**TOTAL**
3	Aire sous le segment associé		0	8E-05	4E-04	0,002	0,005	0,011	0,019	0,03	0,045	0,077	**0,18885**

Donc l'indice de Gini pour le patrimoine en France en 2004 est environ égal à $\dfrac{0{,}5 - 0{,}188\,9}{0{,}5} \approx 0{,}62$.

2 L'indice de Gini pour le niveau de vie est environ 0,28 en 2004.

On en déduit que la répartition du niveau de vie est plus égalitaire que la répartition du patrimoine en France en 2004.

119 ... dans l'histoire

Secteur parabolique d'Archimède

a. • Une primitive de $x \mapsto (x+2)(4-x) = -x^2 + 2x + 8$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 8x$.

Donc :

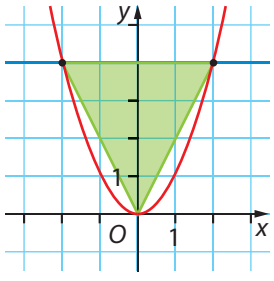
$\displaystyle\int_{-2}^{4} ((x+2)(4-x))\ \mathrm{d}x = F(4) - F(-2) = \frac{80}{3} - \frac{-28}{3} = 36$.

L'aire du secteur parabolique est donc de 36 u.a. .

• La formule d'Archimède donne : $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{6 \times 9}{2} = 36$.

On obtient donc le même résultat.

b. On a le graphique suivant :



L'aire du secteur parabolique est :

• par le calcul intégral :

$4 \times 4 - \displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\ \mathrm{d}x = 16 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$ u.a. .

• par la formule d'Archimède : $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{4 \times 4}{2} = \dfrac{32}{3}$ u.a. .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

120 … en calcul numérique

Intégrale d'une fonction continue

1 **a.** Les rectangles inférieurs sont construits sous la courbe $\mathscr{C}$. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs.

b. Les rectangles supérieurs sont construits au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs.

c. Lorsque n devient grand, les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs tendent vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$.

2 La fonction f est décroissante sur $[0 ; 1]$. Le k-ième rectangle inférieur a donc pour hauteur :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\left(-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$

Le k-ième rectangle supérieur a pour hauteur :

$$f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \exp\left(-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right).$$

3 **a.** En D2 =EXP(-(((B2-1)/$A$2)^2)) ;
En E2 =C2/$A$2 ;
En F2 =D2/$A$2 .

b. En G2 =SOMME(E2:E101) ;
en H2 =SOMME(F2:F101) .

c. On obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	numéro du rectangle	longueur du rectangle inférieur	longueur du rectangle supérieur	aire du rectangle inférieur	aire du rectangle supérieur	somme des aires inférieures	somme des aires supérieures
2	100	1	0,9999	1	0,009999	0,01	0,7436574	0,7499786
3		2	0,99960008	0,9999	0,009996	0,009999		

Donc en arrondissant la somme inférieure par défaut et la somme supérieure par excès, on a :

$$0{,}74 < \int_0^1 f(x)\ dx < 0{,}75 .$$

4 Pour $n = 500$, on obtient : $0{,}746 < \int_0^1 f(x)\ dx < 0{,}748$.

Pour $n = 1\,000$, on obtient : $0{,}746\,5 < \int_0^1 f(x)\ dx < 0{,}747\,2$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 6

Probabilités

Partir d'un bon pied (p. 172)

A Pourcentage de pourcentage

1 **a. Faux :** la part des filles invitées à la soirée est la somme de la part des filles lycéennes et de la part des filles non lycéennes :

$0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}56$, soit 56 %.

b. Vrai : 60 % des lycéens invités sont des filles, donc $0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

La part des lycéennes est 48 %.

c. Faux : 40 % des invités non lycéens sont des filles, donc la part des filles non lycéennes est :

$0{,}4 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}08$, soit 8 %.

2 **a. Faux :** la part des filles parmi les lycéens invités à la soirée est 60 %, donc la part des garçons parmi les lycéens est 40 %.

b. Faux : la part des filles, parmi les invités non lycéens, est 40 % ; donc la part des garçons parmi les invités non lycéens est 60 %.

La part des garçons non lycéens parmi les invités est $0{,}6 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}12$, soit 12 %.

c. Vrai : la part des filles invitées à la soirée est 56 %, donc la part des garçons est 44 %.

B Parmi... sachant que...

a. Faux : 7 % des jeux sont défectueux parmi 70 % des jeux fabriqués par E1. La part est donc 10 %.

b. Faux : parmi les jeux vendus, 7 % sont défectueux et fabriqués par l'entreprise E1.

c. Vrai : 30 % sont fabriqués par l'entreprise E2 et 1,5 % des jeux vendus sont fabriqués par l'entreprise E2 et sont défectueux.

La part cherchée est $\frac{1{,}5}{30} = 0{,}05$.

d. Vrai : 8,5 % des jeux vendus sont défectueux et 7 % sont défectueux et fabriqués par l'entreprise E1.

La part cherchée est $\frac{7}{8{,}5} = \frac{14}{17}$.

C Variable aléatoire et répétition d'épreuves indépendantes

On détermine les valeurs prises par la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur à l'aide d'un tableau.

x_i	1	2	3	4
1	−2	−1	−1	0
2	−1	0	0	1
3	−1	0	0	1
4	0	1	1	2

1. Les valeurs prises par X sont : −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2.

2. $P(X = 0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

$P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

3. Tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	−2	−1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = -\frac{2}{16} - \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = 0$.

Le jeu est donc équitable.

D Arbre pondéré

a. Vrai : chaque épreuve a deux issues : A et $\overline{A}$.

b. Faux : l'arbre pondéré comporte 4 niveaux.

c. Vrai.

d. Faux : le nombre de listes comportant exactement deux succès est $\binom{4}{2} = 6$.

Découvrir

Activité 1 Lire et utiliser un tableau à double entrée (p. 174)

1 19 % des sapins naturels achetés par les ménages, ont une taille inférieure ou égale à un mètre.

68 % des sapins artificiels achetés par les ménages ont une taille supérieure à 1 m.

2 600 000 ménages achètent des sapins de Noël dont 3,5 % sont des sapins artificiels,

$600\,000 \times 0{,}035 = 21\,000$,

$600\,000 - 21\,000 = 579\,000$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

21 000 ménages achètent des sapins artificiels donc 579 000 ménages achètent des sapins naturels.
Parmi les 579 000 ménages achetant des sapins naturels, 19 % achètent des sapins de moins d'un mètre.
$579\,000 \times 0{,}19 = 110\,010$
$579\,000 - 110\,010 = 468\,990$.
110 010 ménages achètent des sapins de moins d'un mètre donc, les 468 990 autres ménages achètent des sapins de plus d'un mètre.
Parmi les ménages achetant des sapins artificiels, 32 % achètent des sapins de moins d'un mètre,
$21\,000 \times 0{,}32 = 6\,720$
$21\,000 - 6\,720 = 14\,280$.
6 720 ménages achètent des sapins de moins d'un mètre donc les 14 280 autres ménages achètent des sapins de plus d'un mètre.

	Inférieur ou égal à 1 m	Supérieur à 1 m	Total
Sapin naturel	110 010	468 990	579 000
Sapin artificiel	6 720	14 280	21 000

3 On peut compléter ainsi le tableau précédent.

	Inférieur ou égal à 1 m	Supérieur à 1 m	Total
Sapin naturel	110 010	468 990	579 000
Sapin artificiel	6 720	14 280	21 000
Total	116 730	483 270	600 000

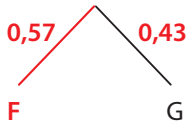
La part des ménages achetant un sapin mesurant plus d'un mètre est $\frac{483\,270}{600\,000} \approx 0{,}7721$, soit environ 77 % .

4 La part des ménages achetant un sapin naturel parmi les ménages achetant un sapin d'un mètre au plus : $\frac{110\,010}{116\,730} \approx 0{,}9424$, soit environ 94 % .

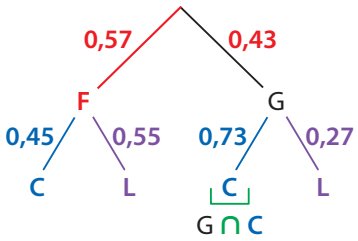
5 La part des ménages achetant un sapin naturel est 96,5 %.
La part des ménages achetant un sapin naturel parmi ceux achetant un sapin de moins d'un mètre, n'est pas égale à la part des ménages achetant un sapin naturel.

Activité 2 Construire un arbre pondéré à partir d'un tableau (p. 174)

1 **a.** La part des filles dans la classe de T ES est 57 %.
b.



2 **a.** Par lecture du tableau, on sait que, parmi les filles, la part des élèves ayant choisi des études courtes est 45 %.
b. De même, parmi les garçons, 73 % ont choisi des études courtes. D'où l'arbre pondéré suivant :



3 Les garçons qui ont choisi des études courtes représentent 73 % des garçons et les garçons représentent 43 % des élèves de Terminale ES.
On calcule la part des garçons ayant choisi des études courtes, en effectuant le produit des parts écrites sur les branches passant par G et C :

$$0{,}43 \times 0{,}73 = 0{,}3139$$

soit environ 31,4 % des garçons ont choisi des études courtes.

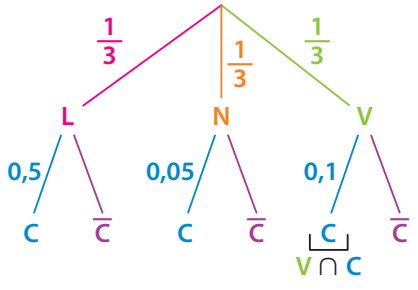
Activité 3 Construire un arbre pondéré à partir d'un énoncé (p. 174)

1 **a.** Adeline possède trois choix pour son petit déjeuner : Thé noir , thé vert ou verre de lait.
Boire un café ne fait pas partie de ses choix pour le petit déjeuner.
b. Le premier niveau de l'arbre contient 3 branches L, N, V. Sur les branches du premier niveau de l'arbre, on écrit les probabilités de choisir chacune de ces boissons :

$$P(V) = P(N) = P(L) = \frac{1}{3}.$$

c. L'arbre possède deux niveaux. Pour chaque choix de la boisson du petit déjeuner, Adeline doit choisir de boire ou non un café à midi. L'arbre pondéré possède donc 6 branches au deuxième niveau.

2



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 **a.** On obtient la probabilité qu'Adeline boive un thé vert et un café en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par V et C :

$P(V \cap C) = \frac{1}{30}$.

b. Si Adeline boit un café le midi, elle peut soit avoir bu un thé noir le matin, soit un thé vert soit un verre de lait. On calcule $P(C)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à C.

$P(C) = P(L \cap C) + P(N \cap C) + P(V \cap C)$

$= \frac{1}{3} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,05 + \frac{1}{3} \times 0,1 = \frac{1}{3} \times 0,65 = \frac{13}{60}$.

La probabilité qu'Adeline boive un café est égale à $\frac{13}{60}$.

Activité 4 Répéter des épreuves non indépendantes (p. 175)

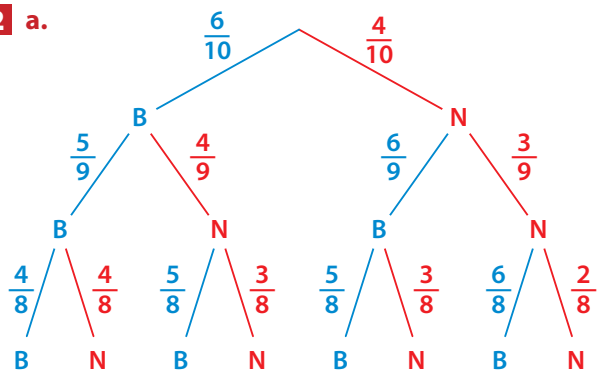
1 **a.** Par exemple, on lance trois fois de suite une pièce non équilibrée dont une face est blanche l'autre noire ou bien on interroge successivement et de manière indépendante trois personnes dont la réponse à la question posée est soit blanc soit noir, ces réponses n'étant pas équiprobables…

b. On reconnait la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « obtenir une boule noire », de probabilité $p = 0,4$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0,4)$.

L'arbre proposé peut représenter cette expérience aléatoire.

2 **a.**



b. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne. Les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes puisque le nombre de boules contenues dans l'urne change à chaque tirage.

La variable aléatoire X ne suit plus une loi binomiale.

Activité 5 Reconnaître des événements non indépendants (p. 175)

1 La famille comporte quatre enfants. Les évènements représentés par les quatre enfants sont :

$B \cap M$; $\overline{B} \cap M$; $\overline{B} \cap \overline{M}$ de probabilité respectivement : $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$.

a. $P(M) = P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M) = \frac{1}{2}$.

$P(B) = P(B \cap M) = \frac{1}{4}$.

b. $\frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ et $P(B) \neq \frac{1}{2}$.

2 La famille comporte quatre enfants. Les évènements représentés par les quatre enfants sont $B \cap M$; $B \cap N$; $C \cap M$; $C \cap YB$, chacun de probabilité $\frac{1}{4}$.

a. $P(M) = P(B \cap M) + P(C \cap M) = \frac{1}{2}$.

$P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap N) = \frac{1}{2}$.

$P(B \cap M) = \frac{1}{4}$.

b. $\frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir un enfant ayant les cheveux blonds parmi les enfants ayant les yeux marron est égale à la probabilité d'obtenir un enfant ayant les cheveux blonds parmi les quatre enfants.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Savoir faire

1. Savoir définir et utiliser une variable aléatoire (p. 177)

Exercices d'application

1 Chaque arrivée du bus est une épreuve de Bernoulli de succès l'événement : « Le bus arrive en retard » de probabilité $p = 0{,}1$. On observe une répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de jours où le bus arrive en retard.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}1)$.

a. Obtenir l'événement « le bus arrive en retard au moins une fois » est l'événement contraire de l'événement « le bus n'arrive jamais en retard » c'est-à-dire :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}65$.

b. Pour déterminer le nombre moyen de retards auxquels Emma peut s'attendre lors de nombreux trajets, on calcule l'espérance de X.
$E(X) = np = 10 \times 0{,}1 = 1$.

c. Le retard moyen d'un bus est de 4 minutes, donc 4 minutes est le temps d'attente moyen pour ces dix jours.

2 L'événement « Léna reçoit un mail » est l'événement contraire de l'événement « Léna reçoit un SMS » Soit p la probabilité que Léna reçoive un SMS, $1 - p$ est la probabilité que Léna reçoive un mail.

On a donc : $(1-p) = 5p \Leftrightarrow 6p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$.

Chaque consultation du Smartphone est une épreuve de Bernoulli de succès l'événement : « Léna reçoit un SMS » de probabilité $p = \frac{1}{6}$. On observe une répétition de 6 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de SMS reçus, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6\,;\frac{1}{6}\right)$.

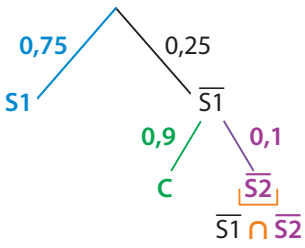
a. $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6)$
$= \binom{6}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^6 \approx 0{,}0006$.

b. Le nombre moyen de SMS reçus par Léna lors d'un grand nombre de jours où elle consulte 6 fois son Smartphone est égal à l'espérance de X.
$E(X) = np = 6 \times \frac{1}{6} = 1$.
Le nombre moyen de mails reçus est donc égal à 5.
Le temps moyen que passe Léna à lire ses messages est $1 \times 10 + 5 \times 30 = 160$, soit 160 secondes ou encore 2 minutes et 40 secondes.

2. Construire et lire un arbre pondéré (p. 179)

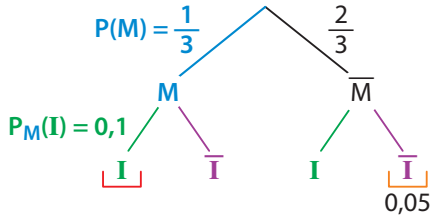
Exercices d'application

3 **a.** Soit S l'événement : « le joueur réussit sa balle de service. »
Le joueur commet une double faute s'il ne réussit pas deux fois de suite sa balle de service. Ceci correspond à l'événement $\overline{S1} \cap \overline{S2}$.



La probabilité de cet événement s'obtient en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par $\overline{S1}$ et par $\overline{S2}$.
$P(\overline{S1} \cap \overline{S2}) = 0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}025$.

4 **a.** Soit M l'événement : « John reçoit un mail publicitaire » et I l'événement « le mail intéresse John ».
On lit dans l'énoncé, $P(M) = \frac{1}{3}$. On place cette probabilité sur la première branche de l'arbre.
Parmi les mails publicitaires, 10 % intéressent John. $P_M(I) = 0{,}1$. On place cette probabilité sur la branche issue de M et arrivant à I. On calcule la probabilité $P(M \cap I)$ en utilisant la formule des probabilités composées, c'est-à-dire en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par M et I.
$P(M \cap I) = P_M(I) \times P(M) = 0{,}1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$.



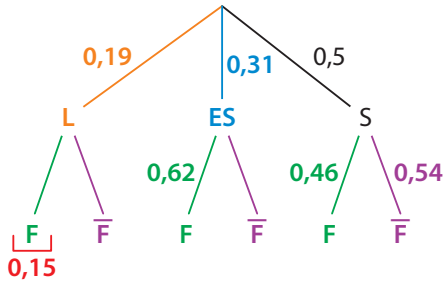
b. **Parmi** tous les mails reçus, 5 % sont des mails non publicitaires qui n'intéressent pas John. L'ensemble de référence est l'ensemble total des mails reçus.
On a $P(\overline{M} \cap \overline{I}) = 0{,}05$, donc $P_{\overline{M}}(\overline{I}) = 0{,}075$.
John reçoit un mail non publicitaire. L'ensemble de référence est donc maintenant l'événement $\overline{M}$.
On calcule la probabilité de l'événement I conditionnée par l'événement $\overline{M}$ en utilisant la définition :
$P_{\overline{M}}(I) = 1 - P_{\overline{M}}(\overline{I}) = 0{,}925$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3. Utiliser un arbre pondéré (p. 181)

Exercices d'application

5



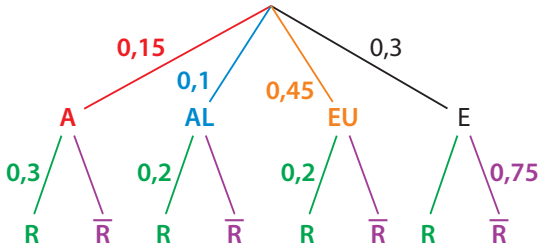
Les événements L, ES, S forment une partition de l'univers des élèves du lycée donc on écrit leur probabilité sur les branches du premier niveau de l'arbre.
$P(ES) = 0{,}31$; $P(S) = 0{,}5$
et $P(L)$ s'obtient par complément à 1.
Parmi les élèves de ES, 62 % sont des filles. Il s'agit de la probabilité de l'événement F conditionnée par l'événement ES. $P_{ES}(F) = 0{,}62$.
Parmi les élèves de S, 54 % sont des garçons. Il s'agit de la probabilité de l'événement $\overline{F}$ conditionnée par l'événement S. $P_S(\overline{F}) = 0{,}54$, donc $P_S(F) = 0{,}46$.
On place ces probabilités sur les branches du deuxième niveau.
15 % des élèves du lycée sont des filles de L. L'ensemble de référence est l'univers donc on écrit :

$$P(F \cap L) = 0{,}15.$$

Les événements L, ES, S forment une partition de l'univers des élèves du lycée. On calcule la probabilité $P(F)$ en ajoutant les produits des probabilités qui se trouvent sur les branches arrivant à F.

$$P(F) = P(F \cap L) + P(F \cap ES) + P(F \cap S)$$
$$= 0{,}15 + 0{,}31 \times 0{,}62 + 0{,}5 \times 0{,}46 = 0{,}5722.$$

6 Les événements E « effectuer son stage en Europe », EU « effectuer son stage aux États-Unis », A « Effectuer son stage en Asie », et AL « effectuer son stage en Amérique latine » forment une partition de l'univers des élèves de l'école post Bac, donc on écrit leurs probabilités sur les branches du premier niveau de l'arbre.



$P(EU) = 0{,}45$; $P(E) = 0{,}3$ et $P(A) = 0{,}15$.
La probabilité $P(AL)$ s'obtient par complément à 1.
Parmi les élèves partant soit aux États-Unis soit en Amérique Latine, 20 % sont rémunérés. Il s'agit des probabilités de l'événement R conditionnées par les événements EU ou AL :

$$P_{EU}(R) = P_{AL}(R) = 0{,}20.$$

Parmi les stages proposés en Asie, 30 % sont rémunérés. Il s'agit de la probabilité de l'événement R conditionnée par l'événement A : $P_A(R) = 0{,}30$.
Parmi les stages proposés en Europe, 75 % ne sont pas rémunérés. Il s'agit de la probabilité de l'événement $\overline{R}$ conditionnée par l'événement E : $P_E(\overline{R}) = 0{,}75$.
On peut compléter les probabilités sur les branches du niveau 2, par complément à 1.
On calcule la probabilité $P_R(A)$ en utilisant la définition :

$$\frac{P(R \cap A)}{P(R)}.$$

Il faut donc calculer chacun des termes du quotient.
D'après la formule des probabilités composées :

$$P(R \cap A) = P_A(R) \times P(A) = 0{,}30 \times 0{,}15 = 0{,}045.$$

Les événements E, EU, A et AL forment une partition de l'univers des élèves de l'école post Bac ; pour calculer la probabilité $P(R)$, on ajoute tous les produits des probabilités situées sur les branches qui arrivent à R.

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap AL) + P(R \cap EU) + P(R \cap E)$$
$$= 0{,}045 + 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}075 = 0{,}23.$$

Donc $P_R(A) = \dfrac{0{,}045}{0{,}23} = \dfrac{9}{46}$.

QCM (p. 183)

7 **b.** $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - a$.
Or $3a + 2 \times 0{,}1 + 0{,}2 = 1$;
donc $a = 0{,}2$ et $P(X \geqslant 2) = 0{,}8$.

8 **a.** $E(X) = \dfrac{1}{3} \times 4 + \dfrac{2}{3} \times (-2) = 0$.

9 **c.** $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{14}{30 - 7} = \dfrac{14}{23}$.

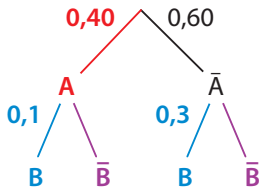
10 **b.** On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}8}{P(A)} = \dfrac{1}{4}$.
Donc $P(A) = 4 \times 0{,}8 = 3{,}2$: c'est impossible.

11 **c.** $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{P(A)} = 0{,}25$.

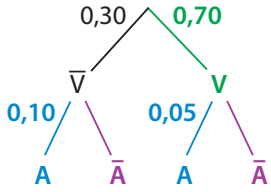
Donc $P(A) = \dfrac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

12 **c.** On lit l'arbre pondéré ci-contre :
$P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$
et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.
Donc $P(B)$ est la somme des produits des probabilités des branches arrivant à B :
$P(B) = 0{,}04 + 0{,}18 = 0{,}22$.



13 **c.** On lit l'arbre pondéré ci-contre :
$P(V \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}035$
et $P(\overline{V} \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}030$;
donc $P(A)$ est la somme des produits des probabilités situées sur les branches arrivant à A, donc :
$P(A) = 0{,}035 + 0{,}030 = 0{,}065$.



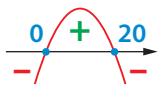
14 **a.** $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$.

15 **b.** $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}75^5$.

16 **a.** On a la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « obtenir une boule rouge » de probabilité $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0{,}6)$.

17 **c.** $E(X) = np = 0{,}4n$.

18 **a.** On calcule la dérivée :
$f'(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}6x = x(0{,}6 - 0{,}03x)$.
Et $0{,}6 - 0{,}03x = 0 \Leftrightarrow x = 20$.
Donc sur [0 ; 20], la dérivée est positive.
La fonction f est donc croissante sur [0 ; 20].



Exercices

1 Variables aléatoires discrètes (p. 184)

18 Vrai ou faux ?

1 **Faux**, une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue de l'expérience aléatoire.
2 **a.** **Vrai**, on vérifie que la somme des probabilités est égale à 1. $0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}2 = 1$.
b. **Faux**,
$E(X) = 10 \times 0{,}2 + 12 \times 0{,}35 + 13 \times 0{,}25 + 16 \times 0{,}2 = 20{,}1$.
3 **a.** **Vrai.** Un lancer de dé est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$. On observe une répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{1}{6}\right)$.

b. **Vrai**, $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

19 Vrai ou faux ?

1 **Faux :** tirages successifs sans remise : les épreuves répétées ne sont pas identiques.
2 **a.** **Vrai :** formule du cours avec $n = 3$.
$p = \frac{4}{10} = 0{,}4$; donc $1 - p = 0{,}6$ et $\binom{3}{2} = 3$.
b. **Faux :** $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^3$.
c. **Faux :** $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X < 1)$
$= P(X \leqslant 2) - P(X = 0)$.
3 **Faux :** $E(X) = np = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2$ et $Y = 10X$, donc $E(Y) = 10\,E(X) = 12$.

20 Jeu de dés

a. On définit la variable aléatoire S égale à la somme des deux nombres apparus. Les valeurs de la variable aléatoire S peuvent être déterminées à l'aide du tableau ci-contre.

S	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Les valeurs de la variable aléatoire S sont :
$\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.
Le joueur mise m euros au début du jeu, il faut donc soustraire cette mise pour obtenir le gain final.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, les valeurs possibles de la variable aléatoire X sont $\{-m ; 10 - m ; 20 - m\}$.
b. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	$-m$	$10 - m$	$20 - m$
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Le gain moyen du joueur, lors d'un grand nombre de jeux, est :
$E(X) = -\frac{3m}{8} + \frac{3(10 - m)}{8} + \frac{2(20 - m)}{8} = \frac{-8m + 70}{8}$.
Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$. On résout :
$-8m + 70 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{70}{8} = 8{,}75$.
Le joueur doit miser 8,75 € pour que le jeu soit équitable.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

21 Décorations lumineuses

1 a. Répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès $p = \frac{1}{3}$.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20 ; \frac{1}{3}\right)$.

b. D'après la calculatrice :

```
binomFdP(20,1/3,
10)
        .0542592034
```

$P(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0543$.

c. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20}$.

Donc $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}9997$.

2 a. Ici, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{3}\right)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant \ln(0{,}1)$; or $\frac{2}{3} \in]0 ; 1[$

donc $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, d'où $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$, soit $n \geqslant 5{,}68$.

c. $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}1$.

D'après le résultat précédent en **b.**, l'employé devra vérifier au moins 6 boîtes.

22 Loi binomiale pour de grandes valeurs de *n*

1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$. La variance de X est donnée par l'expression :

$$V = np(1 - p).$$

L'écart type est égal à $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{np(1-p)}$.

2 a et b étant des entiers positifs,

$P(X \leqslant a) + P(a < X \leqslant b) + P(X > b) = 1$

donc $P(a < X \leqslant b) = 1 - P(X > b) - P(X \leqslant a)$.

Et $1 - P(X > b) = P(X \leqslant b)$

donc $P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$.

3 a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0{,}3)$.

$E(X) = 10 \times 0{,}3 = 3$

$V = 10 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 2{,}1$

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}45$.

$P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(0{,}1 < X \leqslant 5{,}9)$
$= P(X \leqslant 5{,}9) - P(X \leqslant 0{,}1)$
$= P(X \leqslant 5) - P(X = 0)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P(0{,}1 < X \leqslant 5{,}9) \approx 0{,}92.$$

b. • $n = 6$ et $p = 0{,}9$

$E(X) = 5{,}4$; $V = 0{,}54$; $\sigma \approx 0{,}73$

$P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(3{,}94 < X \leqslant 6{,}86)$
$= P(X \leqslant 6{,}86) - P(X \leqslant 3{,}94)$
$\approx 0{,}98$.

• $n = 400$ et $p = 0{,}5$

$E(X) = 200$; $V = 100$; $\sigma = 10$

$P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(180 < X \leqslant 220)$
$= P(X \leqslant 220) - P(X \leqslant 180)$
$\approx 0{,}954$.

• $n = 2\,000$ et $p = 0{,}4$

$E(X) = 800$; $V = 480$; $\sigma \approx 21{,}91$.

$P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(756{,}18 < X \leqslant 843{,}82)$
$= P(X \leqslant 843{,}82) - P(X \leqslant 756{,}18)$
$\approx 0{,}953$.

Lorsque n devient grand et lorsque p est voisin de 0,5, la valeur arrondie au centième de la probabilité calculée est 0,95.

2 Probabilité conditionnelle (p. 185)

23 QCM

1 c. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

2 b. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{P(A)} = 0{,}25$;

donc $P(A) = \dfrac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8$.

3 b. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{4}{4+6} = 0{,}4$.

24 QCM

L'univers E contient 29 issues.

a. Faux.

Le nombre d'issues réalisant l'événement A est 9,

donc $P(A) = \dfrac{9}{29}$.

b. Vrai. 3 issues réalisent l'événement $A \cap B \cap C$, donc :

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{29}.$$

c. Faux. 8 issues réalisent l'événement B, donc :

$$P(B) = \frac{8}{29}.$$

d. Faux. Parmi les issues réalisant l'événement A, 4 réalisent l'événement B donc $P_A(B) = \dfrac{4}{9}$.

e. Vrai. 11 issues réalisent l'événement C et parmi les issues réalisant l'événement C, 5 réalisent l'événement A,

donc $P_C(A) = \dfrac{5}{11}$.

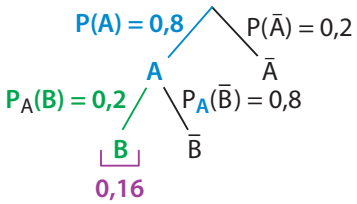
25 QCM

b. $P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{9}{9+9} = 0{,}5$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

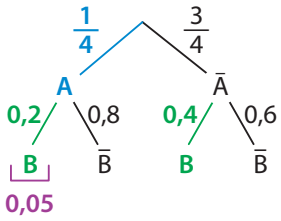
26 Compléter des arbres pondérés

1 A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.



On complète le premier niveau de l'arbre par :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2$.
On calcule $P_A(B)$ en utilisant la définition :
$\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}16}{0{,}8} = 0{,}2$ et $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 0{,}8$.

2 On complète les branches du deuxième niveau de l'arbre par complément à 1.



D'après la formule des probabilités composées
$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$,
donc $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = \dfrac{1}{4}$.

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
On complète la branche noire par $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{3}{4}$.

27 Jeu de dés

On définit la variable aléatoire S égale à la somme des nombres apparus. Les valeurs de la variable aléatoire S sont déterminées par le tableau ci-dessous.

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Six issues réalisent l'événement A : « le dé violet indique 4 » ; **parmi** ces issues, une seule réalise l'événement B : « La somme est égale à 10 ».
$P_A(B) = \dfrac{1}{6}$.

28 Chômage en France

a. Les nombres du tableau situés dans les cellules coloriées correspondent à des probabilités calculées sur l'ensemble des chômeurs.
La somme des probabilités des événements E, L, D n'est pas égale à 1, il faut donc créer une autre catégorie (A)
$P(A) = 1 - 0{,}41 - 0{,}27 - 0{,}09 = 0{,}21$.

Parmi les femmes 22,5 % sont au chômage à la suite d'un licenciement 11,3 % après avoir démissionné. 45 % après la fin d'un emploi à durée limitée. Ces probabilités sont des probabilités conditionnées par l'événement F. On les place sur la ligne F.

La somme des nombres des lignes est égale à 1 donc,
$P_F(A) = 1 - 0{,}45 - 0{,}225 - 0{,}113 = 0{,}212$.

	Fin d'emploi (E)	Licencié (L)	Démission (D)	Autres (A)	Total
Hommes (H)					0,5
Femmes (F)	0,45	0,225	0,113	**0,212**	0,5
Total	0,43	0,27	0,09	**0,21**	1

Les données permettent de calculer
$P(E \cap F) = P_F(E) \times P(F) = 0{,}45 \times 0{,}5 = 0{,}225$
$P(L \cap F) = P_F(L) \times P(F) = 0{,}225 \times 0{,}5 = 0{,}1125$
$P(D \cap F) = P_F(D) \times P(F) = 0{,}113 \times 0{,}5 = 0{,}0565$.
D'où :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{P(E) - P(E \cap F)}{0{,}5} = \frac{0{,}43 - 0{,}225}{0{,}5} = 0{,}41.$$

$$P_H(L) = \frac{P(L \cap H)}{P(H)} = \frac{P(L) - P(L \cap F)}{0{,}5} = \frac{0{,}27 - 0{,}1125}{0{,}5} = 0{,}315.$$

$$P_H(D) = \frac{P(D \cap H)}{P(H)} = \frac{P(D) - P(D \cap F)}{0{,}5} = \frac{009 - 0{,}0565}{0{,}5} = 0{,}067.$$

On complète par complément à 1.
$P_H(A) = 1 - 0{,}41 - 0{,}315 - 0{,}067 = 0{,}208$.

	Fin d'emploi (E)	Licencié (L)	Démission (D)	Autres (A)	Total
Hommes (H)	**0,41**	**0,315**	**0,067**	**0,208**	0,5
Femmes (F)	0,45	0,225	0,113	**0,212**	0,5
Total	0,43	0,27	0,09	**0,21**	1

b. On interroge une personne dans l'ensemble total des chômeurs.
On calcule donc $P(F \cap L) = 0{,}225 \times 0{,}5 = 0{,}1125$.

c. On interroge **un chômeur ayant démissionné**.
Il s'agit donc de la probabilité de l'événement F conditionnée par l'événement D :

$$P_D(F) = \frac{P(D \cap F)}{P(D)} = \frac{0{,}0565}{0{,}09} \approx 0{,}628.$$

d. On interroge un chômeur **en fin d'emploi à durée limitée**. Il s'agit donc d'une probabilité de l'événement H conditionnée par l'événement E :

$$P_E(H) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{P_H(E) \times P(H)}{0{,}43} = \frac{0{,}41 \times 0{,}5}{0{,}43} \approx 0{,}477.$$

(On peut aussi calculer cette probabilité par :
$\dfrac{P(E) - P(E \cap F)}{0{,}43} = \dfrac{0{,}43 - 0{,}225}{0{,}43} \approx 0{,}477$.)

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

29 Jeu de hasard

Soit G l'événement « Être un grand gagnant » et O « être un joueur occasionnel ».

$P(G)=\dfrac{1}{1\,000\,000}$.

Parmi ces « grands gagnants », 1 sur 20 est un joueur occasionnel. Il s'agit de la probabilité de l'événement O conditionnée par l'événement G. $P_G(O)=\dfrac{1}{20}$.

Parmi les autres, 3 sur 10 le sont. Il s'agit ici de la probabilité de l'événement O conditionnée par l'événement $\overline{G}$.

(Cette phrase manque dans l'édition 1.) $P_{\overline{G}}(O)=\dfrac{3}{10}$.

$P(G\cap O)=P_G(O)\times P(G)$

$=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{1\,000\,000}=\dfrac{1}{20\,000\,000}$.

$P(\overline{G}\cap O)=P_{\overline{G}}(O)\times P(\overline{G})$

$=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{999\,999}{1\,000\,000}=\dfrac{2\,999\,997}{10\,000\,000}$.

L'algorithme permet de calculer la probabilité d'être un joueur occasionnel comme somme des deux probabilités $P_G(O)\times P(G)$ et $P_{\overline{G}}(O)\times P(\overline{G})$.

$P(O)=\dfrac{5\,999\,995}{20\,000\,000}=p$.

3 Probabilité d'un événement sur un arbre pondéré (p. 186)

30 Vrai ou faux ?

1 a. Faux : on ne peut pas ajouter ces probabilités conditionnelles, car les ensembles de référence sont différents.

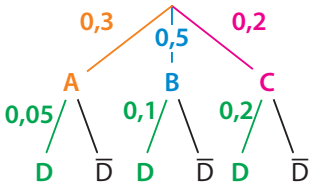
b. Vrai : voir cours.

c. Vrai : voir cours.

2 a. Faux : A et B sont disjoints, donc $P(A\cap B)=0$.

b. Vrai : $0{,}5\times 0{,}1=0{,}05$.

c. Faux : d'après la formule des probabilités totales, en ajoutant les produits des probabilités sur les branches arrivant à D :



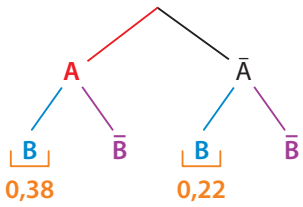
$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$=0{,}015+0{,}05+0{,}04=0{,}105$.

d. Vrai : $P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}015}{0{,}105}=\dfrac{1}{7}$.

31 QCM

A et B sont deux événements d'un univers E tels que :
$P(A\cap B)=0{,}38$
et $P(\overline{A}\cap B)=0{,}22$.



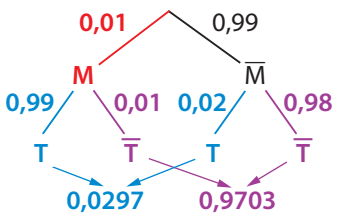
a. Vrai : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0{,}38+0{,}22=0{,}6$.

b. Faux : Aucune donnée ne permet de calculer $P(\overline{A})$.

c. Vrai : A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers,
$P(\overline{A}\cap\overline{B})+P(A\cap\overline{B})=P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}40$.

d. Faux : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}38}{0{,}6}=\dfrac{19}{30}$.

32 QCM



Une maladie atteint 1 % d'une population donnée :
$P(M)=0{,}01$.

• **Chez** les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs. Il s'agit des probabilités de l'événement T, puis de l'événement $\overline{T}$ conditionnée par l'événement M. $P_M(T)=0{,}99$; $P_M(\overline{T})=0{,}01$.

• **Chez** les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs. Il s'agit de la probabilité de l'événement $\overline{T}$ conditionnée par l'événement $\overline{M}$. $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}98$.

a. Faux : $P(T\cap M)=0{,}01\times 0{,}99=0{,}0099$.

b. Faux : M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers,
$P(\overline{T})=P(\overline{T}\cap M)+P(\overline{T}\cap\overline{M})$
$=0{,}01\times 0{,}01+0{,}99\times 0{,}98=0{,}9703$.

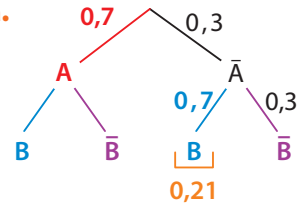
c. Vrai : $P(T)=1-P(\overline{T})=0{,}0297$.

d. Faux. On cherche la probabilité que l'individu soit malade sachant que le test est positif, soit $P_T(M)$.

D'après la définition $P_T(M)=\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}=\dfrac{0{,}0099}{0{,}0297}=\dfrac{1}{3}$.

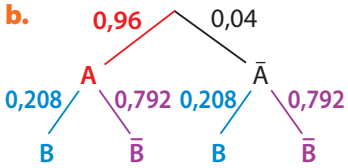
33 Compléter les arbres

a.



$P(B)=0{,}13$
est impossible
car $P(B\cap\overline{A})=0{,}21$
et $0{,}21>0{,}13$.

b.



$P_B(A)=0{,}96=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
or $P(B)=0{,}208$
d'où $\dfrac{P(A\cap B)}{0{,}208}=0{,}96$.

$P(A\cap B)=0{,}96\times 0{,}208=0{,}19968$

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}19968}{0{,}96}=0{,}208$.

$P_A(\overline{B})=1-0{,}208=0{,}792$.

A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers,
$P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=0{,}208-0{,}19968$
$P(B\cap\overline{A})=0{,}00832$

$P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{0{,}00832}{0{,}04}=0{,}208$.

D'où $P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-0{,}208=0{,}792$.

(Les événements A et B sont indépendants. Voir Activité 5.)

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

34 Algorithme

1 La deuxième ligne du programme permet de calculer $P(B \cap A)$.
La troisième ligne calcule $P(B \cap \overline{A})$.

2 Le programme calcule la probabilité $P(B)$, suivant la propriété, si A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers alors, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

3

```
PROGRAM:PROBA
:Prompt X,Y,Z
:X*Y→U
:(1-X)*Z→V
:U+V→W
:Disp "P(A et B)
",U
```

```
:Disp "P(non(A)
et B)",V
:Disp "P(B)",W
:U/W→T
:Pause
:Disp "PB(A)",T
:
```

On ajoute une Pause avant la dernière ligne afin d'avoir le temps de lire les deux premiers résultats.

4 **Application**
D'après l'énoncé, on entre dans la calculatrice, X = 0,65 ; Y = 0,20 et Z = 0,30.

a. A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers, la probabilité de gagner un séjour en thalasso thérappie est :

$$P(B) = 0{,}238 .$$

b. Sachant que le candidat a gagné un séjour en thalassothérapie, la probabilité que ce soit un séjour d'une semaine est $P_B(A) \approx 0{,}55$.

```
X=?0.65
Y=?0.2
Z=?0.3
```

```
P(A et B)
                .13
P(non(A) et B)
               .105
P(B)
               .235
               Fait
```

```
P(non(A) et B)
               .105
P(B)
               .235
PB(A)
      .5531914894
               Fait
```

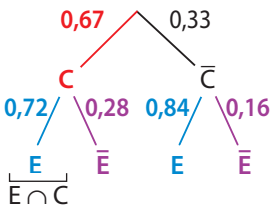
35 Covoiturage

1 **a.** Repérer, dans l'énoncé, les événements qui forment une partition de l'univers. Ici, C et $\overline{C}$, ainsi que le mot « parmi ».
« Parmi les personnes pratiquant le covoiturage, … » : on a donc une probabilité conditionnée par C et :

$$P_C(E) = 0{,}72 .$$

« Parmi ceux n'ayant jamais pratiqué le covoiturage, … » : on a donc une probabilité conditionnée par $\overline{C}$ et $P_{\overline{C}}(E) = 0{,}84$.

b. Arbre ci-dessous.



2 **a.** On interroge une personne de l'ensemble des inscrits.
Cette personne doit pratiquer le covoiturage **et** penser qu'il permet des économies financières.
On demande donc $P(E \cap C)$:

$$P(E \cap C) = P_C(E) \times P(C) = 0{,}67 \times 0{,}72 = 0{,}4824 .$$

b. $P(E \cap \overline{C}) = P_{\overline{C}}(E) \times P(\overline{C}) = 0{,}33 \times 0{,}84 = 0{,}2772$.
C'est la probabilité qu'une personne pratique le covoiturage et pense que le covoiturage permet des économies.

c. On ajoute les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à E :
$P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap \overline{C}) = 0{,}4824 + 0{,}2772 = 0{,}7596$.
75,96 % des personnes inscrites sur le site pensent que le covoiturage permet des économies financières.

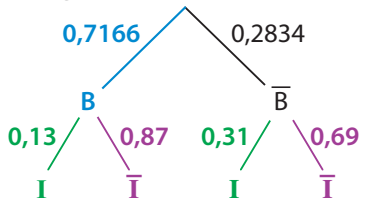
3 **a.** $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0{,}2404$.

b. L'ensemble de référence est $\overline{E}$.
On calcule une probabilité conditionnée par $\overline{E}$:

$$P_{\overline{E}}(C) = \frac{P(\overline{E} \cap C)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}28 \times 0{,}67}{0{,}2404} \approx 0{,}78 .$$

36 Orientation post Bac

1 On considère l'univers E des étudiants titulaires d'un Bac.
Soit B l'événement « être titulaire d'un bac général » et I l'événement « être admis en BTS ou en IUT ».
Parmi les étudiants ayant un bac général, 13 % sont admis en BTS ou IUT.
Il s'agit de la probabilité de l'événement I conditionnée par l'événement B : $P_B(I) = \mathbf{0{,}13}$.
Parmi les étudiants titulaires d'un bac professionnel ou technique, 31 % sont admis en BTS ou IUT. *(Cette dernière donnée n'était pas donnée dans l'édition 1.)* Il s'agit de la probabilité de l'événement I conditionnée par l'événement $\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(I) = \mathbf{0{,}31}$.



On calcule $P(\overline{B}) = \dfrac{6\,500}{22\,938} \approx \mathbf{0{,}2834}$, donc, par complément à 1, $P(B) \approx \mathbf{0{,}7166}$.
puis on complète les probabilités des branches du deuxième niveau par complément à 1.
$P_B(\overline{I}) = 1 - P_B(I) = \mathbf{0{,}87}$ et $P_{\overline{B}}(\overline{I}) = 1 - P_{\overline{B}}(I) = \mathbf{0{,}69}$.

2 L'ensemble de référence est l'univers des étudiants titulaires d'un Bac.
On calcule la probabilité $P(B \cap I)$, en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par B et I :
$P(B \cap I) = P_B(I) \times P(B) = 0{,}13 \times 0{,}7166 = 0{,}093158$.

3 Les événements B et $\overline{B}$ formant une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(I)$ en ajoutant les produits de toutes les probabilités situées sur les branches arrivant à I.

$$P(I) = P(I \cap B) + P(I \cap \overline{B}) = 0{,}13 \times 0{,}7166 + 0{,}2834 \times 0{,}31 = 0{,}18012 .$$

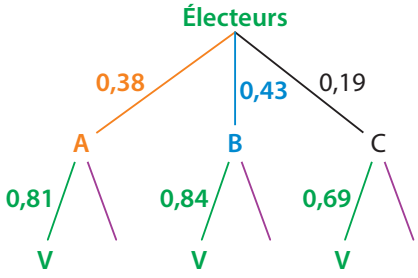
4 L'ensemble de référence est l'ensemble des étudiants admis en BTS ou IUT, il s'agit donc de la probabilité de l'évènement B conditionnée par l'événement I :

$$P_I(B) = \frac{P(I \cap B)}{P(I)} \approx 0{,}5172 .$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

37 Taux de participation à un scrutin

On peut construire un arbre pondéré représentant la situation.



Le groupe A comprenant les électeurs de moins de 35 ans, représente 38 % de l'ensemble des électeurs :

$$P(A) = 0{,}38 .$$

Le groupe B comprenant les électeurs de 35 à 60 ans, représente 43 % de l'ensemble des électeurs :

$$P(B) = 0{,}43 .$$

Le groupe C comprenant les électeurs de plus de 60 ans, représente 19 % de l'ensemble des électeurs :

$$P(C) = 0{,}19 .$$

On place ces probabilités sur les branches du premier niveau de l'arbre.

Les **taux de participation** pour chacun des groupes est : 81 % dans le groupe A, 84 % dans le groupe B, 69 % dans le groupe C. Il s'agit des probabilités de l'événement V conditionnées par les événements A, B, C.

$P_A(V) = 0{,}81$; $P_B(V) = 0{,}43$; $P_C(V) = 0{,}69$. Ces probabilités sont placées sur les branches du deuxième niveau.

1 a. L'ensemble de référence est l'univers de tous les électeurs, on calcule la probabilité $P(A \cap V)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par A et V .

$P(A \cap V) = P_A(V) \times P(A) = 0{,}38 \times 0{,}81 = 0{,}3078$.

b. Calculer le taux de participation, revient à calculer $P(V)$.

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(V)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à V,

$$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) + P(V \cap C)$$
$$= 0{,}38 \times 0{,}81 + 0{,}43 \times 0{,}84 + 0{,}19 \times 0{,}69 = 0{,}8001 .$$

Le taux de participation est d'environ 80 %.

2 L'ensemble de référence est l'ensemble des bulletins dépouillés, il s'agit donc de calculer la probabilité de $B \cup C$ conditionnée par V.

$$P_V(B \cup C) = \frac{P(B \cap V) + P(C \cap V)}{P(V)}$$
$$= \frac{0{,}43 \times 0{,}84 + 0{,}19 \times 0{,}69}{0{,}8001} \approx 0{,}6153 .$$

38 Lancement d'un nouveau produit

C est l'événement « la personne connait le produit » et A, l'événement « la personne achète le produit ».

La probabilité qu'une personne connaisse ce nouveau produit après x semaines de publicité est

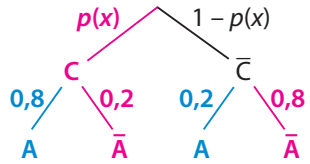
$$P(C) = p(x) = \frac{5x}{6x+4}$$ où x est un nombre réel positif.

Si une personne connait le produit après x semaines, la probabilité qu'elle achète ce produit est 0,8. Il s'agit de la probabilité A conditionnée par C ; $P_C(A) = \mathbf{0{,}8}$.

Si une personne ne connait pas le produit, la probabilité qu'elle achète ce produit est 0,2. Il s'agit de la probabilité de A conditionnée par $\overline{C}$; $P_{\overline{C}}(A) = \mathbf{0{,}2}$.

On complète les probabilités sur les branches d'un même niveau par complément à 1.

1 a. Voir ci-dessous.



b. On calcule la probabilité $P(A \cap C)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par C et A.

$$P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A) = 0{,}8 \times \frac{5x}{6x+4} = \frac{4x}{6x+4} .$$

2 C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(A)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à A.

$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \overline{C})$.

$$P(A) = 0{,}8 \times \frac{5x}{6x+4} + 0{,}2 \times \left(1 - \frac{5x}{6x+4}\right)$$
$$= \frac{4x}{6x+4} + 0{,}2\frac{x+4}{6x+4} = \frac{4x + 0{,}2x + 0{,}8}{6x+4}$$

$$q(x) = \frac{4{,}2x + 0{,}8}{6x+4} = \frac{2{,}1x + 0{,}4}{3x+2} .$$

3 a. Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $q(x) = \dfrac{2{,}1x + 0{,}4}{3x+2}$.

$$q'(x) = \frac{2{,}1(3x+2) - 3(2{,}1x + 0{,}4)}{(3x+2)^2} = \frac{3}{(3x+2)^2} .$$

$q'(x) > 0$ donc la fonction q est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. $q(x) > 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{2{,}1x + 0{,}4}{3x+2} > 0{,}5$

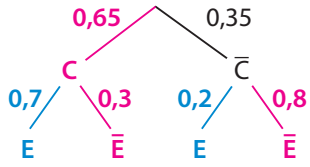
$\Leftrightarrow 2{,}1x + 0{,}4 > 1{,}5x + 1$

$\Leftrightarrow 0{,}6x > 0{,}6 \Leftrightarrow x > 1$.

Après la première semaine de publicité, plus de la moitié des personnes connaissent le produit.

39 Sondage pour la construction d'un barrage

1 a. C est l'événement « la personne interrogée est contre la construction » et E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».



Par lecture de l'énoncé, $P(C) = 0{,}65$ et $P_C(E) = \mathbf{0{,}70}$.

$P_{\overline{C}}(E)$ est la probabilité d'interroger une personne écologiste **parmi** celles favorables à la construction du barrage. D'après l'énoncé, $P_{\overline{C}}(E) = \mathbf{0{,}20}$.

On complète les probabilités sur les branches d'un même niveau, par complément à 1.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. Pour calculer la probabilité $P(E \cap C)$, on effectue le produit des probabilités situées sur les branches passant par C et E :

$$P(E \cap C) = P(C) \times P_C(E) = 0{,}65 \times 0{,}7 = 0{,}455 .$$

Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(E)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à E.

$$P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap \overline{C})$$
$$P(E) = 0{,}65 \times 0{,}7 + 0{,}35 \times 0{,}2 = 0{,}525 .$$

c. L'ensemble de référence est l'ensemble des écologistes.
Il s'agit de la probabilité de C conditionnée par E,

$$P_E(C) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{0{,}455}{0{,}525} = \frac{13}{15} .$$

2 a. On reconnait la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « La personne est contre la construction du barrage », de probabilité $p = P(C) = 0{,}65$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes contre la construction du barrage, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0{,}65)$.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}65^2 \times 0{,}35 = 0{,}443625 .$$

La probabilité d'obtenir deux personnes contre la construction du barrage est environ 0,44.

b. Soit n le nombre de fiches tirées. Y est la variable aléatoire égale au nombre de fiches tirées. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0{,}65)$.
L'événement « obtenir au moins la fiche d'une personne contre la construction du barrage » est l'évènement contraire de l'événement « obtenir aucune personne contre le barrage ».

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}35^n .$$

On résout l'inéquation $1 - 0{,}35^n > 0{,}999$.

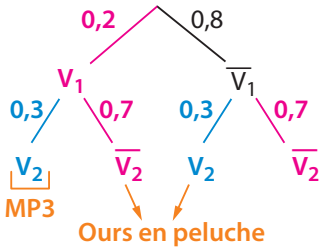
$$0{,}35^n < 0{,}001 \Leftrightarrow n \ln(0{,}35) < \ln(0{,}001)$$

or $\ln(0{,}35) < 0$, donc il faut changer le signe de l'inégalité lors de la division par $\ln(0{,}35)$.

$$n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}35)} \Leftrightarrow n > 6{,}58 \text{, soit } n > 7.$$

Il faut prendre plus de 7 fiches pour que la probabilité d'obtenir au moins une personne contre la construction du barrage soit supérieure à 0,999.

40 Remporter le gros lot



L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher. $P(V_1) = 0{,}2$.
L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher. $P_{V_1}(V_2) = P_{\overline{V_1}}(V_2) = 0{,}3$.

1 On calcule la probabilité de gagner un lecteur MP3 en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par V_1 et V_2 :

$$P(V_1 \cap V_2) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06 .$$

Donc, la probabilité de gagner un lecteur mp3 est $p = 0{,}06$.

2 On calcule la probabilité de gagner un ours en peluche en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches passant par V_1 et $\overline{V_2}$ ou $\overline{V_1}$ et V_2.

$$P(V_1 \cap \overline{V_2}) + P(\overline{V_1} \cap V_2) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}3$$
$$= 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38 .$$

La probabilité de gagner un ours en peluche est 0,38.

3 a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes gagnant un lecteur mp3.
n personnes participent à la loterie un jour donné et jouant une seule fois. On reconnait la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « la personne gagne un lecteur mp3 » de probabilité $p = 0{,}06$. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0{,}06)$.
L'événement « obtenir au moins une personne ayant gagné un lecteur mp3 » est l'événement contraire de l'événement « obtenir aucune personne ayant gagné un lecteur mp3 ».

$$p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}94^n .$$

b. On résout l'inéquation $1 - 0{,}94^n \geqslant 0{,}99$ qui équivaut à l'inéquation $0{,}94^n \leqslant 0{,}01$.

$$n \ln(0{,}94) \leqslant \ln(0{,}01) \text{ or } \ln(0{,}94) < 0$$

donc $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94}$, soit $n \geqslant 74$.

Au moins 74 personnes doivent jouer pour qu'il y ait 99 % de chances qu'au moins un des joueurs gagne un lecteur mp3.

41 Carte des desserts

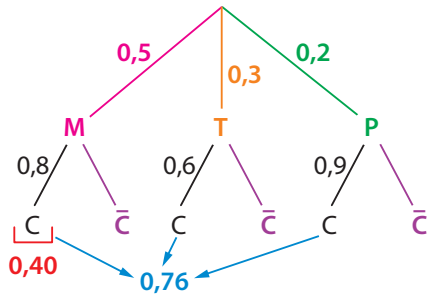
• M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
• T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
• P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
• C l'évènement : « Le client prend un café ».
Un assortiment de macarons est choisi par 50 % des clients, donc $P(M) = 0{,}5$.
Une part de tarte tatin est choisie par 30 % des clients donc $P(T) = 0{,}3$.
20 % des clients ne prennent pas de dessert, donc :
$P(P) = 0{,}20$. On place ces probabilités sur les branches du premier niveau.
Parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café, il s'agit de la probabilité de l'événement C conditionnée par l'événement M :

$$P_M(C) = 0{,}8 .$$

Parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café, il s'agit de la probabilité de l'événement C conditionnée par l'événement T : $P_T(C) = 0{,}6$.
Parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café, il s'agit de la probabilité de l'événement C conditionnée par l'événement P : $P_P(C) = 0{,}9$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

1 On peut compléter les probabilités sur les branches du niveau 2, par complément à 1.



2 **a.** L'ensemble de référence est l'univers. On calcule la probabilité $P(M \cap C)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par M et C.

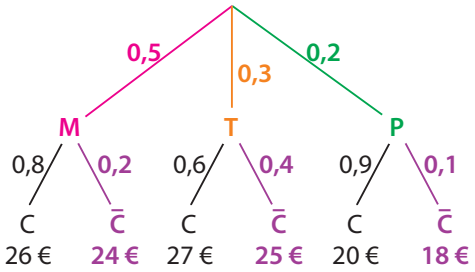
$P(M \cap C) = P_M(C) \times P(M) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}40$.

b. Les événements M, T et P forment une partition de l'ensemble des clients, on obtient la probabilité $P(C)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à C.

$P(C) = P(M \cap C) + P(T \cap C) + P(P \cap C)$
$= 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}9$
$= 0{,}4 + 0{,}18 + 0{,}18$.

$P(C) = 0{,}76$. La probabilité que le client prenne un café est égale à 0,76.

3 Soit X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par le client. Pour obtenir les valeurs de X, on complète l'arbre par les sommes dépensées.



Les probabilités d'obtention des différentes valeurs se calculent par le produit des probabilités situées sur les branches correspondantes.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	18	20	24	25	26	27
$P(X = x_i)$	0,02	0,18	0,10	0,12	0,4	0,18

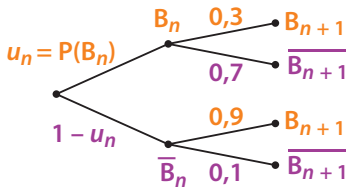
$E(X) = 0{,}02 \times 18 + 0{,}18 \times 20 + 0{,}10 \times 24 + 0{,}12 \times 25 + 0{,}4 \times 26 + 0{,}18 \times 27$
$= 24{,}62$.

Pour un grand nombre de clients, la somme moyenne dépensée est de 24,62 euros.

42 L'otarie jongleuse

1 **a.** $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0{,}3$; $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0{,}9$.

b. Voir schéma ci-dessous.



c. En suivant les branches arrivant à B_{n+1} :

$P(B_{n+1}) = 0{,}3 \times P(B_n) + 0{,}9 \times P(\overline{B_n})$.

2 On observe que les valeurs de $P(B_n)$ et $P(\overline{B_n})$ se stabilisent à 0,5625 et 0,4375 et ceci, quelles que soient les valeurs initiales.

3 **a.** $u_{n+1} = 0{,}3 \times u_n + 0{,}9(1 - u_n) = -0{,}6\,u_n + 0{,}9$.

b. Pour montrer que la suite (t_n) est géométrique, on exprime t_{n+1} en fonction de t_n :

$$t_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{16} = -0{,}6\,u_n + 0{,}9 - \frac{9}{16}$$
$$= -0{,}6\,u_n + \frac{27}{80} = -0{,}6\left(u_n - \frac{9}{16}\right) = -0{,}6\,t_n.$$

Donc, par définition, la suite (t_n) est géométrique, de raison $q = -0{,}6$ et de 1er terme $u_0 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Ainsi, pour tout entier n :

$$t_n = t_0 \times q^n = \frac{7}{16} \times (-0{,}6)^n = \frac{7}{16} \times (-1)^n \times (0{,}6)^n$$

et $$u_n = t_n + \frac{9}{16} = (-1)^n \times \frac{7}{16} \times (0{,}6)^n + \frac{9}{16}.$$

4 D'après le tableur (ou la calculatrice) :

$u_n < 0{,}6$ à partir de $n \geqslant 5$.

	A	B	C	D	E
1	n	$P(B_n)$	$P(\text{Non } B_n)$	$P_{B_n}(B_{n+1})$	$P_{\text{Non } B_n}(B_{n+1})$
2	0	1	0	0,3	0,9
26	24	0,562502	0,437498		
27	25	0,562499	0,437501		
28	26	0,562501	0,437499		
29	27	0,562500	0,437500		

5 **a.** $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}6)^n = 0$, car $0 < 0{,}6 < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{9}{16} = 0{,}5625$.

b. Quand on lance un grand nombre de fois de suite le ballon à l'otarie, elle a 9 chances sur 16 de le rattraper.

Le comportement à l'infini de la suite (u_n) est indépendante de la valeur du premier terme de la suite, car $(0{,}6)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Cette limite est égale à $\frac{9}{16}$ quelle que soit la probabilité que l'otarie rattrape le ballon au premier lancer.

43 Lancers successifs de dés

R est l'événement « le dé est rose ».

S est l'événement « on obtient six au lancer du dé ».

Le dé rose a deux fois plus de chance d'être choisi que le dé vert : $P(R) = 2P(\overline{R})$ et les événements $\overline{R}$ et R forment une partition de l'univers, donc $P(\overline{R}) + P(R) = 1$, soit $P(\overline{R}) + 2P(\overline{R}) = 1$.

D'où $P(\overline{R}) = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{2}{3}$.

Le dé rose cubique est parfaitement équilibré et les faces sont numérotées de 1 à 6. Il s'agit donc la probabilité de l'événement S conditionnée par l'événement R :

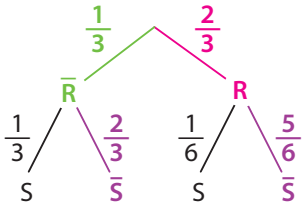
$$P_R(S) = \frac{1}{6}.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Le dé vert cubique a deux faces portant le numéro 6 et les autres le numéro 2. Il s'agit donc la probabilité de l'événement S conditionnée par l'événement $\overline{R}$:

$$P_{\overline{R}}(S)=\frac{1}{3}.$$

On place ces probabilités sur les branches de niveau 2. On complète les autres branches par complément à 1.



b. L'ensemble de référence est l'univers, on calcule donc la probabilité $P(S\cap R)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par R et S ;

$$P(S\cap R)=P_R(S)\times P(R)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}.$$

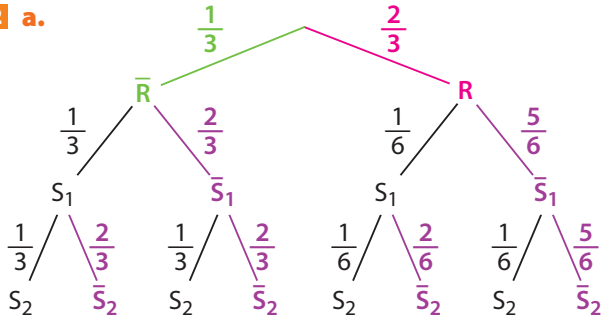
c. Les événements $\overline{R}$ et R forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(S)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à S.

$$P(S)=P(S\cap R)+P(S\cap\overline{R})=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

d. L'ensemble de référence est l'événement S. il s'agit de la probabilité de l'événement $\overline{R}$ conditionnée par l'événement S :

$$P_S(\overline{R})=\frac{P(S\cap\overline{R})}{P(S)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}.$$

2 a.



b. Les lancers successifs d'un même dé sont une répétition de deux épreuves identiques et indépendantes. D'après le principe multiplicatif, pour obtenir la probabilité d'obtenir deux fois le six, on effectue le produit des probabilités situées sur les branches passant deux fois par S, donc par S_1 et S_2.

Pour obtenir la probabilité d'obtenir deux fois un six **et** d'avoir choisi le dé rose, on calcule la probabilité $P(R\cap S_1\cap S_2)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par R, S_1 et S_2.

$$P(R\cap S_1\cap S_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}.$$

c. Pour obtenir la probabilité d'obtenir deux fois un six **et** d'avoir choisi le dé vert, on calcule la probabilité $P(\overline{R}\cap S_1\cap S_2)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par $\overline{R}$, S_1 et S_2 :

$$P(\overline{R}\cap S_1\cap S_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}.$$

De plus, les événements $\overline{R}$ et R forment une partition de l'univers

$$P(S_1\cap S_2)=P(R\cap S_1\cap S_2)+P(\overline{R}\cap S_1\cap S_2)$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{27}=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}.$$

d. L'ensemble de référence est l'événement $S_1\cap S_2$. Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $\overline{R}$ conditionnée par l'événement $S_1\cap S_2$:

$$P_{S_1\cap S_2}(\overline{R})=\frac{P(\overline{R}\cap S_1\cap S_2)}{P(S_1\cap S_2)}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{18}}=\frac{1}{27}\times 18=\frac{2}{3}.$$

3 On lance *n* fois le dé choisi.

Les événements $\overline{R}$ et R forment une partition de l'univers. Les lancers successifs du dés étant une répétition de *n* épreuves identiques et indépendantes, d'après le principe multiplicatif, on obtient la probabilité d'obtenir *n* fois le six en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches passant par R , S_1 , S_2 , … S_n ou $\overline{R}$, S_1 , S_2 , … S_n .

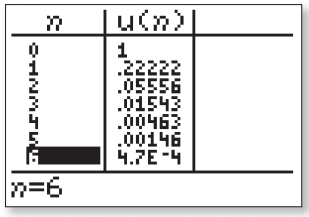
$$P(S_1\cap S_2\cap\ldots S_n)=P(R\cap S_1\cap S_2\cap\ldots S_n)+P(\overline{R}\cap S_1\cap S_2\cap\ldots S_n)$$
$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

4 a. Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $\overline{R}$ conditionnée par l'événement $S_1\cap S_2\cap\ldots S_n$:

$$P_{S_1\cap S_2\cap\ldots S_n}(\overline{R})=\frac{P(\overline{R}\cap S_1\cap\ldots S_n)}{P(S_1\cap S_2\cap\ldots S_n)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}.$$

b. $p_n\leqslant 0{,}001\iff\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\leqslant 0{,}001$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $n\geqslant 6$.

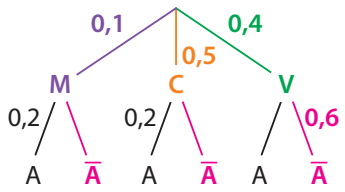


© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Accompagnement personnalisé (p. 191)

Exercice guidé

44 **1** **a.** On repère dans l'énoncé les événements formant une partition de l'univers : M, C, V.



b. Parmi les conducteurs de motos, 20 % sont **abonnés** donc $P_M(A) = 0{,}2$.

2 **a.** On calcule la somme des produits des probabilités placées sur les branches arrivant à **A** :

$P(A) = P(A \cap M) + P(A \cap C) + P(A \cap V)$
$= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}6) = 0{,}28$.

b. L'ensemble de référence est l'ensemble **A** des abonnés. On demande donc de calculer une probabilité conditionnée par **A** :

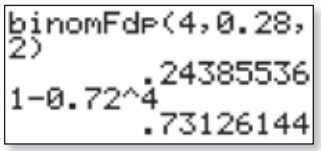
$$P_A(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0{,}02}{0{,}28} = \frac{1}{14}.$$

3 On a la répétition de 4 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de probabilité de succès : $p = P(A) = 0{,}28$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de véhicules abonnés. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}28)$.

a. D'après la calculatrice : $P(X = 2) \approx 0{,}244$.

b. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - (0{,}72)^4$
$\approx 0{,}731$.



4 **a.** Soit S la variable aléatoire égale au montant payé par le conducteur. $4 - 0{,}2 \times 4 = 3{,}2$.

D'où : $P(S = 3{,}20) = P(C \cap A) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}10$.

b. La loi de probabilité de S s'obtient à l'aide de l'arbre précédent. Les valeurs de S tiennent compte ou non de la réduction.

Montant s_i	1,60	2	3,20	4	2,80	3,50
$P(S = s_i)$	0,02	0,08	0,1	0,4	0,16	0,24

c. L'espérance de S est :

$E(S) = 1{,}6 \times 0{,}02 + 2 \times 0{,}08 + 3{,}2 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}4$
$+ 2{,}8 \times 0{,}16 + 3{,}5 \times 0{,}24 = 3{,}4$.

La somme payée en moyenne par véhicule est de 3,40 €.

Revoir les outils de base

45 Savoir utiliser les propriétés de la moyenne

1 La dépense moyenne est égale à :

$$\overline{x} = \frac{2 \times 33 + 65 + 3 \times 19}{2 + 1 + 3} = \frac{188}{6} = \frac{94}{3}.$$

La dépense moyenne d'Anouchka est d'environ 31,33 €.

2 On applique une remise de x euros sur chacun prix, donc le prix moyen est diminué de x euros. La nouvelle dépense moyenne d'Anouchka est $31{,}33 - x$ euros.

3 On applique une remise de 20 % sur chacun des prix. Chaque prix est alors multiplié par 0,8, donc, la dépense moyenne est multipliée par 0,8.

La nouvelle dépense moyenne est égale à :

$31{,}33 \times 0{,}8 = 25{,}064$ soit environ 25 euros.

4 On résout l'inéquation :

$31{,}33 - x \leqslant 25{,}064 \Leftrightarrow x \geqslant 6{,}266$.

Le montant des bons de réduction doit être supérieur à 6,27 euros pour que leur utilisation soit plus avantageuse que la remise de 20 %.

46 Savoir appliquer les propriétés de la moyenne au calcul de l'espérance

1 $E(X) = 0 \times 0{,}45 + 2 \times 0{,}35 + 3 \times 0{,}10 + 5 \times 0{,}09 + 10 \times 0{,}01$
$= 1{,}55$.

Le gain moyen du joueur est égal à 1,55 euros.

2 Chacun des gains est multiplié par 2 donc le gain moyen est multiplié par 2. $E(Y) = 3{,}10$.

Le nouveau gain moyen est égal à 3,10 euros.

3 Le joueur a misé m euros, donc chaque gain est diminué de m. $Z = X - m$.

Le gain moyen est diminué de m euros.

$E(Z) = E(X) - m = 1{,}55 - m$.

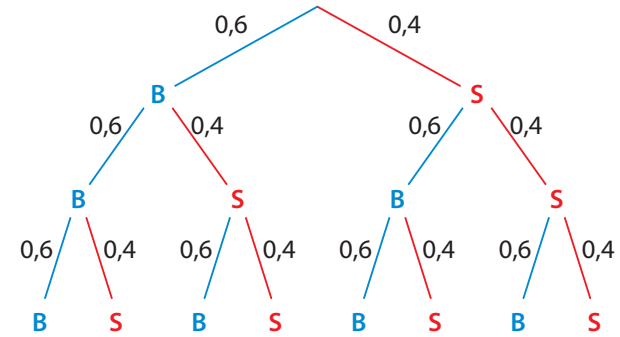
Le jeu est équitable lorsque :

$E(Z) = 0 \Leftrightarrow 1{,}55 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1{,}55$.

Le joueur doit miser 1,55 euros au début du jeu pour que le jeu soit équitable.

47 Savoir reconnaître et utiliser les coefficients binomiaux

1 **a.** On construit un arbre à trois niveaux.



b. Il y a un seul chemin comportant trois succès.

$\binom{3}{3} = 1$.

Il y a trois chemins comportant deux succès.

$\binom{3}{2} = 3$.

Il y trois chemins comportant un seul succès.

$\binom{3}{1} = 3$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0{,}4)$,

$P(X=2)=\binom{3}{2}\times 0{,}4^2\times 0{,}6=0{,}288$.

2 On ajoute un niveau à l'arbre pondéré.

a. Le nombre de chemins contenant exactement 2 succès sur un arbre à 4 niveaux est $\binom{4}{2}$.

Le nombre de chemins contenant exactement 3 succès sur un arbre à 4 niveaux est $\binom{4}{3}$.

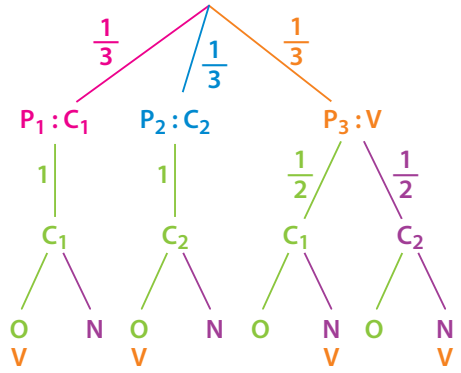
b. $\binom{4}{2}=6$; $\binom{4}{3}=4$.

4 Combinaison 2 6
4 Combinaison 3 4

Pour aller plus loin

48 Le problème de Monty Hall

Le candidat choisit d'ouvrir une des trois portes. Elles sont équiprobables.



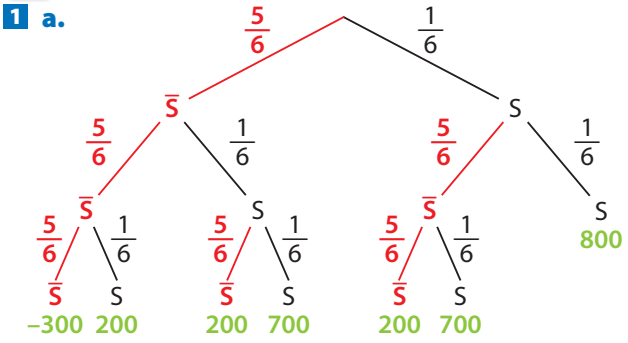
Le présentateur ouvre une porte différente du choix du joueur et qui ne donne pas sur la voiture, par exemple : Si le candidat a choisi P_3 alors, le présentateur ouvre soit P_1 soit P_2. Le joueur sait qu'il y a la chèvre C_1 en P_1 ou C_2 en P_2.

Puis, le candidat change ou non son premier choix, par exemple : Si le candidat a choisi P_3 et le présentateur a ouvert P_2, le joueur peut changer ou non son choix. S'il change, il demande P_1 et la chèvre C_1 apparait. S'il ne change pas, il gagne la voiture. Si le candidat change d'avis par rapport à son premier choix, la probabilité qu'il gagne la voiture est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

S'il ne modifie pas son choix, la probabilité qu'il gagne la voiture est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

49 Espérance de gain

1 a.



b. Lila-Rose gagne 400 € si un « six » apparait et perd 100 € si un « non six » apparait. On définit X, la variable aléatoire égale au gain algébrique de Lila-Rose.

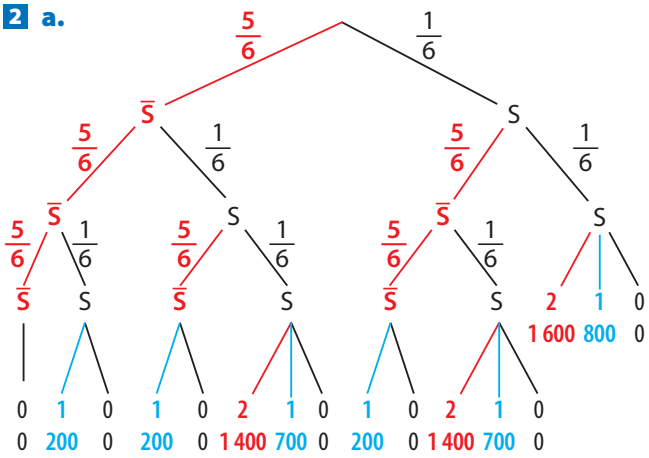
Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $\{-300 ; 200 ; 700 ; 800\}$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	–300	200	700	800
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

b. $E(X)\approx -49{,}54$. $E(X)\neq 0$, le jeu n'est pas équitable.

2 a.



b. $P(Y=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$+2\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1\,007}{1296}$.

y_i	$P(Y=y_i)$
0	$P(Y=0)\approx 0{,}777$
200	$3\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\approx 0{,}1736$
700	$2\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)\approx 0{,}01543$
800	$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\approx 0{,}00925$
1 400	$2\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)\approx 0{,}0154$
1 600	$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\approx 0{,}00925$

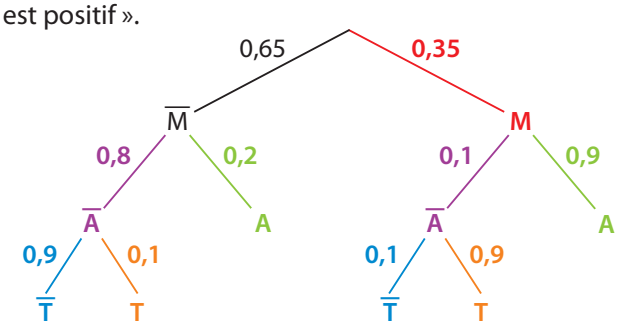
c. $E(Y)\approx 89{,}28$.

Lila-Rose peut espérer gagner en moyenne environ 89 euros.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

50 Test de dépistage en agriculture

On note M l'événement « Le plan est malade », A l'événement « le plant est arraché », T l'événement « le test est positif ».



Dans le champ d'un producteur, 35 % des plants sont malades, $P(M) = 0{,}35$.

Parmi les plants malades, la probabilité qu'il n'arrache pas un plant, est $P_M(\overline{A}) = 0{,}1$.

Parmi les plants sains, la probabilité qu'il arrache le plant est $P_{\overline{M}}(A) = 0{,}2$.

Parmi les plants malades non arrachés, la probabilité que le test soit positif est $P_{M\cap\overline{A}}(T) = 0{,}9$.

Parmi les plants sains non arrachés, la probabilité que le test soit négatif est $P_{\overline{M}\cap\overline{A}}(\overline{T}) = 0{,}9$.

$$P_{\overline{A}\cap T}(M) = \frac{P(M\cap\overline{A}\cap T)}{P(\overline{A}\cap T)}$$

Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.

$$P_{\overline{A}\cap T}(M) = \frac{P(M\cap\overline{A}\cap T)}{P(M\cap\overline{A}\cap T)+P(\overline{M}\cap\overline{A}\cap T)}$$
$$= \frac{0{,}0315}{0{,}0315+0{,}052} = \frac{63}{167} \approx 0{,}377.$$

Parmi les plan non arrachés ayant un test est positif, environ 37,7 % sont malades.

Soit p la proportion de plants malades dans le champ,

$$P_{\overline{A}\cap T}(M) = \frac{0{,}09p}{0{,}09p+0{,}08(1-p)} = \frac{0{,}09p}{0{,}01p+0{,}08} = \frac{9p}{p+8}.$$

On résout $\dfrac{9p}{p+8} \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 9p \geqslant 0{,}5p+4$

$$8{,}5p \geqslant 4 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{8}{17}.$$

La proportion de plants malades dans le champ doit être supérieure à 47 %.

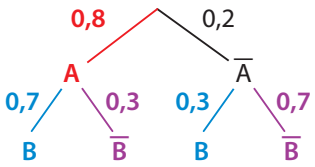
Réussir au Bac (p. 194)

51 Petite ou grande raquette ?

A : « les courts sont occupés » ;

B : « le couple joue au ping-pong ».

1 a.



b. La probabilité que tous les courts soient occupés quand on n'a pas réservé est $P(A) = 0{,}8$.

Si les courts sont occupés, il joue au ping-pong dans 70 % des cas : $P_A(B) = 0{,}70$.

Si les courts ne sont pas tous occupés, il joue au ping-pong dans 30 % des cas : $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}30$.

c. On calcule la probabilité $P(A\cap B)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches de l'arbre $P(A\cap B) = 0{,}70\times 0{,}80 = 0{,}56$.

d. Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. On calcule la probabilité $P(B)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à B.

$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$
$= 0{,}7\times 0{,}8 + 0{,}3\times 0{,}2 = 0{,}56 + 0{,}06 = 0{,}62$.

2 On calcule $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}56}{0{,}62} = \dfrac{28}{31}$.

3 On reconnait la répétition de trois épreuves de Bernoulli de succès « le couple joue au ping-pong » de probabilité $p = 0{,}62$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de couples jouant au ping-pong.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}62)$.

$P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}38^2 = 0{,}8556$.

52 Citoyen européen

1 H : « la réponse est celle d'un homme » ;

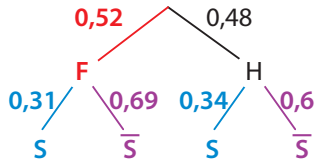
F : « la réponse est celle d'une femme » ;

S : « la réponse est un système de protection social européen ».

$P(F) = 0{,}52$ donc $P(H) = 0{,}48$.

31 % des femmes interrogées et 34 % des hommes interrogés ont répondu qu'un système européen de protection sociale serait l'élément qui renforcerait le plus leur sentiment d'être un citoyen européen.

On a donc $P_F(S) = 0{,}31$ et $P_H(S) = 0{,}34$.



Les événements F et H forment une partition de l'univers. On calcule la probabilité $P(S)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à S.

$P(S) = P(F\cap S) + P(H\cap S)$
$= 0{,}31\times 0{,}52 + 0{,}34\times 0{,}48$
$P(S) = 0{,}3244$.

2 On a la répétition de trois épreuves de Bernoulli de succès « la réponse est un système de protection social européen » de probabilité $p = P(S) = 0{,}3244$.

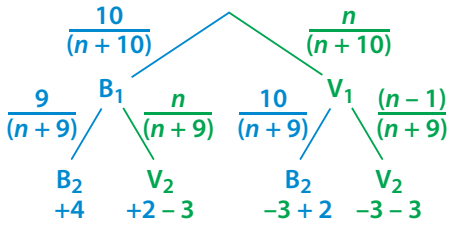
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}3244)$.

$P(X\geqslant 2) = P(X=2) + P(X=3)$
$= 3\times 0{,}3244^2\times 0{,}6756 + 0{,}3244^3$.
$P(X\geqslant 2) \approx 0{,}2474$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

53 Espérance de gain dans un jeu vidéo

1 a. Les boules ne sont pas remises dans le jeu.
Il y a $n+10$ boules au départ sur l'écran.
Si le joueur en atteint une, il en reste $n+9$.



X est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. L'événement $\{X=-1\}$ est réalisé lorsque B_1 et V_2 ou V_1 et B_2 sont réalisés.

b. $P(B_1 \cap V_2)=\dfrac{10n}{(n+10)(n+9)}$. D'où :

$$P(X=-1)=P(B_1 \cap V_2)+P(B_2 \cap V_1)$$
$$=\frac{10n}{(n+10)(n+9)}+\frac{10n}{(n+10)(n+9)}$$
$$=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

c. Les valeurs prises par le gain algébrique X du joueur sont : -6 ; -1 et 4. En suivant les branches de l'arbre, on calcule les probabilités de chacun des gains.
Tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	-6	-1	4
$P(X=x_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$	$\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$	$\dfrac{90}{(n+10)(n+9)}$

L'espérance de gain du joueur est :

$$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$

On résout $E(X)>0 \Leftrightarrow -6n^2-14n+360>0$

$\Leftrightarrow -9<n<\dfrac{20}{3}$. D'où $n<7$.

2 Répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès $p=\dfrac{1}{4}$.

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20;\dfrac{1}{4}\right)$.

a. $P(Y=2)=\binom{20}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{18}\approx 0{,}067$.

b. $P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}\approx 0{,}997$.

c. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N;\dfrac{1}{4}\right)$.

$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N}$.

On résout l'inéquation :

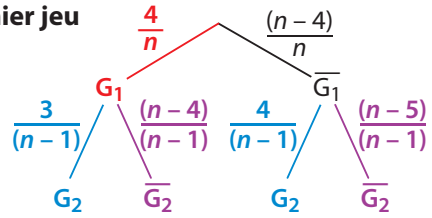
$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^N>0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^N<0{,}01.$$

Or $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)<0 \Leftrightarrow N>\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)}$, donc $N\geqslant 17$.

17 boules au minimum doivent apparaître pour que la probabilité d'atteindre une boule bleue soit supérieure à 0,99.

54 Tirage avec remise ou sans remise

1 Premier jeu



On tire deux billets d'une enveloppe contenant n billets, successivement sans remise.

$P(G_1)=\dfrac{4}{n}$; $P_{G_1}(G_2)=\dfrac{3}{n-1}$; $P_{\overline{G_1}}(G_2)=\dfrac{4}{n-1}$.

$$P(G_1\cap\overline{G_2})+P(\overline{G_1}\cap G_2)$$
$$=\frac{4}{n}\times\frac{n-4}{n-1}+\frac{n-4}{n}\times\frac{4}{n-1}=\frac{8n-32}{n(n-1)}.$$

La probabilité d'obtenir exactement un billet gagnant est égale à $\dfrac{8(n-4)}{n(n-1)}$.

2 Second jeu

a. On tire successivement et avec remise deux billets dans l'enveloppe. On reconnait la répétition de deux épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « obtenir un billet gagnant », de probabilité $p=\dfrac{4}{n}$.

On définit X la variable aléatoire égale au nombre de billets gagnants, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2;\dfrac{4}{n}\right)$.

b. $P(X=1)=\binom{2}{1}\times\left(\dfrac{4}{n}\right)\times\left(\dfrac{n-4}{n}\right)=\dfrac{8(n-4)}{n^2}$.

c. L'événement « obtenir au moins un billet gagnant » est l'événement contraire de l'événement « obtenir aucun billet gagnant » :

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\dfrac{n-4}{n}\right)^2$.

3 a. Pour tout réel $x\in[4;+\infty[$,

$$f(x)-g(x)=\frac{8(x-4)}{x(x-1)}-\frac{8(x-4)}{x^2}$$
$$=\frac{8x(x-4)-8(x-1)(x-4)}{x^2(x-1)}=\frac{8(x-4)}{x^2(x-1)}.$$

Sur l'intervalle $[4;+\infty[$, on a $x\geqslant 4$, donc :
$f(x)-g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$.

b. Le premier jeu est donc plus avantageux.

4 a. Pour tout réel $x\in[4;+\infty[$, on a :

$$\frac{8(x-4)}{x^2(x-1)}-\frac{8}{x^2}=\frac{8(x-4)}{x^2(x-1)}-\frac{8(x-1)}{x^2(x-1)}=-\frac{24}{x^2(x-1)}.$$

Ce quotient est négatif, pour tout réel $x\in[4;+\infty[$, donc on a :

$$\frac{8(x-4)}{x^2(x-1)}-\frac{8}{x^2}<0 \Leftrightarrow \frac{8(x-4)}{x^2(x-1)}<\frac{8}{x^2}.$$

b. Pour obtenir, $f(x)-g(x)<0{,}01$, il suffit de résoudre :

$$\frac{8}{x^2}<0{,}01 \Leftrightarrow x^2>800$$

puisque $x>0$, on obtient $x>20\sqrt{2}$.

c. Il faut placer au moins 29 billets dans l'enveloppe pour que les deux jeux soient considérés comme équivalents.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

5 **a.** Pour le premier jeu
Loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$	$\frac{8n-32}{n(n-1)}$	$\frac{12}{n(n-1)}$

$E(X)=-\frac{8}{n(n-1)}$.

b. Pour le second jeu, $E(X)=2\times\frac{4}{n}=\frac{8}{n}$.

Après un grand nombre de parties, le premier jeu est défavorable au joueur, alors que le second jeu est favorable au joueur.

55 Approche de la loi binomiale

1 **a.** On reconnaît la répétition de 1 000 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « obtenir une feuille utilisable », de probabilité $p=0{,}8$.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000\,;0{,}8)$.
$E(X)=1\,000\times0{,}8=800$.

b. $V(X)=np(1-p)$
$=1\,000\times0{,}8\times0{,}2$
$=160$.
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=4\sqrt{10}$.

binomFdp(1000,0.8,775)
.0045352322
binomFdp(1000,0.8,800)
.0315253612

c. $P(X=775)\approx0{,}0045$;
$P(X=800)\approx0{,}0315$;
$P(X=825)\approx0{,}0044$;
$P(775\leqslant X\leqslant825)\approx0{,}956$.

binomFdp(1000,0.8,825)
.0044083089
binomFRép(1000,0.8,825)-binomFRép(1000,0.8,774)
.9563078925

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{320\pi}}e^{\frac{-(x-800)^2}{320}}$.

a. $f'(x)=-\frac{2(x-800)}{320\sqrt{320\pi}}e^{\frac{-(x-800)^2}{320}}$.
$f'(x)$ est du signe de $-(x-800)$.
Sur l'intervalle $]-\infty\,;800]$, $f'(x)\geqslant0$, donc f est croissante, et sur l'intervalle $[800\,;+\infty[$, $f'(x)\leqslant0$, donc f est décroissante. f' s'annule et change de signe en $x=800$, donc f admet un extremum qui ici est un maximum.
b. $f(800)\approx0{,}0315$, donc $f(800)\approx P(X=800)$.
$f(775)\approx0{,}00448$, donc $f(775)\approx P(X=775)$.
$f(825)\approx0{,}00447$, donc $f(825)\approx P(X=825)$.

X	Y1
800	.03154
775	.00447
825	.00447

X=

c. Tableau de variation

x	$-\infty$		800		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{320\pi}}$	↘	

3 On peut approcher le calcul de la probabilité $P(775\leqslant X\leqslant825)$ par l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=775$ et $x=825$.



$P(775\leqslant X\leqslant825)\approx\int_{775}^{825}\frac{1}{\sqrt{320\pi}}e^{\frac{-(x-800)^2}{320}}dx$.

D'après la calculatrice, $P(775\leqslant X\leqslant825)\approx0{,}952$.

56 Sportif ou mélomane ?

Partie A

S : « la question porte sur le sport » ; *(erreur de notation dans l'édition 1)*
M : « la question porte sur la musique » ;
E : « Océane répond correctement à la question posée ».
On sait que :
Un tiers des questions portent sur le thème *Sport*, les autres portent sur le thème *Musique* donc
$P(S)=\frac{1}{3}$ et $P(M)=\frac{2}{3}$.

• la probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Sport* est $P_S(E)=\frac{1}{2}$.

• la probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Musique* est $P_M(E)=\frac{3}{4}$.

1 On peut construire un arbre de probabilité. On calcule la probabilité $P(M\cap E)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par M et E.
$P(M\cap E)=P_M(E)\times P(M)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$.

2 Les événements S et M forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(E)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à E.
$P(E)=P(M\cap E)+P(S\cap E)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

3 L'ensemble de référence est maintenant l'événement $\overline{E}$, on calcule la probabilité de S conditionnée par $\overline{E}$:
$P_{\overline{E}}(S)=\frac{P(S\cap\overline{E})}{P(\overline{E})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

4 On reconnaît la répétition de quatre épreuves de Bernoulli de succès l'événement E, de probabilité $p=P(E)=\frac{2}{3}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par Océane, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4\,;\frac{2}{3}\right)$.

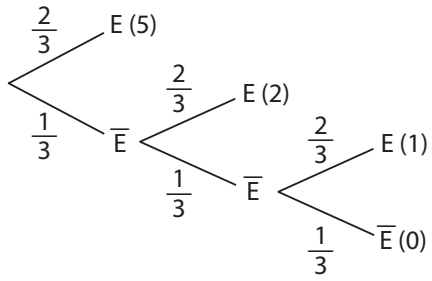
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

L'événement « Océane répond correctement à une question au moins » est l'événement contraire de l'événement « Océane ne répond correctement à aucune question ».

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4$ soit $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}9876$.

Partie B

1



2 La loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au nombre de points marqués par Océane est obtenue en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches arrivant à chacune des valeurs prises par Y : 0 ; 1 ; 2 ; 5.

Points gagnés y_i	0	1	2	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

3 $E(X) = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{27} + 2 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{27} + \frac{12}{27} + \frac{90}{27} = \frac{104}{27}$ soit $E(X) \approx 3{,}85$.

Après un grand nombre de répétitions du jeu, Océane peut espérer gagner environ 3,85 points.

57 Préparer le printemps

A : « Arielle a choisi le sac 1 » ;
B : « Arielle a choisi le sac 2 » ;
Jn : « Arielle obtient *n* fleurs jaunes ».

1 On suppose qu'Arielle choisit le sac 1. Elle tire successivement avec remise un bulbe du sac parmi 50 bulbes. La probabilité pour qu'un bulbe du sac 1 donne un narcisse jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

a. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du sac 1, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(50 ; \frac{1}{4}\right)$.

b. $E(X) = 50 \times \frac{1}{4} = 12{,}5$.

c. $P(X = 15) \approx 0{,}089$.

d. $P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10)$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X > 10) \approx 0{,}738$.

e. La probabilité qu'Arielle obtienne *n* fleurs jaunes en ayant tiré 50 bulbes du sac 1 est égale à :

$P(X = n) = \binom{50}{n} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

2 **a.** Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fleurs jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du sac 2, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(50 ; \frac{1}{2}\right)$.

$P(J_n \cap B) = P(Y = n)$

$= \binom{50}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}}$.

b. $P(J_n \cap A) = P(X = n) = \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

c. Les événements A et B forment une partition de l'univers :
$P(J_n) = P(J_n \cap A) + P(J_n \cap B)$

$= \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}}$

$= \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}$.

3 **a.** Arielle a obtenu *n* fleurs jaunes, la probabilité que ces fleurs viennent du sac 1 est :

$P_{J_n}(A) = \frac{P(J_n \cap A)}{P(J_n)} = \frac{\binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}}$

$= \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} = \frac{3^{50}}{3^{50} + 2^{50} \times 3^n}$.

b. $p_n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 3^{50} \geqslant 0{,}9(3^{50} + 2^{50} \times 3^n)$
soit $0{,}1 \times 3^{50} \geqslant 0{,}9 \times 2^{50} \times 3^n$.

$\frac{0{,}1 \times 3^{50}}{0{,}9 \times 2^{50}} \geqslant 3^n \Leftrightarrow \ln \frac{3^{50}}{9 \times 2^{50}} \geqslant n \ln 3$.

$n \leqslant \frac{\ln \frac{3^{50}}{9 \times 2^{50}}}{\ln 3}$.

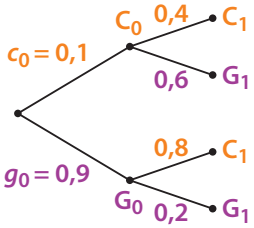
D'où $n \leqslant 16{,}45$.

Arielle a obtenu moins de 16 fleurs jaunes, la probabilité que les bulbes viennent du sac 1 est supérieure à 0,9.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$.

58 Vélos en libre service

C_n : « le vélo est au centre-ville après avoir été emprunté par *n* usagers ». G_n : « le vélo est à la gare après avoir été emprunté par *n* usagers ».
On note : $c_n = P(C_n)$ et $g_n = P(G_n)$.

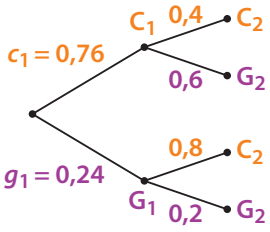


1 **a.** La probabilité qu'un vélo soit déposé à l'agence du centre-ville par le premier usager, sachant qu'il a été pris à la gare, est $P_{G_0}(C_1) = 0{,}8$.

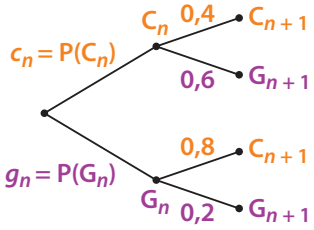
b. Les événements C_0 et G_0 forment une partition de l'univers. La probabilité qu'un vélo soit déposé au centre-ville, après avoir été emprunté par un usager au centre-ville ou à la gare, s'obtient en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à C_1.
$P(C_1) = P(C_1 \cap C_0) + P(C_1 \cap G_0) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}9$
$= 0{,}04 + 0{,}72 = 0{,}76$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. $P(G_1) = 1 - P(C_1) = 0{,}24$, à l'aide de l'arbre ci-dessous,
$P(C_2) = P(C_2 \cap C_1) + P(C_2 \cap G_1)$
$= P_{C_1}(C_2) \times P(C_1) + P_{G_1}(C_2) \times P(G_1)$
$P(C_2) = 0{,}4 \times 0{,}76 + 0{,}8 \times 0{,}24$
$= 0{,}496$.



2 **a.** Voir ci-dessous.



b. En effectuant le produit des probabilités situées sur les branches arrivant à C_{n+1}, on obtient pour tout entier naturel n :
$c_{n+1} = P(C_{n+1})$
$= P(C_{n+1} \cap C_n) + P(C_{n+1}) \cap G_n)$
$= 0{,}4 \times c_n + 0{,}8 \times g_n$.
Or $g_n = 1 - c_n$ donc :
$c_{n+1} = 0{,}4 \times c_n + 0{,}8 \times (1 - c_n) = -0{,}4\,c_n + 0{,}8$.

3 **a.** Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = c_{n+1} - \frac{4}{7} = -0{,}4\,c_n + 0{,}8 - \frac{4}{7} = -0{,}4\,c_n + \frac{8}{35}$$
$$= -0{,}4\left(c_n - \frac{4}{7}\right) = -0{,}4\,v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison –0,4 et de premier terme $v_0 = 0{,}1 - \frac{4}{7} = -\frac{33}{70}$.

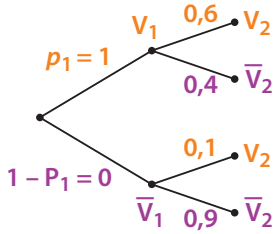
b. Pour tout entier naturel n, $v_n = -\frac{33}{70} \times (-0{,}4)^n$
d'où $c_n = \frac{4}{7} - \frac{33}{70} \times (-0{,}4)^n$.

c. $c_{10} = \frac{4}{7} - \frac{33}{70} \times (-0{,}4)^{10} \approx 0{,}5714$.

d. Pour tout entier naturel n, $c_n = \frac{4}{7} - \frac{33}{70} \times (-1)^n \times (0{,}4)^n$
or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \frac{4}{7}$.
La probabilité que le vélo soit au centre-ville après avoir été emprunté par un très grand nombre d'usagers est égale à $\frac{4}{7}$.

59 Fouilles archéologiques

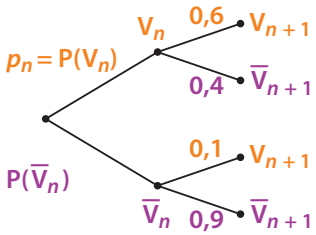
V_n : « le n-ième sondage est positif ». $P(V_n) = p_n$.
Si un sondage est positif, le suivant a une probabilité d'être aussi positif égale à $P_{V_n}(V_{n+1}) = 0{,}6$.
Si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité d'être aussi négatif égale à $P_{\overline{V_n}}(\overline{V_{n+1}}) = 0{,}9$.



1 **a.** V_1 et $\overline{V_1}$ forment une partition de l'univers, pour calculer la probabilité $P(V_2)$, on ajoute les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à V_2.
$P(V_2) = P(V_2 \cap V_1) + P(V_2 \cap \overline{V_1}) = 1 \times 0{,}6 + 0 \times 0{,}9 = 0{,}6$.

b. On en déduit que $P(\overline{V_2}) = 0{,}4$; de même que pour $P(V_2)$, d'où :
$P(V_3) = P(V_3 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V_2})$
$= P_{V_1}(V_3) \times P(V_2) + P_{\overline{V_2}}(V_3) \times P(\overline{V_2})$
$= 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}4$
$= 0{,}4$.

2 **a.** Voir ci-dessous.



b. On ajoute les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à V_{n+1} :
$p_{n+1} = P(V_{n+1})$
$= P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n})$
$= 0{,}6 \times p_n + 0{,}1 \times (1 - p_n) = 0{,}5\,p_n + 0{,}1$.

3 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = p_n - 0{,}2$.

a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}2 = 0{,}5\,p_n + 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}5\,p_n - 0{,}1$
$= 0{,}5(p_n - 0{,}2) = 0{,}5\,u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}2 = 0{,}8$ et de raison 0,5.

b. $u_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1}$, d'où $p_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}2$.

c. $p_{10} \approx 0{,}20156$.

d. $0 < 0{,}5 < 1$ et $0{,}8 > 0$, donc la suite (u_n) est décroissante. La suite (p_n) a même variation que la suite (u_n), donc elle est décroissante.

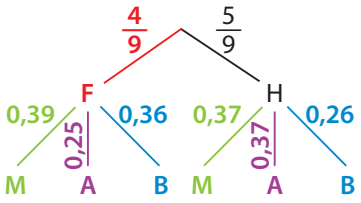
e. $0 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}2$.
Lorsqu'on effectue un grand nombre de sondages, la probabilité qu'un sondage soit positif tend vers 0,2.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réinvestir… (p. 256)

60 … en sociologie

Les français et la lecture



1 D'après l'énoncé $P(H)=\frac{150}{270}=\frac{5}{9}$ et $P(F)=\frac{4}{9}$.

2 **a.** On calcule la probabilité $P(H\cap A)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par H et A.

$P(H\cap A)=\frac{5}{9}\times 0{,}37=\frac{37}{180}$.

b. Les événements H et F forment une partition de l'univers. On calcule $P(B)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à B.

$P(B)=P(B\cap F)+P(B\cap H)$

$=\frac{4}{9}\times 0{,}36+\frac{5}{9}\times 0{,}26=\frac{137}{450}$.

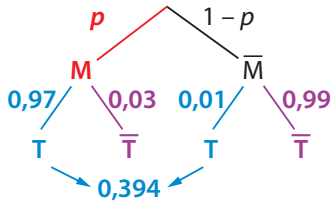
$P(B)\approx 0{,}3044$.

c. On calcule la probabilité de l'événement H conditionnée par l'événement B.

$P_B(H)=\frac{P(B\cap H)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}\times 0{,}26}{\frac{137}{450}}=\frac{65}{137}$.

61 … en médecine

Test de dépistage



1 Voir ci-contre.

M : « la personne est atteinte de la maladie » et T : « la personne choisie a un test positif ».

2 **a.** La sensibilité du test est $P_M(T)=0{,}97$.

b. La spécificité du test est $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}99$.

3 Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. On calcule la probabilité $P(T)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à T.

$P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap\overline{M})=0{,}97p+0{,}01(1-p)$

$=0{,}96p+0{,}01$.

Or $P(T)=0{,}394$; donc $p=0{,}4$.

La probabilité que le test soit fiable est égale à :

$P(T\cap M)+P(\overline{T}\cap\overline{M})=0{,}97\times 0{,}4+0{,}99\times(1-0{,}4)$

$=0{,}99-0{,}02\times 0{,}4=0{,}982$.

4 $P_T(M)=\frac{P(T\cap M)}{P(T)}=\frac{0{,}388}{0{,}982}=\frac{194}{491}$.

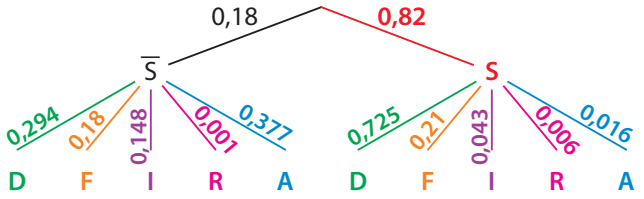
La valeur prédictive positive du test est environ égale à 0,395.

62 … en géographie

Répartition linguistique en Suisse

1 Voir ci-dessous.

S : « être de nationalité suisse »



2 Les événements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(F)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à F.

$P(F)=P(F\cap S)+P(F\cap\overline{S})$

$=0{,}82\times 0{,}21+0{,}18\times 0{,}18=0{,}2046$.

On a donc $P(F)\approx 0{,}2$.

3 L'ensemble de référence est l'événement F, on calcule la probabilité de l'événement S conditionnée par l'événement F,

$P_S(F)=\frac{P(F\cap S)}{P(F)}=\frac{0{,}82\times 0{,}21}{0{,}2046}=\frac{287}{341}$

soit, $P_S(F)\approx 0{,}8416$.

4 On définit la variable aléatoire X égale au nombre de passeports appartenant à une personne de langue française. Il s'agit de tirages successifs avec remise, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}2)$.

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0{,}8^n$.

On résout l'inéquation : $1-0{,}8^n>0{,}99\Leftrightarrow 0{,}8^n<0{,}01$.

Or $\ln 0{,}8<0$, on change le sens de l'inégalité.

$$n\ln 0{,}8<\ln 0{,}01\Leftrightarrow n>\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}.$$

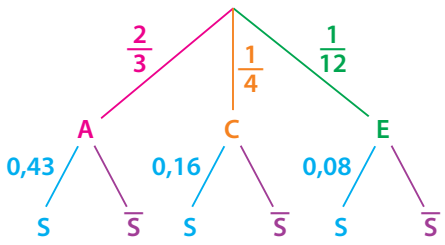
Or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}\approx 20{,}64$.

L'employé des douanes devra vérifier au moins 21 passeports pour que la probabilité d'obtenir au moins un passeport appartenant à une personne de langue française soit supérieure à 0,99.

63 … en SES

Emploi jeune

1 Voir ci-dessous.



$P_A(S)=\frac{17\,200}{40\,000}=0{,}43$; $P_E(S)=\frac{400}{5\,000}=0{,}08$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 **a.** On calcule la probabilité de l'événement S conditionnée par l'événement C : $P_C(S) = \dfrac{2\,400}{15\,000} = 0{,}16$.

b. On calcule la probabilité $P(S \cap A)$ en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches passant par S et A.
On a $P_A(S) = \dfrac{17\,200}{40\,000} = 0{,}43$,
donc $P(S \cap A) = 0{,}43 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{43}{150}$.

3 Les événements A, C, E forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité $P(S)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à S.

$$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap C) + P(S \cap E)$$
$$= \frac{2}{3} \times 0{,}43 + \frac{1}{4} \times 0{,}16 + \frac{1}{12} \times 0{,}08 = \frac{1}{3}.$$

D'où $P(S) \approx \dfrac{1}{3}$.

On reconnait la répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « le jeune a un projet sport », de probabilité $p = \dfrac{1}{3}$.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$
soit $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}983$.

4 Soit Y la variable aléatoire égale au financement obtenu par les jeunes ayant bénéficié d'un de ces contrats, les valeurs prises par Y sont $\{600\,;\,6\,000\}$.
La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

y_i	600	6 000
$P(Y = y_i)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

$E(Y) = 600 \times \dfrac{2}{3} + 6\,000 \times \dfrac{1}{3}$ soit $E(Y) \approx 2\,400$ €.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 7

Loi de probabilités

Partir d'un bon pied (p. 200)

A Construire un histogramme

a. La largeur des rectangles est 500.
b. fréquence = aire = hauteur × largeur
donc hauteur $= \dfrac{\text{fréquence}}{\text{largeur}} = \dfrac{12}{500} = 0{,}024$.

B Associer à $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

$\mathscr{C}_1$ et **a.** car $f(0) = 1$. $\mathscr{C}_2$ et **b.** car $f(4) = 1$.
$\mathscr{C}_3$ et **c.** car $f(0) = 0{,}5$. $\mathscr{C}_4$ et **d.** car $f(4) = 0{,}5$.

C Lier aire et calcul intégral

b. et **d.** **Vrais :**

$\int_3^5 f(x)\,dx$ est égale à l'aire coloriée, exprimée en unité d'aire.

$\int_0^5 f(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx = \int_3^5 f(x)\,dx$,
car $[F(5) - F(0)] - [F(3) - F(0)] = F(5) - F(3)$.

C Reconnaître une loi binomiale

On peut calculer l'espérance de la variable aléatoire qui fournit une valeur « centrale ». On constate que plus n est grand et p proche de 0,5, plus le diagramme prend l'allure d'une courbe en cloche :

A et Y ; **B et X ;** **C et T ;** **D et Z.**

Découvrir

Activité 1 Choisir un nombre au hasard (p. 202)

1 a. L'intervalle [0 ; 1[contient 10 nombres dont la partie décimale contient une décimale : 0,0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9.

b. La probabilité que Léo devine ce nombre est égale à $\dfrac{1}{10}$.

c. L'intervalle [0 ; 1[contient 100 nombres dont la partie décimale contient 2 chiffres, par exemple : 0,00 ; 0,01 ; 0,02 … 0,99.

La probabilité que Léo devine ce nombre est égale à $\dfrac{1}{100}$.

L'intervalle [0 ; 1[contient 10^{15} nombres dont la partie décimale contient 15 chiffres, par exemple : 0,123400432123467
La probabilité que Léo devine ce nombre est égale à $\dfrac{1}{10^{15}}$.

2 a. L'intervalle [0 ; 2 [contient 200 nombres dont la partie décimale contient deux chiffres et l'intervalle [1,4 ; 1,5 [en contient 10 donc, la probabilité que Léo devine ce nombre est $\dfrac{10}{200} = \dfrac{1}{20}$.

b. L'amplitude de l'intervalle [1,4 ; 1,5 [est égale à 0,1. La probabilité calculée est égale à 0,05.

c. La probabilité d'obtenir un nombre de l'intervalle [1,4 ; 1,5 [parmi les nombres de l'intervalle [0 ; 2[est égale à $\dfrac{0{,}1}{2}$ c'est-à-dire $\dfrac{\text{amplitude de l'intervalle } [1{,}4\ ;\ 1{,}5[}{\text{amplitude de l'intervalle } [0\ ;\ 2[}$ ce qui se rapproche de la formule de l'équirépartition pour un caractère discret : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Prolongement :
De façon générale, soit un nombre réel quelconque appartenant à un intervalle [a ; b[où a et b sont deux nombres entiers. Cet intervalle contient $(b - a) \times 10^n$ nombres dont la partie décimale contient n décimales.
On peut toujours encadrer ce nombre par deux nombres décimaux c et d dont la partie décimale contient k décimales. L'intervalle [c ; d[contient $(d - c) \times 10^n$ nombres dont la partie décimale contient n décimales.
La probabilité de deviner ce nombre est égale à $\dfrac{(d - c) \times 10^n}{(b - a) \times 10^n}$.

$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{amplitude de l'intervalle } [c\ ;\ d[}{\text{amplitude de l'intervalle } [a\ ;\ b[} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Si l'on suppose que [a ; b[= [0 ; 1[puis que c et d sont deux nombres décimaux dont la partie décimale contient k décimales tels que $d - c = 10^{-k}$ alors la probabilité de deviner ce nombre est égale à 10^{-k} et tend vers 0, lorsque k tend vers $+\infty$.

Exemple : La probabilité que Léo devine le nombre $\dfrac{\pi}{4}$ est nulle.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 2 Découvrir une variable aléatoire continue (p. 202)

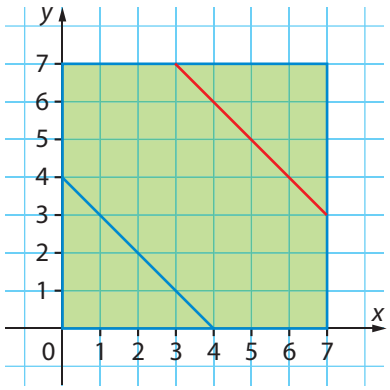
Partie A : Variable aléatoire discrète

Soit X la variable aléatoire égale à la moyenne arithmétique des deux nombres obtenus :

$P(2 \leqslant X < 5) = \frac{39}{64}$.

Partie B : Variable aléatoire continue

1 Soit Z la variable aléatoire égale à la moyenne arithmétique des deux nombres réels x et y choisis au hasard dans l'intervalle $[0 ; 7]$, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Z est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 7$.



2 a. L'événement $(Z = 2)$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que :

$0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 7$ et $\frac{x+y}{2} = 2 \Leftrightarrow y = 4 - x$

et $0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 7$.

Cet ensemble est représenté en bleu par un segment.

L'événement $(Z = 5)$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que :

$0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 7$ et $\frac{x+y}{2} = 5 \Leftrightarrow y = 10 - x$

et $0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 7$.

Cet ensemble est représenté en rouge par un autre segment.

b. L'événement $(Z \geqslant 2)$ est représenté par la portion de plan située à l'intérieur du carré au-dessus du segment bleu inclu ; l'événement $(2 \leqslant Z \leqslant 5)$ est représenté par la portion de plan à l'intérieur du carré comprise entre les deux segments (segments bleu et rouge inclus).

3 a. La probabilité $P(2 \leqslant Z \leqslant 5)$ est égale au quotient de l'aire du domaine compris entre les deux segments et de l'aire du carré. On calcule l'aire du domaine compris entre les deux segments en enlevant les aires des deux triangles rectangles à l'aire du carré

$P(2 \leqslant Z \leqslant 5) = \frac{64 - 2 \times 8}{64} = \frac{48}{64}$.

b. $P(Z = 2) = \frac{\text{aire du segment bleu}}{\text{aire du carré}} = 0$.

Activité 3 Calculer une densité de population (p. 203)

1 a.

Ville	Population	Superficie (en km²)	Densité (hab./km²)
Séoul (2010)	10 421 782	606	17 197,66
Tokyo (2010)	8 637 098	621	13 908,37
New York (2009)	8 143 200	1 214	6 707,74
Monaco (2011)	32 800	1,95	16 820,51

2 a. En France, au 1er Janvier 2012, la densité de la population est égale à

$\frac{63\ 460\ 768}{551\ 695} \approx 114$ hab./km².

b. La densité de l'Île de France est égale à 949 hab/km². Ce résultat plus faible pour la France s'explique, par exemple, par la présence de massif montagneux, de forêts ou de zones rurales non habités.

Activité 4 Définir la densité sur un histogramme (p. 203)

Intervalle	[2 ; 3 [	[2 ; 5[	[5 ; 7[
Fréquence	0,209	0,681	0,160
Largeur de l'intervalle	1	3	2
Densité	0,209	0,227	0,08

b. $\overline{x} = 0{,}5 \times 0{,}040\,4 + 1{,}5 \times 0{,}117 + 2{,}5 \times 0{,}209 + 3{,}5 \times 0{,}269 + 4{,}5 \times 0{,}203 + 5{,}5 \times 0{,}119 + 6{,}5 \times 0{,}041$

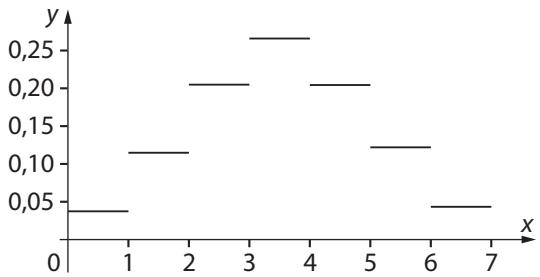
$= 3{,}494\,2$

2 Voir livre numérique.

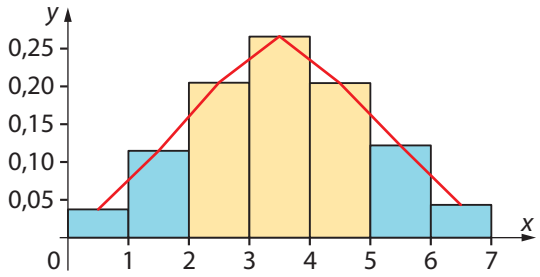
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 5 Représenter la densité (p. 204)

1 La fonction n'est pas continue. C'est une fonction constante par intervalle.



2 Complément : On peut commencer par faire tracer aux élèves le polygone des fréquences, en joignant les milieux des segments. On approche ainsi la courbe précédente par une fonction continue, affine par morceaux. Cette construction permet d'approcher l'aire coloriée en jaune par un calcul intégral.



$$A = \int_2^{2,5} f_1(x)\,dx + \int_{2,5}^{3,5} f_2(x)\,dx + \int_{3,5}^{4,5} f_3(x)\,dx + \int_{4,5}^{5} f_4(x)\,dx \cdot$$

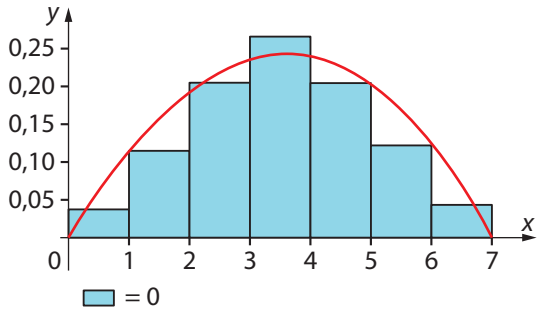
où

$f_1(x) = 0,092x - 0,021$. $f_2(x) = 0,06x + 0,059$.

$f_3(x) = -0,066x + 0,5$. $f_4(x) = -0,084x + 0,581$.

$A \approx 0,659$.

a. Voir ci-dessous



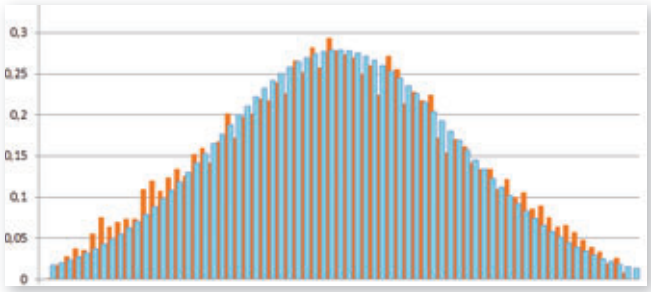
b. On approche la courbe précédente par celle de la fonction trinôme du second degré continue et positive sur l'intervalle [2 ; 5], définie par $h(x) = -0,02x(x-7)$.

$$\int_2^5 -0,02x^2 + 0,14x\,dx \approx 0,69$$

3 Voir livre numérique.

Après avoir calculé la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de la série, on construit la courbe de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}.$$



Activité 6 Centrer, réduire une loi binomiale (p. 204)

X est la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(16 ; 0,5)$.

Partie A

a. $E(x) = 16 \times 0,5 = 8$

b. $V(x) = 16 \times 0,5 \times 0,5 = 4$ donc, $\sigma(X) = 2$

Partie B : Centrer la variable aléatoire X

$X' = X - \mu = X - 8$.

a. Les valeurs prises par X ' sont :

$\{-8 ; -7 ; -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

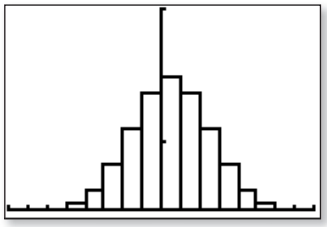
b. $E(X') = E(X) - 8 = 0$

c. Voir ci-dessous.

L1	L2	L3 3
0	-8	1.5E-5
1	-7	2.4E-4
2	-6	.00183
3	-5	.00854
4	-4	.02777
5	-3	.06665
6	-2	.12219
7	-1	

L3 = {1.525878906...

d. On obtient le diagramme en bâtons de la loi X' à partir du diagramme représenté, en faisant glisser le diagramme de 8 graduations vers la gauche.



La variable X' ne suit pas une loi binomiale car les valeurs prises par X' ne sont pas toutes entières et positives.

Partie C : Réduire la variable aléatoire X

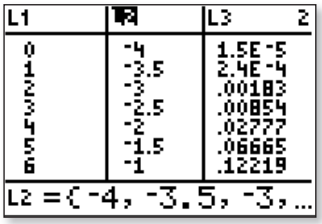
$$X^* = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{X - 8}{2}.$$

a. Les valeurs prises par X* sont $\{-4 ; -3,5 ; -3 ; -2,5 ; -2 ; -1,5 ; -1 ; -0,5 ; 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4\}$.

Les valeurs précédentes prises par X ' ont été divisées par 2.

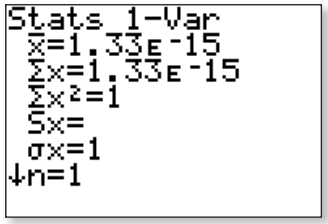
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

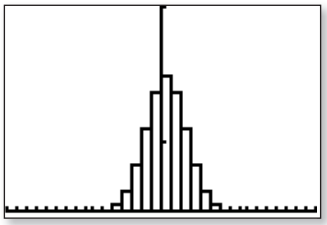
b.



L1		L3 2
0	-4	1.5E-5
1	-3.5	2.4E-4
2	-3	.00183
3	-2.5	.00854
4	-2	.02777
5	-1.5	.06665
6	-1	.12219

L2 = {-4, -3.5, -3, ...





Remarque : en utilisant les propriétés de l'espérance, on calcule $E(X^*) = \dfrac{E(X) - 8}{2} = 0$ et à l'aide de la calculatrice, on obtient $\sigma(X) = 1$.

Activité 7 Découvrir une nouvelle densité (p. 205)

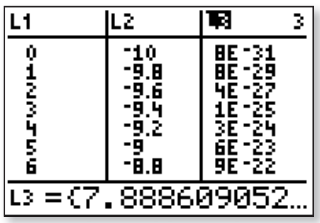
1 a. Loi binomiale

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}5)$.
$E(X) = 100 \times 0{,}5 = 50$.
$V(X) = 100 \times 0{,}5^2 = 25$ donc $\sigma(X) = 5$.

2 Étude de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$

a. $Z = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \dfrac{X - 50}{5}$ donc $Z = 0 \Leftrightarrow X = 50$.

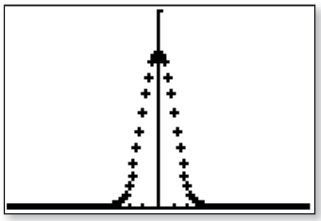
b. Pour une meilleure visibilité, on peut choisir la fenêtre ci-dessous.

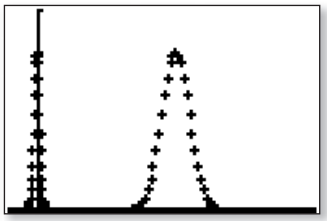


L1	L2	3
0	-10	8E-31
1	-9.8	8E-29
2	-9.6	4E-27
3	-9.4	1E-25
4	-9.2	3E-24
5	-9	6E-23
6	-8.8	9E-22

L3 = {7.888609052...

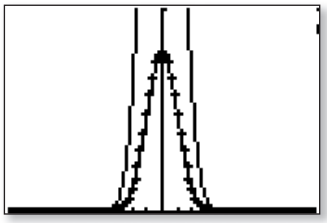






Le nouveau nuage de points est obtenu est faisant glisser la courbe de 50 graduations vers la gauche puis en divisant les graduations par 5.

3 Approche de la loi de Z par une fonction continue



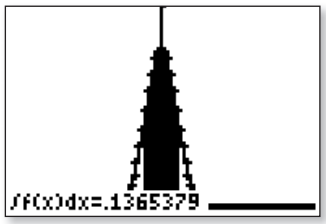
La fonction f approche au plus près le nuage de points représentant la loi de Z.

4 Approximation d'une probabilité

a. $P(45 \leqslant X \leqslant 55) = P(-5 \leqslant X - 50 \leqslant 5)$
$= P\left(\dfrac{-5}{5} \leqslant \dfrac{X - 50}{5} \leqslant \dfrac{5}{5}\right)$
$= P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$.

b. La probabilité $P(45 \leqslant X \leqslant 55)$ est représenté par l'aire coloriée en orange c'est-à dire la somme des aires des rectangles compris entre $x = 45$ et $x = 55$.
On a glissé cette aire de 50 graduations vers la gauche, ce qui ne l'a pas modifiée. Puis on a divisé les abscisses x par 5, l'aire est alors divisée par 5. Les nouvelles abscisses sont notées z.
Cette dernière aire est approchée par l'aire du domaine situé entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses, entre les droites verticales d'équation $z = -1$ et $z = 1$ c'est-à-dire par $\int_{-1}^{1} f(z)\,dz$.

Pour retrouver l'aire initiale coloriée en orange, on multiplie par 5 le résultat obtenu par le calcul intégral.
La probabilité $P(45 \leqslant X \leqslant 55)$ est donc approchée par $5\int_{-1}^{1} f(z)\,dz$ c'est-à-dire par $\int_{-1}^{1} \varphi(z)\,dz$
où $\varphi(z) = 5f(z)$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$\int_{-1}^{1} f(z)\,dz \approx 0{,}134\,5$ d'où $P(45 \leqslant X \leqslant 55) \approx 0{,}672\,5$.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Savoir faire

1. Utiliser la loi uniforme (p. 207)

Exercices d'application

1 **a.** La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur le segment [–3 ; 4], donc la fonction de densité est définie sur l'intervalle [–3 ; 4] par $f(x) = \frac{1}{4-(-3)} = \frac{1}{7}$.

b. $E(X) = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$.

2 **a.** Le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [–50 ; 200], se modélise par la loi uniforme sur cet intervalle. Soit X la variable aléatoire cette loi continue $P(X = 100) = 0$.

b. $P(X \geqslant 150) = P(150 \leqslant X \leqslant 200)$
$= \frac{200-150}{200-(-50)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$.

c. $P(0 \leqslant X \leqslant 150) = \frac{150-0}{200+50} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$.

$P(\{X \leqslant 0\} \cup \{X \geqslant 150\}) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 150)$
$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

3 Le choix au hasard d'un boulon de diamètre appartenant à l'intervalle [10 ; 10,5], se modélise par la loi uniforme sur cet intervalle. Soit la variable aléatoire X suivant cette loi, son espérance est égale à :

$E(X) = \frac{10+10,5}{2} = 10,25$.

En moyenne le diamètre des boulons mesure 10,25 mm donc la production est satisfaisante.

4 Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Léa, X suit la loi uniforme sur l'intervalle [8 ; 8,5].

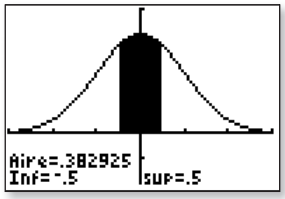
a. $P\left(8+\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant 8+\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{8,5-8} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.

b. $P\left(\left\{X \leqslant 8+\frac{1}{4}\right\} \cup \left\{X \geqslant 8+\frac{1}{3}\right\}\right)$
$= 1 - P\left(8+\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant 8+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$.

2. Utiliser la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$ (p. 209)

Exercices d'application

5 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$,
$P(-0,5 \leqslant X \leqslant 0,5) \approx 0,383$.
$P(X \geqslant 0,5) = P(X \leqslant -0,5) = \frac{1-P(-0,5 \leqslant X \leqslant 0,5)}{2}$.



$P(X \geqslant 0,5) \approx \frac{0,617}{2} \approx 0,3085$.

6 **a.** On lance 1 800 fois de suite un dé non pipé. On a donc la répétition de 1 800 épreuves de Bernoulli de succès « obtenir un 6 » de probabilité $p = \frac{1}{6}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 apparus. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(18\,000 ; \frac{1}{6}\right)$.

$E(X) = 18\,000 \times \frac{1}{6} = 3\,000$.

$V(X) = 18\,000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 2\,500$ donc, $\sigma(X) = 50$.

b. Soit Z la variable aléatoire égale à $Z = \frac{X - 3\,000}{50}$, Z suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$,
$P(2\,850 \leqslant X \leqslant 3\,150)$
$= P\left(\frac{2\,850-3\,000}{50} \leqslant \frac{X-3\,000}{50} \leqslant \frac{3\,150-3\,000}{50}\right)$
$= P(-3 \leqslant Z \leqslant 3)$

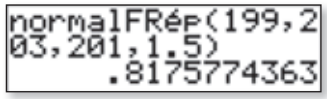
À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$P(-3 \leqslant Z \leqslant 3) \approx 0,997\,3$.



3. Utiliser la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ (p. 211)

Exercices d'application

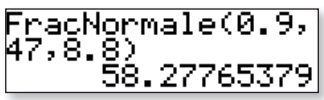
7 Soit X la variable aléatoire égale au poids du produit par boite, X suit une loi normale $\mathcal{N}(201 ; 1,5^2)$, $P(199 \leqslant X \leqslant 203) \approx 0,8176$.



8 Soit D la variable aléatoire égale au débit d'une rivière, D suit la loi normale d'espérance 47 m³/s et d'écart type 8,8 m³/s.

On cherche le nombre d tel que $P(D > d) < 0,1$.
$P(D > d) = 1 - P(D \leqslant d)$ donc
$P(D > d) < 0,1 \Leftrightarrow P(D \leqslant d) > 0,9$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $d > 58,277\,6$.
La probabilité que le débit soit supérieur à 58,28 m³/s est inférieure à 0,1.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

QCM (p. 213)

9 **c.** La fonction inverse est définie, continue et positive sur $[1 ; e]$ et $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln e - \ln 1 = 1$.

10 **b.** $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5-2}{10-1} = \frac{1}{3}$.

11 **a.** $P(X \geqslant 15) = P(15 \leqslant X \leqslant 20) = \frac{20-15}{20-14} = \frac{5}{6}$.

12 **a.** C'est la fonction de Gauss : voir cours.

13 **c.** X suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$; donc :
$1 = P(X \leqslant -1) + P(-1 \leqslant X \leqslant 1) + P(X \geqslant 1)$.
Or $\mathbf{P(X \geqslant 1) = P(X \leqslant -1)}$.
Donc $\mathbf{P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - 2 \times P(X \leqslant -1)}$.

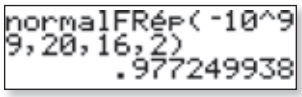
14 **b.** Comme X suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$, alors :
$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0{,}68$.

D'après **13** ci-dessus : $P(X \leqslant -1) \approx \frac{1-0{,}68}{2}$.
Donc $P(X \leqslant -1) \approx 0{,}16$.

15 **c.** Voir **13**. L'aire colorée est :
$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - 2P(X \leqslant -1) = 1 - 2P(X \geqslant 1)$.

16 **a.** Soit la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Voir cours.
$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) = P(Z \in [-1 ; 1]) \approx 0{,}683$.

17 **c.** D'après le calcul à la calculatrice (ci-contre).



18 **c.** On sait que : $0{,}68 \approx P(X \in [4-\sigma ; 4+\sigma])$.
Ainsi : $[2 ; 6] = [4-\sigma ; 4+\sigma]$, donc $\sigma = 2$.

Exercices

1 Lois à densité (p. 214)

19 Vrai ou faux ?

a. Faux : la fonction f n'est pas définie en 0, donc non continue sur l'intervalle $[-6 ; 6]$.

b. Vrai : la fonction g est continue et positive sur $[0 ; 2]$.
De plus, une primitive de $1 - \frac{x}{2}$ est $x - \frac{x^2}{4}$.
$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left(2 - \frac{2^2}{4}\right) - 0 = 1.$$

c. Faux : $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$.

20 Reconnaitre graphiquement une fonction de densité

d. La courbe représentative est celle d'une fonction de densité car la fonction f est continue, positive et
$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \text{aire du triangle} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

a. Faux : $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \text{aire du triangle} = \frac{1}{2}$;

b. Faux : f non continue en 0.

c. Faux : $f < 0$.

21 Créer une fonction de densité

La fonction f est continue et doit être positive sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
Or, $2 - 2x \leqslant 0$ sur l'intervalle $[1 ; 2]$. Il est donc impossible de déterminer l'unique valeur du nombre k tel que f soit une fonction de densité sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
On peut en revanche définir la fonction f sur deux intervalles par
$$\begin{cases} f(x) = k(2-2x) & \text{pour } -2 \leqslant x \leqslant 1 \text{ avec } k > 0 \\ f(x) = k'(2-2x) & \text{pour } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ avec } k' < 0 \end{cases}$$
On obtient alors, par le calcul intégral $9k + k' = 1$.
On peut prendre par exemple $k = \frac{1}{6}$ et $k' = -\frac{1}{2}$.

22 Fonction de densité définie par intervalle

1 **a.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x$ et sur l'intervalle $[1 ; 2]$ par $f(x) = 2 - x$;
f est continue en 1.
f est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
Une primitive sur l'intervalle $[0 ; 1]$ de la fonction u définie par $u(x) = 2 - x$ est la fonction U définie par :
$$U(x) = 2x - \frac{x^2}{2}.$$
$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx \\ &= \frac{1}{2} + \left[\left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1. \end{aligned}$$
f est une fonction de densité sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{2}$.

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}$ et sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$.
f est continue en 1.
f est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
Une primitive sur l'intervalle $[0 ; 1]$ de la fonction u définie par $u(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$ est la fonction U définie par :
$$U(x) \quad \frac{3}{4}x \quad -\frac{x^2}{8}$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} + \left[\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{9}{8} - \frac{5}{8} = 1\,.$$

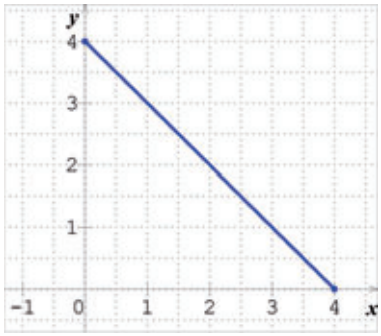
f est une fonction de densité sur l'intervalle [0 ; 3].

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4}\right) dx$$
$$= \left(\frac{6}{4} - \frac{4}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\,.$$

23 Fonction de densité affine

La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 4] par : $f(x) = 4 - x$. f est continue et positive sur cet intervalle.

1 **a.** Voir ci-dessosu.



b. L'aire du triangle rectangle est égale à :

$$\frac{4 \times 4}{2} = 8 = \int_0^4 f(x)\,dx$$

donc la fonction f n'est pas une fonction de densité sur cet intervalle.

2 La fonction g est définie sur l'intervalle [0 ; k] par $g(x) = k - x$.

g est continue et positive sur cet intervalle.

g est une fonction de densité sur cet intervalle si de plus $\int_0^k g(x)\,dx = 1$.

Une primitive de la fonction g est sur l'intervalle [0 ; k] est la fonction G est définie par $G(x) = kx - \frac{x^2}{2}$

$$\int_0^k (k - x)\,dx = \left(k^2 - \frac{k^2}{2}\right) = \frac{k^2}{2} = 1$$

la valeur de k telles que g soit une fonction de densité sur l'intervalle [0 ; k] avec $k > 0$ est $k = \sqrt{2}$.

24 Fonction de densité exponentielle

1 Une primitive de la fonction f sur [0 ; 1] est la fonction F définie sur [0 ; 1] par $F(x) = -e^{-x}$.

2 La fonction f est définie continue et positive sur [0 ; 1].

On doit avoir k positif et :

$$\int_0^1 k\,e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow k(-e^{-1} - (-e^0)) = 1$$
$$\Leftrightarrow k\left(\frac{-1+e}{e}\right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{e}{e-1}\,.$$

3 $P(X \geqslant 0{,}5) = \int_{0{,}5}^1 k\,e^{-x}\,dx = k(-e^{-1} + e^{-0{,}5})$

$$= \frac{e}{e-1}\left(e^{-0{,}5} - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^1 \times e^{-0{,}5} - 1}{e-1} = \frac{e^{0{,}5} - 1}{e-1}$$
$$= \frac{\sqrt{e} - 1}{e-1} = \frac{1}{\sqrt{e}+1}\,, \text{ car } e - 1 = (\sqrt{e}+1)(\sqrt{e}-1)\,.$$

25 Fonction de densité et fonction puissance

1 Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = nx^{n-1}$, où n est un entier naturel non nul, f est continue et positive sur cet intervalle.

Une primitive de la fonction f sur cet intervalle est la fonction F définie par $F(x) = x^n$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 1^n = 1\,.$$

La fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1].

2 **a.** $P(X \in [0{,}5 ; 1]) = \int_{0{,}5}^1 f(x)\,dx$.

$$= F(1) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5^n\,.$$

b. $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}5^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant 0{,}1$

$n \ln 0{,}5 \leqslant \ln 0{,}1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5}$ car $\ln 0{,}5 < 0$,

or $\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \approx 3{,}32$ donc $n \geqslant 4$.

26 Fonction de densité polynomiale

a. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = k(x^2 - x + 1)$, f est continue sur cet intervalle.

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$

Sur l'intervalle [0 ; 1], $x^2 - x + 1 > 0$.

Une primitive sur cet intervalle de la fonction f est la fonction F définie par :

$$F(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = k\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{6}k = 1\,.$$

La fonction f définie par $f(x) = \frac{6}{5}(x^2 - x + 1)$ est une densité de probabilité.

b. $P(A) = P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)\,dx$

$$= F(0{,}5) - F(0) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

$$P_A(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}6) = \frac{P(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}6)}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{F(0{,}6) - F(0{,}4)}{\frac{1}{2}} \approx 0{,}1808 \times 2 = 0{,}3616\,.$$

c. La fonction u définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $u(x) = \frac{6}{5}(x^3 - x^2 + x)$ est continue sur cet intervalle.

$$E(X) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^3 - x^2 + x)\,dx\,.$$

Une primitive sur l'intervalle [0 ; 1] de la fonction u est la fonction U définie par

$$U(x) = \frac{6}{5}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right).$$

$$E(X) = F(1) - F(0) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5\,.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

27 Fonction de densité et fonction logarithme népérien

a. Soit F la fonction définie par $F(x) = x\ln x - x$ sur l'intervalle $[\,e\,;\,e^3\,]$.

$F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$,

donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

b. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[\,e\,;\,e^3\,]$. $kf \geqslant 0$ pour $k \geqslant 0$.

$$\int_e^{e^3} kf(x)\,dx = k\,[F(e^3) - F(e)]$$

$$= k[(3e^3 - e^3) - (e - e)] = 2ke^3 = 1.$$

La fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{2e^3}\ln x$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[\,e\,;\,e^3\,]$

c. $P(e \leqslant X \leqslant e^2) = \displaystyle\int_e^{e^2} g(x)\,dx = \left(\frac{1}{2e^3}\right)(F(e^2) - F(e))$

$$= \left(\frac{1}{2e^3}\right)(2e^2 - e^2) = \frac{1}{2e}.$$

28 Loi uniforme

1 X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,0\,;\,12\,]$ donc

$P(X \geqslant 10) = P(10 \leqslant X \leqslant 12) = \dfrac{12-10}{12-0} = \dfrac{1}{6}$.

2 Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, P représente la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ et E l'espérance de la variable aléatoire X.

29 Loi du hasard

Le choix d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$ se modélise par la loi uniforme sur cet intervalle.

On calcule la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 0{,}3\}$ conditionnée par l'événement $\{\,0 \leqslant X \leqslant 0{,}5\,\}$:

$P_{0 \leqslant X \leqslant 0,5}(X \geqslant 0{,}3) = \dfrac{P(0{,}3 \leqslant X \leqslant 0{,}5)}{P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5)} = \dfrac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}5 - 0} = \dfrac{2}{5}$.

30 Calcul de l'espérance

1 La visite dure deux heures, donc l'heure d'arrivée de l'inspecteur, appartient à l'intervalle $[\,7\,;\,17\,]$. L'heure d'arrivée est choisie aléatoirement dans cet intervalle. Donc la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,7\,;\,17\,]$.

2 $E(X) = \dfrac{7+17}{2} = 12$. Le personnel de l'établissement peut espérer que l'inspecteur viendra à 12 h.

31 Temps d'attente

1 La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,8\,;\,10\,]$.

2 Les horaires de départ des TGV sont $\{\,5\,;\,7\,;\,9\,;\,11\,;\,13\,;\,15\,;\,17\,;\,19\,;\,21\,;\,23\,\}$. Ziva attend moins d'une demie heure lorsque $8,5 \leqslant X \leqslant 9$.

$P(8,5 \leqslant X \leqslant 9) = \dfrac{9 - 8{,}5}{10 - 8} = \dfrac{0{,}5}{2} = \dfrac{1}{4}$.

32 Nombre aléatoire et inéquation.

Le choix d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$ se modélise par la loi uniforme sur cet intervalle.

a. $x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in\,]1\,;\,5]$

$P(1 < X < 5) = \dfrac{5-1}{10-0} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

b. $x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;\,1] \cup]6\,;\,+\infty[$.

$P(\{X < 1\} \cup \{X > 6\}) = 1 - P(1 \leqslant X \leqslant 6)$

$$= 1 - \frac{6-1}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

2 Loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ (p. 215)

33 QCM – Lecture de la courbe de Gauss

1 **a.** **Faux :** $P(X = 0) = 0$, car X est une variable aléatoire continue.

b. **Vrai :** $P(X \geqslant 0)$ est l'aire comprise entre la courbe de densité et l'axe des abscisses pour $x \geqslant 0$ et $P(X \leqslant 0)$ pour $x \leqslant 0$.

La courbe de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les deux aires sont égales.

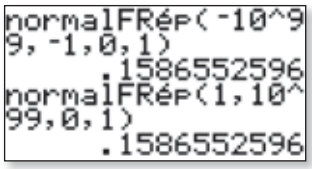
L'aire totale sous la courbe de densité étant égale à 1, chacune des deux aires précédentes est donc égale à 0,5.

c. **Faux :** la courbe de la densité se rapproche de l'axe des abscisses mais ne la touche pas.

Ces deux probabilités sont faibles, mais non nulles.

Par calcul : $P(X \leqslant -3) \approx 0{,}0013$.

2 **a.** et **b.** **Vrai :** par symétrie de la courbe de densité par rapport à l'axe des ordonnées.



Pour **c.**, voir QCM 13 page 213.

3 **a.** et **c.** **Vrai :** $P(X \leqslant -1) = P(X \geqslant 1)$ par symétrie.

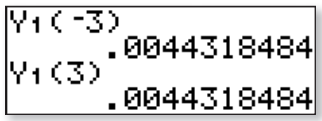
34 Vrai ou faux

1 **Faux :** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

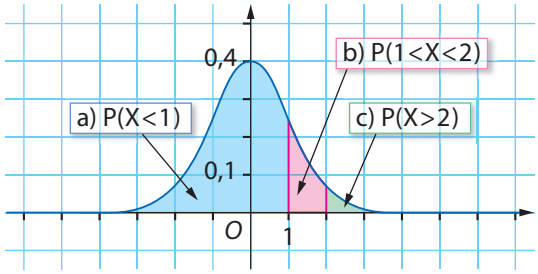
2 **Vrai :** La fonction f est paire : pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

3 **Faux :** f est définie sur $\mathbb{R}$.

4 **Vrai :** Pour tout nombre réel x, $x < -3$, on a $f(x) < 0{,}004\,4$ car f est croissante sur cet intervalle et pour tout nombre réel $x > 3$, on a $f(x) < 0{,}004\,4$ car f est décroissante sur cet intervalle.

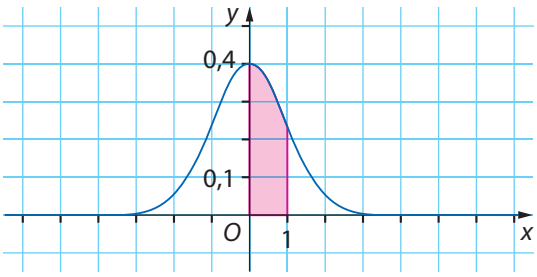


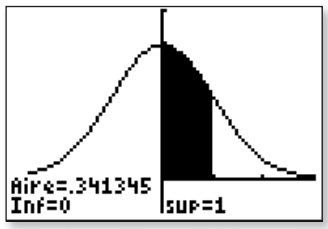
35 Visualiser des probabilités.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

36 Construire et lire une courbe de Gauss.

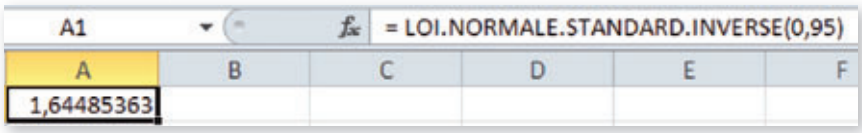




c. $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 2\,P(0 \leqslant X \leqslant 1)$ car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0{,}6827$

37 Loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ et tableur

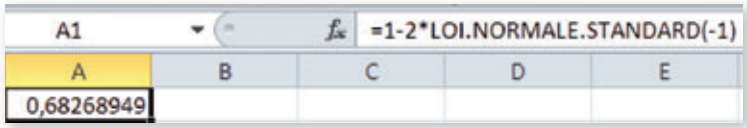
Partie A



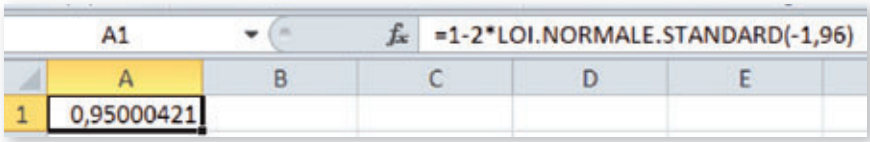
Partie B : Applications

1 a. $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - P(X \leqslant -1) - P(X \geqslant 1)$ or $P(X \geqslant 1) = P(X \leqslant -1)$ donc $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - 2\,P(X \leqslant -1)$.

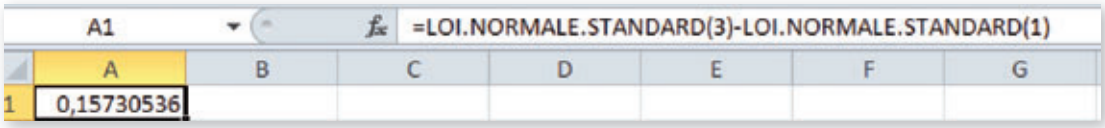
b.



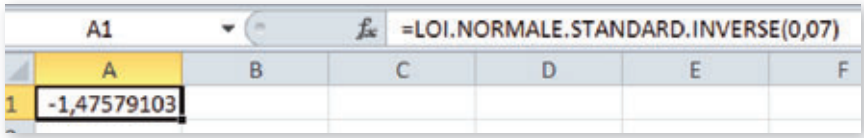
c. $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) = 1 - 2\,P(X \leqslant -1{,}96)$.



2 $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$. $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 1)$.



3 $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 1 - 2\,P(X \leqslant -a) = 0{,}86$.
On cherche le nombre réel a tel que $2\,P(X \leqslant -a) = 0{,}14 \Leftrightarrow P(X \leqslant -a) = 0{,}07 \Leftrightarrow a \approx -1{,}475\,8$.



38 Représentation de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ sur calculatrice

1 a. Il s'agit de tirages successifs avec remise.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4\,500\,;\frac{1}{6}\right)$.

b. Espérance $E(X) = \mu = 4\,500 \times \frac{1}{6} = 750$.

Écart type $\sigma = \sqrt{4\,500 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{625} = 25$.

c. $P(X \leqslant 800) \approx 0{,}9776$.

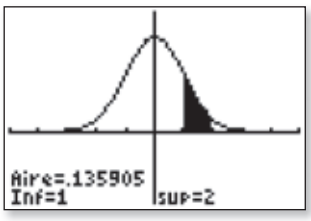
d. $P(775 \leqslant X \leqslant 800) \approx 0{,}1411$.

2 Soit $Z = \frac{X - 750}{25}$, alors $\frac{800 - 750}{25} = 2$.
Donc $P(X \leqslant 800) = P(Z \leqslant 2)$ et Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

D'après la calculatrice : $P(Z \leqslant 2) \approx 0{,}977$.

c. D'après la calculatrice : $P(1 \leqslant Z \leqslant 2) \approx 0{,}136$.





En utilisant la définition de Z :

$$P(775 \leqslant X \leqslant 800) = P\left(\frac{775 - 750}{25} \leqslant \frac{X - 25}{25} \leqslant \frac{800 - 750}{25}\right)$$
$$= P(1 \leqslant Z \leqslant 2) \approx 0{,}136.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

39 Étude de la fonction de Gauss

a. $\varphi'(t) = \dfrac{-2t}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} = \dfrac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$

b. $\varphi''(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} + \dfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} (t^2 - 1)$

c. $\varphi''(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 1$ et φ'' change de signe.
La courbe représentative de φ admet deux points d'inflexion d'abscisse -1 et 1.

d. $P(X \in [-1\,;\,1]) \approx 0{,}683$.

40 Primitive de la fonction de Gauss

Soit Φ une primitive de la fonction de Gauss,

1 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.

2 a. $\Phi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$.

Pour tout réel t, $\Phi'(t) > 0$ donc la fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 a. $\Phi''(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\Phi''(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 0$.
Φ'' s'annule et change de signe en 0.

b. La courbe représentative de Φ admet un point d'inflexion d'abscisse 0 .

4 $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.

3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ (p. 217)

41 Vrai ou faux ?

La fonction représentée en rouge est la fonction de Gauss ϕ . La variable aléatoire Z de densité φ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$; donc $E(Z) = 0$ et $\sigma = 1$.
La fonction de densité f de la variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, ce qui permet d'estimer l'espérance μ de la variable X .
Si σ augmente, alors l'intervalle $[\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]$ devient plus grand.
Or $P([\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]) \approx 0{,}997$.
Donc l'aire sous la courbe de densité f de X reste constante. C'est pour cela que la courbe $\mathcal{C}_f$ « s'étale ».

1 a. Les deux courbes sont centrées sur l'axe des ordonnées, donc $E(X) = E(Z) = 0$.

2 a. La courbe de la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$, donc $E(X) = 2$.

3 a. De même, $E(X) = 2$.

1 et **3 b.** Vu l'étalement de la courbe de la fonction de densité f , l'écart type de la variable aléatoire X a augmenté, $\sigma > 1$.

2 b. En faisant glisser la courbe de g de deux graduations vers la gauche, les deux courbes se superposent, donc les variables ont le même écart type.

42 QCM

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 2.

1 b. **Vrai :** Voir cours

2 a. **Faux :** $P(X \leqslant 9) = P\left(\dfrac{X-5}{2} \leqslant \dfrac{9-5}{2}\right) = P(Z \leqslant 2)$

b. **Vrai :** $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$
$= P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

c. **Vrai :** $P(X \geqslant 7) = P(Z \geqslant 1) = P(Z \leqslant -1)$ car la fonction de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

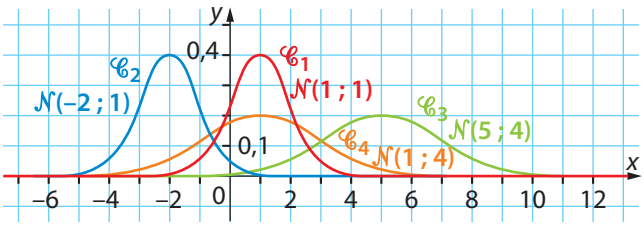
3 Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 12 et d'écart type 2 .

c. **Vrai :** $P(10 \leqslant X \leqslant 14) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$ où $Z = \dfrac{X-12}{2}$.

$P(10 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0{,}68$.



43 Reconnaitre une courbe de densité

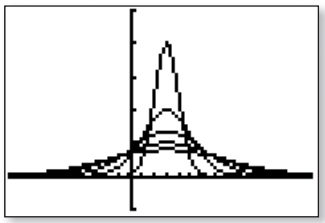


44 Influence de l'écart type

Influence de l'écart type sur la courbe de densité.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(3\,;\sigma^2)$.

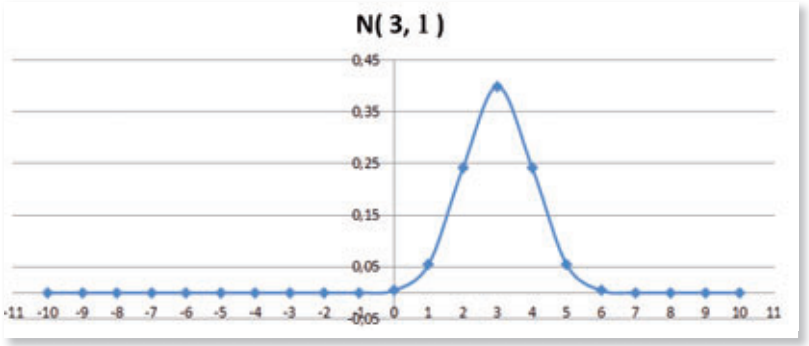
1 Sur calculatrice

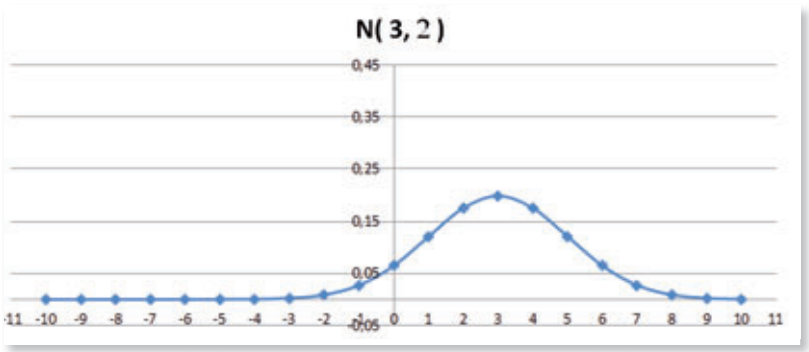
On observe que lorsque l'écart type σ augmente l'ordonnée du sommet diminue et la courbe s'étale le long de l'axe des abscisses.

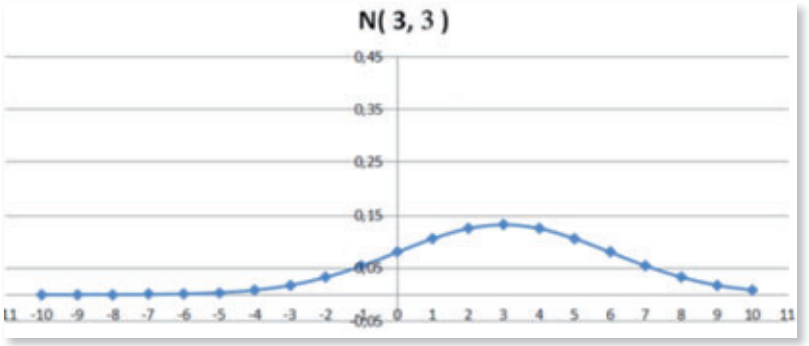


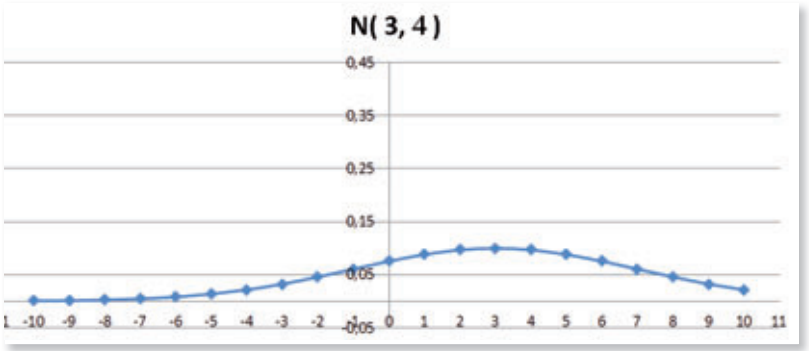
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

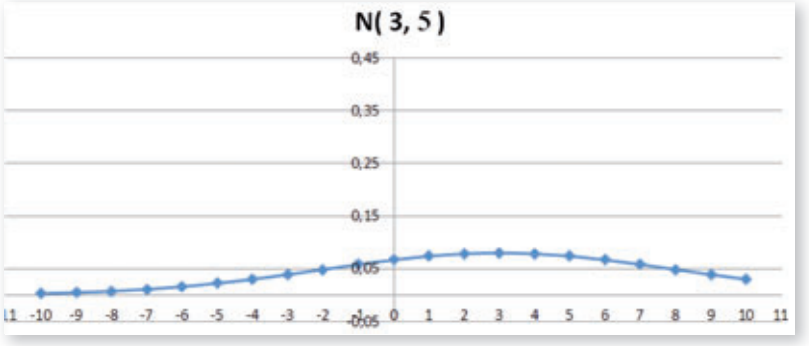
2 Sur tableur











L'amplitude de l'intervalle augmente et les valeurs de la fonction de densité diminuent.

3 Soit la fonction de densité :

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{\sigma}\right)^2}$.

Déterminons les coordonnées du sommet S

$f'(x)=-\dfrac{(x-3)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{\sigma}\right)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.

$f(3)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ donc les coordonnées du point S sont $S\left(3;\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ l'ordonnée de S diminue quand σ augmente.

Prolongement

Déterminons les points d'inflexion de la courbe représentative de f.

$f''(x)=\dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{\sigma}\right)^2}\left[-1+\dfrac{(x-3)^2}{\sigma^2}\right]$.

$f''(x)=0\ (x-3)^2=\sigma^2 \Leftrightarrow x=3-\sigma$ ou $x=3+\sigma$.

La courbe de f admet deux points d'inflexion d'abscisse $3-\sigma$ ou $3+\sigma$.

L'intervalle $[3-\sigma;3+\sigma]$ a pour amplitude 2σ donc cette amplitude augmente lorsque σ augmente.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

45 Calculs de probabilités

1 a. $P(8 \leqslant X \leqslant 12) = P(X \leqslant 12) - P(X \leqslant 8)$.

b.

A3 : =LOI.NORMALE.N(D2;A2;B2;VRAI)-LOI.NORMALE.N(C2;A2;B2;VRAI)

	A	B	C	D	E	F	G
1	espérance	écart type	borne a	borne b			
2	9	5	8	12			
3	0,30500659						

2 a. On lit $a = 6{,}5$.

b. On obtient à l'aide du tableur, $a \approx 6{,}377\,997\,44$.

c. $P(X \leqslant 6{,}38) \leqslant 0{,}30$ ce qui signifie que la probabilité que 30 % des notes sont inférieures à 6,38. La barre d'admissibilité a donc été fixée à 6,38.

46 Taux de cholestérol.

Taux x_i en g/l	1,2	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
x_i^2	1,44	2,25	2,89	3,61	4,41	5,29	6,25	7,29	8,41	9,61
Effectif n_i	4	10	14	22	18	13	9	5	3	2
Fréquence f_i	0,04	0,1	0,14	0,22	0,18	0,13	0,09	0,05	0,03	0,02
Fréq. cum	0,04	0,14	0,28	0,5	0,68	0,81	0,9	0,95	0,98	1
loi normale $\mathcal{N}$	0,022 75	0,099 27	0,209 11	0,369 4	0,556 798	0,732 06	0,863 3	0,942	0,979 7	0,994 2

Moyenne m	Variance	Écart type σ	$P(X \leqslant 2{,}1)$	$P(N \leqslant 2{,}1)$	$m - s$	$m + s$	$P(1{,}62 < X < 2{,}45)$	$P(1{,}62 < N < 245)$
2,04	0,173	0,42	0,68	0,56	1,62	2,46	0,67	0,677

47 Paramètres d'une loi normale

1 On a $P(X \leqslant 28) = 0{,}5$; donc $\mu = 28$.

2 a Soit Z la variable aléatoire telle que $Z = \dfrac{X - 28}{\sigma}$.

Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

B $P(X \leqslant 15) = 0{,}015 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-28}{\sigma} \leqslant \dfrac{-13}{\sigma}\right) = 0{,}015$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{-13}{\sigma}\right) = 0{,}015$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\dfrac{-13}{\sigma} \approx -2{,}17$.

FracNormale(0.015,0,1)
-2.170090375

Ainsi, $\sigma \approx \dfrac{13}{2{,}17} \approx 6$, valeur arrondie au dixième près.

48 Durée de vie d'une ampoule fluo compacte

1 La durée de vie, mesurée en heures, d'une ampoule fluo compact est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}'(\mu\,;\sigma^2)$. La variable aléatoire X vérifie :
$P(X \geqslant 10\,000) = 0{,}6$ et $P(X \leqslant 13\,000) = 0{,}69$.

a. On considère la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. D'après le cours, la variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

b. $P(X \geqslant 10\,000) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6$

et $P(X \leqslant 13\,000) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{13\,000-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \leqslant \dfrac{13\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}69$.

c. $P\left(Z \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}4$.

À l'aide de la calculatrice, on détermine les nombres a et b tels que :
$P(Z \leqslant a) = 0{,}4$
et $P(Z \leqslant b) = 0{,}69$.

FracNormale(0.4,0,1)
-.2533471011
FracNormale(0.69,0,1)
.495850347

On trouve $a \approx -0{,}253$ (erreur dans l'édition 1).
$b \approx 0{,}496$.
μ et σ sont solutions du système.

$$\begin{cases} 10\,000 - \mu = -0{,}253 \times \sigma \\ 13\,000 - \mu = 0{,}496 \times \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 0{,}253\,\sigma = 10\,000 \\ \mu + 0{,}496\,\sigma = 13\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}749\,\sigma = 3\,000 \\ \mu = 0{,}253\,\sigma + 10\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma \approx 4\,005 \\ \mu \approx 11\,013 \end{cases}.$$

49 Durée de séchage

1 a. La durée du séchage, exprimée en minute, suit une variable aléatoire uniformément répartie sur [30 ; 150].

$P(0 \leqslant X \leqslant 60) = \dfrac{60-0}{150-30} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

b. $E(X) = \dfrac{150+30}{2} = 90$.

On peut espérer un temps de séchage moyen de 90 minutes.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 On admet désormais que la durée du séchage est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 30.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

a. $P(0 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}157$.

b. $P(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}136$.

```
normalFRép(0,60,
90,30)
      .1573052923
normalFRép(30,60
,90,30)
      .1359051975
```

Prolongement

Déterminer l'intervalle I centré en 90 tel que $P(X \in I) \approx 0{,}68$:

$I = [\mu - \sigma ; \mu + \sigma] = [60 ; 120]$

De même pour J centré en 90 tel que $P(X \in I) \approx 0{,}95$:

$I = [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma] = [30 ; 150]$

50 Autonomie d'un véhicule

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule pris au hasard dans la production, associe son autonomie en km. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1 $P(98 \leqslant X \leqslant 122) \approx 0{,}84$.

2 On recherche la valeur arrondie au dixième du nombre a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}04$.

D'après la calculatrice, on obtient $a \approx 93{,}5$.

```
normalFRép(98,12
2,104,6)
      .8399947732
```

```
FracNormale(0.04
,104,6)
      93.49588357
```

51 Magasin d'usine

La variable aléatoire X, égale au montant des achats, suit la loi normale $\mathcal{N}(350 ; 150^2)$.

```
normalFRép(-10^9
9,100,350,150)
      .0477903304
normalFRép(400,1
0^99,350,150)
      .3694414037
```

1 **a.** $P(X \leqslant 100) \approx 0{,}048$.

b. $P(X \geqslant 400) \approx 0{,}369$.

c. $[200 ; 500] = [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ donc d'après le cours :

$P(200 \leqslant X \leqslant 500) \approx 0{,}68$.

2 On cherche le plus petit entier a tel que :

$P(X \geqslant a) = 0{,}30$ c'est-à-dire tel que :

$1 - P(X \leqslant a) = 0{,}30 \Leftrightarrow P(X \leqslant a) = 0{,}70$.

D'après la calculatrice, $a \approx 430$, valeur arrondie à la dizaine supérieure.

À partir de 430 € d'achat, les clients pourront bénéficier d'une remise de 30 %.

52 Amélioration de la qualité d'une production

X la variable aléatoire égale à l'épaisseur de la paroi d'un tube prélevé au hasard. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

```
normalFRép(1.35,
1.65,1.5,0.07)
      .9678755443
```

1 $P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) \approx 0{,}97$.

2 On admet, qu'après réglages, la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1{,}5 ; \sigma^2)$

$P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) = 0{,}99 \Leftrightarrow P(\mu - 0{,}15 \leqslant X \leqslant \mu + 0{,}15) = 0{,}99$.

On peut utiliser le résultat du cours :

$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}99$, on a alors $3\sigma = 0{,}15$.

Soit $\sigma = 0{,}05$.

Autre méthode

La variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 1{,}5}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$$P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) = P\left(-\frac{0{,}15}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 0{,}99.$$

$$P\left(-\frac{0{,}15}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 1 - 2P\left(Z \leqslant -\frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 0{,}99.$$

$$P\left(Z \leqslant -\frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 0{,}005.$$

D'après la calculatrice :

$-\dfrac{0{,}15}{\sigma} = -2{,}576$

d'où $\sigma = 0{,}058$.

```
FracNormale(0.00
5,0,1)
      -2.575829303
```

53 Suivi anténatal

1 La variable aléatoire égale à la longueur fémorale suit la loi normale d'espérance 60 mm et d'écart type 2 mm.

a. À l'aide du tableau donné, on calcule, en retranchant la valeur obtenue pour $k = 58$ de celle obtenue pour $k = 62$, $P(58 \leqslant X \leqslant 62) \approx 0{,}683$.

Autre méthode :

D'après le cours, $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$, or $58 = \mu - \sigma$ et $62 = \mu + \sigma$ donc $P(58 \leqslant X \leqslant 62) \approx 0{,}68$.

b. $P(X > 62) = 1 - P(X \leqslant 62)$

$= 1 - 0{,}841\,344\,746 = 0{,}158\,655\,254$.

2 On cherche le nombre ℓ tel que $P(X < \ell) \approx 0{,}07$.

D'après le tableau donné, on obtient $\ell \approx 57$.

3 D'après le cours, on sait que :

$P(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$,

donc, on peut choisir l'intervalle $[a ; b] = [56 ; 64]$.

Accompagnement personnalisé (p. 220)

Exercice guidé

54 **1** La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(9{,}5 ; 2^2)$.

$P(0 \leqslant X \leqslant 8) \approx 0{,}227$.

```
normalFRép(0,8,9
.5,2)
      .2266262611
1-normalFRép(0,1
2,9.5,2)
      .1056508573
```

2 $P(X \geqslant 12) = 1 - P(X \leqslant 12)$

$\approx 0{,}106$.

3 **a.** $P(9{,}5 - a \leqslant X \leqslant 9{,}5 + a) = 0{,}90$

$\Leftrightarrow 1 - 2P(X \leqslant 9{,}5 - a) = 0{,}90$.

On choisit le plus petit nombre a tel que :

$P(X \leqslant 9{,}5 - a) = 0{,}05$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $9{,}5 - a \approx 6{,}21$, donc $a \approx 3{,}3$.

90 % de la population a une largeur de main comprise dans l'intervalle $[6{,}2 ; 12{,}8]$.

b. La longueur de la poignée de porte devra être d'au moins 12,8 cm.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

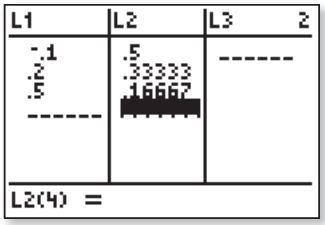
Revoir les outils de base

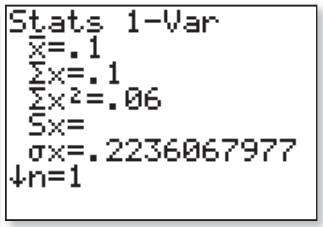
Savoir déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

55 Un joueur lance un dé parfaitement équilibré. S'il obtient 4 ou 5 alors il gagne 0,20 € , s'il obtient le 6 alors il gagne 0,50 € et sinon il perd 0,10 €.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

Gain x_i	$-0{,}10$	0,20	0,50
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = -0{,}10 \times \frac{1}{2} + 0{,}20 \times \frac{1}{3} + 0{,}50 \times \frac{1}{6} = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1$;
$\sigma(X) \approx 0{,}22$.





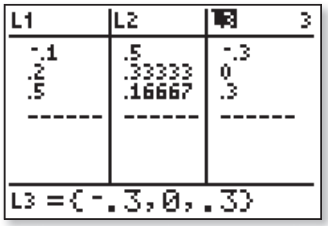
Savoir utiliser les propriétés de l'espérance et de l'écart type

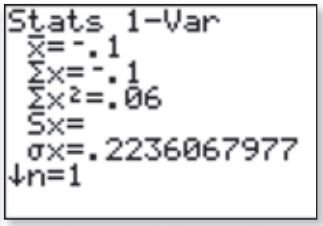
56 Le joueur mise 0,20 € au début du jeu précédent.

1 a. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au gain algébrique du joueur est donnée par le tableau suivant.

Gain x_i	$-0{,}30$	0	0,30
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b. $E(Y) = -0{,}30 \times \frac{1}{2} + 0{,}30 \times \frac{1}{6} = -\frac{0{,}6}{6} = -0{,}10$
et $\sigma_Y \approx 0{,}22$.
On remarque que $E(Y) = E(X) - 0{,}20$ et $\sigma_Y = \sigma_X$.



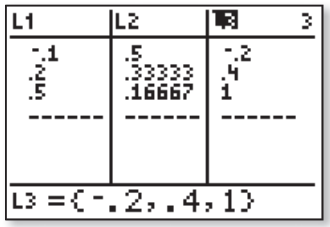


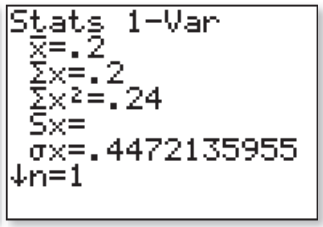
$E(X - k) = E(X) - k$. $\sigma_{X-k} = \sigma_X$.

57 Le meneur de jeu décide de doubler tous les gains et les pertes.
a. Soit Z la variable aléatoire égale au gain du joueur, $Z = 2X$.
b. La loi de probabilité de la variable aléatoire Z est donnée par le tableau suivant.

Gain x_i	$-0{,}20$	0,40	1
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(Z) = -0{,}2 \times \frac{1}{2} + 0{,}4 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1{,}2}{6} = 0{,}2$ et $\sigma(Z) \approx 0{,}44$.





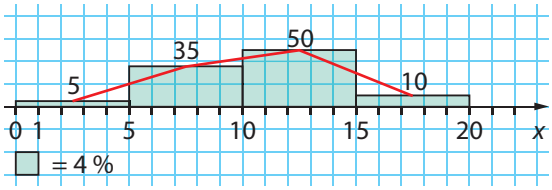
c. On remarque que $E(Z) = 2E(X)$ et $\sigma_Z = 2\sigma_X$.
d $E(kX) = kE(X)$ et $\sigma_{kX} = k\sigma_X$. $(k > 0)$.

58 Savoir construire un histogramme

On considère la série statistique définie par

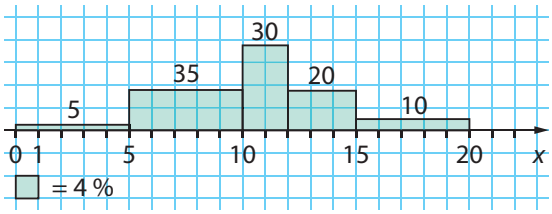
Classe	[0 ; 5 [	[5 ;10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 2 0 [
f_i en %	5	35	50	10
Amplitude	5	5	5	5
Hauteur	1	7	10	2

On a choisi une hauteur de 0,5 carreau pour 1 sur l'histogramme suivant.



3

Classe	[0 ; 5[	[5 ;10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 2 0[
f_i en %	5	35	30	20	10
Amplitude	5	5	2	3	5
Hauteur	1	7	15	20/3	2



59 Savoir reconnaitre et utiliser la loi binomiale

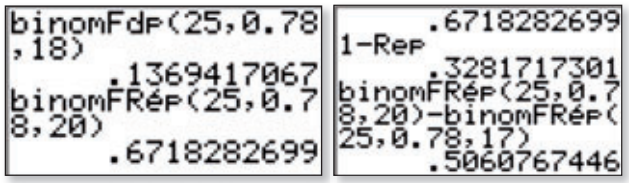
On interroge successivement et de manière indépendante, 25 jeunes. On reconnait la répétition de $n = 25$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « avoir regardé la série docteur H » de probabilité $p = 0{,}78$. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; 0{,}78)$

1 Calcul d'une probabilité
Vrai – Faux
a. Faux : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; 0{,}78)$
b. Vrai : $P(X = 18) = \binom{25}{18} \times 0{,}78^{18} \times 0{,}22^{7}$.
c. Vrai : $P(X = 25) = 0{,}78^{25}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 Utilisation de la calculatrice

À l'aide de la calculatrice,



a. $P(X = 18) \approx 0{,}137$.

b. $P(X \leqslant 20) \approx 0{,}672$.

c. $P(X > 20) \approx 0{,}328$.

d $P(18 \leqslant X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 17)$.

$P(18 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0{,}506$.

3 Espérance

Vrai – Faux

a. Vrai : $E(X) = 25 \times 0{,}78$;

d Vrai : $V(X) = 25 \times 0{,}78 \times 0{,}22 \approx 4{,}29$.

Pour aller plus loin

60 Modéliser ; Centrer et réduire pour calculer une probabilité

On choisit au hasard 10 000 animaux et on étudie si ceux-ci ont contracté ou non la maladie. On admet que les états de santé des animaux sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades.

1 a On reconnait la répétition de 10 000 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « l'animal a contracté la maladie », de probabilité $p = 0{,}04$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,000 ; 0{,}04)$.

b. $E(X) = 10\,000 \times 0{,}04 = 400$;

$V(X) = 10\,000 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 384$.

$\sigma_X = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$.

2 On admet que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 400}{8\sqrt{6}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

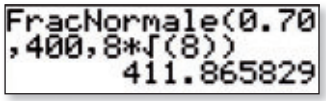
a. $P(X \leqslant b) = P\left(\dfrac{X - 400}{8\sqrt{6}} \leqslant \dfrac{b - 400}{8\sqrt{6}}\right) = P\left(Z \leqslant \dfrac{b - 400}{8\sqrt{6}}\right)$.

b. $P(Z \leqslant d) \approx 0{,}70 \Leftrightarrow d \approx 0{,}53$

d'où $\dfrac{b - 400}{8\sqrt{6}} = 0{,}53 \Leftrightarrow b = 0{,}53 \times 8\sqrt{6} + 400$.

$b \approx 410{,}39$.

c.



d La probabilité qu'environ 410 animaux au plus, aient contracté la maladie est égale à 0,70.

3 a. $P(400 - a \leqslant X \leqslant 400 + a)$

$= 1 - P(X \leqslant 400 - a) - P(X \geqslant 400 + a)$.

$P(400 - a \leqslant X \leqslant 400 + a) = 1 - 2\,P(X \geqslant 400 + a)$

$= 1 - 2\,(1 - P(X \leqslant 400 + a)$

$= 2\,P(X \leqslant 400 + a) - 1$.

$P(X \leqslant 400 + a) = P\left(\dfrac{X - 400}{8\sqrt{6}} \leqslant \dfrac{a}{8\sqrt{6}}\right) = P\left(Z \leqslant \dfrac{a}{8\sqrt{6}}\right)$.

$P(400 - a \leqslant X \leqslant 400 + a) = 2\,P\left(Z \leqslant \dfrac{a}{8\sqrt{6}}\right) - 1$.

b. $2\,P\left(Z \leqslant \dfrac{a}{8\sqrt{6}}\right) - 1 = 0{,}50 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{a}{8\sqrt{6}}\right) = 0{,}75$.

D'après le tableau, on obtient $\dfrac{a}{8\sqrt{6}} \approx 0{,}67$ soit $a \approx 13$.

$P(387 \leqslant X \leqslant 413) \approx 0{,}5$.

c. La probabilité d'obtenir entre 387 et 413 animaux malades est égale à 0,5 .

61 Raisonner : Étude d'une densité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par : $f(t) = 2te^{-t^2}$.

1 a. $f'(t) = 2e^{-t^2} - 4t^2e^{-t^2} = 2e^{-t^2}(1 - 2t^2)$.

Pour tout réel $t \in [0 ; 3]$, $2e^{-t^2} > 0$.

$1 - 2t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f'(t) > 0$ donc, la fonction f est croissante.

Sur l'intervalle $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$, $f'(t) < 0$ donc, la fonction f est décroissante.

De plus, f' s'annule est change de signe en $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc f y admet un maximum.

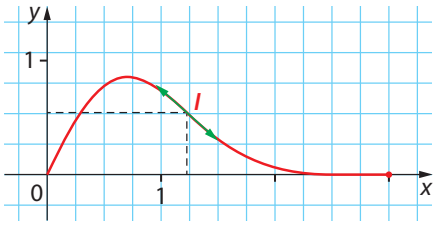
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		3
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	↗	$e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{2}$	↘	$6e^{-9}$

b. $f''(t) = 4t(2t^2 - 3)e^{-t^2}$.

$f''(t) \leqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[0 ; \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$ et $f''(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[\dfrac{\sqrt{6}}{2} ; 3\right]$.

c. En $t = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, f'' s'annule et change de signe donc la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion I d'abscisse $t = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. $I(1{,}2 ; 0{,}5)$.

d



2 a. Une primitive de f sur l'intervalle [0 ; 3] est $F(t) = -e^{-t^2}$.

$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt = -e^{-9} + 1 = \frac{e^9 - 1}{e^9}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. La fonction f est positive et continue sur l'intervalle $[0\,;3]$, La fonction $g = kf$ est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;3]$, si $k \geqslant 0$ et

$\int_0^3 k f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{e^9-1}{e^9}\right) = 1$ soit $k = \frac{e^9}{e^9-1}$.

c. Soit X la variable aléatoire de fonction de densité g,

$P(X \leqslant 1) = \int_0^1 g(t)\,dt = \frac{e^9}{e^9-1}(-e^{-1}+1)$

$= \frac{e^9}{e^9-1} \times \frac{e-1}{e} = \frac{e^8(e-1)}{e^9-1}$.

$P(X \leqslant 1) \approx 0{,}63$.

3 La fonction h est continue et positive sur l'intervalle $[0\,;3]$.

$\int_0^3 tf(t)\,dt \approx 0{,}88$.



Ce calcul représente l'espérance de la variable aléatoire X.

62 Modélisation sur tableur : Droite de Henry

1

C3 : =B3/$B$9+C2

	A	B	C	D	E	F	G
1	durée de fonctionnement x_i (en h)	effectif n_i	Fréquences cumulées croissantes F_i	Valeur de la variable Z z_i			
2	500	24	0,048	-1,6645629		Droite de Henry	
3	700	67	0,182	-0,9077695		moyenne	971,4285714
4	900	108	0,398	-0,2585273		ecart type	285,7142857
5	1100	126	0,65	0,38532047			
6	1300	109	0,868	1,11698673			
7	1500	51	0,97	1,88079361			
8	1700	15	1	#NOMBRE!			
9	total	500					

2 **a.** La variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

b. $P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ donc, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

c. $z = \frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma}$ est l'équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$.

d. Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses a pour ordonnée $z = 0$ et son abscisse vérifie $\frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma} = 0$ donc ce point a pour abscisse $x = \mu$.

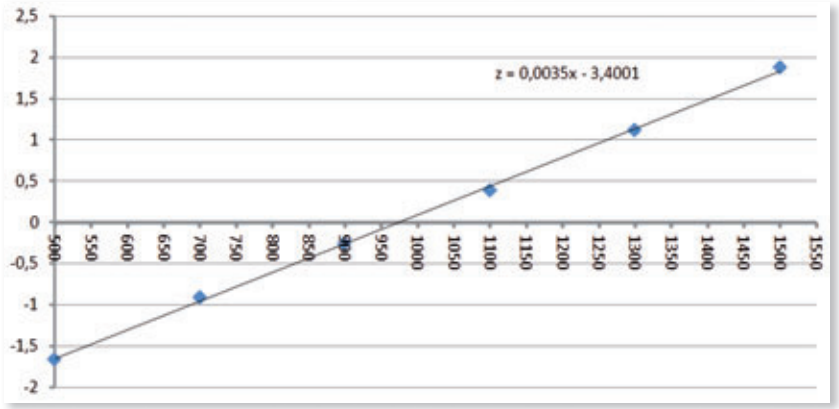
e. Si $x = 1$ alors $\frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}} = \sigma + \mu$.

3 **a.** Voir plus haut.

b. Les points du nuage de points sont presque alignés, sur la droite d'équation $z = 0{,}0035\,x - 3{,}4$.

c. $z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3{,}4}{0{,}0035}$ soit $E(X) \approx 971$.

$z = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4{,}4}{0{,}003\,5}$ donc, $\sigma + \mu \approx 1\,257$ soit $\sigma \approx 286$.



4 $P(600 \leqslant X \leqslant 800) \approx 0{,}178$.

Les valeurs initiales ne permettent pas de calculer cette probabilité.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Réussir au Bac (p. 224)

63 QCM

1 a. Vrai : $k = 3$ pour que la fonction f soit une fonction de densité de probabilité, car :

$$\int_0^1 k x^2 \, dx = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow k = 3 .$$

2 c. Vrai : voir cours.

3 b. Vrai : $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$.

Comme l'espérance de X est $\mu = 20$:

$$[20 - n ; 20 + n] = [\mu - \sigma ; \mu + \sigma] \Leftrightarrow n = \sigma = 6 .$$

64 QCM

On suppose que la variable aléatoire X égale au retard de Corentin est uniformément répartie dans l'intervalle [0 ; 30].

1 a. Faux : $f(x) = \dfrac{1}{30 - 0} = \dfrac{1}{30}$.

b. Vrai : $P(15 \leqslant X \leqslant 20) = \dfrac{20 - 15}{30 - 0} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

c. Faux : $E(X) = \dfrac{0 + 30}{2} = 15$.

2 Soit X la variable aléatoire égale à l'âge des jeunes enfants, on admet que X suit la loi normale d'espérance 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois.

```
normalFRép(-10^9
9,9,11.5,3.2)
        .217327667
1-normalFRép(-10
^99,15,11.5,3.2)
        .1370323579
```

a. Faux : $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}22$.

b. Faux : $P(X \geqslant 15) \approx 0{,}137$.

```
normalFRép(8,12,
11.5,3.2)
        .4250496733
```

c. Faux :

$P(8 \leqslant X \leqslant 12) \approx 0{,}425$.

3 Lors d'un test de mathématiques, les élèves de terminales ES ont obtenu une moyenne de 42 points sur 60, d'écart-type de 18. On suppose que les notes se répartissent suivant une loi normale.

a. Vrai : Il y a environ une chance sur 4 qu'un élève ait eu moins de 30.

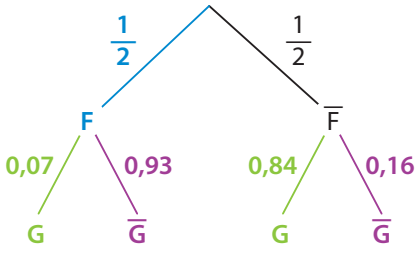
```
normalFRép(-10^9
9,30,42,18)
        .252492467
1-normalFRép(-10
^99,50,42,18)
        .3283606667
```

b. Faux : Il y a environ 33 % de chances qu'un élève ait eu plus de 50.

c. Faux : Il y a 11 % de chances qu'un élève ait moins de 20.

```
normalFRép(-10^9
9,20,42,18)
        .1108118649
```

65 Taille des femmes en France



1 a. Soit G l'événement : « La personne mesure plus de 175 cm » et F : « La personne est une femme », on calcule $P(F \cap G) = P_F(G) \times P(F) = 0{,}07 \times 0{,}5 = 0{,}035$.

b. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, la probabilité P(G) se calcule en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à G.

$$P(G) = \frac{1}{2} \times 0{,}07 + \frac{1}{2} \times 0{,}84 = 0{,}455 ;$$

c. On calcule la probabilité de l'événement F conditionnée par l'événement G,

$$P_G(F) + \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}035}{0{,}455} = \frac{1}{13} .$$

2 On suppose maintenant que la variable aléatoire X égale à taille d'une femme française suit la loi normale d'espérance 163 cm et d'écart-type 11 cm.

a. Par lecture du tableau, $P(X \leqslant 175) \approx 0{,}862\,3$.

b. $P(X \geqslant 175) = 1 - P(X \leqslant 175) = 0{,}137\,7$.

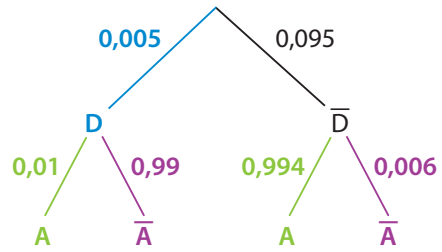
c. On cherche le nombre a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}70$.

D'après le tableau, on obtient $a = 168$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $a \approx 168{,}77$.

70 % des françaises mesurent moins de 168 cm.

66 Carte de fidélité



D : « la carte de fidélité présente un défaut » ;

A : « la carte de fidélité est acceptée après contrôle.

1 a. $P_{\overline{D}}(A) = 1 - P_{\overline{D}}(\overline{A}) = 0{,}994$.

D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, on calcule la probabilité P(A) en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à A.

$P(A) = 0{,}005 \times 0{,}01 + 0{,}995 \times 0{,}994 = 0{,}989\,08$.

b. On calcule la probabilité de l'événement D conditionnée par l'événement $\overline{A}$,

$$P_{\overline{A}}(D) = \frac{P(\overline{A} \cap D)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}004\,95}{0{,}010\,92} = \frac{165}{364}$$

d'où $P_{\overline{A}}(D) \approx 0{,}453$.

2 On interroge un client choisi au hasard parmi l'ensemble des clients possédant la carte de fidélité.

Soit X la variable aléatoire égale au montant en euros, de ses achats par semaine. On admet que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6

a. $P(34 \leqslant X \leqslant 46) \approx P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$.

b.

```
1-normalFRép(-10
^99,30,40,6)
        .9522096696
```

$P(X \geqslant 30) = 1 - P(X \leqslant 30)$.

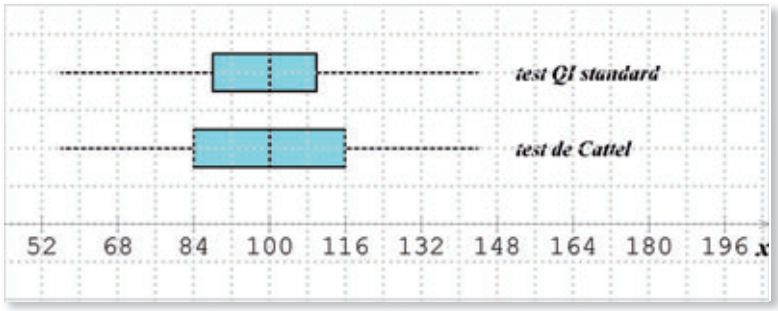
$P(X \geqslant 30) \approx 0{,}952$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

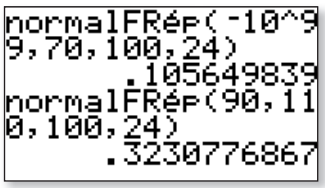
67 Test de QI

1 $Q_3 = 116$, donc 25 % au moins des personnes testées ont obtenu un résultat supérieur ou égal à 116.

2 Diagrammes en boîte



b. Pour le test de Cattel : $Q_3 - Q_1 = 116 - 84 = 32$.
Pour le test standard : $Q_3 - Q_1 = 110 - 88 = 22$.
La dispersion des résultats est plus importante dans le test de Cattel.



3 Le test de Cattel est un test dont les résultats sur un grand nombre d'individus choisis au hasard suivent une loi normale d'espérance 100 et d'écart type 24. Soit X la variable aléatoire égale au résultat d'un test.

a. $P(X \leqslant 70) \approx 0{,}106$.

b. $P(90 \leqslant X \leqslant 110) \approx 0{,}323$.

c. $P(X) \in [100 - a\,;\, 100 + a]) \approx 0{,}80$
$\Leftrightarrow 1 - 2\,P(X \leqslant 100 - a) \approx 0{,}80$.
$2\,P(X \leqslant 100 - a) \approx 0{,}20 \Leftrightarrow P(X < 100 - a) \approx 0{,}10$.

d. D'après le tableau, on trouve :
$100 - a = 69$ soit $a = 31$.
$P(X \in [69\,;\, 131]) \approx 0{,}80$.

68 Fabrication de pièces métalliques

1 a. Il s'agit d'une répétition de 60 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès l'événement « la pièce est triangulaire » et de probabilité de succès $p = 0{,}40$.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(60;0{,}4)$.

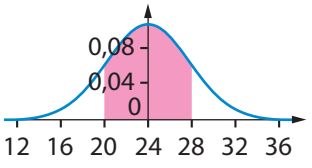


b. $P(20 \leqslant X \leqslant 28) \approx 0{,}765$.

2 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(24\,;\,14{,}4)$.
$P(20 \leqslant X \leqslant 28) \approx 0{,}708$.



3 a. X suit la loi normale d'espérance 24. La courbe de la densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 24$.



Donc $P(X \leqslant 24 - a) = P(X \geqslant 24 + a)$
et $P(24 - a \leqslant X \leqslant 24 + a) = 1 - 2\,P(X \leqslant 24 - a)$.

b. $P(24 - a \leqslant X \leqslant 24 + a) = 0{,}90$
$\Leftrightarrow 2\,P(X \leqslant 24 - a) = 1 - 0{,}90$
$\Leftrightarrow P(X \leqslant 24 - a) = 0{,}05$.
D'après la table donnée, $24 - a \approx 18$, donc $a \approx 6$.
90 % au moins des prélèvements contiennent entre 18 et 30 pièces triangulaires.

69 Entreprises sans salarié

1 a. On prélève au hasard 70 entreprises parmi l'ensemble de ces entreprises. On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'entreprises qui n'emploient aucun salarié.
On a la répétition de 70 épreuves de Bernoulli , identiques et indépendantes, de succès « L'entreprise n'emploie pas de salarié » de probabilité $p = 0{,}8$.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(70\,;\,0{,}8)$.

b. $P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 49)$ d'où $P(X \geqslant 50) \approx 0{,}099\,99$.

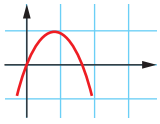
2 a. X suit la loi normale $\mathcal{N}(61\,;\,9)$.
$P(55 \leqslant X \leqslant 67) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$.
$P(55 \leqslant X \leqslant 67) \approx 0{,}954$.
Il y a environ 95 % de chance qu'entre 55 et 67 entreprises n'emploient aucun salarié.

b. $P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 50)$ d'où $P(X \geqslant 50) \approx 0{,}999\,877$.

70 Étude d'une fonction de densité

Partie A Étude de fonctions

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(t) = t^2 - t^3$.



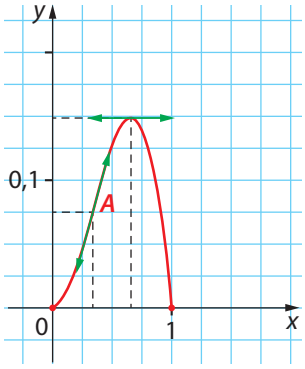
1 a. $f'(t) = 2t - 3t^2 = t(2 - 3t)$.
$f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[0\,;\,\frac{2}{3}\right]$.
Donc f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{2}{3}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$. f' s'annule et change de signe en $\frac{2}{3}$ donc f admet un extremum pour $t = \frac{2}{3}$.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$		+	0	–	
$f(t)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

b. $f''(t) = 2 - 6t$; $f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[0\,;\,\frac{1}{3}\right]$.
f'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{3}$ donc la courbe représentative (C) de la fonction f admet un point d'inflexion au point $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{27}\right)$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. Courbe



2 a. g est définie, continue et positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Une primitive de la fonction g sur cet intervalle est la fonction G définie sur cet intervalle par :

$$G(t) = 12\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right)$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = G(1) - G(0) = 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1.$$

g est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b. $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ est la primitive de g qui s'annule en 0.
$G'(x) = g(x)$.
Sur l'intervalle $[0\,;1]$, $g(x) \geqslant 0$ donc G est croissante sur cet intervalle.

c. $G''(x) = g'(x) = 12f'(x)$ donc G'' s'annule et change de signe en $x = \frac{2}{3}$. La courbe représentative de G admet un point d'inflexion $I\left(\frac{2}{3}\,;\frac{16}{27}\right)$.

Partie B Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire de densité g.

1 a. Calculer la probabilité :

$$P(X \leqslant 0{,}5) = \int_0^{0,5} g(t)\,dt = G(0{,}5) = \frac{5}{16}.$$

b. Par lecture de la courbe (Γ) le nombre réel tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}5$ est $a \approx 0{,}6$.

c. $P(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}8) = \int_{0,4}^{0,8} g(t)\,dt$
$= G(0{,}8) - G(0{,}4)$
$= 0{,}819\,2 - 0{,}179\,2 = 0{,}64$.

2 Soit X la variable aléatoire égale au temps écoulé, en centième de jour, entre le 1er Juillet et le jour où une fleur éclot ; la fonction g est la fonction de densité de la variable aléatoire X.
a. $P(X \leqslant 0{,}8) = G(0{,}8) = 0{,}819\,2$.
b. On cherche le nombre a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}5$, soit a est environ égal à 0,6 donc au bout d'environ 60 jours.

3 a. La fonction u, définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $u(t) = tg(t)$ est continue et positive. Une primitive de u sur cet intervalle est $U(t) = 12\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)$.

$$E(X) = \int_0^1 tg(t)\,dt = G(1) - G(0) = 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Le temps moyen nécessaire pour qu'une fleur éclose est de 60 jours.

b. Ce calcul représente la variance de la variable aléatoire X.
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{5}$.

c. $P(B) = P(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}8) = 0{,}64$.
$P(C) = P(0{,}2 \leqslant X \leqslant 1) = G(1) - G(0{,}2)$
$= 1 - 0{,}027\,2 = 0{,}972\,8$.

71 Taux de calcium d'une eau minérale

1 a. On prélève au hasard 40 bouteilles dans le stock pour vérifier le taux de calcium.
On a la répétition de 40 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès : » la bouteille contient de l'eau calcaire », de probabilité $p = 0{,}075$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent de l'eau calcaire, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40\,;0{,}075)$.

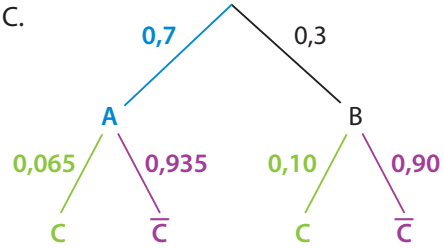
b. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}925^{40}$, soit $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}044$.

2 Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 50,6 et d'écart-type 10.



$P(Y \geqslant 65) \approx 0{,}0749$.
L'énoncé indique que lorsque le stock est important, 7,5 % des bouteille ont un taux de calcium supérieur à 65 mg /l.

3 La probabilité $P(A \cap C)$ s'obtient en effectuant le produit des probabilités situées sur la branche passant par A et C.



$P(A \cap C) = 0{,}7 \times 0{,}065 = 0{,}045\,5$.
De même $P(B \cap C) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$.
Les événements A et B forment une partition de l'univers donc $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0{,}075\,5$.

72 Lecture ou film ?

Partie A

Livre / série	0 – 4	5 – 9	10 – 14	Total
S	120	59	80	259
ES	50	100	50	200
L	50	110	100	260
Total	220	269	230	719

1 $\frac{220}{719} \approx 0{,}306$.
Soit environ 30,6 % des élèves sont de « petits lecteurs ».

2 $\frac{100}{230} \approx 0{,}435$ soit environ 43,5 % des gros lecteurs sont des élèves de la série L.

3 $\frac{120}{259} \approx 0{,}46$ soit environ 46 % des élèves de la série S ont lu au plus 4 livres.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie B

Nombre de films	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'élèves	5	10	10	20	35	40	60	80	85	80
Fréquences	0,01	0,014	0,014	0,028	0,049	0,056	0,08	0,111	0,118 2	0,111
Nombre de films	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Nombre d'élèves	70	60	50	40	30	20	10	8	6	
Fréquences	0,097	0,08	0,07	0,06	0,042	0,027 8	0,013 91	0,011 13	0,01	

Moyenne $\overline{x}$	Variance V	écart type σ	$\overline{x}-\sigma$	$\overline{x}+\sigma$	$\overline{x}-2\sigma$	$\overline{x}+2\sigma$
8,837	12,59	3,549	5,289	12,386	1,74	15,93

La part en pourcentage des élèves dont le nombre de films vus au cinéma pendant l'année appartient à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$ est égale à 67,5 %.
La part en pourcentage des élèves dont le nombre de films vus au cinéma pendant l'année appartient à l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma\,;\overline{x}+2\sigma]$ est égale à 94,6 %.

Partie C

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de films vus au cinéma dans l'année, par un élève pris au hasard. Les résultats précédents justifient le fait que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type inconnu σ.

1 **a.** On sait que la probabilité qu'un élève ait vu au plus 8 films au cinéma dans l'année est environ égale à 0,369 donc $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}369$.

b. Soit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-9}{\sigma}$.

La loi suivie par Z est la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

c. $P(X \leqslant 8) = P\left(\dfrac{X-9}{\sigma} \leqslant \dfrac{8-9}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma}\right)$.

d. $P(Z \leqslant -0{,}353) \approx 0{,}362$ donc $-\dfrac{1}{\sigma} = -0{,}352$

d'où $\sigma \approx 2{,}832$ soit arrondi à l'unité, $\sigma \approx 3$.

2 $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}996$.



Réinvestir... (p. 228)

73 ... en économie

Détermination d'un prix de vente

a.

Moyenne $\overline{x}$	Variance V	Écart type σ	$\overline{x}-\sigma$	$\overline{x}+\sigma$	$\overline{x}-2\sigma$	$\overline{x}+2\sigma$
114,25	126,69	11,26	102,99	125,51	91,74	116,25

b. La part des prix appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$ est égale à 69 %, puis celle des prix appartement à l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma\,;\overline{x}+2\sigma]$ est égale à 95 %.

c. Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(114,25 : 11{,}26^2)$, d'après le cours on a,
$P(X \in [\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]) \approx 0{,}68$ et $P(X \in [\overline{x}-2\sigma\,;\overline{x}+2\sigma]) \approx 0{,}954$.
Les résultats précédents coïncident convenablement avec les propriétés de la loi normale $\mathcal{N}(114{,}25\,;11{,}25^2)$.

d. L'entreprise fixe le prix de vente a à un niveau tel que seulement 25 % des clients potentiels ont proposé un prix supérieur. On cherche le nombre a, tel que :
$P(X \geqslant a) = 0{,}25 \Leftrightarrow 1 - P(X \leqslant a) = 0{,}25 \Leftrightarrow P(X \leqslant a) = 0{,}75$.
À l'aide de la calculatrice on trouve, $a \approx 121{,}83$.



74 ... en agriculture

Calibrage de fruits pour la vente

La variable aléatoire X égale au poids d'une mangue suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ et l'intervalle $[550\,;800]$ est centré en μ.

a. $E(X) = \dfrac{550+800}{2} = \dfrac{1\,350}{2} = 675$.

b. 5 % des fruits sont dehors de l'intervalle $[550\,;800]$
donc $P(550 \leqslant X \leqslant 800) = 0{,}95$
d'après le cours $P(X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu+2\sigma]) \approx 0{,}95$
donc $2\sigma = 125$ soit $\sigma = 62{,}5$.

c. $P(X \geqslant 700) \approx 0{,}345$.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

75 … en hydrologie

Les crues de l' Amazone

a. Soit X la variable aléatoire égale au débit du fleuve, X suit une loi normale . La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mathrm{E}(\mathrm{X})$.
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{E}(\mathrm{X})) = 0{,}5$.
Sur une période de 32 années entre 1968 et 2000, on a constaté qu'un débit égal à 239 milliers de mètres cube par seconde pouvait être égal ou dépassé une année sur deux, donc on en déduit que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 239$.

b. Soit la variable aléatoire :
$\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - 239}{\sigma}$,

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 261) = \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X} - 239}{\sigma} \geqslant \dfrac{261 - 239}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \geqslant \dfrac{22}{\sigma}\right)$.

c. D'après le cours, on sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
D'après l'énoncé, on sait qu'un débit égal à 261 milliers de mètre cube par seconde pouvait être égal ou dépassé une année sur cinq donc, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 261) = \dfrac{1}{5}$.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 261) = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \geqslant \dfrac{22}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leqslant \dfrac{22}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{5}$.

On a donc, $\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leqslant \dfrac{22}{\sigma}\right) = \dfrac{4}{5}$.

D'après la calculatrice, $\dfrac{22}{\sigma} \approx 0{,}841\,6$ d'où $\sigma \approx 26$.

```
FracNormale(4/5,
0,1)
      .8416212335
```

d. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 272) \approx 0{,}102$.

```
normalFRép(272,1
0^99,239,26)
      .1021794506
```

76 … en finance

Investissement et risque de perte

a. Soit la variable aléatoire X égale au rendement de ce portefeuille, on admet que X suit une loi normale.
Un portefeuille dont l'investissement initial est de 100 €, a un taux annuel moyen de rendement de 15 % d'écart type 30 % donc, en moyenne l'investissement moyen est égal à :
$100 \times 1{,}15 = 115$ et l'écart type est de $0{,}30 \times 100 = 30$.
L'espérance de la variable aléatoire X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 115$ et l'écart type est $\sigma(\mathrm{X}) = 30$.

b. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant a) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a) = 0{,}95 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a) = 0{,}05$
d'après la calculatrice, on obtient $a \approx 65{,}65$.

```
FracNormale(0.05
,115,30)
      65.65439122
```

c. V.A.R. = 65, 65 € .

77 … en gestion

Réservation dans un restaurant

La variable aléatoire X est égale au nombre de repas servis un jour donné.

1 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(90\,;\,9)$
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 95) \approx 0{,}048$.

```
normalFRép(95,10
^99,90,3)
      .0477903304
```

2 La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(99\,;\,9{,}9)$
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 100) \approx 0{,}375$.

```
normalFRép(100,1
0^99,99,√(9.9))
      .3753104768
```

78 … en biologie

Courbes de croissance des enfants.

La variable aléatoire X égale au périmètre crânien d'un enfant de six mois suit la loi normale
$\mathcal{N}(43\,;\,2{,}25)$ donc $\sigma = 1{,}5$.

a. $\mathrm{I} = [\mu - 2\sigma\,;\ \mu + 2\sigma] = [40\,;\,46]$.
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) \approx 0{,}954$.

b. $\mathrm{P}(42 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 44) \approx 0{,}495$.

```
normalFRép(42,44
,43,1.5)
      .495015066
```

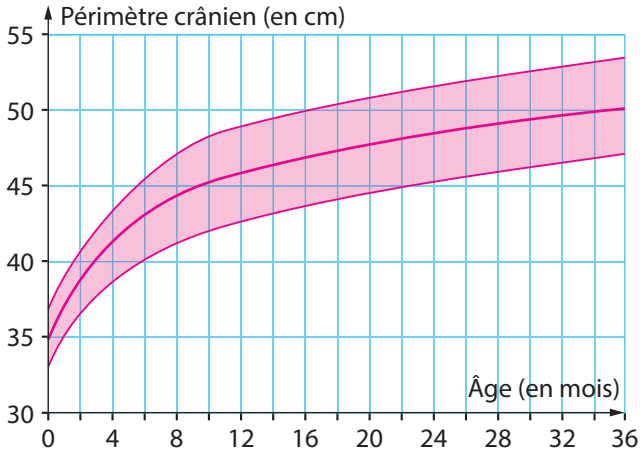
c. D'après la calculatrice, si $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{P}_1) = 0{,}01$ alors $\mathrm{P}_1 \approx 39{,}51$.

```
FracNormale(0.01
,43,1.5)
      39.51047818
```

Si $\mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{P}_{99}) = 0{,}99$ alors $\mathrm{P}_{99} \approx 46{,}49$.

```
FracNormale(0.99
,43,1.5)
      46.48952182
```

d. Oui, cette mesure est dessous de la zone rose du carnet de santé donc en dehors de l'intervalle $[\mu' - 2\sigma'\,;\,\mu' + 2\sigma']$.
En revanche, on peut déterminer graphiquement qu'elle fait partie de l'intervalle $[\mu' - 3\sigma'\,;\,\mu' + 3\sigma']$.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 8

Échantillonnage

Partir d'un bon pied (p. 230)

A Interpréter un intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence.

a. Faux : car, dans la région A, il y a 100 malades.
b. Vrai : la proportion de malades hospitalisés dans l'ensemble de la population est $p = \frac{30}{100} = 0,3$.
c. Faux : dans la région A, $n = 100$ et $p = 0,3$ donc l'intervalle de fluctuation est $[0,2 ; 0,4]$ et il contient la fréquence observée $f = \frac{39}{100} = 0,39$.
d. Vrai : dans l'ensemble des deux régions, on a $p = 0,3$, $n = 100 + 150 = 250$ donc l'intervalle de fluctuation est $[0,236 ; 0,364]$ et il ne contient pas $f = \frac{39+89}{100+150} = 0,512$.

B Déterminer un intervalle de fluctuation à 95% à l'aide de la loi binomiale

1 a. Faux : a est le plus petit entier vérifiant $P(X \leqslant a) > 0,025$. D'après la table $a = 78$.
b. Faux : b est le plus petit entier vérifiant $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$. D'après la table $b = 103$.
c. Faux : $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
Or $P(X \geqslant b+1) = 1 - P(X \leqslant b)$
donc $P(X \geqslant b+1) \leqslant 0,025$.
d. Vrai :

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(X \leqslant b) - P(X < a) \\ &= P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1) \\ &= P(X \leqslant 103) - P(X < 77) \\ &= 0,976 - 0,019 \\ &= 0,957 \\ &\geqslant 0,95 \end{aligned}$$

C Reconnaître les probabilités usuelles pour la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$

a. Vrai : il s'agit de l'aire sous la courbe de la densité de Z entre $x = -2$ et $x = 2$.
b. Vrai : c'est un théorème du cours (cf. chapitre 7).
c. Vrai : c'est un théorème du cours (cf. chapitre 7).
d. Faux : $P(Z > 3) = P(Z < -3)$ donc :

$$\begin{aligned} P(-3 \leqslant Z \leqslant 3) &= P(Z \leqslant 3) - P(Z < -3) \\ &= P(Z \leqslant 3) - P(Z > 3) \\ &= 1 - P(Z > 3) - P(Z > 3) \\ &= 1 - 2P(Z > 3) \\ &= 1 - 2P(Z \geqslant 3) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant 3) &= \frac{1 - P(-3 \leqslant Z \leqslant 3)}{2} \\ &\approx \frac{1 - 0,997}{2} \approx 0,0015. \end{aligned}$$

Découvrir

Activité 1 Découvrir une nouvelle variable aléatoire (p. 232)

1 a. Le choix d'une meringue est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « *La meringue est cassée* ». D'après l'affirmation du contrôleur, la probabilité du succès est :

$$p = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Lorsque l'on prélève un échantillon de 10 meringues, on répète donc cette épreuve de Bernoulli $n = 10$ fois, de manière indépendante et identique (*on suppose ici que le stock de meringues est très grand de sorte qu'en prélever 10 ne modifie pas de manière significative la probabilité de tirer de nouveau une meringue cassée*).

Par conséquent, le nombre X de meringues cassée obtenues dans l'échantillon, qui correspond aussi au nombre de succès obtenues en répétant cette épreuve de Bernoulli, suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10 ; 0,2).$$

Alors les valeurs prises par X sont tous les entiers compris entre 0 et 10 et l'espérance de X est :

$$E[X] = n \times p = 10 \times 0,2 = 2.$$

b. Si l'on note Y le nombre aléatoire compris entre 0 et 1 fournit par la commande Alea(), la loi de probabilité de Y est donc la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Si l'on note ENT la fonction partie entière et A l'événement « *La cellule considérée dans la plage A2 à J101 contient un 1* », alors :

$$P(A) = P(\text{Ent}(Y+0{,}2)=1) = P(2 > Y+0{,}2 \geqslant 1)$$
$$= P(1{,}8 > Y \geqslant 0{,}8) = P(1 \geqslant Y \geqslant 0{,}8)$$
$$= \frac{1-0{,}8}{1-0} = 0{,}2\,.$$

La cellule G58 contient donc un 1 lorsque la meringue B7 (colonne G) de l'échantillon numéro 57 (ligne 58) est cassée. A l'inverse, elle contient un 0 quand cette meringue n'est pas cassée.

2 **a.** Voir le fichier excel.
b. Voir le fichier excel.
c. Pour observer graphiquement la fluctuation et l'espérance, on peut construire un nuage de points (voir la page graph1).

Voir les pages feuil2 et graph2 pour la même simulation avec des échantillons contenant 50 meringues.
Ce qui ressort de ces observations est :
• les fréquences obtenues pour chaque échantillon sont différentes (elles fluctuent) ;
• ces fréquences semblent fluctuer autour d'une valeur proche de $p = 0{,}2$;
• lorsque la taille de l'échantillon augmente, la fluctuation diminue et ces fréquences semblent se rapprocher de p.
• l'espérance de la variable aléatoire F, estimée par la moyenne de ses observations, semble être égale à p.

3 L'espérance de X est $E[X] = np$ et l'écart-type de X est $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$.

Alors $E[F] = E\left[\frac{1}{n} \times X\right] = \frac{1}{n} \times E[X] = \frac{1}{n} \times n \times p$ donc $E[F] = p$ ne dépend pas de la taille n de l'échantillon.

Activité 2 Découvrir un nouvel intervalle de fluctuation à 95 % (p. 232)

1 **a.** Par propriété de la loi binomiale, on a $E[X_n] = 0{,}6\,n$ et $\sigma_{X_n} = \sqrt{n \times 0{,}6 \times (1-0{,}6)} = \sqrt{0{,}24n}$
b. On a successivement :

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - 0{,}6n}{\sqrt{0{,}24n}} \leqslant b$$
$$\Leftrightarrow a \times \sqrt{0{,}24n} \leqslant X_n - 0{,}6n \leqslant b \times \sqrt{0{,}24n}$$
en multipliant par $\sqrt{0{,}24n} > 0$
$$\Leftrightarrow 0{,}6n + a\sqrt{0{,}24n} \leqslant X_n \leqslant 0{,}6n + b\sqrt{0{,}24n}$$
en ajoutant $0{,}6\,n$

c. Avec $F_n = \frac{X_n}{n}$, il vient :

$$a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow 0{,}6n + a\sqrt{0{,}24n} \leqslant X_n \leqslant 0{,}6n + b\sqrt{0{,}24n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{0{,}6n + a\sqrt{0{,}24n}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{0{,}6n + b\sqrt{0{,}24n}}{n}$$
en divisant par $n > 0$
$$\Leftrightarrow \frac{0{,}6n}{n} + \frac{a\sqrt{0{,}24} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant \frac{0{,}6n}{n} + \frac{b\sqrt{0{,}24} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}6 + a \times \frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant 0{,}6 + b \times \frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}}\,.$$

d. Avec $a = -1{,}96$ et $b = 1{,}96$, il vient :

$$-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96 \Leftrightarrow 0{,}6 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant 0{,}6 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}}.$$

2 **a.** Comme Z_n suit approximativement une loi normale centrée réduite, on sait que (voir le chapitre 7 p. 208)

$$P(Z_n \in [-a\,;a]) \approx 0{,}95 \Leftrightarrow a = 1{,}96.$$

Il est possible de retrouver cette valeur en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice (voir p. 346).
b. On a, pour de grandes valeurs de n, environ 95 % de chances que $Z_n \in [-1{,}96\,;1{,}96]$, c'est-à-dire que $Fn \in In$ avec $I_n = \left[0{,}6 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}}\,;0{,}6 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}}\right]$.

3 On obtient les bornes et intervalles suivants :

n	Borne inférieure : a_n	Borne Supérieure : b_n	Longueur de l'intervalle : $\ell_n = b_n - a_n$
10	0,296	0,904	0,608
200	0,532	0,668	0,136
400	0,551	0,649	0,098
1 000	0,569	0,631	0,062
1 200	0,572	0,628	0,056

La première ligne signifie que, sur un échantillon de taille 10, la proportion de votants est environ comprise entre ... 29 % et 91 % !!!! n est de toute manière trop faible pour pouvoir appliquer le théorème de Moivre-Laplace. De la seconde à la quatrième ligne, on obtient des intervalles de fluctuations qui contiennent bien la proportion de votants pour Philemon. On remarque aussi que, plus la taille de l'échantillon est grande, plus cet intervalle de fluctuation est petit. Autrement dit, plus l'échantillon est grand, plus la précision de l'intervalle de fluctuation semble elle aussi grande.
Enfin, **sur la dernière ligne**, on observe que, lorsque l'on interroge tous les élèves du lycée, il ne semble n'y avoir aucune certitude sur la proportion de votants pour Philemon, alors même que l'on sait qu'il y a 60 % des élèves qui ont voté pour lui.
Dans ce cas, l'hypothèse de notre raisonnement qui est mise en défaut est le fait que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale. En effet, on interroge dans ce sondage 1 200 élèves d'une population qui en contient 1 200.
Les réponses de chacun de ces élèves ne peuvent être considérées comme indépendantes : si l'on connaît les réponses des 1 199 premiers élèves, alors la réponse du dernier à ce sondage est entièrement déterminée : il ne s'agit plus d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}6$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 3 Comparer deux intervalles de fluctuation (p. 233)

1 **a.** et **b.** Voir le fichier excel.

c. En F2, entrer =$B$2-1/RACINE($B$1) ; en G2, entrer =$B$2+1/RACINE($B$1) ; en H2, entrer =G2-F2

En F5, entrer =$B$2-1,96*RACINE($B$2*(1-$B$2))/RACINE($B$1) ;

En G5, entrer =$B$2+1,96*RACINE($B$2*(1-$B$2))/RACINE($B$1) ;

en H5, entrer =G5-F5 .

d. Dans les deux cas, on obtient 0 dans la cellule.

En effet, le tableur compare le contenu de B4 (donc 0) aux deux bornes de l'intervalle considéré.

Chaque comparaison retourne une réponse, ici *False* pour B4>=$F$2 (ou $F$5) et *True* pour B4<=$G$2 (ou $G$5).

Le produit de ces deux termes donne *False* dans tous les cas, sauf si les deux termes valent *True* (donc ici il vaut *False*). Vu la structure conditionnelle, les cellules contiennent donc des 0.

Elles contiendront donc des zéros tant que la valeur dans B4 n'est pas comprise dans l'intervalle I_n pour la colonne D et J_n pour la colonne E.

Si la valeur de B4 est comprise dans l'intervalle, alors la structure conditionnelle renverra la valeur comprise dans C4, c'est-à-dire la probabilité que la variable F_n prenne la valeur contenue dans la cellule B4

e. On obtient donc dans les colonnes D et E une série de 0, excepté pour les lignes dans lesquelles la cellule de la colonne B contient une valeur comprise dans l'intervalle considéré.

Pour ces lignes-là, les colonnes E ou D contiennent la probabilité que F_n appartienne à l'intervalle concerné.

Ainsi, il suffit de faire la somme des cellules de la colonne D (respectivement la colonne E) pour obtenir la probabilité que F_n appartienne à l'intervalle I_n (respectivement J_n).

Il suffit donc de rentrer dans la cellule G3 : =SOMME(D4:D1004) et dans la cellule G6 : =SOMME(E4:E1004).

2 **a.** En utilisant la feuille précédente, on obtient le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$P(F_n \in I_n)$	$b_n - a_n$	c_n	d_n	$P(F_n \in J_n)$	$d_n - c_n$
10	0,2838	0,9162	0,9817	0,6325	0,2964	0,9036	0,9817	0,6073
200	0,5293	0,6707	0,9639	0,1414	0,5321	0,6679	0,9489	0,1358
400	0,5500	0,6500	0,9637	0,1000	0,5520	0,6480	0,9536	0,0960
1000	0,5684	0,6316	0,9580	0,0632	0,5696	0,6304	0,9511	0,0607

b. Dans les deux cas, la probabilité que F_n appartienne à l'intervalle de fluctuation (qu'il s'agisse de $P(F_n \in I_n)$ ou de $P(F_n \in J_n)$) semble se rapprocher de 0,95.

Ainsi, **pour de grandes valeurs de n, il semble que la probabilité que F_n appartienne à l'intervalle de fluctuation à 95 % est d'environ ... 95 % !**

Cependant, on peut observer deux faits supplémentaires :

Il semble que l'on ait toujours $P(F_n \in I_n) \geqslant P(F_n \in J_n)$. Voir l'activité 4 p. 233 pour la démonstration.

Il semble que l'on ait toujours $P(F_n \in I_n) \geqslant 0{,}95$ alors que **$(P(F_n \in J_n))_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 0,95, sans être monotone**.

Le premier point est admis dans le théorème vu en seconde et définissant l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %.

Le second point n'est pas étudié dans le programme de Terminale ES. Seule la convergence est affirmée dans le théorème au programme.

Activité 4 Simplifier l'intervalle de fluctuation asymptotique (p. 233)

1 **a.** Pour $x \in [0\,;1]$, on a $g(x) = x - x^2$ donc $g'(x) = 1 - 2x$.

Alors $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > x$

et, de la même façon, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction g sur $[0\,;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		+	0	–	
g	0	↗	$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	↘	0

Par conséquent, le maximum de g sur $[0\,;1]$ est $\dfrac{1}{4}$ donc,

pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on a $g(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Soit p un réel de $[0\,;1]$.

On a alors $p(1-p) = g(p) \leqslant \dfrac{1}{4}$, donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$ on en déduit que $\sqrt{p(1-p)} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{4}}$, puis, en multipliant par 1,96 :

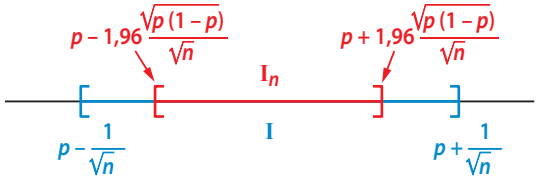
$1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1{,}96 \times \dfrac{1}{\sqrt{4}} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2}$ d'où $\mathbf{1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1}$.

b. En divisant l'inégalité précédente par $\sqrt{n}$, on en déduit que :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant 0 \leqslant \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et en ajoutant p, on en déduit que :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$



On a bien démontré que $I_n \subset J_n$ et donc que $P(F_n \in I_n) \leqslant P(F_n \in J_n)$.

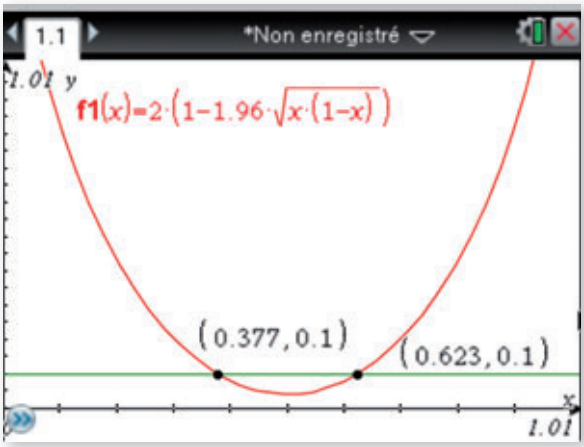
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 **a.** L'amplitude de J_n est $\left(p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$.
De la même façon, l'amplitude de I_n est :

$$2\times\frac{\left(1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}.$$

Comme $I_n \subset J_n$, l'amplitude de J_n est supérieure à celle de I_n donc la différence des amplitudes est :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}-2\times\frac{\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{2\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}.$$



b. On définit sur la calculatrice la fonction $f(x)=2(1-\sqrt{x(1-x)})$ et la fonction $h(x)=0{,}1$.
On observe graphiquement pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe de la fonction f est en-dessous de la courbe de la fonction h et on détermine des valeurs approchées des éventuels points d'intersection à l'aide de la table.

c. On en déduit approximativement que :
$2\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)\leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}377\leqslant p\leqslant 0{,}623$.
Comme $2\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)\leqslant 0{,}1$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{0{,}1}{\sqrt{n}},$$

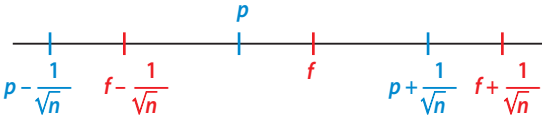
on en déduit que :

dès que $0{,}4\leqslant p\leqslant 0{,}6$, $\frac{2\left(1-1{,}96\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{0{,}1}{\sqrt{n}}$, ce qui signifie que la différence entre les amplitudes de I_n et J_n est inférieure à $\frac{0{,}1}{\sqrt{n}}$.

3 Si p appartient à l'intervalle de la question précédente, alors l'amplitude des deux intervalles, qui sont tous les deux centrés en p, est inférieure à $\frac{0{,}1}{\sqrt{n}}$.
Or, pour de grandes valeurs de n, cette différence est très faible : ainsi, dès que $n\geqslant 100$, on a $\sqrt{n}\geqslant 10$ donc $\frac{0{,}1}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}01$. Pour $n\geqslant 100$, la différence entre les amplitudes sera donc inférieure à 1 % (et donc la différence entre les deux bornes inférieures ou les deux bornes supérieures elle-même inférieure à 0,5 %).
Les deux intervalles seront donc dans ce cas quasi-confondus.

Activité 5 Estimer p à partir d'un échantillon (p. 234)

1 Cette équivalence peut se démontrer par le calcul mais un dessin est tout aussi « parlant » :



$$p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant f\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant f-p\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant -(f-p)\geqslant -\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant -f+p\geqslant -\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow f+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant p\geqslant f-\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2 À la lecture du graphique, on s'aperçoit que toutes les fourchettes sont centrées autour de valeurs proches de 0,4. De plus, cette valeur semble être contenue dans presque toutes les fourchettes : on peut donc estimer que $p\approx 0{,}4$. Mais on aurait pu choisir aussi $p=0{,}39$!

3 Sur les 20 échantillons représentés sur le dessin, seul le dix-huitième ne contient pas 0,4.
Il représente donc une proportion de $\frac{1}{20}=0{,}05$ soit 5 %.
En conclusion, 95 % des fourchettes contiennent la valeur de p.
Remarque : en utilisant le fichier excel joint, il est possible de faire observer que cette proportion est valable quelles que soient les simulations ... et qu'en prenant $p=0{,}39$ on obtient des résultats équivalents !

Activité 6 Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de p (p. 234)

1 Pour déterminer graphiquement $p+\frac{1}{10}$, il suffit de déterminer l'ordonnée du point de $\mathscr{D}_2$ d'abscisse p. On lit que, si $p=0{,}5$, $p+\frac{1}{10}=0{,}6$.
De même, avec $\mathscr{D}_1$, on lit que dans ce cas $p-\frac{1}{10}=0{,}4$ et donc l'intervalle de fluctuation de la fréquence F au seuil de 95 % est $J_{100}=[0{,}4\,;0{,}6]$.

2 **a.** La fréquence observée se lit en ordonnée.
Or le point de $\mathscr{D}_2$ qui a pour ordonnée $f=p+\frac{1}{10}$ a pour abscisse $p=f-\frac{1}{10}$.
De la même façon, le point de $\mathscr{D}_1$ qui a pour ordonnée $f=p-\frac{1}{10}$ a pour abscisse $p=f+\frac{1}{10}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

En opérant le même travail que dans la question précédente, mais des ordonnées vers les abscisses cette fois-ci, on lit graphiquement que, si $f = 0{,}78$, alors :

$$\left[f - \frac{1}{10} ; f + \frac{1}{10}\right] = [0{,}68 ; 0{,}88].$$

b. Graphiquement, si $f = 0{,}975$, alors $f + \frac{1}{10} > 1$, donc il n'existe pas de point de $\mathscr{D}_1$ d'ordonnée $f = 0{,}975$ et d'abscisse $p \in [0 ; 1]$.
En faisant glisser $\mathscr{D}_1$ vers le haut, on obtient un point d'abscisse $p = 1$et d'ordonnée $f = 0{,}975$ sur cette droite, dès lors que n est tel que $f = p - \frac{1}{\sqrt{n}}$, soit quand $0{,}975 = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc si $\sqrt{n} = \frac{1}{1 - 0{,}975} = 40$, ou encore $n = 1\,600$.
Dans ce cas, si $f = 0{,}975$, alors :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}975 - \frac{1}{40} ; 0{,}975 + \frac{1}{40}\right] = [0{,}95 ; 1].$$

3 D'après ce qui précède, la probabilité que l'intervalle aléatoire $\left[F - \frac{1}{10} ; F + \frac{1}{10}\right]$ contienne p est :

$$P\left(p \in \left[F - \frac{1}{10} ; F + \frac{1}{10}\right]\right) = P\left(F \in \left[p - \frac{1}{10} ; p + \frac{1}{10}\right]\right)$$
$$= P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$$

d'après la définition de l'intervalle de fluctuation $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ de la variable aléatoire « fréquence » F_n d'un caractère de proportion p qui, à tout échantillon de taille n de cette population, associe la fréquence observée f de ce caractère, dans cet échantillon.

Activité 7 Simuler un sondage politique (p. 235)

1 **a.** **NbrAléat** est une commande qui fournit un nombre au hasard entre 0 et 1.
Donc **0,2 × NbrAléat** fournit un nombre au hasard compris entre 0 et 0,2,
puis **0,4 + 0,2 × NbrAléat** fournit un nombre au hasard entre 0,4 et 0,4 + 0,2 = 0,6.
Cette instruction détermine donc, au hasard, la proportion d'intentions de vote pour le candidat A.
b. Pour chacune des 20 simulations de sondage (J va de 1 à 20) , E est initialisée à 0, puis, pour chacune des n personnes interrogées (I va de 1 à n), on augmente E de une unité si la simulation fournit une personne qui vote pour A et on ne modifie pas E (on ajoute 0....) sinon.
Par conséquent, **à l'issue de chacune des 20 simulations, E contient le nombre de voix obtenues par le candidat A dans cette simulation**.
c. L_2, L_3 et L_4 sont des listes qui contiennent 20 nombres (puisque pour chacune des valeurs de J, qui va de 1 à 20, on stocke une valeur supplémentaire dans chaque liste).
Dans L_2, on stocke à l'issue de chaque simulation la valeur de $\frac{E}{N}$, c'est-à-dire le quotient du nombre de voix obtenues par A dans cette simulation par le nombre total de personnes interrogées. Par conséquent, **L_2 contient la proportion f des voix du candidat A observée dans chacune des simulations**.
Dans L_3, on stocke donc, à l'issue de chaque simulation de sondage, $f - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et dans L_4 $f + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Autrement dit, on stocke **dans L_3 les bornes inférieures et dans L_4 les bornes supérieures des fourchettes obtenues à chacune des simulation de sondage**.
2 Dans le graphique fourni, on compte une fourchette qui ne contient pas la proportion des intentions de vote p (la deuxième simulation). Ainsi la proportion de fourchettes ne contenant pas p est

$$\frac{1}{50} = 0{,}02 \quad \text{soit} \quad 2\,\%.$$

Le niveau de confiance d'une fourchette (ici 0,95) minore la probabilité que l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contienne la proportion p. La probabilité que cette intervalle aléatoire ne contienne pas p vérifie donc :

$$P\left(p \notin \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$$
$$= 1 - P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \leqslant 1 - 0{,}95 \leqslant 0{,}05.$$

Ainsi, si les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation d'une fréquence à 95 % sont réunies,
la proportion de fourchettes ne contenant pas la proportion d'intentions de vote doit-être inférieure au seuil de risque, à savoir 5 %.

Bande dessinée Comment la lire ? (p. 235)

La première case de la bande dessinée permet de faire réagir sur le fait que connaître une proportion estimée par sondage, sans connaître la taille de l'échantillon, est une information trop incomplète pour être utilisée : la marge d'erreur étant inconnue, les 80 % d'intentions de vote peuvent être déterminés à 45 % près (il suffit de prendre $n = 5$).
Sur la même case, on peut faire remarquer que l'échantillon peut aussi ne pas être représentatif de l'ensemble de la population : si l'on a interrogé que les « copains » du candidat, l'hypothèse d'indépendance des réponses de chaque personne interrogée lors du sondage peut être remise en question.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Dans la seconde case, les informations sont plus nombreuses : sous l'hypothèse d'un échantillon représentatif, il est possible de construire la fourchette de l'estimation apportée par la journaliste en herbe. On obtient :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0{,}52-\frac{1}{\sqrt{1200}};0{,}52+\frac{1}{\sqrt{1200}}\right]$$
$$\approx [0{,}491;0{,}549].$$

Or cette fourchette indique au candidat que, même s'il semble en bonne position pour gagner, il n'est pas improbable qu'une majorité des électeurs ne souhaitent pas voter pour lui.

La dernière case permet enfin de montrer que, même en construisant une fourchette et en essayant de tenir compte de la marge d'erreur, il est encore possible que la proportion des intentions de vote ait été mal estimée. En effet, lors de ce sondage, on ne dispose que d'une fourchette. Or le principe de construction de cette fourchette ne nous permet d'en obtenir une qui contient la bonne proportion que au moins 95 % des cas.
Autrement dit, dans moins de 5 % des cas, cette même démarche fournit tout de même un intervalle ne contenant pas la proportion estimée ! Ce qui est le cas ici puisque seul 49 % des élèves ont au final voté pour notre candidat.

Cours

1 Fluctuation d'échantillonnage et prise de décision (p. 236)

a. Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Explications concernant l'exemple :

On rappelle que, pour déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %, de la fréquence F associée à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, il suffit, grâce à la table de la loi binomiale de déterminer :
• le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$;
• le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$;
Dans ce cas, l'intervalle de fluctuation de F au seuil de 95 % est $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$.

Remarques :

• L'avantage de l'intervalle de fluctuation asymptotique est sa facilité de calcul (indépendant de la table de la loi binomiale), ainsi que la maîtrise de son amplitude.

• Il présente néanmoins **deux limites importantes** :
– il n'est qu'asymptotique et il faut donc vérifier que les conditions d'approximations de la probabilité $P(F_n \in I_n)$ par sa limite (à savoir 0,95) sont vérifiées ;
– la suite $(P(F_n \in I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément de manière monotone : autrement dit, même si la limite est 0,95, $P(F_n \in I_n)$ peut être inférieure ou supérieure à 0,95.
Ainsi, pour ne pas affirmer des propositions fausses, il est nécessaire lorsque l'on calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique de **considérer la valeur approchée par défaut pour la borne inférieure et la valeur approchée par excès pour la borne supérieure**.
Il est important aussi de bien distinguer dans la conclusion la formulation « *avec une probabilité* ***proche de*** *0,95* » de la formulation « *avec une probabilité* ***au moins égale à*** *0,95* ».

Savoir faire

1. Déterminer et interpréter un intervalle de fluctuation asymptotique (p. 237)

Exercices d'application

1 **a.** La proportion des asthmes dus aux acariens dans l'ensemble de la population est $p = 0{,}7$.
L'échantillon considéré concerne $n = 300$ individus.
$n = 300 \geqslant 30$, $n \times p = 300 \times 0{,}7 = 210 \geqslant 5$
et $n \times (1-p) = 300 \times (1-0{,}7) = 90 \geqslant 5$
donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Il vient : $p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}648$

et $p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}752$

donc **l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion d'asthmes dus aux acariens est : [0,648 ; 0,752]**.

b. Dans ce groupe de 300 enfants asthmatiques, on peut donc obtenir, avec une probabilité proche de 0,95, entre 64,8 % et 75,2 % d'enfants présentant une allergie due aux acariens, soit **entre 195 et 225 enfants**.

2 **a.** La proportion des pièces sans défaut dans l'ensemble de la production est donc $p = 0{,}8$.
L'échantillon considéré est composé de $n = 300$ pièces.
$n = 300 \geqslant 30$, $n \times p = 300 \times 0{,}8 = 240 \geqslant 5$
et $n \times (1-p) = 300 \times (1-0{,}8) = 60 \geqslant 5$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Il vient : $p - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}754$

et $p + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}846$

donc **l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de pièces sans défaut est : [0,754 ; 0,846]**.

b. Dans cet échantillon de 300 pièces, on peut donc obtenir, avec une probabilité proche de 0,95, entre 75,4 % et 84,6 % de pièces sans défaut, soit **entre 227 et 253 pièces**.

2. Décider à partir d'un intervalle de fluctuation asymptotique (p. 239)

Exercices d'application

3 Dans l'ensemble de la population, la proportion de propriétaire de *smartphone* est $p = 0{,}314$.
L'échantillon considéré est de taille $n = 180$.
Or $n = 180 \geqslant 30$, $n \times p = 34 > 5$ et $n \times (1-p) \approx 74 > 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Alors $p - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}246$

et $p + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}382$

donc l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de propriétaires de *smartphone* est : $I = [0{,}246 ; 0{,}382]$.
Dans l'échantillon, on a observé une fréquence $f = \dfrac{72}{180} = 0{,}4$ de propriétaires de *smartphone*.
Alors $f \notin I$ donc on peut **affirmer que cet échantillon n'est pas représentatif de l'ensemble de la population.**

4 La proportion de plants atteints du mildiou dans l'ensemble de la population est $p = 0{,}65$.
L'échantillon des plants traités par le produit A est de taille $n = 150 \geqslant 30$.
$n \times p \approx 97 > 5$ et $n \times (1-p) \approx 52 > 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Alors $1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}077$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des plants atteints du mildiou dans cet échantillon est $I_{150} \approx [0{,}573 ; 0{,}727]$.
Or la fréquence observée dans cet échantillon est $f = \dfrac{87}{150} = 0{,}58$.
Comme f est dans l'intervalle, la **différence entre f et p n'est pas suffisamment significative pour affirmer que le produit A est efficace**.
Avec $n = 378 \geqslant 30$, on a $n \times p \approx 246 > 5$
et $n \times (1-p) \approx 132 > 5$ et finalement on obtient $I_{378} \approx [0{,}601 ; 0{,}699]$. Or $f = \dfrac{223}{378} \approx 0{,}59$ donc, sur cet échantillon, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}65$ avec un risque d'erreur de 5 %. **On peut donc raisonnablement considérer que le produit B est efficace.**

3. Estimer la proportion inconnue d'un caractère (p. 241)

Exercices d'application

5 Sur cet échantillon de taille $n = 900 \geqslant 30$, on observe que la fréquence des utilisateurs de tablettes numériques prêts à télécharger la presse en ligne est $f = \dfrac{270}{900} = 0{,}3$.
Or $nf = 270 > 5$ et $n(1-f) = 630 > 5$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion des utilisateurs de tablettes numériques prêts à télécharger la presse en ligne est :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}266 ; 0{,}334]$$

6 **a.** La précision d'un intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Or $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0{,}01} \Leftrightarrow n \geqslant 200^2$ donc il faut interroger 40 000 possesseurs de GPS pour obtenir une précision inférieure à 1 %.
b. Si $n = 40\,000$ et $f = 0{,}41$, alors $n \geqslant 30$, $nf > 5$
et $n(1-f) > 5$ et finalement l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de p est :

$$\left[0{,}41 - \frac{1}{\sqrt{40\,000}} ; 0{,}41 + \frac{1}{\sqrt{40\,000}}\right] = [0{,}405 ; 0{,}415].$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

QCM (p. 243)

7 **a. Vrai :** car $P(X=4)=P\left(\frac{1}{5}X=\frac{4}{5}\right)=P(F=0{,}8)$.
b. Faux : car F est une proportion donc $F\in[0;1]$ donc $P(F\geqslant 1)=0\neq 1-0{,}25^n=1-P(X=0)$.
c. Faux : car F ne prend pas des valeurs entières, alors que c'est le cas de toute variable aléatoire suivant une loi binomiale.

8 **a. Faux :** car I et f ne sont pas aléatoires donc $P(f\in I)$ vaut 0 ou 1.
b. Faux : car I est un intervalle de fluctuation donc I est centré en p.
c. Vrai : car $P(f\in I)\geqslant 0{,}95$ donc $P(f\notin I)\neq 0$ et f peut ne pas appartenir à I.

9 **a. Faux :** car, plus n est petit, plus $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est grand donc plus l'amplitude $2\times\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ de l'intervalle est grande.
b. Faux : car, plus p est petit, plus $\sqrt{p(1-p)}$ est petit donc plus l'amplitude $2\times\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ de l'intervalle est petite.
c. Vrai : car l'intervalle de fluctuation asymptotique est inclus dans J_n.

10 **a. Vrai :** la longueur de I_n est maximale pour $p=0{,}5$ (voir l'activité 4 p. 133).
b. Faux :
$$I_n=\left[p-\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$=\left[0{,}5-\frac{1{,}96\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{100}};0{,}5+\frac{1{,}96\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{100}}\right]$$
$$=[0{,}402;0{,}598]\neq[0{,}4;0{,}6].$$
c. Faux : vu ci-dessus, on a l'inclusion contraire.

11 **a. Faux :** on ne connaît pas la probabilité d'erreur si on accepte l'hypothèse.
b. Faux : on rejetterait si on avait $f\notin I$.
c. Vrai : $f\in I$ donc on ne rejette pas l'hypothèse.

12 **a. Faux :** certes $f_A\in I$ et $f_B\notin I$ mais A peut être représentatif et B ne pas l'être. En effet, ces relations entre f_A, f_B et I ne fournissent que des indications probabilistes. On ne peut donc pas en déduire une comparaison entre les deux échantillons.
b. Vrai : $f_A\in I$ donc il n'y a pas de raison de penser que l'échantillon A n'est pas compatible avec les résultats sur l'ensemble de la population.
c. Faux : $f_B\notin I$ donc l'échantillon B n'est en terme probabiliste pas compatible avec les résultats sur l'ensemble de la population.

13 **a. Vrai :** Il s'agit de la réalisation f de F.
b. Faux : Il s'agit alors de p elle-même !
a. Faux : L'estimation n'est plus ponctuelle.

14 **a. Faux :** la fluctuation d'échantillonnage signifie que la fréquence observée sur un échantillon n'est pas égale à la proportion dans l'ensemble de la population.
b. Vrai : Il y a 95 % de chances que la variable aléatoire F, observée sur un échantillon de taille 100 appartienne à l'intervalle $\left[\frac{65}{100}-\frac{1}{\sqrt{100}};\frac{65}{100}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]=[0{,}55;0{,}75]$ car on a bien $n=100\geqslant 30$, $np=65>5$ et $n(1-p)=35>5$.
c. Faux : $p\in[0{,}55;0{,}75]$ est un événement impossible ou certain (il n'y rien d'aléatoire ici) donc $P(p\in[0{,}55;0{,}75])$ vaut 0 ou 1.

15 **a. Faux :** L'amplitude de l'intervalle de confiance est la précision !
b. Faux : cette amplitude ou précision vaut $\frac{2}{\sqrt{n}}$, ce qui décroît avec n.
c. Vrai : L'amplitude et la précision sont égales donc croissent ou décroissent en même temps.

16 La précision est $\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{25}}=0{,}4$ donc la seule réponse juste est la réponse **b.**

Exercices

1 Intervalle de fluctuation à 95 % (p. 244)

17 Vrai ou Faux ?

a. Faux : X est le nombre de succès lors de la répétition de 25 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès est « Faire 1 ou 2 lors du lancer de dé » donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=25$ et $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
b. Vrai : Grâce aux tables d'une loi binomiale, le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ est $a=4$ et le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)>0{,}975$ est $b=13$ donc $I=\left[\frac{4}{25};\frac{13}{25}\right]=[0{,}16;0{,}52]$.
c. Faux : $p=\frac{1}{3}$ et $n=25$ donc $\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\approx 0{,}185$ et $I\approx[0{,}148;0{,}519]$.
Remarque : avec $n=25<30$, on ne peut pas affirmer que $P(F\in I)\approx 0{,}95$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

d. Vrai : la probabilité est très faible mais elle n'est pas nulle : moins de 5 % car $0,6 \times 25 = 15$

et $P(X = 15) = \binom{25}{15} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,003\,95 \neq 0$.

18 Vrai ou Faux ?

a. Faux : l'amplitude est $\frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ donc il faut multiplier n par 4 pour que cette amplitude soit divisée par 2.

b. Vrai : Si $p = 0,5$ et $n \geqslant 10\,000$, alors la précision est $\frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01$, soit inférieure à 1 %.

c. Vrai : il suffit de remarquer que, si Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$, alors $P(-3 \leqslant Z \leqslant 3) \approx 0,99$ et de reprendre le travail de l'activité 2 p. 232.

19 Noël pour les seniors

1 Ici la proportion des seniors dans l'ensemble de la population est $p = 0,17$ et la taille de l'échantillon considéré est $n = 550 \geqslant 30$.

Or $n \times p \approx 93 > 5$ et $n(1-p) \approx 456 > 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$\frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,031\,4$ donc $I = [0,13 ; 0,21]$.

2 Vu l'intervalle de fluctuation asymptotique, il y a environ 95 % de chances d'y avoir entre 13 % et 21 % de seniors de plus de 60 ans dans ce quartier.

Or $0,13 \times 550 = 71,5$ et $0,21 \times 550 = 115,5$ donc pour avoir assez de paniers-cadeaux, l'employé doit donc en prévoir entre 72 et 115 paniers-cadeaux.

20 Prestations familiales

1 Ici la proportion des allocataires dans l'ensemble de la population est $p = 0,47$ et la taille de l'échantillon considéré est $n = 20\,000 \geqslant 30$.

O $n \times p \approx 9\,400 > 5$ et $n(1-p) \approx 10\,600 > 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$\frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,006\,92$ donc $I = [0,463 ; 0,477]$.

2 a. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est alors :

$$f(n) = 2 \times \frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 1,96\sqrt{0,47 \times (0,53)}}{\sqrt{n}} \approx \frac{1,956\,47}{\sqrt{n}}.$$

2 Alors :

$$f(n) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{1,956\,47}{\sqrt{n}} = 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,956\,47}{0,01}$$
$$\Leftrightarrow n = (195,647)^2 \Leftrightarrow n = 38\,277,7.$$

Par conséquent, pour obtenir la précision souhaitée, il faut interroger au moins plus de 38 000 personnes. La seule solution est donc d'interroger tous les habitants de la ville, pour obtenir la proportion exacte.

21 Amplitude maximale

1 L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est alors :

$\frac{2 \times 1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{1\,000}} \approx 0,124\sqrt{p(1-p)}$

2 Pour $x \in [0 ; 1]$, on a $f(x) = x - x^2$ donc $f'(x) = 1 - 2x$.

Alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} > x$ et, de la même façon, $f'(x) = \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
g	0	↗	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	↘	0

3 Par conséquent, le maximum de f sur $[0 ; 1]$ est $\frac{1}{4}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$.

4 donc, pour tout réel p de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $f(p) \leqslant \frac{1}{4}$ donc $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

Alors, par croissance de la fonction racine carrée sur $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$, on en déduit que $\sqrt{p(1-p)} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}}$ puis, en multipliant par 0,124 :

$0 \leqslant 0,124\sqrt{p(1-p)} \leqslant 0,124 \times \frac{1}{\sqrt{4}} \leqslant 0,124 \times \frac{1}{2} \leqslant 0,062$

L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est donc maximale quand $p = \frac{1}{2} = 0,5$ et, dans ce cas, elle vaut environ 0,062, soit 6 %.

5 Cette question revient à utiliser le travail pour répondre à la question précédent : l'amplitude maximale d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'adolescents préférant cette barre chocolatée est de 0,062, lorsque cette proportion est de $p = 0,5$.

Cela signifie que tout intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % aura une amplitude inférieure à 6 % : la marge d'erreur commise par une estimation ponctuelle est donc d'au maximum, dans ce cas, plus ou moins 3 %.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 Décision à partir de la fréquence d'un échantillon (p. 245)

22 Les élèves aiment les épinards

La proportion d'élèves ayant apprécié le potage aux épinards dans l'ensemble du lycée est supposée être $p = 0{,}85$. La taille de l'échantillon est $n = 35 \geqslant 30$.
Or $n \times p = 29{,}75 > 5$ et $n(1-p) = 5{,}75 > 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
Or $\dfrac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}118$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % est $I = [0{,}731 ; 0{,}969]$

1 **Faux :** Dans cet échantillon, on observe la fréquence $f = \dfrac{26}{35} \approx 0{,}743$. $f \in I$ donc **on ne remet pas en cause** l'hypothèse.
Attention, on ne maîtrise pas la probabilité de faire une erreur en acceptant l'hypothèse.

2 **Vrai :** La fréquence est ici $f = \dfrac{20}{35} \approx 0{,}571$ et $f \notin I$.

3 **Faux :** même si l'affirmation du responsable est vraie, dans 95 % des échantillons de taille $n = 35$, on observera des fréquences n'appartenant pas à I. On ne pourra donc jamais conclure avec certitude.

23 Taux de chômage

Dans les deux cas, la proportion de chômeurs dans l'ensemble de la population est $p = \dfrac{9{,}5}{100} = 0{,}095$.
La ville A représente un échantillon de la population de taille $n_A = 5\,860 \geqslant 30$.
Or $n_A \times p \approx 557 > 5$ et $n_A \times (1-p) \approx 5\,303 > 5$ donc on peut, pour cette ville, construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_A = \left[0{,}095 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}095(1-0{,}095)}}{\sqrt{5\,860}} ; 0{,}095 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}095(1-0{,}095)}}{\sqrt{5\,860}}\right]$$
$$\approx [0{,}087 ; 0{,}103].$$

La ville B représente un échantillon de la population de taille $n_B = 35\,000 \geqslant 30$.
Or $n_B \times p \approx 3\,325 > 5$ et $n_B \times (1-p) \approx 31\,675 > 5$ donc on peut, pour cette ville, construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_B = \left[0{,}095 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}095(1-0{,}095)}}{\sqrt{35\,000}} ; 0{,}095 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}095(1-0{,}095)}}{\sqrt{35\,000}}\right]$$
$$\approx [0{,}091 ; 0{,}099].$$

On observe, dans la ville A, un taux de chômage $f_A = 0{,}1 \in I_A$ donc **il n'y a pas de raisons d'affirmer que le taux de chômage de la ville A est significativement différent de celui relevé dans la population française.**
On observe, dans la ville B, un taux de chômage $f_B = 0{,}098 \in I_B$ donc **il n'y a pas de raisons d'affirmer que le taux de chômage de la ville A est significativement différent de celui relevé dans la population française.**
Attention : un mauvais arrondi dans la construction de la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique pour la ville B entraîne une conclusion erronée. **Pour être rigoureux, il faut arrondir la borne supérieure par excès.**

24 Résultats du Bac

1 La proportion de reçus sur l'ensemble de la population formée par les candidats au bac en 2011 est $p = 0{,}77$.
Pour la série S (échantillon E_1), la taille de l'échantillon est $n_1 = 165\,000 \geqslant 30$.
Or $n_1 \times p = 127\,050 > 5$ et $n_1 \times (1-p) = 37\,950 > 5$ donc il est utile de construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. On obtient :

$$I_1 = \left[0{,}77 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}77(1-0{,}77)}}{\sqrt{165\,000}} ; 0{,}77 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}77(1-0{,}77)}}{\sqrt{165\,000}}\right]$$
$$\approx [0{,}767 ; 0{,}773].$$

Pour la série ES (échantillon E_2), la taille de l'échantillon est $n_2 = 105\,300 \geqslant 30$.
Or Or $n_1 \times p = 81\,081 > 5$ et $n_1 \times (1-p) = 24\,219 > 5$ donc il est utile de construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. On obtient :

$$I_2 = \left[0{,}77 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}77(1-0{,}77)}}{\sqrt{105\,300}} ; 0{,}77 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}77(1-0{,}77)}}{\sqrt{105\,300}}\right]$$
$$\approx [0{,}767 ; 0{,}773].$$

2 Dans l'échantillon E_1, on observe la fréquence : $f_1 = 0{,}797 \notin I_1$.
Par conséquent, les résultats en S ne sont pas conforme à la proportion de candidats admis toutes séries confondues.
3 Dans l'échantillon E_2, on observe la fréquence : $f_2 = 0{,}708 \notin I_2$.
Par conséquent, les résultats dans la série ES ne sont pas conformes à la proportion de candidats admis toutes séries confondues.
Il n'y a pas lieu de remettre ici en cause le résultat annoncé au baccalauréat toutes séries confondues car ces deux échantillons ne sont pas des échantillons aléatoires et représentatifs de l'ensemble de la population.

25 Algorithmique

Partie A

a. et **b.** On recopie le programme et on ajoute en dernière ligne « **Prompt F** ».
c. Il suffit alors de rentrer sur sa calculatrice les lignes suivantes :

```
If (A<F) and (F<B)
Then
  Disp « Non rejet »
Else
  Disp « Rejet »
EndIf
```

Partie B

1 Un jour de soleil correspond à 12 heures d'ensoleillement : comme cette ville connaît 2984 heures de soleil par an, elle connaît $\dfrac{2\,984}{12} = \dfrac{746}{3}$ jours de soleil par an. Or une année comporte 365 jours donc la proportion de jours de soleil dans cette ville est $p = \dfrac{\frac{746}{3}}{365} = \dfrac{746}{1\,095} \approx 0{,}68$, soit environ 68 %.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 **a.** Dans les deux échantillons, la taille est $n = 30 \geqslant 30$, avec $n \times p \approx 20 > 5$ et $n(1-p) \approx 9 > 5$ donc il est possible de construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I \approx \left[0{,}68 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}68(1-0{,}68)}}{\sqrt{30}} ; 0{,}68 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}68(1-0{,}68)}}{\sqrt{30}}\right]$$

$\approx [0{,}513 ; 0{,}847]$.

b. Le premier échantillon permet d'observer une fréquence des jours de soleil de $f_1 = \frac{6}{30} = 0{,}2 \notin I$.

Cet échantillon permet de rejeter l'affirmation de l'office du tourisme avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

Le second échantillon permet d'observer une fréquence des jours de soleil de $f_2 = \frac{16}{30} \approx 0{,}53 \in I$.

Cet échantillon ne permet pas de remettre en cause l'affirmation de l'office de tourisme.

Il n'est donc pas possible de conclure avec ces deux échantillons car les informations qu'ils fournissent sont contradictoires.

c. L'échantillon est alors de taille $n_2 = 60$ et l'intervalle de fluctuation asymptotique associé est :

$$I_2 = \left[0{,}68 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}68(1-0{,}68)}}{\sqrt{60}} ; 0{,}68 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}68(1-0{,}68)}}{\sqrt{60}}\right]$$

$= [0{,}561 ; 0{,}799]$.

Or dans ce nouvel échantillon, on observe une fréquence des jours de soleil de $f_{\text{Total}} = \frac{6+16}{30+30} \approx 0{,}367 \notin I_2$.

Par conséquent, cet échantillon permet de, là encore, remettre en cause l'affirmation de l'office du tourisme avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

L'affirmation de l'office de tourisme est donc plutôt à rejeter puisque sur le travail sur l'échantillon de taille maximal (celui de taille $n = 60$, on s'aperçoit que ce l'affirmation de l'office est rejetée.

3 Estimation et intervalle de confiance (p. 246)

26 Vrai ou faux ?

a. **Faux.** La proportion p est inconnue. $f = \frac{37}{100}$ est la fréquence des clients du magasin ayant dépensé plus de 125 euros dans l'échantillon observé. Il s'agit d'une estimation ponctuelle de p.

b. **Vrai.** $f = 0{,}37$ et $n = 100 \geqslant 30$ avec $nf = 37 > 5$ et $n(1-f) = 63 > 5$ donc un intervalle de confiance de p au seuil de confiance 0,95 est :

$$I = \left[0{,}37 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0{,}37 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}27 ; 0{,}47].$$

c. **Faux.** p n'est pas aléatoire. Donc p appartient à cet intervalle ou p n'y appartient pas.

Dans 95 % des cas, la proportion p apparitendrait à un intervalle construit de cette façon (avec f qui pourrait changer à chaque sondage).

d. **Faux.** L'événement $p \in [0{,}27 ; 0{,}47]$ est l'événement certain ou l'événement impossible. Sa probabilité est donc 0 ou 1.

27 Vrai ou Faux

a. **Faux :** la fréquence observée f peut changer donc l'intervalle aussi.

b. **Faux :** le centre est f, la fréquence observée dans l'échantillon, donc variable.

c. **Vrai :** il suffit que $f_1 + \frac{1}{10} < f_2 - \frac{1}{10}$.

d. **Vrai :** elles valent toutes les deux $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

28 Étude d'une part de marché

1 Une estimation ponctuelle f de la part du marché des appareils reflex est la fréquence de ce type d'achat observée dans l'échantillon : elle vaut alors $f = \frac{210}{1\,500} = 0{,}14$.

2 Ici, l'échantillon considéré est de taille $n = 1\,500 \geqslant 30$ donc $nf = 210 > 5$ et $n(1-f) = 1\,290 > 5$ donc on peut construire l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la part de marché des appareils reflex parmi les appareils photos numériques :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}14 - \frac{1}{\sqrt{1\,500}} ; 0{,}14 + \frac{1}{\sqrt{1\,500}}\right]$$

$\approx [0{,}114 ; 0{,}166]$.

3 La borne supérieure reste plus grande que 0,15 donc, à l'issue de ce sondage, le fabricant poursuivra la fabrication d'appareils reflex.

29 Amélioration de la précision d'un sondage

1 La fréquence observée dans l'échantillon est :

$f = \frac{32}{55} \approx 0{,}582$ et la taille de l'échantillon est $n = 55 \geqslant 30$.

Alors $nf = 32 > 5$ et $n(1-f) = 18 > 5$ donc l'intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}446\,9 ; 0{,}716\,7].$$

2 **a.** Pour diviser l'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$ par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon n par 4. Donc il faudra interroger au moins $4 \times 55 = 220$ consommateurs.

b. En supposant que la fréquence observée ne change pas, le nouvel intervalle de confiance serait :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{220}} ; f + \frac{1}{\sqrt{220}}\right] \approx [0{,}514\,3 ; 0{,}649\,3].$$

Au niveau de confiance 0,95, la proportion p de consommateurs préférant le smoothie à la mangue est comprise entre 51,43 % et 64,93 %.

Cela signifie que, si l'on répète cette construction un grand nombre de fois, on obtiendra dans environ 95 % des cas, un intervalle contenant p.

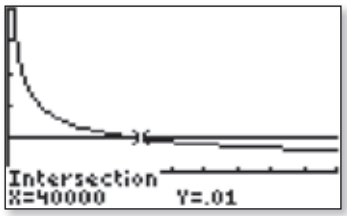
30 Détermination de la taille d'un échantillon

1 **a.** L'amplitude d'un intervalle de confiance construit sur un échantillon de taille n est :

$$f(n) = \left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On trace les deux courbes et on détermine l'abscisse du point d'intersection (grâce aux fonctionnalité des calculatrices) : la valeur de n pour laquelle $f(n) = 0{,}01$ semble graphiquement être $n = 40\,000$.



2 On a $f(n) \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{2}{0{,}01} \leqslant \sqrt{n}$
$\Leftrightarrow 200^2 \leqslant n \Leftrightarrow 40\,000 \leqslant n$.
Il faut bien un échantillon de taille supérieure à 40 000 pour obtenir une précision inférieure à 1 %.

31 Algorithmique

Partie A. Détermination de l'intervalle de confiance

a. Pour construire l'intervalle de confiance, il faut entrer n et f. Ce qui s'écrit : **Prompt N,F** .

b. En variable A, il faudra stocker la borne inférieure de l'intervalle soit $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et en variable B la borne supérieure, soit $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Application :
La fréquence observée dans l'échantillon est :
$f = \dfrac{150}{500} = 0{,}3$. La taille de l'échantillon est $n = 500 \geqslant 30$.
Alors $nf = 150 > 5$ et $n(1-f) = 350 > 5$. On peut donc calculer les bornes d'un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 via la calculatrice et on obtient $I = [0{,}255 ; 0{,}345]$.

Partie B. Détermination de la taille de l'échantillon

a. La précision d'un intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95, construit sur un échantillon de taille n est :

$$f(n) = \left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Si la précision est de T %, on en déduit que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = \dfrac{T}{100}$.

b. On traduit l'algorithme en langage naturel en langage calculatrice. On obtient l'algorithme ci-dessous.

```
PROGRAM:PRECISIO
:Prompt T
:(200/T)²→N
:Disp N
```

Application :
On rentre T = 1 dans le programme ci-dessus et on obtient que la taille minimal d'un échantillon qui permettra d'avoir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à 1 % est $n = 40\,000$.

32 Estimation de ln(2) par la méthode de Monte Carlo

1 $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet pour primitive sur l'intervalle [1 ; 2] la fonction $x \mapsto ln(x)$ donc :

$$\int_1^2 dx = [ln(x)]_1^2 = ln(2) - ln(1) = ln(2) - 0 = ln(2).$$

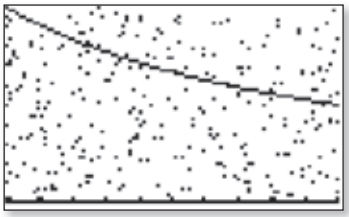
Sur l'intervalle [1 ; 2], la fonction inverse est positive donc la surface $\mathcal{S}$ comprise entre l'axe des abscisses, l'hyperbole et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ a pour aire ln(2) unités d'aires.
Or le carré déterminé par l'intervalle [1 ; 2] en abscisse et l'intervalle [0 ; 1] en ordonnée est d'aire $1 \times 1 = 1$ unité d'aire. Ainsi ln(2) **représente la proportion de la surface $\mathcal{S}$ dans ce carré.**

2 et **3** Il suffit de suivre les instructions proposées.

4 Il suffit de nouveau de suivre les instructions proposées.
Les deux premières lignes permettent de remplir les deux listes L_1 et L_2 avec des nombres choisis au hasard entre 0 et 1 en abscisse et entre 1 et 2 en ordonnée : les couples de coordonnées s'appuyant sur les listes L_1 et L_2 fournissent donc des points, choisis au hasard, du carré de la question **2**.
La troisième ligne de code permet de remplir L_3 avec les inverses des nombres contenus dans L_1 : les couples de coordonnées s'appuyant sur les listes L_1 et L_3 « fournissent » donc des points sur la courbe.

```
1/L1→L3
{.5145098459 .5…
somme(L2≤L3)/300
                .71
```

L'instruction $L_2 \leqslant L_3$ construit une liste de la même longueur que L_2 et L_3 contenant sur une ligne un 0 si, sur cette ligne, le terme de la liste L_2 est strictement supérieur à celui de la liste L_3, et un 1 dans le cas contraire.
Cette nouvelle liste contient donc un 1 sur une ligne lorsque le point du carré associé à cette ligne est en dessous de l'hyperbole et un 0 sinon.
En en faisant la somme et en divisant par le nombre de points (c'est-à-dire de lignes), à savoir 300, on obtient donc la proportion de points situés sous l'hyperbole parmi ceux choisis au hasard.
Ces instructions permettent donc d'obtenir **une estimation ponctuelle de l'aire, en unité d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ définie à la question 2, c'est-à-dire finalement du nombre ln(2).**
On obtient donc une estimation ponctuelle f (par exemple $f = 0{,}7$) mais chaque élève obtiendra un résultat potentiellement différent à chaque redéfinition des listes L_1 et L_2.



Ici l'échantillon est composé de $n = 300$ ($\geqslant 30$) points donc on a $nf = 210 > 5$ et $n(1-f) = 90 > 5$ donc un intervalle de confiance de ln(2) au niveau de confiance 0,95 est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}7 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0{,}7 + \frac{1}{\sqrt{300}}\right]$$
$$\approx [0{,}642 ; 0{,}758].$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

5 La précision d'un intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Pour que cette précision vaille 1 %, il faut donc que :

$\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 200 \Leftrightarrow n = 40\,000$.

Pour obtenir la précision souhaitée, il faut donc choisir 40 000 points au hasard.

33 Intervalle de confiance sur calculatrice

On obtient avec la commande de la calculatrice $f = 0{,}38$ et $I \approx [0{,}337\,;\,0{,}423]$.

Avec les méthodes du cours, on a $f = \frac{190}{500} = 0{,}38$, $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 190 > 5$ et $n(1-f) = 310 > 5$ et un intervalle de confiance est donc donné par :

$I_2 = \left[0{,}38 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\,0{,}38 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right]$

$\approx [0{,}335\,;\,0{,}425]$.

On s'aperçoit que l'intervalle de confiance fourni par la calculatrice est un peu plus précis que celui fourni par le cours.

Accompagnement personnalisé (p. 248)

Exercice guidé

34 **1** Ici la proportion des stagiaires prêts à poursuivre le stage, dans l'ensemble de la population, est :

$$p = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

La taille de l'échantillon formé par les stagiaires de ce formateur est $n = 80$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence du nombre de stagiaires prêts à poursuivre avec ce formateur est donc :

$$\left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}65\,;\,0{,}85].$$

On arrondit la borne inférieur par défaut et la borne supérieure par excès pour obtenir un intervalle contenant l'intervalle de fluctuation exact.

Vu notre échantillon, on peut estimer que, dans 95 % des échantillons que l'on obtiendrait, on observerait entre 65 % et 85 % de stagiaires prêts à poursuivre le stage.

2 **a.** Sur cet échantillon de taille $n = 120$, la fréquence observée de stagiaire non satisfaits de la situation du lieu du stage est $f = \frac{48}{120} = 0{,}4$.

On a bien $n \geqslant 30$, $nf = 48 \geqslant 5$

et $n(1-f) = 120 \times \left(1 - \frac{48}{120}\right) = 72 \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 0,95 est donc :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}308\,7\,;\,0{,}491\,3].$$

On arrondit en prenant une valeur approchée par défaut pour la borne inférieure et par excès pour la borne supérieure de manière à ce que l'intervalle fourni contienne l'intervalle exact.

b. Pour diminuer l'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$ de l'intervalle de confiance par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4 et donc interroger $120 \times 4 = 480$ stagiaires.

On peut aussi remarquer que l'amplitude est $0{,}491\,3 - 0{,}308\,7 = 0{,}183\,3$ et que la diminuer par deux revient à chercher une amplitude inférieure à 0,091 65.

Or $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}091\,65 \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{2}{0{,}091\,65}\right)^2 \Leftrightarrow n \geqslant 476$.

La différence entre les deux méthodes s'expliquent par les valeurs approchées choisies pour les bornes de l'intervalle de confiance.

Revoir les outils de base

35 Savoir résoudre des équations ou inéquations contenant des racines carrées

1 On sépare cette inéquation en deux inéquations qui doivent être réalisées en même temps :

$$b - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant a \leqslant b + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant a \\ a \leqslant b + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leqslant a + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow a - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant b \leqslant a + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2 **a.** On cherche donc n tel que

$$\begin{cases} 0{,}8 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}75 \\ 0{,}8 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}8 - 0{,}75 = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}85 - 0{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05 = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}05 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}05$$ en passant à l'inverse deux nombres strictement positifs

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{0{,}05}$ en passant au carré deux nombres strictement positifs

$\Leftrightarrow (\sqrt{n})^2 = 20^2 \Leftrightarrow n = 400$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On raisonne de même et il vient :

$$\left[0{,}6-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;0{,}6+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[0{,}58\,;0{,}62]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}=0{,}6-0{,}58$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}=\frac{1}{0{,}02}$$

$\Leftrightarrow n=50^2=2\,500$.

c. On raisonne de même et il vient :

$$\left[0{,}8-\frac{0{,}4}{\sqrt{n}}\,;0{,}8+\frac{0{,}4}{\sqrt{n}}\right]=[0{,}78\,;0{,}82]$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}=0{,}8-0{,}78$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{0{,}4}=\frac{1}{0{,}02}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}=0{,}4\times 50$

$\Leftrightarrow n=20^2=400$.

3 **a.** On cherche n tel que :

$\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow 2\leqslant 0{,}1\times\sqrt{n}$ en multipliant par $\sqrt{n}>0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{0{,}1}\leqslant\sqrt{n}$ en divisant par $0{,}1>0$

$\Leftrightarrow 20\leqslant\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow 20^2\leqslant(\sqrt{n})^2$ en passant au carré deux nombres strictements positifs

$\Leftrightarrow 400\leqslant n$.

b. On raisonne de la même façon et il vient :

$\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow 2\leqslant 0{,}01\times\sqrt{n}$ en multipliant par $\sqrt{n}>0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{0{,}01}\leqslant\sqrt{n}$ en divisant par $0{,}01>0$

$\Leftrightarrow 200\leqslant\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow 200^2\leqslant(\sqrt{n})^2$ en passant au carré deux nombres strictements positifs

$\Leftrightarrow 40\,000\leqslant n$.

36 Savoir différencier population et échantillon

1 La population est l'ensemble de référence, définie très précisément, sur lequel on cherche des informations : ici, **la population est l'ensemble des français possédant une maison individuelle.**

La caractère étudié est la particularité que l'on recherche chez chaque individu de la population : ici, on cherche à distinguer, chez les propriétaires de maison individuelle, ceux qui se disent prêts à installer des panneaux solaires dans leur résidence. **Le caractère est donc : « *Se dire prêt à équiper sa résidence de panneaux solaires* ».**

2 Un échantillon est une partie de la population. L'échantillon considéré ici n'est pas celui qui a permis de construire l'estimation du début de l'exercice (38 %). Il s'agit des personnes interrogées au hasard dans la suite de l'exercice.

Cet échantillon est composé de 150 personnes : sa taille est donc $n=150$.

3 La fréquence du caractère observée sur un échantillon est la proportion des individus de l'échantillon qui présente le caractère considéré.

On a donc :

$$f=\frac{\text{nb de personnes ayant le caractère étudié}}{\text{taille de l'échantillon}}$$

$$=\frac{66}{150}=0{,}44\ .$$

Dans l'échantillon, 44 % des propriétaires de maisons individuelles se disent prêts à équiper leur résidence de panneaux solaires.

37 Savoir interpréter un intervalle de fluctuation à 95 % avec la loi binomiale

a. L'expérience statistique consistant à choisir un indien au hasard et à observer s'il s'agit d'un homme ou d'une femme est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « *Choisir une femme* ». Le paramètre de cette expérience est la probabilité du succès : vu l'enquête fournie en début d'exercice, **on fait l'hypothèse que** cette épreuve de Bernoulli est de paramètre $p=0{,}48$.

Le choix d'un échantillon de 500 personnes est assimilé à un tirage successif avec remise donc à la répétition de 500 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Or X est le nombre de femmes choisies dans cet échantillon, donc le nombre de succès obtenus sur ces 500 épreuves.

Par conséquent, X suit la loi **b**inomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}48$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(500\,;0{,}48)$.

b. L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence $F=\frac{X}{n}$, associée à X, est l'intervalle $I=\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$ le plus petit tel que $P\left(F\in\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]\right)\geqslant 0{,}95$.

Il a été montré en première que, pour construire cet intervalle, il suffit de choisir :

• pour a le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$: ici $a=218$ d'après la table fournie.

• Pour b le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$: ici $b=262$ d'aqrès la table fournie.

Alors l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à X est :

$$I=\left[\frac{218}{500}\,;\frac{262}{500}\right]=[0{,}436\,;0{,}524]\ .$$

c. Dans l'échantillon associé à cette province, on observe une fréquence des femmes $f=\frac{400}{500}=0{,}8$.

Alors $f\notin I$. Cela signifie qu'il y a moins de 5 % de chance de faire une erreur en affirmant que l'hypothèse de départ est fausse.

On rejette donc cette hypothèse, ce qui signifie que, dans cette province, la probabilité, en choisissant une personne au hasard, de trouver une femme n'est pas de 0,48.

Cela permet d'affirmer que cette province n'est pas représentative de l'Inde en général, au moins du point de vue du sexe de ses habitants.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

38 Savoir interpréter un intervalle de fluctuation de la forme $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Ici la taille de l'échantillon est $n = 150 \geqslant 30$.
La proportion de propriétaires de maison individuelle se disant prêt à l'équiper de panneaux solaires est supposée être égale à $p = 0{,}38$. Alors $n \times p = 57 > 5$ et $n \times (1-p) = 93 > 5$.
Les critères d'approximation sont vérifiés donc on peut affirmer, en utilisant le cours de seconde, qu'il y a, sous l'hypothèse de départ, au moins 95 % de chances que la fréquence de propriétaires de l'échantillon prêts à installer des panneaux solaires appartienne à l'intervalle

$$I = \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}38-\frac{1}{\sqrt{150}}\,;0{,}38+\frac{1}{\sqrt{150}}\right]$$
$$\approx [0{,}298\,3\,;0{,}4617].$$

Or, dans le cas particulier de l'enquête considérée, on a observé $f = 0{,}44$ donc $f \in I$.
Il est donc possible que la différence entre notre hypothèse de départ et l'observation sur notre échantillon puisse être raisonnablement expliquée par le hasard et **il n'y a pas lieu de remettre en question les résultats de l'enquête initiale**.

Pour aller plus loin

39 Détermination d'un autre intervalle de confiance

1 a. Si $p = 0{,}95$, on observe graphiquement (en lisant l'ordonnée du point de la courbe de h d'abscisse 0,95) que $h(p) > 1$.
On peut le retrouver par le calcul :

$$h(0{,}95) = 0{,}95 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}95(1-0{,}95)}}{6} \approx 1{,}02 > 1.$$

b. On peut déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % dès lors que les bornes de l'intervalle sont comprises entre 0 et 1 (puisqu'il s'agit d'un intervalle devant contenir des fréquences !).
On résout donc graphiquement :

$$0 \leqslant h(p) \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant g(p) \leqslant 1.$$

La première inéquation équivaut alors à $0 \leqslant p \leqslant 0{,}9$ et la seconde à $0{,}1 \leqslant p \leqslant 1$.
Finalement, on peut déterminer l'intervalle de fluctuation dès lors que $\mathbf{0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9}$.
c. Par définition, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence pour une proportion p est l'intervalle $[g(p)\,;h(p)]$.
On lit graphiquement que $h(0{,}7) \approx 0{,}85$ et que $g(0{,}7) \approx 0{,}55$ donc l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence pour $p = 0{,}7$ est $I \approx [0{,}55\,;0{,}85]$.
d. Chercher un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0,95 revient à chercher une réalisation d'un intervalle aléatoire I tel que $P(p \in I) = 0{,}95$.
Notons F la variable aléatoire qui, à un échantillon, associe la fréquence dans cet échantillon du caractère étudié. Alors, par définition de l'intervalle de fluctuation de F à 95 %, on a $0{,}95 = P(F \in [g(p)\,;h(p)])$.
On peut donc chercher un intervalle de confiance de p **en « inversant » la relation d'appartenance : il suffit donc de déterminer pour quelles valeurs de p, on a $F \in [g(p)\,;h(p)]$.**
La difficulté de cette méthode est que l'on ne connaît pas F.
Si l'on connaît une réalisation f de F, on peut donc chercher à déterminer des conditions sur p de telle sorte que $f \in [g(p)\,;h(p)]$...

Dans le cas particulier où $f = 0{,}8$, on obtient en effet graphiquement que :

$$0{,}8 \in [g(p)\,;h(p)]) \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}7 \geqslant g(p) \\ 0{,}7 \leqslant h(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leqslant 0{,}9 \\ p \geqslant 0{,}65 \end{cases}.$$

Ainsi on peut conjecturer (*nous ne l'avons pas démontré....*) qu'un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95, si la fréquence observée est $f = 0{,}8$, est [0,65 ; 0,9].
Pour déterminer graphiquement un tel intervalle de confiance, il suffit donc de résoudre l'inéquation d'inconnue p : $g(p) \leqslant f \leqslant h(p)$, c'est-à-dire de lire les abscisses des points d'ordonnée f situés entre la courbe de g et celle de f.
2 a. Il suffit de suivre les consignes et de bien choisir la fenêtre.
Attention, la taille de l'échantillon ayant changée, la formule donnant les bornes de l'intervalle de fluctuation aussi !
Les fonctions g et h sont maintenant définies par :

$$\begin{cases} g(p) = p - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{100}} = p - 0{,}196\sqrt{p(1-p)} \\ h(p) = p + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{100}} = p + 0{,}196\sqrt{p(1-p)} \end{cases}.$$

b. On utilise la calculatrice pour résoudre graphiquement les équations $f = g(p)$ et $f = h(p)$.
En utilisant par exemple sur une calculatrice Texas Instrument la fonction **Intersect**, on obtient comme nouvel intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95, pour une fréquence observée $f = 0{,}8$: $I \approx [0{,}711\,;0{,}867]$
c. On considère un réel p supérieur à 0,8. Alors :

$$p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{10} = 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow p - 0{,}8 = 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p}}{10}$$
$$\Leftrightarrow (p-0{,}8)^2 = \left(0{,}196 \times \sqrt{p(1-p)}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 1{,}6p + 0{,}64 = 0{,}196^2 \times \left(\sqrt{p(1-p)}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 1{,}6p + 0{,}64 = 0{,}196^2 \times p \times (1-p)$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 1{,}6p + 0{,}64 = 0{,}196^2\, p - 0{,}196^2\, p^2$$
$$\Leftrightarrow p^2 + 0{,}196^2\, p^2 - 1{,}6p - 0{,}196^2\, p + 0{,}64 = 0$$
$$\Leftrightarrow p^2(1 + 0{,}196^2) - p(1{,}6 + 0{,}196^2) + 0{,}64 = 0.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

C'est une équation du second degré de discriminant :
$\Delta = (-(1{,}6+0{,}196^2))^2 - 4\times(1+0{,}196^2)\times 0{,}64 \approx 0{,}026 > 0$.
Elle admet donc deux racines, à savoir :

$$p_1 = \frac{(-(-(1{,}6+0{,}196^2))+\sqrt{\Delta})}{2\times(1+0{,}196^2)}$$
$$p_1 \approx 0{,}8666$$
et
$$p_2 = \frac{(-(-(1{,}6+0{,}196^2))-\sqrt{\Delta})}{2\times(1+0{,}196^2)}.$$
$$p_2 \approx 0{,}7111$$

Or cette équation concerne une inconnue $p \geqslant 0{,}8$ donc la seule solution de cette équation est, à 10^{-3} près, $p \approx 0{,}867$.

d. La question précédente a permis de trouver par le calcul la borne supérieure de l'intervalle de confiance de la question **2 b.** Pour trouver la borne inférieure, il faut résoudre par le calcul, pour $p \leqslant 0{,}8$:

$$p + 1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10} = 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow 1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p}}{10} = 0{,}8-p$$
$$\Leftrightarrow \left(0{,}196\times\sqrt{p(1-p)}\right)^2 = (0{,}8-p)^2$$ car il s'agit de nombres positifs.
$$\Leftrightarrow 0{,}196^2\times p\times(1-p) = 0{,}64 - 1{,}6p + p^2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}196^2\, p - 0{,}196^2\, p^2 = p^2 - 1{,}6p + 0{,}64$$
$$\Leftrightarrow 0 = p^2(1+0{,}196^2) - p(1{,}6+0{,}196^2) + 0{,}64.$$

On retrouve l'équation précédente. p devant être inférieure à 0,8, la seule solution de cette équation est donc $p \approx 0{,}71$. On en déduit que l'intervalle de la question **2 b.** est, à 10^{-2} près, $I = [0{,}71\,;\,0{,}87]$.

3 a. La taille de l'échantillon est $n = 100 \geqslant 30$. La fréquence des clients satisfaits observée dans l'échantillon est $f = \frac{80}{100} = 0{,}8$ donc $nf = 89 > 5$ et $n(1-f) = 20 > 5$.
Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % sont donc bien réunies.

b. Les valeurs de f et n sont celles de la question **2 b.** donc le résultat de cette question s'applique ici et un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de clients satisfaits est $I = $ **[0,71 ; 0,87]**.
La formule du cours permet de déterminer un autre intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance 0,95, à savoir :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8-\frac{1}{\sqrt{100}}\,;0{,}8+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$
$$= \textbf{[0,7 ; 0,9]}.$$

L'intervalle de confiance fourni par le cours est donc plus grand et il contient l'intervalle de confiance précédent. Il est donc **moins précis, même si la différence de précision est faible.**

Réussir au Bac (p. 251)

40 Vrai ou Faux

a. Faux : ici, la taille de l'échantillon est $n = 80 \geqslant 30$, la fréquence des individus prédisant la victoire de M est :
$f = \frac{47}{80} = 58{,}75$ donc $nf = 80\times\frac{47}{80} = 47 \geqslant 5$
et $n(1-f) = 80\times\left(1-\frac{47}{80}\right) = 33 \geqslant 5$.
Les conditions d'approximation sont donc respectées.

b. Faux : $\frac{47}{80}$ est la fréquence des spectateurs prédisant la victoire de M, **observée dans l'échantillon**

c. Vrai : cette fréquence observée est l'estimation ponctuelle de la proportion de ce caractère dans l'ensemble de la population, à savoir tous les spectateurs du stade.

d. Faux : en calculant $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, il faut arrondir la borne inférieure par défaut (pour que l'intervalle contienne l'intervalle exact) et la borne supérieure par excès et on obtient [0,475 ; 0,700].

41 QCM

1 Réponse c. Pour déterminer la taille de l'échantillon sur lequel un intervalle de confiance respectera une précision donnée, il faut résoudre l'inéquation :
$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{0{,}8}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}008 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{2}{0{,}008}$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{2}{0{,}008}\right)^2 \Leftrightarrow n \geqslant 62\,500.$$

2 Réponse b. La fréquence des électeurs favorables observée dans l'échantillon est $f = 0{,}53$ et la taille de l'échantillon est $n = 1\,000 \geqslant 30$. Alors $nf = 530 > 5$ et $n(1-f) = 470 > 5$ donc les conditions d'approximation sont vérifiées.
Au seuil de confiance 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}498\,;0{,}562]$.
La réponse a. est fausse car il n'y a aucune certitude que cette proportion soit supérieure à 0,5. Même si l'intervalle avait une borne inférieure elle-même supérieure à 0,5, il resterait une probabilité, faible mais non nulle, que notre construction de l'intervalle de confiance ait fourni un intervalle ne contenant pas p (et donc potentiellement inférieur à 0,5).
La réponse c. est fausse car la proportion p est fixe : la probabilité qu'elle soit comprise ou non dans l'intervalle de confiance fourni, qui est, lui aussi, déterministe (c'est-à-dire non aléatoire), est 1 ou 0.

42 Vrai ou Faux

a. Vrai : la proportion de l'ensemble des patients et personnels insatisfaits des horaires des repas est $p = 0{,}6$.
La taille de l'échantillon considéré sur les patients est $n = 44 \geqslant 30$. Alors on a $np = 26{,}4 > 5$ et $n(1-p) = 33{,}6 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées.
Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des patients insatisfaits est l'intervalle I_1

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

donné par :

$$\left[p-\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\approx[0{,}45\,;\,0{,}75].$$

b. Vrai : La même formule avec $p=0{,}6$ et $n=124$ donne l'intervalle I_2 proposé.

c. Vrai : dans l'échantillon des 44 patients, on observe une fréquence des patients insatisfaits des horaires de repas de $f=\frac{22}{44}=0{,}5$. Or $f\in I_1$ donc on ne remet pas en cause l'adéquation de cet échantillon avec les données de l'enquête.

d. Faux : dans l'échantillon des 124 membres du personnels, on observe une fréquences des personnels insatisfaits de $f=\frac{92}{124}\approx 0{,}74$. Or $f\notin I_2$ donc on rejette l'hypothèse de conformité de cet échantillon à la population de l'enquête.

43 Compte Epargne

1 a. On considère que $f=0{,}15$. Or la taille de l'échantillon est $n=100\geqslant 30$.

Alors $nf=15>5$ et $n(1-f)=85>5$ donc les conditions d'approximation sont vérifiées.

On peut donc construire l'intervalle de confiance de p au seuil de confiance 0,95 :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[0{,}05\,;0{,}25]\,.$$

b. Pour que l'intervalle de confiance soit inclus dans [0,14 ; 0,16], il faut que la précision $\frac{2}{\sqrt{n}}$ de cet intervalle soit inférieure à 0,02 (puisque le centre de l'intervalle est bien $f=0{,}15$).

$$\text{Or } \frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}02\Leftrightarrow\sqrt{n}\geqslant\frac{2}{0{,}02}\Leftrightarrow n\geqslant\left(\frac{2}{0{,}02}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow n\geqslant 10\,000.$$

Il faut donc étudier 10 000 comptes pour que l'intervalle de confiance soit inclus dans [0,14 ; 0,16].

c. Par définition, si l'on construit des intervalles de confiance de niveau de confiance 0,95 sur un grand nombre d'échantillons, et qu'à chaque fois les conditions d'approximation sont vérifiées (ce qui est le cas ici avec la taille des échantillons), alors 95 % d'entre eux contiendront la valeur réelle du paramètre p estimé.

2 a. On répète 340 fois, de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir un compte épargne et à vérifier si son montant est supérieur à 2 500 euros. Vu l'hypothèse, la probabilité du succès de cette épreuve de Bernoulli est $p=0{,}15$.

Si l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de comptes épargne d'un montant supérieur à 2 500 euros sur l'échantillon, alors X est le nombre de succès obtenu sur cette répétition d'épreuve de Bernoulli donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=340$ et $p=0{,}15$: $X\hookrightarrow\mathcal{B}(340\,;0{,}15)$.

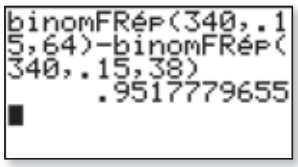
On cherche donc à calculer

$$P(39\leqslant X\leqslant 64)=P(X\leqslant 64)-P(X\leqslant 38)$$

ce qui s'obtient sur la calculatrice en utilisant la fonction de répartition d'une loi binomiale.

Sur Texas Instrument, on a par exemple les écrans ci-contre.





Finalement, la probabilité d'obtenir entre 39 et 64 comptes d'un montant supérieur à 2 500 euros sur cet échantillon est $P(39\leqslant X\leqslant 64)\approx 0{,}951\,8$.

b. La proportion de comptes épargne dont le montant est supérieur à 2 500 euros est $p=0{,}15$. La taille de cet échantillon est $n=340\geqslant 30$. Donc $np=51>5$ et $n(1-p)=289>5$. Les conditions d'approximation de l'intervalle de fluctuation à 95 % par l'intervalle asymptotique sont donc vérifiées.

Alors cet intervalle est, en arrondissant bien la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès,

$$\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\approx[0{,}112\,;0{,}188].$$

c. Il y a donc environ 95 % de chances que la proportion de comptes épargne dont le montant est supérieure à 2500 euros soit comprise entre 11,2 % et 18,8 %.

Or 340 comptes sont étudiés, $340\times\frac{11{,}2}{100}=38{,}08$ et $340\times\frac{18{,}8}{100}=63{,}92$ donc il y a environ 95 % de chances que le nombre de comptes épargne concernés par le nouveau placement soit compris entre 39 et 63.

44 Chien ou chat

1 a. Puisque l'on interroge un foyer possédant un chien ou un chat, l'événement $\overline{C}$ signifie que le foyer possède un chat. Par équiprobabilité des foyers interrogés,

on a alors $P(C)=\frac{41}{100}=0{,}41$, $P_C(M)=\frac{47{,}7}{100}=0{,}477$ et $P_{\overline{C}}(\overline{M})=\frac{55{,}5}{100}=0{,}555$.

Puisque C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\begin{aligned}P(M)&=P_C(M)\times P(C)+P_{\overline{C}}(M)\times P(\overline{C})\\&=0{,}477\times 0{,}41+\left(1-P_{\overline{C}}(\overline{M})\right)\times(1-P(C))\\&=0{,}195\,57+(1-0{,}555)\times(1-0{,}41)\\&=0{,}458\,12\,.\end{aligned}$$

b. Répondre à la question revient à calculer $P_{\overline{M}}(C)$.

Or par définition $P_{\overline{M}}(C)=\frac{P(C\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}$.

D'après la formule des probabilités composées, on en déduit que :

$$\begin{aligned}P_{\overline{M}}(C)&=\frac{P_C(\overline{M})\times P(C)}{1-P(M)}=\frac{(1-P_C(M))\times P(C)}{1-P(M)}\\&=\frac{(1-0{,}477)\times 0{,}41}{1-0{,}458\,12}\approx 0{,}396\,.\end{aligned}$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Il y a donc environ 39,6 % de chances qu'un foyer possédant une chatte ou une chienne possède en fait une chienne.

c. Cette expérience revient à répéter de manière identique et indépendante 10 épreuves de Bernoulli, de succès « *Le foyer possède un animal mâle* » et donc de paramètre $p = P(M) = 0{,}458\,12$.

X étant le nombre de foyers possédant un animal mâle, il représente le nombre de succès lors de cette répétition d'épreuves et suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}458\,12$.

Répondre à la question revient à calculer la probabilité $P(X \geqslant 1)$ donc :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$$
$$= 1 - (1 - 0{,}458\,12)^{10} \approx 0{,}997\,8\,.$$

Il y a donc plus de 99 % de chances qu'au moins un foyer possède un animal mâle.

2 a. La proportion de foyers français possédant un animal de compagnie est $p' = 0{,}487$.

Cet échantillon est de taille $n' = 250 \geqslant 30$.

Alors $n'p' = 121{,}75 > 5$ et $n'(1-p') = 128{,}25 > 5$ donc les critères d'approximations sont vérifiés.

Par conséquent, un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des foyers ayant un animal de compagnie est, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès,

$$I = \left[p' - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{n'}} ; p' + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{n'}}\right]$$
$$\approx [0{,}425\,0 ; 0{,}549\,0]\,.$$

b. Dans l'échantillon choisi, la fréquence observée de foyers ayant un animal de compagnie est $f = \frac{130}{250} = 0{,}52$.

Or $f \in I$ donc **il n'y a pas de raison de considérer que l'échantillon choisi n'est pas conforme à la population des foyers français**.

3 a. Dans l'échantillon de taille $n = 1\,600$, la fréquence observée de propriétaire de poisson est $f = \frac{512}{1\,600} = 0{,}32$.

une estimation ponctuelle de p est donc $f = 0{,}32$.

b. La taille de l'échantillon est $n = 1\,600 \geqslant 30$. L'estimation ponctuelle de p est $f = 0{,}32$ donc $nf = 512 > 5$ et $n(1-f) = 1\,088 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées.

Alors un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de propriétaires de poisson est :

$$IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}32 - \frac{1}{\sqrt{1\,600}} ; 0{,}32 + \frac{1}{\sqrt{1\,600}}\right]$$
$$\approx [0{,}295 ; 0{,}345]\,.$$

Si, pour un grand nombre d'échantillons, on déterminait de cette manière un intervalle de confiance de p, environ 95 % d'entre eux contiendraient p. Il est donc raisonnable, d'après ce sondage, d'estimer qu'il y a entre 29,5 % et 34,5 % des foyers possédant un animal de compagnie qui possèdent un poisson.

45 Diamètre d'une planète

1 a. On utilise la calculatrice en entrant cette série statistique dans une liste : on obtient $\mu \approx 62{,}97$ et $\sigma \approx 0{,}71$

b. Il est encore possible d'utiliser la calculatrice pour déterminer les quartiles et la médiane.

Pour le faire à la main, on commence par trier la série statistique.

L'effectif total est $n = 15$, donc $\frac{n}{4} = 3{,}75$: par conséquent, le premier quartile est la quatrième valeur de la série ordonnée. On en déduit que $Q_1 = 62{,}66$.

De la même façon, $\frac{3n}{4} = 11{,}25$ donc le troisième quartile est la douzième valeur de la série ordonnée. On en déduit que $Q_3 = 63{,}68$.

Il en résulte que l'écart interquartile est :

$$e = Q_3 - Q_1 = 63{,}68 - 62{,}66 = 1{,}02\,.$$

c. L'intervalle E est donc :

$$E = [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$$
$$= [62{,}97 - 0{,}71 ; 62{,}97 + 0{,}71]$$
$$= [62{,}26 ; 63{,}68].$$

Cet intervalle contient donc toutes les valeurs sauf quatre (les trois plus faibles et la plus grande) : la fréquence des mesures situées dans l'intervalle E est donc

$$f = \frac{15 - 4}{15} \approx 0{,}73\,.$$

Il y a donc environ 73 % des mesures comprises dans cet intervalle.

d. Les intervalles $E' = [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ et $E'' = [\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$ contiennent toutes les mesures donc la fréquence des mesures comprises dans ces intervalle est 1.

Si la distribution des mesures est normale, la probabilité qu'une mesure soit dans E est, d'après le cours, d'environ 68 %, celle qu'elle soit dans E' d'environ 95 % et celle qu'elle soit dans E'' d'environ 99 %.

Les fréquences observées sont comparables aux probabilités théoriques correspondant à une distribution normale : **il est donc légitime de penser à une distribution normale des mesures**.

2 a. Pour calculer cette probabilité, on utilise les fonctionnalités de la calculatrice.

Attention ! La définition de la loi normale de X utilise la notation officielle : **0,504 1 est donc la variance de la loi**. Son écart-type (demandé par la calculatrice) est donc $\sigma = \sqrt{0{,}5\,041} = 0{,}71$!

On obtient grâce à la calculatrice :

$$P(62{,}97 \leqslant X \leqslant 63{,}68) \approx 0{,}6826\,.$$

b. On cherche un nombre a tel que :

$$P(62{,}97 - a \leqslant X \leqslant 62{,}97 + a)\,.$$

Or $62{,}97 = \mu$ est l'espérance de X.

Comme X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, on sait d'après le cours que :

$$0{,}68 \approx P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = P(62{,}97 - \sigma \leqslant X \leqslant 62{,}97 + \sigma)\,.$$

Il suffit donc de choisir pour a la valeur de :

$$\sigma = \sqrt{0{,}5041} = 0{,}71\,.$$

3 a. Dans l'échantillon considéré, la fréquence observées des mesures situées dans E est :

$$f = \frac{21}{40} = 0{,}525\,.$$

La taille de cet échantillon est $n = 40 \geqslant 30$.

Alors $nf = 21 > 5$ et $n(1-f) = 19 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 est donc :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}525 - \frac{1}{\sqrt{40}} ; 0{,}525 + \frac{1}{\sqrt{40}}\right]$$

$$\approx [0{,}366 ; 0{,}684].$$

b. La longueur de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ où n est le nombre de mesure effectué (la taille de l'échantillon).

On cherche donc n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{2}{0{,}1} \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{2}{0{,}1}\right)^2 \Leftrightarrow n \geqslant 400.$$

Pour que l'intervalle de confiance soit de longueur inférieure à 0,1, il faut donc faire au moins 400 mesures.

46 Fabrication de clés USB

1 a. Chaque tirage d'une clé correspond à une épreuve de Bernoulli, dont le succès est l'événement E, de probabilité $p = P(E) = 0{,}05$. Lors d'un prélèvement, on répète cette épreuve 400 fois de manière identique et indépendante. Comme X est le nombre de clés défectueuses, X correspond au nombre de succès obtenus lors de ce prélèvement donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}05$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(400 ; 0{,}05)$.

b. On utilise les fonctionnalités de la calculatrice (et notamment la fonction de répartition de cette loi) pour déterminer : $P(X \leqslant 30) \approx 0{,}988\,6$

2 X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}05$ donc son espérance est $\mu = n \times p = 20$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{19}$.

On en déduit d'après le cours que l'on peut supposer que la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20}{\sqrt{19}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

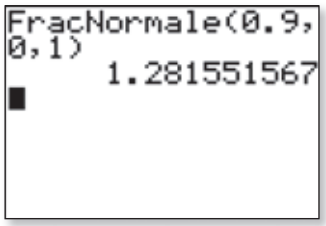
On cherche alors un nombre entier a tel que :

$$0{,}9 = P(X \leqslant a) = P(X - \mu \leqslant a - \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sqrt{19}} \leqslant \frac{a - \mu}{\sqrt{19}}\right)$$

$$= P\left(Z \leqslant \frac{a - \mu}{\sqrt{19}}\right) = P(Z \leqslant t)$$

où $t = \frac{a - 20}{\sqrt{19}}$.

Or Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$. donc on peut utiliser la fonctionnalité « Fractile » de la calculatrice pour déterminer la valeur de t qui convient. L'écran d'une Texas Instrument est fournit ci-dessous.



On obtient alors $t \approx 1{,}28$.

Or $\frac{a - 20}{\sqrt{19}} = 1{,}28 \Leftrightarrow a - 20 = 1{,}28 \times \sqrt{19}$

$\Leftrightarrow a = 20 + 1{,}28\sqrt{19} \approx 26.$

On en déduit qu'il y a 90 % de chances d'obtenir moins de 26 clés ISB défectueuses dans un tel échantillon.

3 a. L'échantillon considéré a pour taille $n = 2\,000 \geqslant 30$ et la fréquence des clés présentant une erreur de capacité de mémoire est $f = \frac{90}{2\,000} = 0{,}045$.

Alor $nf = 90 > 5$ et $n(1-f) = 1\,910 > 5$ donc les critères d'approximations sont bien vérifiés.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p des clés présentant une erreur de capacité de mémoire est donc donné par, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}045 - \frac{1}{\sqrt{2\,000}} ; 0{,}045 + \frac{1}{\sqrt{2\,000}}\right]$$

$$\approx [0{,}02 ; 0{,}07].$$

Cela signifie que, en construisant un grand nombre d'intervalle de confiance de ce type, sur un grand nombre d'échantillon, environ 95 % de ces intervalles contiendront la proportion à estimer p.

Il est donc raisonnable d'estimer que la proportion de clés présentant une erreur de capacité de mémoire est comprise entre 2 % et 7 %.

b. La borne supérieure est $0{,}07 > 0{,}05$ donc l'entreprise devra arrêter la production.

47 Recrudescence de la rougeole en France

1 La proportion d'enfants de moins d'un an parmi les cas de rougeole déclaré est supposée être égale à $p = 0{,}38$.

L'échantillon considéré est de taille $n = 100 \geqslant 30$. Alors $np = 38 > 5$ et $n(1-p) = 62 > 5$ donc les critères d'approximation sont vérifiés.

Par conséquent, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion des enfants de moins de un an parmi les cas de rougeole déclaré est, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}38 - \frac{1{,}96\sqrt{0{,}38(1-0{,}38)}}{\sqrt{100}} ; 0{,}38 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}38(1-0{,}38)}}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\approx [0{,}28 ; 0{,}48].$$

2 Dans cet échantillon, la fréquence observée a donc été de $f = \frac{44}{100} = 0{,}44$.

Or $f \in I$ donc il est possible d'expliquer la différence entre l'hypothèse et l'observation dans cet échantillon uniquement à partir du hasard. **Il n'y a donc pas de raison de remettre en cause la proportion $p = 0{,}38$, y compris dans cette ville, à partir de ces observations.**

3 a. Par définition, la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est, ici, sur un échantillon de taille n :

$$x = p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}38 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}38 \times 0{,}62}}{\sqrt{n}}.$$

Alors $\frac{1{,}96\sqrt{0{,}38 \times 0{,}62}}{\sqrt{n}} = x - 0{,}38$ et,

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

en passant au carré,

$\dfrac{1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62}{n} = \left(\dfrac{1{,}96\sqrt{0{,}38 \times 0{,}62}}{\sqrt{n}}\right)^2 = (x - 0{,}38)^2$.

Or, par définition, $x > 0{,}38$ donc $x - 0{,}38 \neq 0$ donc :

$$n = \frac{1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62}{(x - 0{,}38)^2}.$$

b. On définit donc la fonction $f(x) = \dfrac{1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62}{(x - 0{,}38)^2}$ sur l'intervalle]0,38 ; 0,5].

Pour étudier les variations de f, on calcule sa dérivée.

En posant $u(x) = 1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62$ et $v(x) = (x - 0{,}8)^2 = x^2 - 0{,}76x + 0{,}144\,4$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Et $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x - 0{,}76 = 2(x - 0{,}38)$ donc :

$$F'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{0 \times (x - 0{,}38)^2 - 1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62 \times 2(x - 0{,}38)}{\left((x - 0{,}38)^2\right)^2}$$

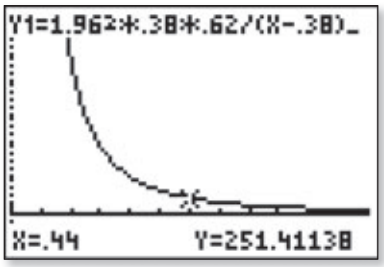
$$= \frac{-2 \times 1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62 \times (x - 0{,}38)}{(x - 0{,}38)^4}$$

$$= \frac{-2 \times 1{,}96^2 \times 0{,}38 \times 0{,}62}{(x - 0{,}38)^3}.$$

Or, pour $x > 0{,}38$, on a $x - 0{,}38 > 0$ donc $(x - 0{,}38)^3 > 0$ d'où $f'(x) < 0$.

On en déduit que **la fonction f est strictement décroissante sur]0,38 ; 0,5]**.

3 **c.** Voir ci-dessous le résultat sur calculatrice.



d. On souhaite que 0,44 n'appartienne pas à l'intervalle de fluctuation. Il est donc nécessaire que la borne supérieure de cet intervalle soit inférieure à 0,44 : on doit donc avoir $x \leqslant 0{,}44$.

Alors, par décroissance de la fonction f, on en déduit que $n = f(x) \geqslant f(0{,}44)$.

Or $f(0{,}44) \approx 251{,}4$:

il faut donc sélectionner au moins 252 cas de rougeole avérés pour qu'une proportion de 44 % d'enfants de moins de un an dans l'échantillon permette de remettre en cause la proportion $p = 0{,}38$.

48 Incidents sur les routes de montagne

1 **a.** On cherche à calculer $P(50 \leqslant X \leqslant 100)$. Vu la définition de la loi de probabilité de X, X admet une loi continue de densité $f(x) = \dfrac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}$.

On a donc :

$P(50 \leqslant X \leqslant 100)$

$$= \int_{50}^{100} \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}\,dx = -\int_{50}^{100}\left(-\frac{1}{80}\right)e^{-\frac{x}{80}}\,dx = -\int_{50}^{100} u'(x)e^{u(x)}\,dx$$

avec $u(x) = -\dfrac{x}{80}$.

Alors $P(50 \leqslant X \leqslant 100)$

$$= -\left[e^{u(x)}\right]_{50}^{100} = -\left[e^{-\frac{x}{80}}\right]_{50}^{100} = -\left(e^{-\frac{100}{80}} - e^{-\frac{50}{80}}\right)$$

$= e^{-\frac{5}{8}} - e^{-\frac{5}{4}} \approx 0{,}249$.

De la même manière,

$$P(X \geqslant 300) = 1 - P(X < 300) = 1 - P(X \leqslant 300)$$

$$= 1 - \int_0^{300} \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}\,dx$$

donc :

$$P(X \geqslant 300) = 1 - \left(-\left[e^{-\frac{x}{80}}\right]_0^{300}\right)$$

$$= 1 + \left(e^{-\frac{300}{80}} - e^{-0}\right) = 1 + e^{-15/4} - 1$$

d'où $P(X \geqslant 300) = e^{-15/4} \approx 0{,}024$.

b. On cherche donc à calculer $P_{(X \geqslant 350)}(X \geqslant 350 + 25)$. Or, par définition, on a :

$$P_{(X \geqslant 350)}(X \geqslant 350 + 25) = \frac{P((X \geqslant 375) \cap (X \geqslant 350))}{P(X \geqslant 350)}$$

$$= \frac{P(X \geqslant 375)}{P(X \geqslant 350)}.$$

On calcule ces deux probabilités comme précédemment :

$$P(X \geqslant 350) = 1 - P(X \leqslant 350) = 1 - \int_0^{350} \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}\,dx$$

$$= 1 - \left(-\left[e^{-\frac{x}{80}}\right]_0^{350}\right) = 1 + \left(e^{-\frac{350}{80}} - 1\right) = e^{-\frac{35}{8}}.$$

$$P(X \geqslant 375) = 1 - P(X \leqslant 375) = 1 - \int_0^{375} \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}\,dx$$

$$= 1 - \left(-\left[e^{-\frac{x}{80}}\right]_0^{375}\right) = 1 + \left(e^{-\frac{375}{80}} - 1\right) = e^{-\frac{75}{16}}.$$

Alors il vient :

$$P_{(X \geqslant 350)}(X \geqslant 350 + 25) = \frac{e^{-\frac{75}{16}}}{e^{-\frac{35}{8}}} = e^{-\frac{75}{16} - \left(-\frac{35}{8}\right)}.$$

$$= e^{-\frac{75}{16} - \left(-\frac{35}{8}\right)} = e^{-5/16} \approx 0{,}732.$$

Un car qui a déjà roulé 350 kilomètres sans incidents a donc environ 73,2 % de chances de rouler encore 25 kilomètres sans incidents.

2 **a.** Dans l'échantillon composé des 80 cars conduits par les chauffeurs interrogés, on en observe 10 qui n'ont connu aucun incident après avoir parcouru 300 kilomètres.

Une estimation ponctuelle de p est donc la fréquence des cars n'ayant connu aucun incident après 300 kilomètres de routes dans l'échantillon soit $f = \dfrac{10}{80} = 0{,}125$.

b. L'échantillon est de taille $n = 80 \geqslant 30$ et l'estimation ponctuelle de p est $f = 0{,}125$.

Alors $nf = 10 > 5$ et $n(1 - f) = 70 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées.

Alors un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 est donné par, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}125 - \frac{1}{\sqrt{80}} ; 0{,}125 + \frac{1}{\sqrt{80}}\right]$$

$\approx [0{,}01 ; 0{,}24]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

c. La proportion p et l'intervalle précédents sont déterministes (c'est-à-dire non aléatoire) : par conséquent, p appartient ou n'appartient pas à cet intervalle et la probabilité que ce soit le cas vaut 0 ou 1, ce qui ne permet pas de conclure.
Cependant, la construction d'un intervalle de confiance de ce type sur un grand nombre d'échantillons fournira dans 95 % des cas un intervalle contenant p : **il est donc raisonnable d'estimer que p appartient à cet intervalle et donc peu raisonnable d'estimer que p sera supérieur à $\frac{1}{4} = 0{,}25$.**
Il est cependant important de noter que l'on ne peut aucunement estimer la probabilité que p soit supérieur ou inférieur à 25 % (et que cette probabilité vaut 0 ou 1).

d. La proportion d'autocars n'ayant subi aucun incident après 300 kilomètres est donc p, que l'on peut raisonnablement estimer comprise entre 0,01 et 0,24.
Par conséquent, comme l'entreprise possède en tout 250 cars, on peut estimer que le nombre de cars n'ayant subi aucun incident après 300 kilomètres est compris entre $250 \times 0{,}01 = 2{,}5$, soit 3 cars, et $250 \times 0{,}24 = 60$ cars.

49 Sondages politiques

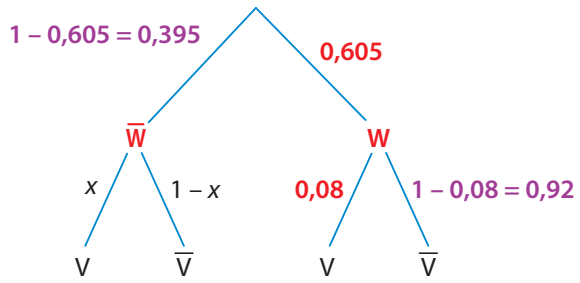
1 Pour chaque sondage, il suffit de calculer la proportion de personnes interrogées prêtes à voter pour M. W. dans l'échantillon associé. On obtient le tableau ci-dessous :

Institut	Sofrop	Ifres	Tnp
Estimation ponctuelle	$f_1 = \frac{462}{798} \approx 0{,}58$ soit 58 %	$f_2 = \frac{582}{955} \approx 0{,}61$ soit 61 %	$f_3 = \frac{568}{934} \approx 0{,}61$ soit 61 %

2 **a.** et **b.** Pour chacun des trois sondages, on vérifie que la taille des échantillons satisfait $n \geqslant 30$, que le produit nf vérifie $nf > 5$ et enfin que le produit $n(1-f)$ vérifie $n(1-f) > 5$.
Il ne reste alors qu'à appliquer la formule $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et on obtient le tableau suivant :

Institut	Sofrop	Ifres	Tnp
Estimation ponctuelle	$f_1 \approx 0{,}58$	$f_2 \approx 0{,}61$	$f_3 \approx 0{,}61$
Taille de l'échantillon	$n_1 = 798 \geqslant 30$	$n_2 = 955 \geqslant 30$	$n_3 = 934 \geqslant 30$
Produit nf	$n_1 \times f_1 = 462 > 5$	$n_2 \times f_2 = 582 > 5$	$n_3 \times f_3 = 568 > 5$
Produit $n(1-f)$	$n_1 \times (1-f_1) = 336 > 5$	$n_2 \times (1-f_2) = 373 > 5$	$n_3 \times (1-f_3) = 366 > 5$
Intervalle de confiance	$I_1 = [0{,}54 ; 0{,}62]$	$I_2 = [0{,}57 ; 0{,}65]$	$I_3 = [0{,}57 ; 0{,}65]$
Longueur de l'intervalle	$\ell_1 = 0{,}62 - 0{,}54 = 0{,}08$	$\ell_2 = 0{,}65 - 0{,}57 = 0{,}08$	$\ell_3 = 0{,}65 - 0{,}57 = 0{,}08$

On remarque que les trois intervalles sont comparables et de longueurs équivalentes.
c. et **d.** D'après l'institut Sofrop, M. W. peut raisonnablement considérer qu'entre 54 % et 62 % des personnes inscrites sur la liste électorale sont prêtes à voter pour lui. Cela ne signifie pas que c'est le cas, mais, qu'en construisant un grand nombre d'intervalle de confiance basé sur un grand nombre d'échantillons environ 95 % d'entre eux contiendront la proportion réelle recherchée.
D'après l'institut Ifres, cette proportion peut être raisonnablement encadrée par 57 % et 65 %, comme pour l'institut Tnp.
Puisque pour chacun des instituts la borne inférieure de l'intervalle est supérieure à 0,5, il semble raisonnable de penser que M. W. a de grandes chances d'être élu, et cette observation est renforcée par le fait qu'elle est commune aux trois instituts.
3 La longueur d'un intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$, où n est la taille de l'échantillon.
Ici cette longueur est $0{,}6 - 0{,}55 = 0{,}05$ donc le nombre de personnes interrogées vérifie :
$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}05 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2}{0{,}05} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 40 \Leftrightarrow n = 40^2 = 1\,600$.
Par conséquent, vu son intervalle de confiance, l'institut Sofrop a donc interrogé 1 600 personnes.
4 **a.** W et $\overline{W}$ forment une partition de l'univers et, d'après l'énoncé, on interroge un électeur au hasard : il y a donc équiprobabilité et la probabilité d'un événement correspond à sa fréquence.
Alors $P(W) = 0{,}605$ donc $P(\overline{W}) = 1 - P(W) = 0{,}395$.
De même, $P_W(V) = 0{,}08$ et donc :
$P_W(\overline{V}) = 1 - P_W(V) = 0{,}92$.
Enfin, d'après l'énoncé, on a aussi $P(V) = 0{,}068$.
On en déduit l'arbre ci-dessous.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. On cherche $x = P_{\overline{W}}(V)$.
Or W et $\overline{W}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$0{,}068 = P(V) = P_W(V) \times P(W) + P_{\overline{W}}(V) \times P(\overline{W})$
$= 0{,}08 \times 0{,}605 + 0{,}395 \times x = 0{,}0484 + 0{,}395x$.
Alors $0{,}395x = 0{,}068 - 0{,}0484 = 0{,}0196$ donc :
$$x = \frac{0{,}196}{0{,}395} \approx 0{,}05 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$
Parmi les électeurs ayant voté pour Z, il y a donc environ 5 % de chances d'interroger un électeur de la liste Ecologie.
c. On cherche à calculer $P_V(W)$.
Or, par définition, $P_V(W) = \dfrac{P(V \cap W)}{P(V)}$.
Donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles, il vient :
$$P_V(W) = \frac{P_W(V) \times P(W)}{P(V)} = \frac{0{,}08 \times 0{,}605}{0{,}068} \approx 0{,}712.$$
Si l'on interroge un électeur de la liste Ecologie, il y a environ 71,2 % de chances qu'il ait voté pour W.

50 Contraintes budgétaires

1 L'échantillon interrogé est de taille $n = 150 \geqslant 30$.
Dans cet échantillon, la fréquences des spectateurs déclarant acheter des friandises est $f = \dfrac{60}{150} = 0{,}4$.
Alors $nf = 60 > 5$ et $n(1-f)\ 90 > 5$ donc les conditions d'approximation sont vérifiées.
Un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95 est donc donné par la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :
$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{150}} ; 0{,}4 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right]$$
$= \mathbf{[0{,}318\ ;\ 0{,}482]}$.
Il est donc raisonnable de penser qu'entre 31,8 % et 48,2 % des spectateurs achètent des friandises.
2 La précision de l'intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95 est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ où n est la taille de l'échantillon.
Alors on cherche un entier n tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{5}{100}$.
Or $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{5}{100} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \dfrac{100}{5}$
$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 40 \Leftrightarrow n \geqslant (40)^2 \Leftrightarrow n \geqslant 1\,600$.
Pour obtenir la précision souhaitée, il fat donc interroger au moins 1 600 clients.
3 **a.** Le coût total est la somme des coûts fixes et des coûts variables. Si on note CT le coût total, alors :
$$CT(x) = 8\,000 + C(x) = 8\,000 + 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}01x}.$$
b. Si 150 spectateurs sont interrogés, alors le coût total de l'enquête est :
$CT(150) = 8\,000 + 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}01\times 150} = 8\,000 + 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}5} \approx 8\,002{,}24$.
Si 150 spectateurs sont interrogés, le coût total s'élève à environ 8 002 euros.
c. On cherche donc pour quelle valeur entière de x le coût total est inférieur à 40 000 euros.
Or :
$CT(x) \leqslant 40\,000 \Leftrightarrow 8\,000 + 0{,}5\ \mathrm{e}^{0{,}01x} \leqslant 40\,000$
$\Leftrightarrow 0{,}5\ \mathrm{e}^{0{,}01x} \leqslant 32\,000$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}01x} \leqslant 64\,000$
$\Leftrightarrow 0{,}01x \leqslant \ln(64\,000)$ par stricte croissance de la fonction ln sur $]0\ ;+\infty[$
$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\ln(64\,000)}{0{,}01}$
$\Leftrightarrow x \leqslant 1\,106$ car $x \in \mathbb{N}$
et $\dfrac{\ln(64\,000)}{0{,}01} \approx 1\,106{,}7$.
Pour le budget ne dépasse pas 40 000 euros il faut donc que l'on interroge au maximum 1 106 personnes.
d. La contrainte sur la précision impose d'interroger au moins 1600 personnes. La contrainte budgétaire impose d'interroger au maximum 1 106 personnes. Or $1\,106 \leqslant 1\,600$ donc il est impossible de satisfaire les deux contraintes en même temps.
4 **a.** Dans ce cas, l'échantillon est de taille $n = 1\,000 \geqslant 30$.
La fréquence des spectateurs interrogés qui achètent des friandises est $f = \dfrac{400}{1\,000} = 0{,}4$. Alors $nf = 400 > 5$ et $n(1-f) = 600 > 5$ donc les critères d'approximation sont vérifiés.
L'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95 est alors donné par la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :
$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0{,}4 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$$
$= \mathbf{[0{,}368\ ;\ 0{,}432]}$.
b. Vu l'intervalle de confiance de p dans la question précédente, il est raisonnable de penser que cette proportion est comprise entre 36,8 % et 43,2 %.
Étant donné qu'il y a 9 000 entrées par mois, que :
$0{,}368 \times 9\,000 = 3\,312$ et que $0{,}432 \times 9\,000 = 3\,888$, il est donc raisonnable d'estimer que le gérant doit prévoir un stock de friandise pour entre 3 312 et 3 888 spectateurs. Il lui faut donc augmenter son stock.

51 Les centenaires en France

1 **a.** La proportion de centenaires en France est donc, d'après l'énoncé, $p = \dfrac{258}{1\,000\,000} = 0{,}000\,258$. La taille de l'échantillon formé par les habitants de la région sur laquelle intervient la société est $n = 2\,550\,000 \geqslant 30$.
De plus, $np = 657{,}9 > 5$ et $n(1-p) > 2\,000\,000 > 5$ donc les critères d'approximation sont bien vérifiés.
Alors l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des centenaires dans cette région est, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :
$$I = \left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$\approx \mathbf{[0{,}000\ 23\ ;\ 0{,}000\ 28]}$.
b. Il y a donc 95 % de chances que la proportion de centenaires dans cette région soit comprise entre 0,000 23 et 0,000 28. Or cette région compte 2 550 000 habitants

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

donc il y a 95 % de chances qu'elle compte entre :
$0{,}000\,23 \times 2\,550\,000 = 586{,}5$, soit **587**,
et $0{,}000\,28 \times 2\,550\,000 = \mathbf{714}$ centenaires.

2 a. Une estimation ponctuelle de la proportion des centenaires de moins de 105 ans en France est la fréquence observée de ce type de personne dans l'échantillon composé de la population de cette région.
Attention, on ne demande pas la proportion des centenaires de moins de 105 ans parmi les centenaires, mais dans la population française : il faut donc considérer l'ensemble de la population de l'échantillon, donc de la région.
L'estimation ponctuelle du nombre de centenaires de moins de 105 en France est donc $f = \dfrac{520}{2\,550\,000} \approx 0{,}000\,20$, soit environ **200 pour un million**.

b. Ici, on s'intéresse à la proportion des centenaires de moins de 105 ans parmi les centenaires. Dans l'échantillon de taille $n = 650 \geqslant 30$ composé des centenaires de cette région, on observe une proportion $f = \dfrac{520}{650} = 0{,}8$ de centenaires de moins de 105 ans.
Or $nf = 520 > 5$ et $n(1-f) = 130 > 5$ donc les critères d'approximation sont vérifiés. Alors un intervalle de confiance de la proportion p de centenaires de moins de 105 ans parmi les centenaires, en France, au niveau de confiance de 0,95, est donné par la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - \frac{1}{\sqrt{650}} ; 0{,}8 + \frac{1}{\sqrt{650}}\right]$$
$$= \mathbf{[0{,}760\ ;\ 0{,}840]}\ .$$

c. En calculant de tels intervalle de confiance sur un grand nombre d'échantillons, on obtiendra donc 95 % d'intervalles contenant p.
Il est donc raisonnable d'estimer que la proportion p de centenaires de moins de 105 ans en France parmi les centenaires est comprise entre 76 % et 84 %.

3 a. Le taux global d'évolution du nombre de centenaires entre 2007 et 2011 est :

$$t_g = \frac{y_{2011} - y_{2007}}{y_{2007}} = \frac{16\,269 - 13\,981}{13\,981} \approx 0{,}164\ .$$

Autrement dit, le nombre de centenaires en France entre 2007 et 2011 a augmenté d'environ 16,4 %

b. Le coefficient multiplicateur global du nombre de centenaires entre 2007 et 2011 en France est donc :

$$CM_g = 1 + t_g \approx 1{,}164\ .$$

Entre 2007 et 2011, il y a 4 évolutions donc si, CM_a est le coefficient multiplicateur moyen annuel, il vient :

$$CM_a^4 = CM_g \Leftrightarrow CM_a = CM_g^{\frac{1}{4}} = 1{,}164^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}039\ .$$

Si t_{am} est le taux d'évolution annuel moyen du nombre de centenaires, alors $CM_a = 1 + t_{am}$ donc $t_{am} \approx 0{,}039$.
Autrement dit, le nombre de centenaires en France a crû en moyenne de 3,9 % par an entre 2004 et 2011.
Si ce taux d'évolution reste le même, cela revient à dire qu'il suffit pour obtenir le nombre de centenaires d'une année sur l'autre de le multiplier par le coefficient multiplicateur annuel moyen CM_a.

Entre 2011 et 2013, il y a deux évolutions donc, dans ce cas, le nombre de centenaires en 2013 peut être estimé par :

$$y_{2013} = y_{2011} \times CM_a \times CM_a = y_{2011} \times CM_a^2$$
$$\approx 16\,269 \times 1{,}039^2 = 17\,563\ .$$

On peut dans ce cas estimer que le nombre de centenaires sera d'environ 17 563 en 2013.

c. On cherche alors en quelle année le nombre de centenaire $f(x)$ sera supérieur à 17 000 : on résout donc l'inéquation :

$$f(x) \geqslant 17\,000 \Leftrightarrow 1\,190\ln(x) + 13\,775 \geqslant 17\,000$$
$$\Leftrightarrow 1\,190\ln(x) \geqslant 3\,225$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \frac{3\,225}{1\,190}$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{645}{238}} \text{ par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant 16 \text{ car } x \text{ est un entier naturel et } \mathrm{e}^{\frac{645}{238}} \approx 15{,}03\ .$$

Or $x = 16$ correspond à l'année de rang 16 donc à l'année $2006 + 16 = 2022$.
On en déduit que d'après ce modèle, le nombre de centenaires dépassera 17 000 uniquement à partir de 2022.

52 Équipement automobile en France

1 a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 82$ donc $u'(x) = 0$ et $v(x) = 1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08x}$
donc $v'(x) = 0 + 0{,}15 \times (-0{,}08)\mathrm{e}^{-0{,}08x} = -0{,}012\mathrm{e}^{-0{,}08x}$.
Alors il vient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$
$$= \frac{0 \times v(x) - 82 \times (-0{,}012\mathrm{e}^{-0{,}08x})}{(1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08x})^2}$$
$$= \frac{0{,}984\mathrm{e}^{-0{,}08x}}{(1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08x})^2}\ .$$

Un carré et une exponentielle étant strictement positifs, on a $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
On en déduit que **f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

b. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 40[$, f est continue et strictement croissante.
Elle passe de $f(0) = \dfrac{82}{1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08\times 0}} = \dfrac{82}{1{,}15} \approx 71{,}3$
à $f(40) = \dfrac{82}{1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08\times 40}} = \dfrac{82}{1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-3{,}2}} \approx 81{,}5$.
Par conséquent, f prend une seule fois la valeur intermédiaire 80, ce qui signifie que **l'équation $f(x) = 80$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 40[$** que l'on note α.

c. Il est possible de d'approcher α graphiquement ou à l'aide de la table de la calculatrice. Mais on peut aussi le déterminer par le calcul :

$$f(x) = 80 \Leftrightarrow \frac{82}{1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08x}} = 80$$
$$\Leftrightarrow 82 = 80 \times (1 + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}08x})$$
$$\Leftrightarrow 82 - 80 = 12\mathrm{e}^{-0{,}08x} \Leftrightarrow \frac{2}{12} = \mathrm{e}^{-0{,}08x}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -0{,}08x \Leftrightarrow -\ln(6) = -0{,}08x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(6)}{0{,}08} = x \Leftrightarrow x \approx 22{,}4\ .$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Or, la fonction f étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$ donc $f(x) > 80$.
De même, si $x < \alpha$, alors $f(x) < 80$.
Par conséquent, la première année à partir de laquelle le taux d'équipement en automobile à dépasser 80 % est l'année de rang 23, donc l'année 1980 + 23 = 2003.

d. L'année 2015 correspond au rang $x = 35$ donc, d'après cette modélisation, en 2015, le taux d'équipement des ménages français en automobile sera de :

$$f(35) = \frac{82}{1 + 0{,}15e^{-0{,}08\times 35}} \approx 81{,}3 \text{ soit de } 81{,}3\ \%.$$

2 Les ménages français possédant, en 2010, deux véhicules représentent 36,6 % des ménages français possédant un véhicule, qui, eux-mêmes, représentent :
$f(30) \approx 80{,}9$ % des ménages français.

$$0{,}366 \times 0{,}809 \approx 0{,}296.$$

Donc les ménages français possédant deux véhicules représentent environ 29,6 % des ménages français.

3 **a.** La proportion des ménages français possédant deux véhicules est donc $p = 0{,}3$. La taille de l'échantillon formé par les ménages de cette ville est $n = 5\,000 \geqslant 30$.
Alors $np = 1\,500 > 5$ et $n(1 - p) = 3\,500 > 5$ donc les conditions d'approximations sont bien vérifiées.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des ménages de cette ville possédant deux véhicules est donc, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}3 - \frac{1{,}96\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{5\,000}} ; 0{,}3 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{5\,000}}\right]$$
$$\approx [0{,}287 ; 0{,}313].$$

b. Il est donc raisonnable de penser que la proportion de ménages de cette ville possédant deux véhicules se trouvera comprise entre 28,7 % et 31,3 %.
Or cette ville compte 5 000 ménages,
$5\,000 \times 0{,}287 = 1\,435$ et $5\,000 \times 0{,}317 = 1\,585$.
La compagnie d'assurances peut donc prévoir de vendre entre 1 435 et 1 585 contrats.

c. Dans cette ville, c'est-à-dire dans cet échantillon de taille $n = 5000$ de la population française, on observe une proportion de ménages possédant deux véhicules égale à $f = \frac{1\,400}{5\,000} = 0{,}28$.
Or $f \notin I$ donc la différence observée entre cette ville et l'ensemble de la population française n'a que 5 % de chances de pourvoir être expliquée par le hasard. On considère donc que la différence est significative et **que la répartition des ménages possédant deux véhicules dans cette ville n'est pas conforme à celle de la population française**.

4 Dans l'échantillon composé de $n = 6\,000 \geqslant 30$ ménages, on observe une proportion $f = 0{,}06$ de ménages possédant trois véhicules.
Or $nf = 360 > 5$ et $n(1 - f) = 5\,640 > 5$ donc les conditions d'approximations pour construire un intervalle de confiance sont vérifiées.
Alors un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p des ménages français possédant trois véhicules est donné par la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}06 - \frac{1}{\sqrt{6\,000}} ; 0{,}06 + \frac{1}{\sqrt{6\,000}}\right]$$
$$= [0{,}047 ; 0{,}073].$$

Si l'on détermine un grand nombre d'intervalles de confiance, à partir d'un grand nombre d'échantillons, environ 95 % d'entre eux contiendront la proportion p.
Il est donc raisonnable de considérer que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance ci-dessus, ce qui signifie qu'on peut estimer qu'entre 4,7 % et 7,3 % des ménages français possèdent trois véhicules.

Réinvestir... (p. 256)

53 ... en ornithologie

Estimation d'une population

a. Il y a, dans cette région, N cormorans et 900 d'entre eux ont été bagués donc la proportion de cormorans bagués est : $p = \frac{900}{N}$.

b. L'échantillon composé des cormorans capturés lors de la deuxième série de capture est de taille $n = 1\,500 \geqslant 30$ et, dans cet échantillon, on observe une fréquence $f = \frac{321}{1\,500} = 0{,}214$ de cormorans bagués.
Alors $nf = 321 > 5$ et $n(1 - f) = 1\,179 > 5$ donc les conditions d'approximations pour construire un intervalle de confiance sont vérifiées.
Par conséquent, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de cormorans bagués est obtenu par la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}214 - \frac{1}{\sqrt{1\,500}} ; 0{,}214 + \frac{1}{\sqrt{1\,500}}\right]$$
$$\approx [0{,}188 ; 0{,}240].$$

Si on fait de nombreuses captures et qu'à chacune de ces captures on construit un intervalle de confiance, alors environ 95 % d'entre eux contiendront la proportion p inconnue. Il est donc raisonnable d'estimer que cette proportion appartient à l'intervalle ci-dessus, ce

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

qui signifie que l'on peut estimer que la proportion de cormorans bagués est comprise entre 18,8 % et 24 %.

c. Or $p = \dfrac{900}{N}$ donc on obtient $0{,}188 \leqslant \dfrac{900}{N} \leqslant 0{,}24$.

En passant à l'inverse cette inégalité de termes positifs, on obtient alors :

$$\frac{1}{0{,}188} \geqslant \frac{N}{900} \geqslant \frac{1}{0{,}24} \Leftrightarrow \frac{900}{0{,}188} \geqslant N \geqslant \frac{900}{0{,}24}$$

$\Leftrightarrow 4\,787 \geqslant N \geqslant 3\,750$ car N est un entier naturel

On peut donc affirmer avec un niveau de confiance 0,95 que cette région compte entre 3 750 et 4 787 cormorans.

54 … en médecine

Test d'un médicament

a. La proportion de souris présentant une tumeur est $p = 0{,}18$.

Dans le premier échantillon, la taille est $n = 100 \geqslant 30$. Alors $np = 18 > 5$ et $n(1-p) = 82 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des souris présentant une tumeur dans cet échantillon est, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I_A = \left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}18 - \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{100}} ; 0{,}18 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{100}}\right]$$

$\approx$ **[0,104 ; 0,256]** .

Dans le second échantillon, la taille est $n = 400 \geqslant 30$. Alors $np = 72 > 5$ et $n(1-p) = 328 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des souris présentant une tumeur dans cet échantillon est, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I_B = \left[p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}18 - \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{400}} ; 0{,}18 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{400}}\right]$$

$\approx$ **[0,142 ; 0,218]** .

b. **Dans le premier échantillon**, on observe une fréquence $f_A = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$. Or $f_A \in I_A$ donc il n'y a pas de raison de considérer que cet échantillon n'est pas conforme à la répartition des souris présentant une tumeur dans la population des souris de cette race.

Dans le second échantillon, on observe une fréquence $f_B = \dfrac{56}{400} = 0{,}14$. Or $f_B \notin I_B$ donc on rejette, avec un risque d'erreur de 5 %, la conformité de cet échantillon avec la répartition des souris présentant une tumeur dans la population des souris de cette race.

c. L'échantillon B permet d'affirmer avec un risque d'erreur de 5 % que cette substance étudiée a un effet sur les tumeurs (puisque la fréquence dans l'échantillon est jugée significativement différente).

Cependant l'échantillon A ne permet pas d'arriver à la même conclusion : la différence n'y est pas jugée suffisamment significative pour considérer que la substance a un effet.

Comment dépasser ce paradoxe ?

Considérons l'échantillon formé des 500 prélèvements, dans lequel on a observé 56 + 25 = 81 souris présentant encore une tumeur.

Le même travail que précédemment permet de construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de f :

$$I_{A+B} = \left[0{,}18 - \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{500}} ; 0{,}18 + \frac{1{,}96\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{500}}\right]$$

$\approx$ **[0,146 ; 0,214]** .

On calcule aussi la fréquence de souris présentant une tumeur observée dans cet échantillon :

$$f_{A+B} = \frac{81}{500} = 0{,}162 .$$

Or $f_{A+B} \in I_{A+B}$ donc **sur l'ensemble des deux échantillons la différence n'est pas suffisamment significative pour considérer que la substance étudiée a une action sur les tumeurs**.

55 … en SVT

5 fruits et légumes

a. Dans l'échantillon considéré, de taille $n = 300 \geqslant 30$, on observe une fréquence d'enfants de 5 à 11 ans prêts à manger au moins cinq fruits et légumes par jour égale à $f = \dfrac{186}{300} = 0{,}62$.

Alors $nf = 186 > 5$ et $n(1-f) = 114 > 5$ donc les conditions d'approximations sont vérifiées.

On en déduit un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p des enfants de 5 à 11 ans prêts à manger cinq fruits ou légumes par jour avec la formule suivante, en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès :

$$I_1 = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}62 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0{,}62 + \frac{1}{\sqrt{300}}\right]$$

$\approx$ **[0,562 ; 0,678]** .

b. On procède de même avec, ici $f = 0{,}57$ et $n = 300$: on obtient un intervalle de confiance de p' au niveau de confiance 0,95 :

$$I_2 = \left[0{,}57 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0{,}57 + \frac{1}{\sqrt{300}}\right]$$

$=$ **[0,512 ; 0,628]** .

c. L'amplitude d'un intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc pour quelles valeurs de n on a $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{10}{100}$.

Or $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{10}{100} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2} \leqslant \dfrac{100}{10} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 20$

$\Leftrightarrow n \geqslant 20^2 \Leftrightarrow n \geqslant 400$.

L'entreprise doit donc interroger **au moins 400 enfants** si elle souhaite que l'intervalle de confiance soit d'amplitude inférieure à 10 %.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

d. Une estimation ponctuelle (ici 57 %) n'a pas de valeur scientifique si elle n'est pas accompagnée d'un intervalle de confiance (encore appelée *marge d'erreur*).
Pour que l'affirmation soit exacte, l'entreprise doit publier que,

« au niveau de confiance 0,95, entre 51,2 % et 62,8 % des enfants de 5 à 11 ans mangent moins de 5 fruits et légumes par jour »,

ce qui signifie que sur un grand nombre d'échantillons sur lesquels on construit un grand nombre d'intervalles de confiance, 95 % d'entre eux contiennent cette proportion inconnue (et l'intervalle fournit peut être l'un de ceux contenant la proportion comme l'un de ceux ne la contenant pas !)

56 ... en SES

Précision d'un sondage

Partie A

a. L'amplitude d'un intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc la marge d'erreur utilisée par l'institut de sondage est $\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. **Elle ne dépend pas de la fréquence observée !**

Pour n = 1 000, on a $\frac{1}{\sqrt{1\,000}}\approx 0{,}032$ d'où une marge d'erreur **d'environ 3,2 %.**

Pour n = 2 000, on a $\frac{1}{\sqrt{2\,000}}\approx 0{,}022$ d'où une marge d'erreur **d'environ 2,2 %.**
Dans les deux cas, **la marge d'erreur trouvée est supérieure à celle proposée par l'institut de sondage ...**

b. La demi-amplitude de cet intervalle est :

$$\frac{1}{2}\times\left[f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}};f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$
$$=1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Alors, avec f = 0,2, puis, avec n = 1 000,

$$1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\times 0{,}8}{1\,000}}\approx 0{,}025$$

soit une marge d'erreur d'environ 2,5 %.

Avec n = 2 000, $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\times 0{,}8}{2\,000}}\approx 0{,}018$ soit une marge d'erreur d'environ 1,8 %
On retrouve les résultats proposés dans le tableau de l'institut de sondage.

c. En utilisant les formules de l'exercice (parce que le tableau ne suffit pas à déterminer ce qu'il en est pour des fréquences du type de f = 0,24) avec n = 800 et f la fréquence proposée pour chaque candidat, on obtient le tableau suivant (en arrondissant les bornes inférieures par défaut et les bornes supérieures par excès) :

Candidat	A	B	C	D	E
Marge d'erreur	3 %	3 %	2,9 %	2,8 %	2,4 %
Intervalle de confiance à 95 %	[0,210 ; 0,270] soit entre 21 % et 27 %	[0,200 ; 0,260] soit entre 20 % et 26 %	[0,181 ; 0,239] soit entre 18,1 % et 23,9 %	[0,162 ; 0,218] soit entre 16,2 % et 21,8 %	[0,106 ; 0,154] soit entre 10,6 % et 15,4 %

Il est donc impossible d'affirmer connaître le candidat en tête au premier tour : les quatre candidats A, B, C et D peuvent l'être puisque la borne supérieure de leur intervalle de confiance particulier est plus grande que les bornes inférieures de tous les autres intervalles de confiance.

d. Voir ci-dessus.

Partie B

En utilisant la partie A, on détermine pour chaque candidat la marge d'erreur de l'estimation et l'intervalle de confiance à 95 % associé :

Candidat	Jacques Chirac	Lionel Jospin	Jean-Marie Le Pen
Marge d'erreur	2,5 %	2,4 %	1,8 %
Intervalle de confiance à 95 %	[0,165 ; 0,215] soit entre 16,5 % et 21,5 %	[0,156 ; 0,204] soit entre 15,6 % et 20,4 %	[0,122 ; 0,158] soit entre 12,2 % et 15,8 %

Les trois candidats pouvaient donc compte-tenu de la fluctuation d'échantillonnage être qualifiés au premier tour vu les résultats de ce sondage.... ce qui explique que l'absence de la publication des marges d'erreur ait entraîné de nombreuses polémiques !

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES/L option - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

CHAPITRE 9

Enseignement de spécialité ES

Partie 1 Recherche de courbes sous contraintes

Objectif : Savoir résoudre les systèmes linéaires, en particulier liés à la recherche de courbes polynômiales, en utilisant les matrices.

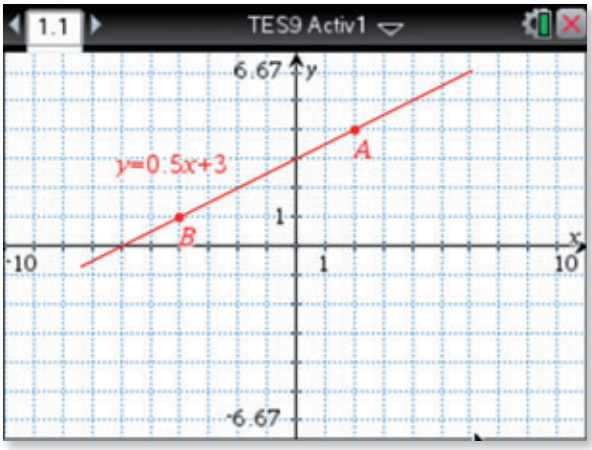
Découvrir

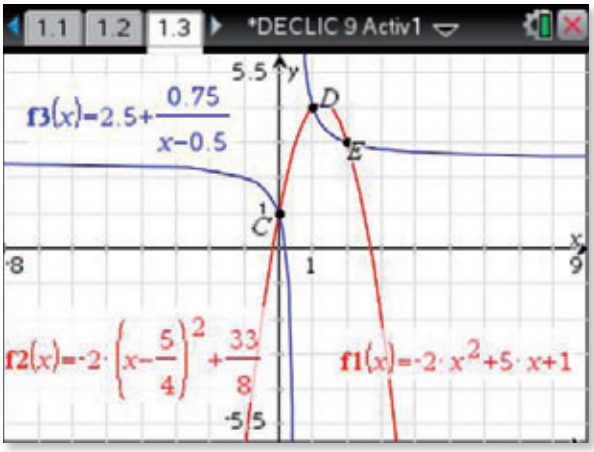
Activité 1 Écrire un système pour trouver l'équation d'une courbe (p. 260)

Objectif : Utiliser l'appartenance à une courbe.

1 Une infinité de droites passe par A. Une seule droite passe par A et B.

2 **a.** $A(2\,;4) \in (AB) \Leftrightarrow g(2)=4 \Leftrightarrow 2a+b=4$.
$A(-4\,;1) \in (AB) \Leftrightarrow g(-4)=1 \Leftrightarrow -4a+b=1$.
Les inconnues sont a et b.
b. On résout à la main par soustraction : $6a=3 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ et $b=4-2a=4-1=3$.
D'où $g(x)=\dfrac{1}{2}x+3$.





3 **a.** Entrer une courbe en segment de droite.

b. $\left.\begin{array}{l} C(0\,;1) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow f(0)=1 \\ D(1\,;4) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow f(1)=4 \\ E(2\,;3) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow f(2)=3 \end{array}\right\}$

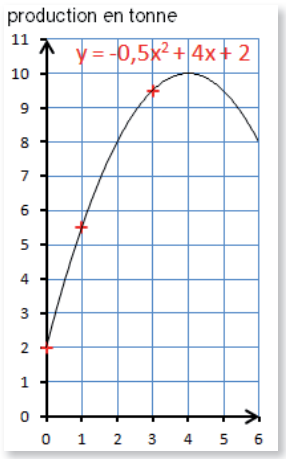
À priori, le système doit avoir 3 inconnues car il y a trois équations.
c. Si f est une fonction de 2e degré, $f(x)=ax^2+bx+c$, de paramètres les nombres a, b et c.
D'après la résolution, $f(x)=-2x^2+5x+1$.
Remarque : on peut chercher d'autres modèles.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 2 Modéliser par une fonction de degré 2 (p. 260)

Objectif : Utiliser les fonctionnalités d'un tableur.

Partie A
À l'aide d'un tableur
On obtient l'équation
$y = -0{,}5x^2 + 4x + 2$.



Partie B Étude du modèle

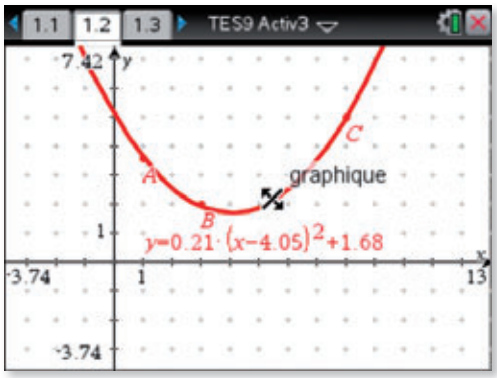
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 2$.
$f'(x) = -x + 4$.
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 4$.
Donc sur $[0\,;4]$, la fonction est croissante et sur $[4\,;+\infty[$ la fonction est décroissante.
$f'(6) = 8$, donc pour un investissement de 6 millions d'euros, la production sera de 8 tonnes suivant ce modèle.

Activité 3 Trouver une parabole passant par trois points (p. 261)

Objectif : Vérifier que par trois points non alignés, il ne passe qu'une seule parabole.

Partie A Recherche d'un modèle
a. A, B et C ne sont pas alignés ; donc ce n'est pas une fonction affine.
b. 2e degré possible.
c. Fonction homographique possible.

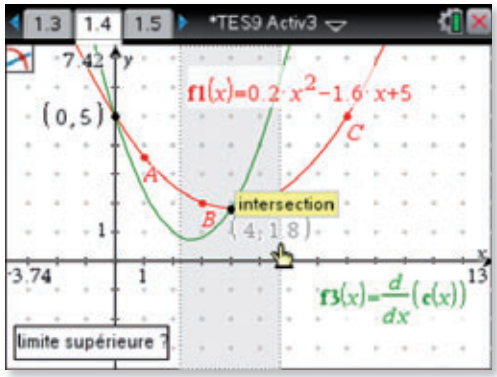
Partie B À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
a. et **b.** On approche au mieux en déformant la parabole.



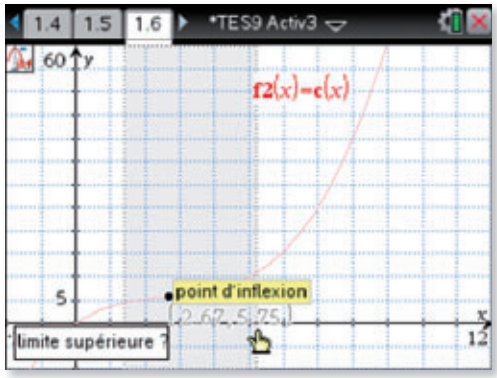
Partie C Étude du modèle
a. $f(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 5$ sur $[0\,,10]$.
b. $f'(x) = 0{,}4x - 1{,}6$; nul en $x = 4$.
Pour 400 décorations, le coût moyen est minimum et vaut 1,8 €.
Le coût total est alors $400 \times 1{,}8 = 720$ €.

Partie D Pour aller plus loin
a. Comme le coût moyen est $f(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 5$, le coût total est $C(x) = f(x) \times x = 0{,}2x^3 - 1{,}6x^2 + 5x$, en centaine d'euros ;
b. Dérivée : $C'(x) = 0{,}6x^2 - 3{,}2x + 5$ sur $[0\,;10]$.
$\Delta = -1{,}76$, négatif, donc $C'(x)$ est toujours strictement positif. Le coût total est donc croissant.
c. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total $C_m(x) = C'(x) = 0{,}6x^2 - 3{,}2x + 5$ sur $[0\,;10]$.

$C_m'(x) = 1{,}2x - 3{,}2$; nul en $x = \frac{3{,}2}{1{,}2} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.
Le coût marginal est décroissant sur $[0\ ;\ 2{,}56]$, puis croissant sur $[2{,}67\ ;\ 10]$.
d. $C_m(x) = C_M(x) \Leftrightarrow 0{,}6x^2 - 3{,}2x + 5 = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 5$.
On obtient $x = 0$ ou $x = 4$. Ainsi, lorsque le coût moyen est minimum, il est égal au coût marginal.



e. Pour étudier la convexité du coût total, on étudie le signe de sa dérivée seconde, c'est-à-dire de la dérivée du coût marginal.
D'après **c.** la dérivée seconde $C''(x) = C_m'(x)$ s'annule en $\frac{8}{3}$ en changeant de signe. Sur $[0\ ;\ 2{,}66]$ le coût total est concave et sur $[2{,}66\ ;\ 10]$ le coût total est convexe.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 4 Calculer à l'aide de tableaux de nombres (p. 262)

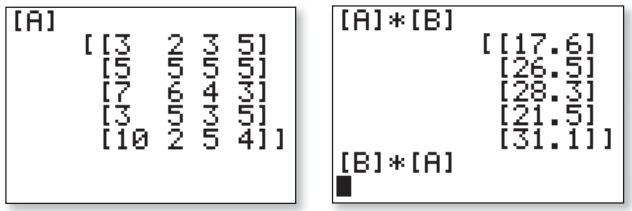
Objectif : Présenter le produit de matrices.

1 Prix du bouquet d'Elora :
$3\times 2+2\times 1{,}3+7\times 0{,}5+5\times 1{,}5=19{,}6$.
Calcul $qR\times pR+qC\times pC+qF\times pF+qL\times pL$.

2 a. Mettre en valeur les quantités en rouge et les prix en bleu dans le calcul littéral précédent en **1**.

b. Pour la commande totale, on écrit une 6e ligne, somme des lignes précédentes : 28 roses, 20 callas, 20 freesias et 22 lisianthus.
D'où le montant de la commande :
$28\times 2+20\times 1{,}3+20\times 0{,}5+22\times 1{,}5=125$.

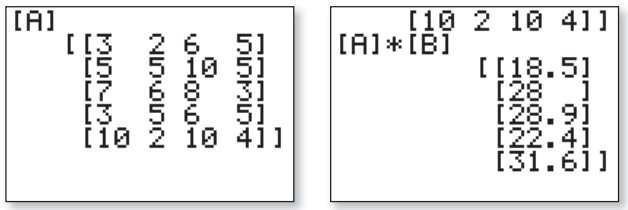
3 a. Le produit matriciel :



A × B donne les prix de chaque bouquet.

b. On ne peut pas calculer B × A : la calculatrice indique une erreur de dimension.

c. 1,8 € par rose et doublement du nombre de freesias :



Activité 5 Calculer des produits de tableaux carrés (p. 262)

Objectifs : manipuler les calculs matriciels et voir les résultats particuliers que l'on peut obtenir. À faire faire sans calculatrice et vérifier à la calculatrice ensuite.

1 a. $A\times I=A$. **b.** $I\times A=A$.
c. $M\times I=I\times M=M$ quelle que soit la matrice M carrée d'ordre 3.

2 a. b. $A\times B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=B\times A$

c. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **d.** $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

e. $M\times M^{-1}=I$ quelle que soit la matrice carrée M telle que M^{-1} existe.

3 a. $A\times C=\begin{pmatrix}3&11&5\\0&-2&-2\\1&3&1\end{pmatrix}$ **b.** $C\times A=\begin{pmatrix}0&4&6\\0&-2&-2\\0&2&4\end{pmatrix}$

c. $C\times D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=D\times C$

Activité 6 Résoudre un système 2 × 2 (p. 263)

1 a. En 1990, $x=2$ et la consommation de pain donne $f(2)=62$, d'où l'équation $2a+b=62\Leftrightarrow b=62-2a$.
En 2010, $x=4$ et $f(4)=52$.

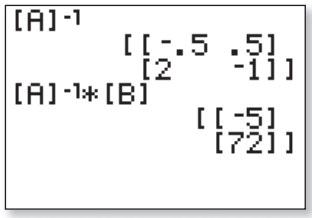
b. À la main, on calcule la différence :
$4a+b-(2a+b)=52-62\Leftrightarrow 2a=-10\Leftrightarrow a=-5$.
Et $b=62-2a=62+10=72$.
D'où $f(x)=-5x+72$.

2 a. $3X=2\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times(3\times X)=\frac{1}{3}\times 2\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\times 3\right)\times X=\frac{1}{3}\times 2$
$\Leftrightarrow 1\times X=\frac{1}{3}\times 2\Leftrightarrow X=\frac{2}{3}$.

b. $AX=B\Leftrightarrow A^{-1}\times(A\times X)=A^{-1}\times B$
$\Leftrightarrow(A^{-1}\times A)\times X=A^{-1}\times B\Leftrightarrow 1\times X=A^{-1}\times B$
$\Leftrightarrow \mathbf{X=A^{-1}\times B}$.

3 a. $A\times X=\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b\\4a+b\end{pmatrix}$.

b. À la calculatrice :



On retrouve la solution du système résolu à la main.

c. En 2015, $x=4{,}5$; d'où la prévision de la consommation de pain :
$f(4{,}5)=-5\times 4{,}5+72=49{,}5$ kg par habitant et par an.

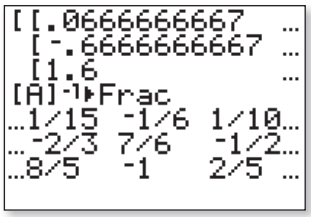
4 Pour l'eau minérale : $f(x)=30x+30$.
Pour la bière : $f(x)=-\frac{17}{3}x+\frac{149}{3}\approx -5{,}67x+49{,}67$.
Pour les Yaourts : $f(x)=2x+14$.
Pour le fromage : $f(x)=1{,}3x+13{,}8$.

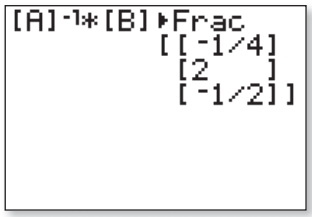
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 7 Résoudre un système 3 × 3 (p. 263)

1 a. $A \times X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c \\ 16a+4b+c \\ 36a+6b+c \end{bmatrix}$

b. À la calculatrice, on prouve que A^{-1} existe.





D'où $a = -\frac{1}{4} = -0{,}25$; $b = 2$ et $c = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.
On vérifie que $a+b+c = 1{,}25$; $16a+4b+c = 3{,}5$ et $36a+6b+c = 2{,}5$.

2 On recherche une fonction f telle que :
$f(x) = ax^2 + bx + c$, sachant que :
$f(1) = 1{,}250$; $f(4) = 3{,}5$ et $f(6) = 2{,}5$.
Le problème se traduit par le système vu en **1**.
D'où $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x - 0{,}5$ sur $[0 ; +\infty[$.

b. $f'(x) = -0{,}5x + 2$, nulle en 4.
La fonction f est croissante sur $[0 ; 4]$ et décroissante sur $[4 ; +\infty[$.
Le bénéfice est maximal pour 4 tonnes vendus.

Mise en situation

I Recherche de fonctions dans des cas simples (p. 268)

1 Fonction affine ou non ?

• $\mathscr{C}_1$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = 4$. $\mathscr{C}_1$ représente une fonction f affine constante.
Donc $\boldsymbol{f(x) = 4}$.

• $\mathscr{C}_2$ est une droite passant par $A(5 ; 0)$ et $B(4 ; 4)$.
Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{4-5} = \frac{4}{-1} = -4 \text{ et } f(5) = 0,$$

donc $\boldsymbol{f(x) = -4x + 20}$.

• $\mathscr{C}_3$ est une droite passant par l'origine et le point $B(4 ; 4)$.
f est la fonction linéaire identité : $\boldsymbol{f(x) = x}$.

• **$\mathscr{C}_4$ n'est pas une droite.** En effet, elle passe par l'origine $O(0 ; 0)$, ainsi que par le point $D(9 ; 4)$. Les coefficients directeurs des droites (OC) et (OD) ne sont pas égaux car $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{9}$. Les trois points O, C et D ne sont pas alignés.

• $\mathscr{C}_5$ est une droite qui passe par les points $E(0 ; 4)$ et $A(5 ; 0)$.
Le coefficient directeur de la droite (AE) est :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{5-0} = \frac{-4}{5} \text{ et } f(0) = 4.$$

Donc $\boldsymbol{f(x) = -\frac{4}{5}x + 4}$.

2 Fonction affine ou du second degré ?

Fig. 1	$\mathscr{C}_1$ ②	$\mathscr{C}_2$ ①	$\mathscr{C}_3$ ③
Fig. 2	$\mathscr{C}_4$ ①	$\mathscr{C}_5$ ③	$\mathscr{C}_6$ ②
Fig. 3	$\mathscr{C}_7$ ③	$\mathscr{C}_8$ ①	$\mathscr{C}_9$ ③
Fig. 4	$\mathscr{C}_{10}$ ①	$\mathscr{C}_{11}$ ②	$\mathscr{C}_{12}$ ③

3 Parabole connaissant le sommet

a. Un point autre que S en utilisant la forme canonique. Sinon 3 points.

b. On a $f(x) = a(x-2)^2 - 1$ et $f(1) = 2$.
D'où $a = 3$ et $f(x) = 3(x-2)^2 - 1 = 3x^2 - 12x + 11$.

c. $f(0) = 11$.

4 Polynômes du second degré et sommets

$f_1(x) = -(x-1)^2 + 4$ $\quad$ $f_2(x) = (x+3)^2 - 2$
$f_3(x) = -0{,}5(x-2)^2 + 1$ $\quad$ $f_4(x) = 2x^2 - 3$.

5 Coût unitaire minimal

$C_M(x) = a(x-6)^2 + 3$ et $C_M(11) = 7{,}25$
D'où $C_M(x) = 0{,}17(x-6)^2 + 3$.

6 Parabole coupant l'axe des abscisses

a. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points A et B d'abscisses respectives 2 et 5. En ces points, f s'annule. Or l'équation $f(x) = 0$ est du second degré et a au plus deux solutions. Les abscisses de ces points sont donc les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Ainsi : $\boldsymbol{f(x) = a(x-2)(x-5)}$.

b. Il faut un point supplémentaire pour trouver l'expression $f(x)$ et déterminer a.

c. La parabole passe par le point $C(1 ; -2)$.
Donc $f(1) = -2$, soit $a \times (1-2)(1-5) = -2$
$\Leftrightarrow a \times 4 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.
On obtient $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-5)}$,
ou encore, en développant l'expression :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5.$$

7 Bénéfice et points morts

a. $B(x) = a(x-4)(x-9)$ et $B(5) = 8$.
D'où $B(x) = -2(x-4)(x-9) = -2x^2 + 26x - 72$.

b. $B(6{,}3) = 12{,}42$, soit 12 420 €.

c. $B'(x) = -4x^2 + 26$ et $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6{,}5$.
Le bénéfice maximum est atteint pour 650 objets.

8 Parabole passant par l'origine

1 Forme $y = ax^2 + bx$, a et b nombres réels.

2 $A \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 4 = a \times 1^2 + b \times 1 \Leftrightarrow a + b = 4$.
$B \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 6 = a \times 2^2 + b \times 2 \Leftrightarrow 4a + 2b = 6$.
D'où $a = -2$ et $b = 10$; ainsi $y = -2x^2 + 10x$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

9 Recette du second degré

$O \in \mathscr{C} \Leftrightarrow R(x) = ax^2 + bx$.
$R(1) = 3\,800$ et $R(2) = 7\,200$.
D'où $R(x) = 200x^2 + 4\,000x$.

10 Parabole et tangente

a. $A(0\,;1) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow c = 1$.
$B(1\,;0) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow a + b + c = 0$.
b. On lit le coefficient directeur de la tangente T : $m = -3$.
D'où $y = -3x + 1$.
c. Le coefficient directeur de T est $f'(0)$.
Or $f'(x) = 2ax + b$. D'où $m = -3 = b$.
d. Ainsi : $c = 1$; $b = -3$ et $a = -b - c = 2$.
D'où $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

11 Second degré et dérivée

$f(x) = ax^2 + bx + c$. On cherche a, b et c.
$f(0) = 5 \Leftrightarrow c = 5$.
$f(1) = 35 \Leftrightarrow 35 = a + b + 5$.
$f'(1) = 20 \Leftrightarrow 2a + b = 20$.

On résout le système : $\begin{cases} c = 5 \\ a + b = 30 \\ 2a + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a = -10 \\ b = 40 \end{cases}$.

D'où $\boldsymbol{f(x) = -10x^2 + 40x + 5}$.

12 Coût total et coût marginal

1 a. $C(q) = aq^2 + bq + c$.
Coûts fixes de 8,5 k€ $\Rightarrow C(0) = 8,5 \Leftrightarrow c = 8,5$.
$C(1) = 9 \Leftrightarrow a + b + c = 9$.
$C_m(q) = C'(q) = 2aq + b$ et $C'(1) = 0,6 \Leftrightarrow 2a + b = 0,6$.

On résout $\begin{cases} c = 8,5 \\ a + b + c = 9 \\ 2a + b = 0,6 \end{cases}$.

b. $C(q) = 0,1\,q^2 + 0,4\,q + 8,5$.
2 a. $C(10) = 22,5$, soit 22 500 €.
b. $C'(10) = 2,4$, soit 2,4 € par kg.
c. $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = 0,1q + 0,4 + \dfrac{8,5}{q}$.

$C_M(10) = \dfrac{22,5}{10} = 2,25$ soit 2,25 € par kg.

13 Modélisation d'une population

a. On veut $f(x) = a + \dfrac{k}{x+3}$, avec $f(0) = 3$ et $f(2) = 7$.

Or $f(0) = 3 \Leftrightarrow a + \dfrac{k}{3} = 3 \Leftrightarrow 3a + k = 9$.

$F(2) = 7 \Leftrightarrow a + \dfrac{k}{2+3} = 7 \Leftrightarrow 5a + k = 35$.

On résout : $k = 9 - 3a$; d'où $5a - 3a + 9 = 35 \Leftrightarrow a = 13$.
Et $k = 9 - 3 \times 13 = -30$.

Ainsi $f(x) = 13 - \dfrac{30}{x+3}$.

On vérifie : $f(7) = 13 - \dfrac{30}{7+3} = 13 - 3 = 10$.

b. En 2018, on a $x = \dfrac{2018 - 1975}{5} = 8,6$

$f(8,6) = \dfrac{302}{29} \approx 10,4$.

Marjorie prévoit 10,4 dizaines de milliers d'habitants, soit 104 milliers.
c. La population semble plafonnée à 130 mille.
Pour le démontrer, on montre que $\forall x \in [0\,;+\infty[$, on a :
$f(x) < 13 \Leftrightarrow f(x) - 13 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-30}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{30}{x+3} > 0$.
Ce qui est toujours vrai.

II Matrices et calculs (p. 270)

14 Tableau à deux entrées

a.

	S1	S2	S3
M1	18	8,5	5
M2	16,5	9	4,2

b. Dépense de Sophie : $1 \times 18 + 2 \times 8,5 + 1 \times 5 = 40$.
c. Dépense de Charlotte :
chez M1 : $18x + 8,5y + 5z$ chez M2 : $16,5x + 9y + 4,2z$.

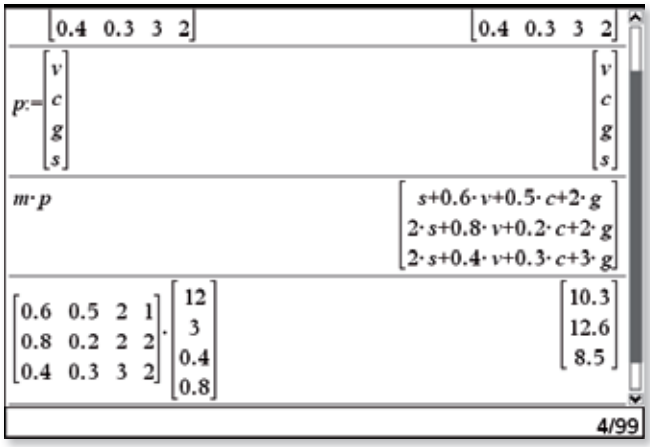
15 Achat pour un sauté de veau

a. Achat de Xavier :
$12 \times 0,6 + 3 \times 0,5 + 2 \times 0,4 + 1 \times 0,8 = 10,3$.
Achat d'Elisabeth :
$12 \times 0,8 + 3 \times 0,2 + 2 \times 0,4 + 2 \times 0,8 = 12,6$.
Achat de Nathalie :
$12 \times 0,4 + 3 \times 0,3 + 3 \times 0,4 + 2 \times 0,8 = 8,5$.
b. Matrice des ingrédients de dimension 3×4 :

$$I = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 & 2 & 1 \\ 0,8 & 0,2 & 2 & 2 \\ 0,4 & 0,3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Matrice colonne des prix $P = \begin{bmatrix} v \\ c \\ g \\ s \end{bmatrix}$

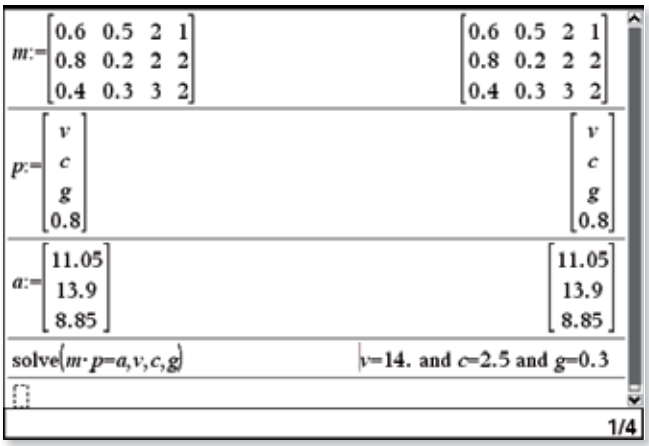
Montant des achats : M × P (Calculs sur TINspire)



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

d. $\begin{cases} 0{,}6v + 0{,}5c + 2g + 0{,}8 = 11{,}05 \\ 0{,}8v + 0{,}2c + 2g + 1{,}6 = 13{,}90 \\ 0{,}4v + 0{,}3c + 3g + 1{,}6 = 8{,}85 \end{cases}$.

Si on résout, on obtient : $v = 14$, $c = 2{,}5$ et $g = 0{,}3$.



16 Signification d'un produit de matrices

a. Le produit A × B est sans signification, on ne multiplie pas les quantités de jus d'orange par le prix du jus de pomme.

b. A × B donne les coûts de la commande chez SLOW (150 €) et chez FAST (1 415 €)

17 Écriture en matrice

1 Tableau résumant l'énoncé :

	Taie	Drap-house	Housse de couette
Enfants	1	1	1
Toucher soyeux	2	1	1
Prix minis	2	2	1

Matrice des quantités : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2 x parures « enfants », y parures « toucher soyeux », z parures « prix minis » vendues. Alors :

- nombre de taies vendues : $x + 2y + 2z$;
- nombre de draps-housses vendus : $x + y + 2z$;
- nombre de housses de couette vendues : $x + y + z$.

Matrice colonne des quantités vendues :

$$\begin{bmatrix} x + 2y + 2z \\ x + y + 2z \\ x + y + z \end{bmatrix}.$$

a. Matrice colonne des prix unitaires $\begin{bmatrix} 70 \\ 90 \\ 42 \end{bmatrix}$.

b. Dépense totale pour les 17 parures :

$3 \times 70 + 4 \times 90 + 10 \times 42 = 910$.

C'est le produit de la matrice ligne [3 4 10] par la matrice colonne des quantités.

c. Recette totale de la journée :

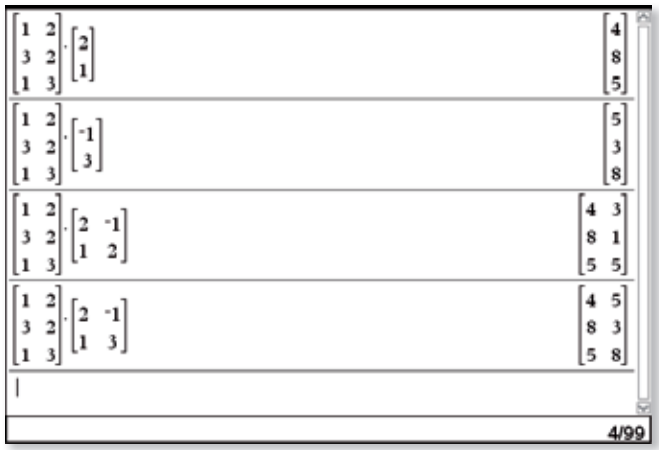
$70x + 90y + 42z = 4\,869$,

obtenue par le produit :

$$[x \;\; y \;\; z] \times \begin{bmatrix} 70 \\ 90 \\ 42 \end{bmatrix} = 4\,869 .$$

18 Produits de matrices

1 $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

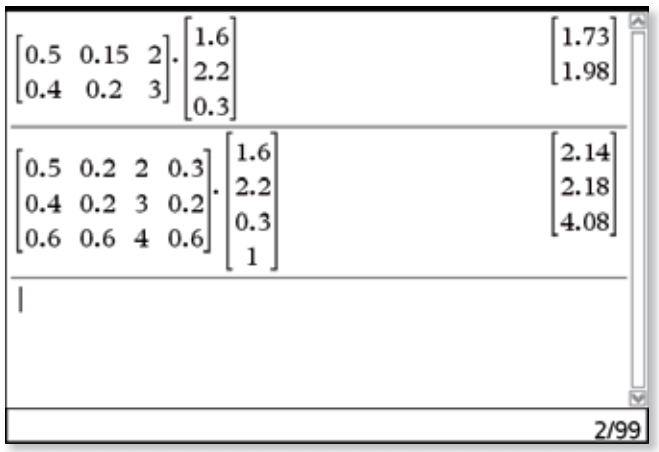


2 $A \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

3 $A \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ et $A \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$.

19 Coûts de recettes

1 $A \times B = \begin{bmatrix} 1{,}73 \\ 1{,}98 \end{bmatrix}$



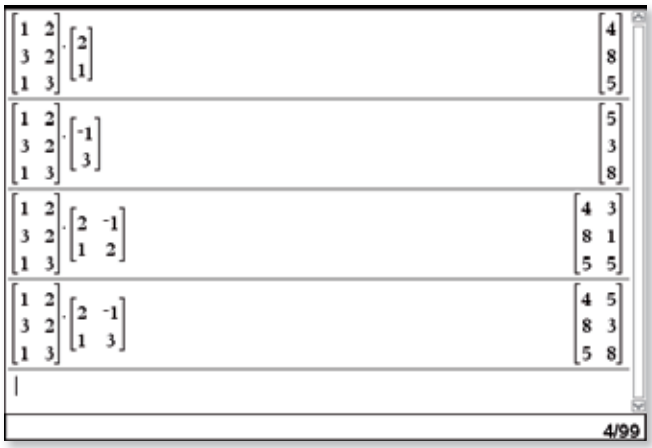
La recette R1 coûte 1,73 € . La recette R2 coûte 1,98 € .

2 $A \times B = \begin{bmatrix} 2{,}14 \\ 2{,}18 \\ 4{,}08 \end{bmatrix}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

20 Matrices à la calculatrice

a. $A \times A$ n'est pas la matrice des carrés des éléments de A.
b. Permet de vérifier que :
• $A \times B$ donne une matrice 3×1 .
• $B \times A$ n'existe pas.
Calculs sur TINspire.



21 Matrices identité et diagonale

a. $A \times I = A$ et $I \times A = A$.
b. • Dans $D \times A$:
1re ligne = $a \times$ 1re ligne de A
2e ligne = $b \times$ 2e ligne de A
3e ligne = $c \times$ 3e ligne de A .
• Si D est une matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Dans $D \times A$:
1re colonne = $a \times$ 1re colonne de A
2e colonne = $b \times$ 2e colonne de A
3e colonne = $c \times$ 3e colonne de A .

c. $D^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$.

22 Matrices triangulaires

1 **a.** $E \times F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ et $F \times E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

b. Ces matrices sont aussi des matrices triangulaires.

2 $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

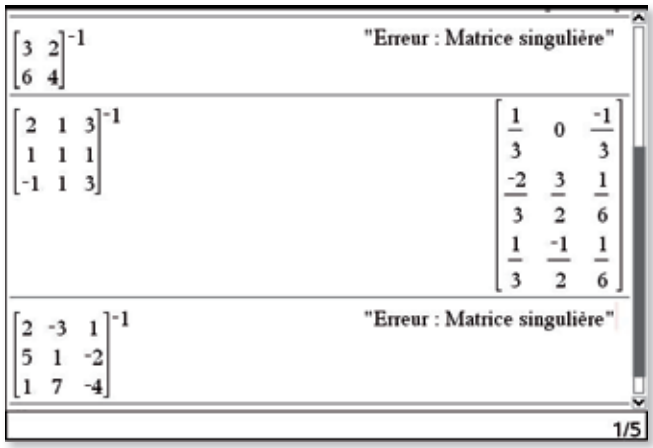
Dans E^4, $4 = 3 + 1$: somme de la 2e colonne de E^3 ;
$10 = 6 + 3 + 1$: somme de la 3e colonne de E^3 ;
$20 = 10 + 6 + 3 + 1$: somme de la 4e colonne de E^3 .

Dans E^{n+1} , en 1re ligne, le 2e élément est la somme de la 2e colonne de E^n ;
le 3e élément est la somme de la 3e colonne de E^n ;
le 4e élément est la somme de la 4e colonne de E^n .

23 Matrice inverse

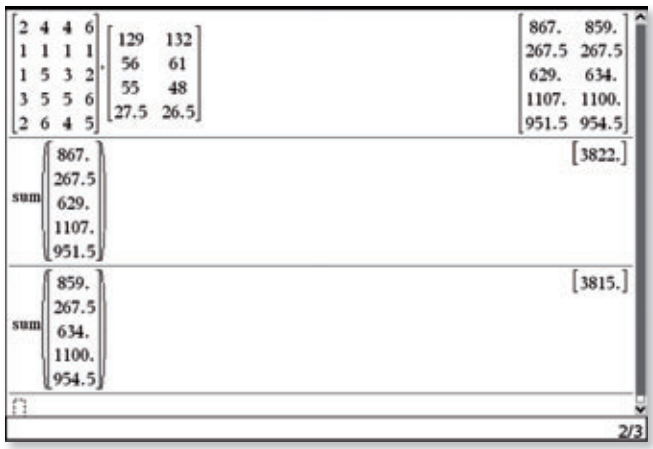
a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ C et E ne sont pas inversibles.



24 Prix et quantités

a. Matrice des quantités : le 1er tableau.
Matrice des prix : le 2e tableau transposé.
$C = A \times B$; l'élément c_{i1} est la dépense pour la salle i dans le magasin OFFI et c_{i2} dans le magasin BURO.
b. Montant des achats chez OFFI : somme de la 1re colonne de la matrice C = 3 822 € .
Et chez BURO = 3 815 €, le plus avantageux.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

25 Consommations de trois desserts

Attention pour la seconde matrice, les indications sont données pour 100 g. Il a donc fallu diviser par 100 chaque terme du second tableau, puis le transposer.

$$\begin{matrix} \\ E \\ P \\ G \\ L \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} S & L & F \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 89 & 87 & 93 \\ 3{,}9 & 3{,}6 & 0{,}5 \\ 12{,}6 & 4{,}2 & 22 \\ 2{,}6 & 6 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{matrix} Lu & Ma & Ni \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2{,}5 \\ 3 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 3 & 2{,}5 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S \\ L \\ F \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \begin{matrix} Lu & Ma & Ni \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 671{,}5 & 676{,}5 & 672{,}5 \\ 19{,}85 & 18{,}6 & 20 \\ 92{,}8 & 110{,}1 & 97 \\ 23{,}7 & 17{,}4 & 22 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} E \\ P \\ G \\ L \end{matrix}$$

C'est **Maud qui a consommé le plus de glucides.**

Lors d'un produit de matrices, penser que le produit doit avoir une signification lorsque l'on multiplie une ligne par une colonne.

Le résultat 671,5 kcal correspond bien à la valeur énergétique totale des trois desserts consommés par Lucile (soja + lacté + fruit) : $89 \times \frac{200}{100} + 87 \times \frac{300}{100} + 93 \times \frac{250}{100}$.

III Recherche de fonctions (p. 272)

26 Système à la calculatrice

1 La solution $x = 3$ et $y = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

2 $a = -145$ et $b = 174{,}5$.

3 $x = 151$; $y = -70$ et $z = 44$.

4 $a = 0{,}2$; $b = 3$ et $c = 2$.

27 Recherche d'une fonction de degré 2

a. Coefficients directeurs des droites :

de (AB) : $m_1 = \frac{3-2}{3-0} = \frac{1}{3}$.

de (BC) : $m_2 = \frac{6-3}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$.

Les coefficients directeurs sont différents, donc les points ne sont pas alignés.

b. $A(0\,;2) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow c = 2$.

$B(3\,;3) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 3$.

$C(6\,;6) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 36a + 6b + c = 6$.

c. Le système se traduit par l'équation matricielle

$$A \times X = B \text{ où } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{bmatrix} ; X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Édition 1 : lire B au lieu de X pour la matrice colonne donnée.

d. $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.

On obtient $a = \ldots$; $b = 0$ et $c = 2$.

D'où la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2 + 2.$$

28 Fonction du second degré

On donne les points $A(1\,;76)$, $B(2\,;68)$ et $C(5\,;140)$.

Les coefficients directeurs des droites (AB) et (BC) ne sont pas égaux, donc ces trois points ne sont pas alignés :

- pour la droite (AB) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{68-76}{2-1} = \frac{-8}{2} = -4$;
- pour la droite (BC) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{140-68}{5-2} = \frac{72}{3} = 24$.

Donc il existe une parabole $\mathscr{C}$ passant par ces trois points.

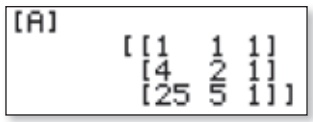
On traduit l'appartenance des points à la courbe $\mathscr{C}$:

- $A(1\,;76) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 76$.
- $B(2\,;68) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + c = 68$.
- $C(5\,;140) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a \times 5^2 + b \times 5 + c = 140$.

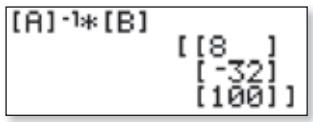
On résout, par calcul matriciel, le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a + b + c = 76 \\ 4a + 2b + c = 68 \\ 25a + 5b + c = 140 \end{cases}.$$

On pose A la matrice des coefficients et B la matrice des seconds membres. La matrice colonne X des inconnues a, b et c est solution de l'équation $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.



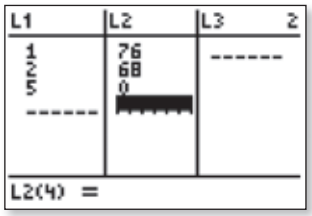




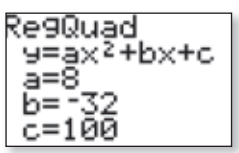
D'où le polynôme $f(x) = 8x^2 - 32x + 100$.

On peut aussi utiliser la fonction **RegQuad** de la calculatrice après avoir entré les coordonnées des points dans les listes.

L1 pour les abscisses et **L2** pour les ordonnées.







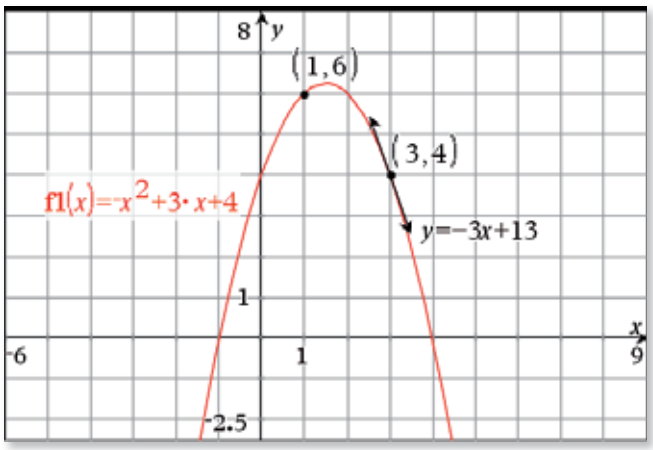
© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

29 Fonction polynôme du 2d degré et dérivée

On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$.
$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$.
$A(3 ; 2) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 2$.
$B(4 ; -2) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow 16a + 4b + c = -2$.
On résout le système et on obtient :
$a = 4$; $b = 24$ et $c = -34$; d'où $f(x) = 4x^2 + 24x - 34$.

30 Second degré et tangente

On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$.
$B(1 ; 6) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow a + b + c = 6$.
$A(3 ; 4) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 4$.
La tangente en A a pour coefficient directeur -3.
$f'(3) = -3 \Leftrightarrow 6a + b = -3$.
On résout le système et on obtient :
$A = -1$; $b = 3$ et $c = 4$; d'où $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.



31 Interpolations

Tableau des données

Année	1980	2004	2010
x	0	24	30
y	1,18	?	2,32

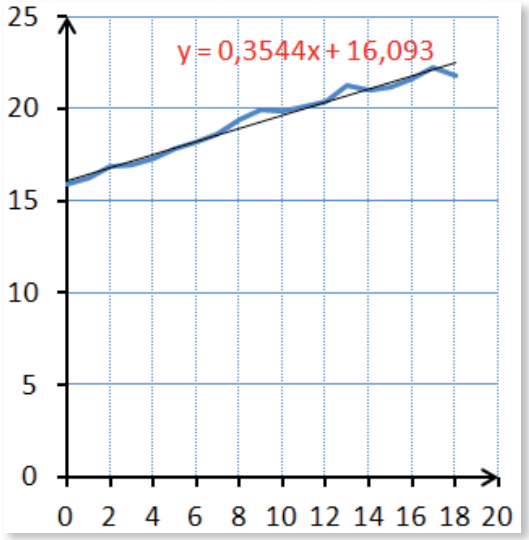
1 **a.** On veut $f(x) = mx + p$.
$(0 ; 1,18) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow p = 1,18$.
$(30 ; 2,32) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow 30m + p + 2,32$.
D'où $p = 1,18$ et $m = 0,038$. Ainsi $f(x) = 0,038x + 1,18$.
b. En gardant la date 1980, on aurait :
$f_2(x) = m(x - 1980) + p = 0,038x - 0,038 \times 1980 + 1,18$
$= 0,038x - 74,06$.
Le coefficient $b = -74,06$ correspondrait au nombre d'étudiants l'année 0, c'est-à-dire à la naissance du Christ…
2 **a.** En 2004, $x = 24$. D'où $f(24) = 2,092$.
Par interpolation linéaire, le nombre d'étudiants serait de 2,092 millions en 2004.
b. En réalité, 2,27 millions nettement plus important.
L'ajustement par une fonction affine n'est pas bon.
3 On résout le système :

$$\begin{cases} c = 118 \\ 24^2\, a + 24b + c = 227 \\ 30^2\, a + 30b + c = 232 \end{cases}$$

$a = \dfrac{-89}{720} \approx -0,12$; $b = \dfrac{901}{120} \approx 7,51$ et $c = 118$.
D'où $g(x) = -0,12x^2 + 7,51x + 118$
Le nombre d'étudiants est alors en dizaines de milliers.
4 En 2000, $x = 20$; $f(2) = 1,94$ et $g(20) = 220,2$.
Par interpolation du 2è degré, on obtient 2,202 millions contre 1,94 millions par interpolation linéaire.
Par rapport à la valeur en 2000 de 2,16, on a :
$1,96 < 2,16 < 2,202$ (on obtient $g(20) \approx 218,7$ en prenant les fractions exactes).
L'interpolation du 2e degré est meilleure.

32 Recherche d'un modèle affine et suite

1 On obtient $f(x) = 0,34x + 16,11$.
2



On obtient une fonction très proche de la fonction f.
3 **a.** On a $u_n = 0,34n + 16,11$.
Suite arithmétique de raison 0,34.
b. $u_{24} = f(24) = 0,34 \times 24 + 16,11 \approx 24,27$.
En 1990 + 24 = 2014 , on peut prévoir une consommation de 24,3 kg de yaourts par an, par habitant, en France.
c. De 1990 à 1914, on nomme :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{24} = \frac{u_0 + u_{24}}{2} \times 25$$
$$= \frac{16,11 + 24,27}{2} \times 25 = 504,75.$$

Stéphanie a consommé 505 kg de yaourts en 25 ans.

33 Fonction du premier ou du second degré

Tableau de données

Prix en € par kg	8	9,5	10,5
Consommation en tonne	27,2	21,2	? ou 19,2

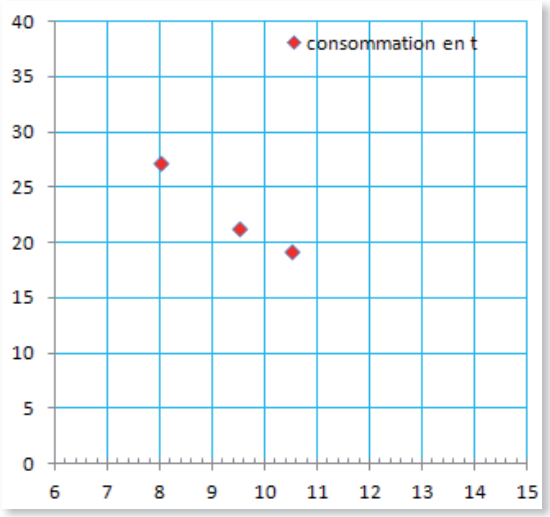
1 **a.** On résout le système :

$$\begin{cases} 8m + p = 27,2 \\ 9,5m + p = 21,2 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} m = -4 \\ p = 59,2 \end{cases}.$$

b. Fonction affine : $f(x) = -4x + 59,2$.
Pour $x = 10,5$, on obtient $f(10,5) = 17,2$.
Avec ce modèle, la quantité demandée pour un prix de 10,5 € par kg serait de 17,2 tonnes.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

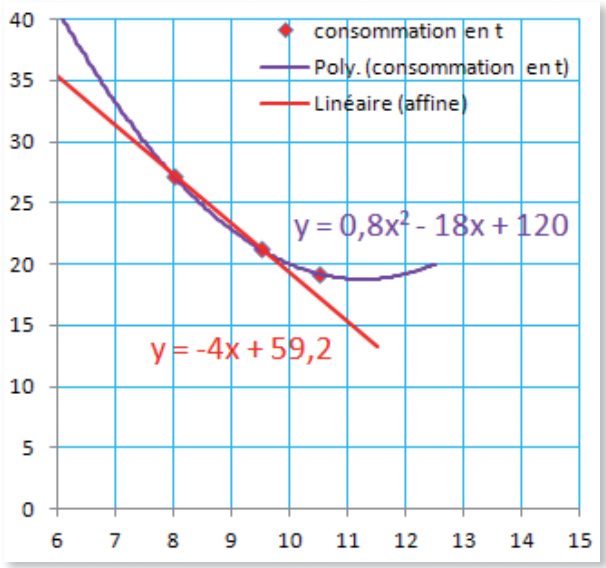
2 a. Quantité réelle : 19,2 , au-dessus de la valeur affine ; donc le modèle doit être une fonction convexe



b. On modélise par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
D'après le nuage ci-dessus, le coefficient a est positif.
c. On résout le système

$$\begin{cases} 8^2a + 8b + c = 27{,}2 \\ 9{,}5^2a + 9{,}5b + c = 21{,}2 \\ 10{,}5^2a + 10{,}5b + c = 19{,}2 \end{cases}.$$

Ainsi $g(x) = 0{,}8x^2 - 18x + 120$.



d. $g'(x) = 1{,}6x - 18$, nul en $x = 11{,}25$.
Sur $[0\,;12]$ on obtient le tableau des variations :

x	0		11,25		12
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$		↘	0	↗	

Comme une fonction de demande est croissante, ce modèle n'est plus valable pour un prix supérieur à 11,25 € par kg .

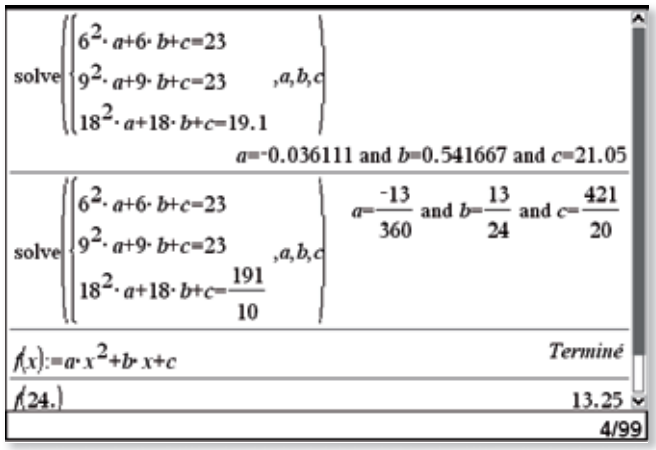
34 Étude d'une consommation

a. b. On obtient $f(x) = \dfrac{-13}{160}x^2 + \dfrac{13}{24}x + \dfrac{121}{20}$.
ou encore $f(x) \approx -0{,}036x^2 + 0{,}542x + 21{,}05$.

On peut noter que la parabole a son sommet en :

$$x_S = \frac{6+9}{3} = 7{,}5 .$$

Donc $f(x) = a(x - 7{,}5)^2 + b$.

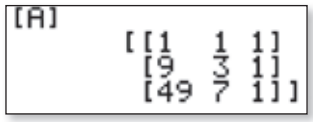


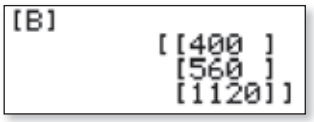
c. En 2014, $x = 2012 - 1990 = 24$.
D'où $f(24) = \dfrac{53}{4} = 13{,}25$.
La consommation serait de 13,25 kg par an et par habitant.

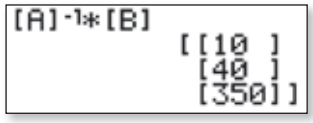
35 Modèle de degré 2 pour un coût total

1 a. Le coefficient a semble positif car les points ne sont pas alignés et une courbe passant par ces trois points sera convexe.
b. La courbe représentative passe par les points :
$A(1\,;400)$, $B(3\,;560)$ et $C(7\,;1\,120)$.
On traduit l'appartenance des points à la courbe :
• $A(1\,;400) \in \mathscr{C} \iff a \times 1^2 + b \times 1 + c = 400$.
• $B(3\,;560) \in \mathscr{C} \iff a \times 3^2 + b \times 3 + c = 560$.
• $C(7\,;1\,120) \in \mathscr{C} \iff a \times 7^2 + b \times 7 + c = 1\,120$.
On résout le système de trois équations à trois inconnues a , b et c :

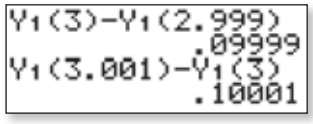
$$\begin{cases} a + b + c = 400 \\ 9a + 3b + c = 560 \\ 49a + 7b + c = 1120 \end{cases}.$$







D'où $f(x) = 10x^2 + 40x + 350$.
$a = 10$ et $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et la fonction f change de variation en l'abscisse $\dfrac{-b}{2a} = -2$.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;8]$.
2 On a produit 3 tonnes donc 3 000 kg.
En considérant que le coût marginal est le coût du dernier kilogramme produit, alors :
$C_m(3) = C(3) - C(2{,}999) = 0{,}09999$, en millier d'euros, soit 99,99 euros par kg.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

En considérant que le coût marginal est le coût d'un kilogramme supplémentaire à produire :

$$C_m(3) = C(3{,}001) - C(3) = 0{,}10001\ ,$$

en millier d'euros, soit 100,01 euros par kg.

Or $C'(x) = 20x + 40$ et $C'(3) = 100$, en millier d'euros par tonne, donc 100 euros par kg. Voir note page 54

En remplaçant le coût marginal par la dérivée du coût total, l'erreur est d'environ 1 centime d'euro par kg.

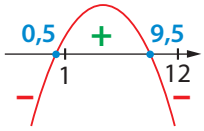
36 Modèle avec point d'inflexion

1 **a.** On a $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$, donc :
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$.
Dire que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 5$ signifie que $f''(5) = 0 \Leftrightarrow 30a + 2b = 0$.

b. On a $f(1) = -60 \Leftrightarrow a + b + c + d = -60$.
$f(4) = 99 \Leftrightarrow 4^3a + 4^2b + 4c + d = 99$.
$f(7) = 330 \Leftrightarrow 7^3a + 7^2b + 7c + d = 330$.

c. On obtient $f(x) = \frac{-4}{3}x^3 + 20x^2 - 19x - \frac{179}{3}$.

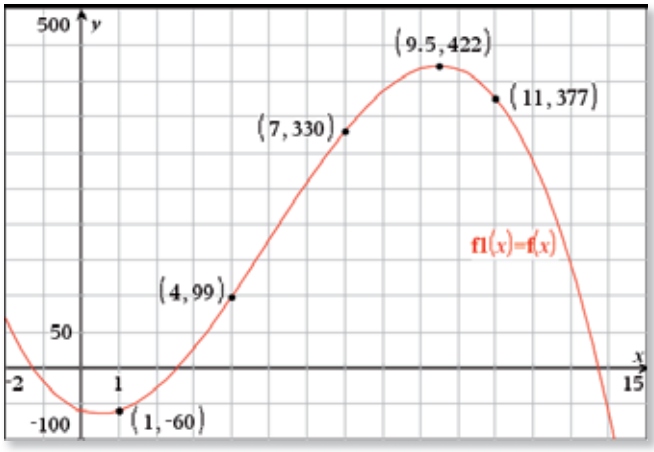
2 **a.** Sens de variation sur [1 ; 12] :
$f'(x) = -2x^2 + 40x - 19$,
polynôme du 2e degré,
nul en $x = 0{,}5$ ou $x = 9{,}5$.



Donc sur [1 ; 9,5] la dérivée est positive et la fonction est croissante et sur [9,5 ; 12] la dérivée est négative et la fonction f est décroissante.

b. Si le modèle se confirme, le taux d'évolution du prix va diminuer après septembre 2011.

c. En novembre le taux est de 3,8 %, soit 380 pour mille.
Or $f(11) = 377$, c'est-à-dire 3,77 % ≈ 3,8 %.
Ce modèle est convenable.



37 Choix du modèle

1 **a.** Le 2e nuage de la 1re colonne ③ présente un point d'inflexion en $x = 3$.
Le 3e nuage ⑤ semble trop « aplati » en (0 ; 1) pour être une parabole.

b. On regarder la convexité du nuage de points.

	1re colonne	2e colonne
1re	α positif *a* positif ①	α nul *a* négatif ②
2e	point d'inflexion ③	α positif *a* négatif ④
3e	trop aplati ⑤	α nul *a* positif ⑥

2 ① $f(x) = 2x^2 - 28x + 99$ ② $f(x) = -x^2 + 25$
④ $f(x) = -0{,}25x^2 + 3x + 1$ ⑥ $f(x) = x^2 + 2$.

38 Modélisation des dépenses

1 C2 = (C1 - $B$1) / 5

2 **a.** Le nuage de points est convexe, donc a est positif.

b. Points $A(0 ; 12{,}8)$, $B(2 ; 18{,}9)$ et $C(3 ; 33{,}9)$.
D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} c = 12{,}8 \\ 4a + 2b + c = 18{,}9 \\ 9a + 3b + c = 23,\ 9 \end{cases}.$$

c. On obtient $f(x) = 0{,}65x^2 + 1{,}75x + 12{,}8$.

4 **a.** En 2008, $x = 3{,}6$ et $f(3{,}6) = 27{,}524$, proche de 28.

b. En 2015, $x = 5$ et $f(5) = 37{,}8$.
Si le modèle est valable, on peut prévoir des dépenses d'énergie de 37,8 milliards d'euros en 2015 dans les logements ordinaires.

39 Modèle avec fonction homographique

Tableau des données

Année	2001	2004	2009
x	1	4	9
Part	31	55	63

On résout :

$$\begin{cases} a + \frac{k}{1+b} = 31 \Leftrightarrow a + ab + k = 31 + 31b \quad ① \\ a + \frac{k}{4+b} = 55 \Leftrightarrow 4a + ab + k = 220 + 55b \\ a + \frac{k}{9+b} = 63 \Leftrightarrow 9a + ab + k = 567 + 63b \end{cases}$$

D'où ① $\Rightarrow ab + k = 31 + 31b - a$.
On en déduit les 2 équations :

$$\begin{cases} 3a - 24b = 189 \Leftrightarrow a - 8b = 63 \\ 8a - 32b = 536 \Leftrightarrow a + 4b = 67 \end{cases}$$

D'où $b = 1$, $a = 67 + 4 = 71$ et $k = 31 + 31b - a - ab = -80$.
Ainsi $f(x) = 71 - \frac{80}{x+1}$ et à long terme, on prévoit 71 %.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie 2 Problèmes d'organisation

Objectif : Savoir résoudre les systèmes linéaires, en particulier liés à la recherche de courbes polynômiales, en utilisant les matrices.

Découvrir

Activité 1 Se déplacer dans une ville (p. 276)

Objectif : Découvrir les graphes et chaînes.

1 **a.** On peut ajouter le nombre d'axes partant de chaque sommet , puis diviser la somme par deux.

$\frac{4+3+3+4+3+3+5+3+3+3+3+2+3+3+3+3+3}{2} = 27$ axes.

b. Cinq axes partent du point ⑦ .

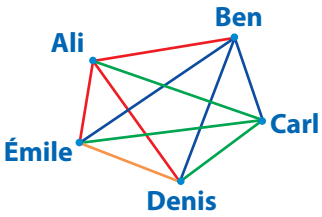
2 ④ - ⑮ - ⑯ - ⑧ - ⑥ - ⑨ - ① - ② - ③ - ⑬ - ⑭ - ④ .

3 Johann doit parcourir au moins deux axes ⑯ - ⑮ - ④ pour se rendre au parc en ④ ;
au moins 4 axes ⑮ - ⑮ - ⑮ - ⑮ - ③ pour se rendre au parc ③
et au moins 3 axes ⑮ - ⑧ - ⑥ - ⑤ pour se rendre au parc en ⑤ .

Activité 2 Dénombrer avec méthode (p. 276)

Objectif : Utiliser un graphe.

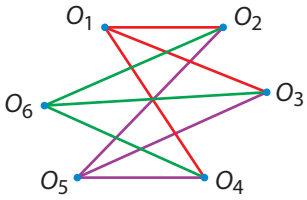
1 **a.** Les 4 amis échangent 6 poignées de mains.
b. Avec Emilie, les 5 amis échangent alors $4+3+2+1$, soit 10 poignées de mains.



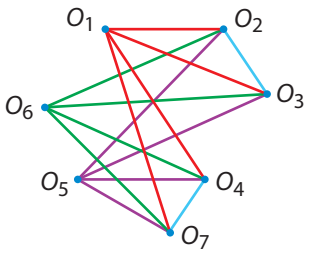
c. Avec Franck, les 6 amis échangeront $5+4+3+2+1$, soit 15 poignées de mains.
Avec Gad, ils échangeront $6+5+4+3+2+1$, soit 21 poignées de mains.
Avec n amis, ils échangent $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1$ poignés de mains.
Remarque : on peut faire le lien avec le coefficient binomial $\binom{n}{2}$ ou avec la somme des $n-1$ premiers entiers (voir exercice 25 p. 23).
On peut aussi, vu la figure de la méthode 2 , penser aux dimensions d'un rectangle de côtés n et $n-1$, ce rectangle contient 2 fois la somme des $n-1$ premiers termes.

Algorithme	Programme calculatrice
Variables N, S, A sont de type nombre **Initialisation** S prend la valeur 0, A prend la valeur 0 Saisir N **Traitement :** **Pour** I allant de 1 à N-1 *Affecter A+1 à A* *Affecter A+S à S* **Fin du Pour** **Sortie** Afficher « S= » Afficher *la valeur de S*	**TI 82 - 83 - 84** PROGRAM:POIGNEE :Prompt N :0→S :0→A :For(I,1,N-1) :A+1→A :A+S→S :End :Disp "S=",S **Casio 35 +** ======POIGNEE = "N":?→N 0→S 0→A For 1→I To N-1 A+1→A A+S→S Next "S":S

2 **a.** Il est possible de connecter chacun des six ordinateurs à trois autres. Voir-ci-contre.



b. En revanche, il est impossible de connecter chacun des sept ordinateurs à trois autres. Ajouter une connexion à partir d'un sommet $O7$ ajoute une connexion aussi à un autre ordinateur.
En revanche, sept ordinateurs peuvent être reliés chacun à quatre autres ordinateurs.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 3 Circuler sur un réseau (p. 277)

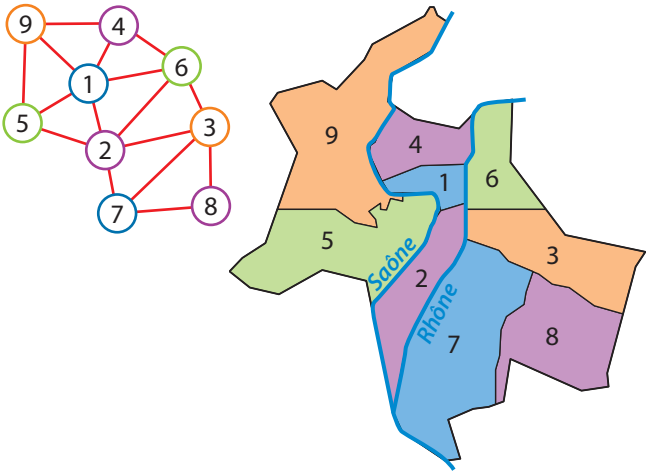
Objectif : Découvrir les chaînes eulériennes.

1 **a.** Oui, on peut dessiner de façon continue l'enveloppe en partant d'un des deux coins en bas de la figure. On arrive à l'autre coin.
b. Il en est de même pour : **Fig. 2** de A à C et **Fig. 4** d'un sommet à un autre quel qu'il soit. **Fig. 3** de A à G .
Pas possible pour la **figure 3**. Sinon, il faut repasser sur les traits rouges.
c. Oui, on peut revenir au point C, mais à condition de passer plusieurs fois sur le même trait rouge.
d. Si on arrive en E, en venant de A par exemple, on peut repartir une première fois en allant en B par exemple, puis il reste deux arêtes non utilisées F-E et E-C , l'une pour arriver et l'autre pour repartir. Donc on peut 2 fois arriver en E et en repartir. C'est le cas de tous les sommets de degré pair: on peut ne faire que passer !
Si un sommet (comme le sommet F de la **figure 3**) a 5 arêtes, on peut arriver et repartir 2 fois , on utilisant 4 arêtes différentes, et il reste une 5e arête qui permet de partir de F, ou bien d'arriver en F .
Les sommets de degré impair sont les seuls sommets qui peuvent être considérés comme un début ou une fin de chaine. Les sommets traversés au cours du parcourt du graphe sont de degré pair.
2 **a.** Mickael peut trouver un chemin lui permettant de partir de Nantes, par exemple, de ne passer qu'une seule fois dans chacune des villes et de revenir à Nantes : Nantes – Rennes – Lille – Strasbourg – Paris – Clermont – Lyon – Nice – Montpellier – Toulouse – Bordeaux – Nantes.
En revanche, le voyageur ne peut pas parcourir toutes les routes une fois et une seule de façon continue. (Voir la parité des degrés des sommets.)
b. Par exemple, Stéphane peut passer par toutes les intersections une fois et une seule avec l'itinéraire:
3 – 11 – 12 – 13 – 14 – 4 – 17 – 16 – 15 – 7 – 8 – 6 – 9 – 1 – 5 – 10 – 2 – 3

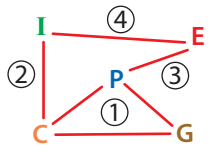
Activité 4 Colorier une carte – Organiser un examen (p. 277)

Objectif : Utiliser l'appartenance à une courbe.

1 On peut colorier cette carte avec 4 couleurs.



2 **a.** On peut traduire par un graphe tel que les sommets sont les options et une arête entre deux sommets indique un regroupement d'options possible .



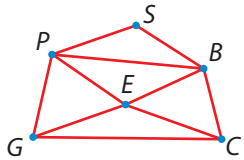
Chaque option a une couleur, mais on peut peut-être mettre la même couleur pour deux options qui n'ont pas de regroupements possibles, c'est-à-dire qui ne sont pas reliées par une arête.
b. On peut ainsi mettre la Philo (P) et l'Italien (I) dans la même couleur ; et mettre l'espagnol (E) et le chinois (C) dans la même couleur.
Ainsi, 3 journées seulement seront nécessaires pour faire passer cet examen. Par exemple :
le 1er jour : **Anglais, Philo et Italien**
le 2e jour : **Français, Espagnol et Chinois**
le 3e jour : **Maths et Allemand** .

Mise en situation

IV Modélisation par un graphe p. 282

40 Pistes cyclables

1 L'école est dans la partie centrale.
2 Les sommets du graphe sont les sites de l'agglomération, une arête relie deux sommets lorsqu'il existe une piste cyclable reliant les deux sites. Ce graphe est un graphe simple non orienté d'ordre 6.



3 Pour que le graphe soit complet, chaque sommet doit être d'ordre 5 ; il faut construire les pistes cyclables correspondant aux arêtes : SC ; SE ; SG ; BG ; PC.

41 QCM

1 **a.** **Vrai :** les arêtes sont orientées.
2 **a.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets, et ce graphe a 5 sommets.
3 **c.** Le nombre d'arêtes du graphe est 8.
4 **a.** Cinq arêtes partent ou arrivent au sommet ① .
Donc ① est de degré 5.
5 **c.** Le degré du sommet ③ est 6.
Une boucle augmente de 2 le degré du sommet.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

42 Graphe complet.

1 Chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre 6, a pour degré 5.
Un graphe complet d'ordre 6 possède :

$5+4+3+2+1=\binom{6}{2}$ ou $\frac{6\times 5}{2}$, soit 15 arêtes.

2 Le sous-graphe ①-②-④-⑤ est complet : chaque sommet est de degré au moins 3 .

43 Cube en graphe.

Un cube est un graphe d'ordre 8. Chaque sommet est de degré 3. Le graphe possède 12 arêtes $\frac{8\times 3}{2}$.

Ce graphe n'est pas complet, chaque sommet devrait être de degré 7. Certains sommets ne sont pas adjacents, par exemple les sommets A et C.
Un graphe complet d'ordre 8 possèdent :

$7+6+5+4+3+2+1=\binom{8}{2}$ ou $\frac{8\times 7}{2}$, soit 28 arêtes.

Il manque donc, 16 arêtes.

44 Graphe planaire.

1 Le graphe ① est simple, car il ne comporte pas de boucle et les sommets adjacents sont reliés par une seule arête. Il n'est pas orienté (pas de flèche)
Le graphe comporte 7 sommets, il est donc d'ordre 7.
Il part 6 arêtes du sommet supérieur, ce sommet est donc de degré 6. Les autres sommets sont de degré 1 ou 3.
2 Le graphe ② possède les mêmes caractéristiques que le précédent : non orienté, d'ordre 7, un sommet de degré 6 et les autres de degré 1 ou 3. Il s'agit du même graphe.

45 Club de théâtre

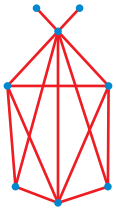
La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal au double du nombre d'arêtes or, si les 7 lycées rencontrent chacun cinq autres lycées, la somme des degrés est égale à 35. Cette organisation est donc impossible.
Chaque lycée pourrait rencontrer 4 ou 6 autres lycées.

46 Graphes sous contraintes

Si le graphe possède 14 arêtes, alors la somme des degrés des sommets est égale à 28.
D'après les degrés connus pour les 5 sommets, il manque trois sommets de degré impair pour :

$28-(2\times 3+2\times 4+7)=21$.

Donc on peut avoir les sommets de degré 1 1 et 5 (1 3 3 n'est pas possible cat on a exactement deux sommets de degré 3) .
D'où le graphe possible ci-contre.



47 Connait ou connait pas.

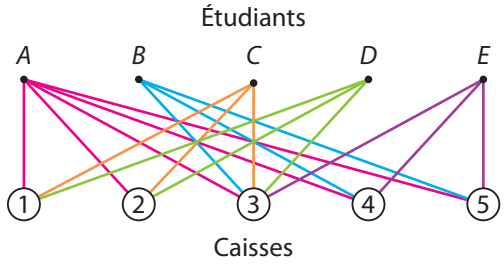
1 Pour $n=3$, les graphe possibles sont :



Au moins deux personnes connaissent le même nombre de personnes.

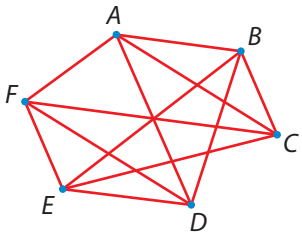
2 On raisonne par l'absurde. On suppose que les invités connaissent tous des nombres différents de personnes.
Le graphe comporte n sommets dont les degrés sont tous différents.
Les degrés sont des nombres appartenant à l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots\,;n-1\}$, puisque le degré maximum d'un sommet est $n-1$.
Cet ensemble contient n nombres entiers distincts, donc un sommet du graphe est de degré 0 et un autre sommet est de degré $n-1$; ce dernier sommet est donc relié à tous les autres ; ce qui est impossible puisque le sommet de degré 0 n'est relié à aucun autre.
Conclusion : Les sommets ne sont pas tous de degrés différents. Il existe donc deux sommets de même degré.

48 Placement en caisse



49 Organisation d'un tournoi

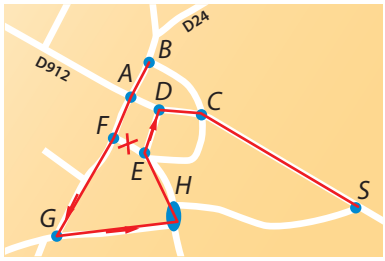
a. Si chacun des 6 joueurs joue quatre parties, le graphe contient :
$\frac{6\times 4}{2}=12$ arêtes.



b. Tous les joueurs ne se sont pas rencontrés : il y a trois paires de joueurs qui ne jouent pas de match:
A et E, C et D, B et F.
Pour que le tournoi soit possible, il faut donc ajouter 3 arêtes. Le graphe est alors complet. Chaque joueur doit jouer 5 matches.

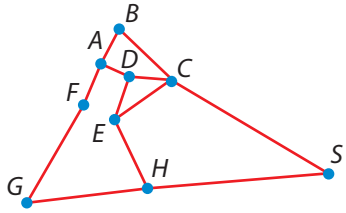
50 Dans un village.

1 **a.** Lucien peut passer par les carrefours **A – F– G – H – E – D – C – S**, pour sortir en S.



b. Lucien part de B, passe par les carrefours **A – F – G – H – E – D – C** , puis sort en S.

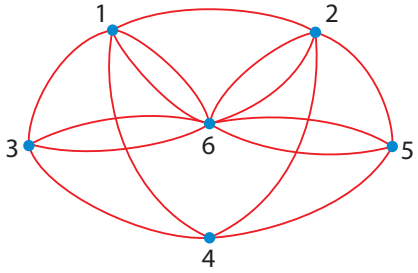
2 Voici le graphe correspondant à la situation : plus de deux sommets sont de degré impair, donc d'après le théorème d'Euler il n'existe pas de trajet partant de A et arrivant à H, passant une fois et une seule par chacune des rues.



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

51 Cable d'alarme

Les zones sont les sommets du graphe et une arête est un mur existant entre deux zones. Ainsi la zone ⑥, qui touche toutes les zones, est de degré 9. Le degré d'une zone autre que ⑥ est le nombre de murs. On obtient le graphe ci-contre.



Le problème revient à chercher une chaîne eulérienne dans ce graphe.
Le graphe est connexe, mais trois sommets sont de degré impair (6 1 et 2). Donc, d'après le théorème d'Euler, il n'existe aucune chaîne eulérienne.
Le câble ne peut pas être posé.

52 Cycle eulérien

Le graphe est connexe et tous les sommets sont de degré pair, donc il existe un cycle eulérien.
Méthodes de recherche :
• On décrit un premier cycle :
8 – 1 – 10 – 4 – 3 – 6 – 11 – 2 – 8 .
• On décrit un deuxième cycle en repartant de 8 :
8 – 4 – 9 – 5 – 12 – 6 – 7 – 11 – 8 .
• Il reste un troisième cycle : 8 – 5 – 3 – 7 – 8 .
• On soude les trois cycles obtenus.

53 Allée d'un hyper

1 Deux sommets sont toujours reliés par une chaine, donc le graphe est connexe.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	4	3	2

2 Le graphe est connexe et deux sommets exactement, B et E, sont de degré impair; donc, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne entre les sommets B et E.
Un visiteur peut donc parcourir toutes les allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois. Un parcours possibles de 10 allées est :
B – C – D – A – B – F – D –E – C – A – E .

54 Tournées du facteur

a. Le graphe est connexe possède exactement deux sommets de degré impair, les sommets 4 et 7. D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne d'extrémités 4 et 7. Un itinéraire possible :
4 – 5 – 6 – 7 – 5 – 1 – 2 – 3– 4 – 8 – 3 – 10 – 2 – 11 – 10 – 9 – 12 – 9 – 8 – 7.
b. Le graphe est connexe et possède exactement deux sommets de degré impair, les sommets 3 et 19. D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne d'extrémités 3 et 19. Un itinéraire possible :
3 – 2 – 1 – 5 – 13 – 17 – 18 – 19 – 20 – 16 – 8 – 4 – 3 – 12 – 9 – 2 – 6 – 5 – 10 – 13 – 14 – 18 – 11 – 12 – 8 – 9 – 6 – 10 – 14 – 11 – 15 – 12 – 16 – 15 – 19 .
Méthode: procéder par cycles que l'on relie par un sommet commun.

V Matrice de graphe p. 284

55 Matrice associée

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

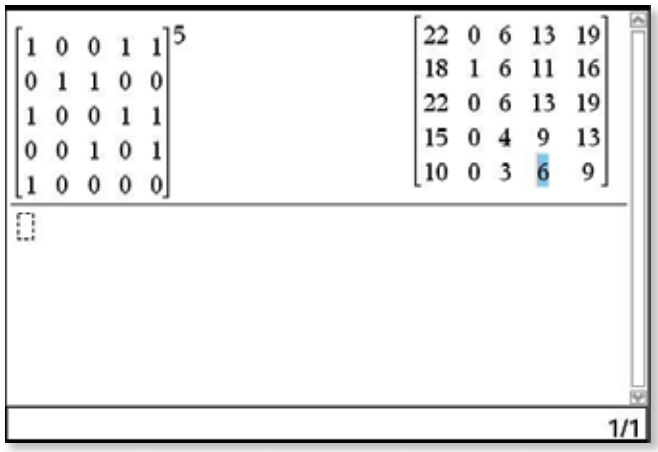
La matrice a est une matrice symétrique.

56 Vrai- Faux ?

a. Faux, $a_{11} = b_{22} = 1$: il y a une boucle en A et une boucle en B.
b. Vrai, la matrice n'est pas symétrique par rapport à la diagonale.
c. Vrai, la somme totale des nombres situés sur la première ligne et la première colonne est égale à 6 . (une boucle compte pour deux degré)
d. Vrai, $b_{22} = b_{23} = 1$.
e. Faux, il n'y a qu'une seul nombre 1 dans la deuxième colonne.
f. Vrai, la somme des termes de la matrice est égal à 11.

57 Vrai ou Faux ? Faire le graphe

a. Vrai . B → C → D → E → A
b. Faux, car aucune arrête arrive en B en venant d'un autre sommet.
c. Vrai, pour répondre on calcule la matrice M^5



© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

58 Graphe donné par une matrice

a. La matrice n'est pas symétrique par rapport à la diagonale, donc le graphe est orienté.

b. La somme des termes de la matrice est égal à 10 , donc le graphe contient 10 arêtes.

$a_{11} = b_{22} = 1$, donc le graphe contient deux boucles sur les deux premiers sommets.

59 Chaînes de longueur donnée.

a. Matrice M asociée ci-dessous.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. ④-②-⑤-①-③-②-①
mais aussi par exemple :
④-②-④-②-④-②-①

60 Voies en sens unique

a. Matrice associée au graphe orienté.

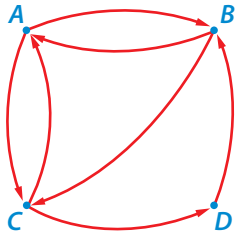
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. On calcule M^2 et on lit le terme $a_{16} = 1$.
Il y a donc une seule chaîne de longueur 6 partant du sommet A et arrivant au sommet F.
On calcule M^3 et on lit le terme $a_{16} = 3$.
Il y a donc 3 chaînes de longueur 3 partant du sommet A et arrivant au sommet F.
On calcule M^4 et on lit le terme $a_{16} = 2$.
Il y a donc 2 chaînes de longueur 4 partant du sommet A et arrivant au sommet F.

M^2	M^3	M^4
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

61 Randonnée

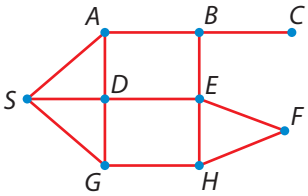
a. Graphe orienté :



b. Le graphe est connexe et tous les sommets sont de degré pair, donc le graphe contient un cycle eulérien. On vérifie si l'orientation des arêtes convient.
Les amis peuvent parcourir tous les chemins une fois et une seule et revenir à leur point de départ *A*.

c. Pour parcourir 20 km, les amis doivent suivre cinq arêtes en partant de *A* et revenir à *A*.
Un itinéraire possible : $A - C - D - B - C - A$.

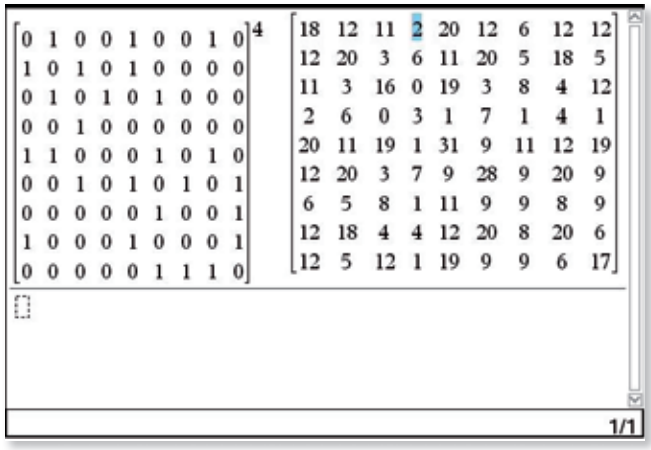
62 Au musée



1 **a.** Les sommets représentent les salles et une arête représente une porte entre deux salles

b. Le graphe est connexe , et plusieurs sommets sont de degré impair : **A, B, C, S, G, H** .
D'après le théorème d'Euler, il n'existe donc pas de chaine eulérienne. Il n'est pas possible de visiter le musée en empruntant chaque porte une fois et une seule.

2 La matrice *M* est symétrique par rapport à la diagonale.



3 Surla matrice M^4 , on lit le terme $a_{14} = 2$. Il y a donc 2 chaines de longueur 4 partant du sommet S et arrivant au sommet C :

S – D – E – B – C et **S – D – A – B - C** .

Comme il existe un zéro dans la matrice M4, en ligne 3 colonne 4 et ligne 4 colonne 3, les salles B et C ne peuvent être jointes en 4 étapes.

VI Résolution de problèmes d'organisation p. 285

63 Mise en réseau d'ordinateurs

1 Si chacun des ordinateurs est relié à tous les autres, cela signifie que le graphe est un graphe complet d'ordre 7. Un graphe complet d'ordre 7 comprends :

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \binom{7}{2} = 21$ arêtes ou $\frac{7 \times 6}{2} = 21$.

Donc 21 liaisons seront nécessaires.

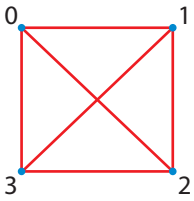
2 Six ordinateurs sont reliés à un ordinateur central. Il faudrait alors établir 6 liaisons. L'inconvénient est que si le centrale tombe en panne plus rien ne fonctionne.

3 Si chacun des ordinateurs est relié à exactement 2 autres ordinateurs, 7 liaisons seront nécessaires (graphe en polygone à 7 côtés.
Si une des 7 connexions est en panne, il faut passer par tous les autres ordinateurs.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

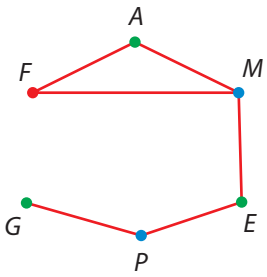
4 Chacun des ordinateurs est relié à 3 autres ordinateurs, donc chaque sommet est de degré 3. La somme des degrés est égale à $7 \times 3 = 21$ ce qui est impossible, car la somme des degrés d'un graphe est toujours un nombre pair.

64 Jeu de dominos



a. Les sommets du graphe sont les chiffres 0, 1, 2 et 3.
On obtient un graphe d'ordre 4.
Une arête rejoint deux sommets lorsque les chiffres sont sur le même domino. Une arête est donc un domino.
On obtient un graphe complet d'ordre 4 :
Il y a donc six dominos formés avec les chiffres 0, 1, 2 et 3.
Aligner les dominos revient à chercher une chaîne eulérienne. Il n'en existe pas, car tous les sommets de ce graphe complet sont de degré impair. Un double correspond à une boucle sur un sommet. Une boucle augmente le degré de 2. Cela ne change pas la parité du degré.
b. Les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 permettent de construire un graphe complet d'ordre 7. Chaque sommet est de degré 6.
Le graphe est connexe et tous les degrés sont pairs, donc il existe un cycle eulérien. On peut alors aligner tous les dominos.

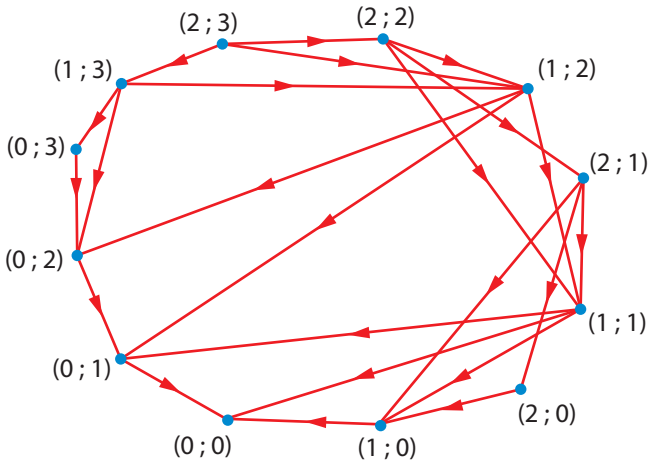
65 Examen d'entrée.



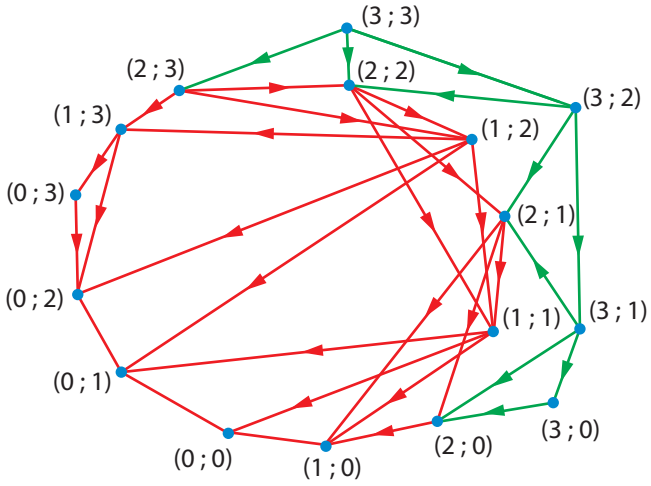
Les sommets du graphe représentent les matières que peut passer un candidat, une arête lie deux matières que peut choisir le candidat.
a. Le problème revient à déterminer une coloration du graphe en un nombre minimum de couleurs.
Le graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 3, **A – F – M** donc, le nombre chromatique γ est supérieur ou égal à 3.
L'algorithme de Welsh-Powell fournit 3 couleurs donc $\gamma \leqslant 3$ (on trouve facilement une coloration en 3 couleurs).
Le nombre chromatique est donc égal à 3.
On peut donc faire passer au maximum 3 épreuves par jour : Anglais, Espagnol, Gestion (de la même couleur sur le graphe ci-contre).
b. Trois jours seront nécessaires :
Jour 1 : **A – E – G** ; Jour 2 : **M – P** ; Jour 3 : **F**

66 Jeux de plage

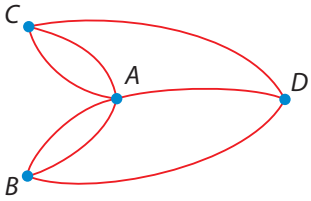
1 Voir graphe ci- dessous.
2 Le jeu s'arrête obligatoirement en 5 coups. Au minimum, il faut 3 coups pour terminer la partie.
Exemple : **(2 ; 3) – (1 ; 2) – (0 ; 1) – (0 ; 0)**



Voir le graphe p. 352 dans la correction dans le livre de TES précédent (exo corrigé)
3 Le jeu s'arrête obligatoirement en 6 coups. Au minimum, il faut 3 coups pour terminer la partie.
Exemple : **(3 ; 3) – (2 ; 2) – (1 ; 1) – (0 ; 0)**



67 Euler et les ponts de Königsberg.



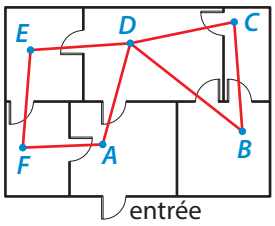
Ce graphe n'est pas un graphe simple.
Les quatre sommets sont de degré impair, d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne.
Il est donc impossible de passer une fois et une seule sur chacun des ponts.

68 Problème du coursier

Le graphe est connexe et possède exactement deux sommets de degré impair : Gare et Lycée. D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne entre ces deux sommets.
Le coursier peut partir de la gare , parcourir les sept rues une fois et une seule et arriver au lycée.
Gare – Centre commercial – Mairie – Gare – Lycée – Poste – Mairie – Lycée.
Il n'existe pas de cycle eulérien, car tous les sommets ne sont pas de degré pair; le coursier ne peut donc pas revenir à son point de départ.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

69 Cambriolage



1 Plan et graphe

2 Le graphe est connexe et tous les sommets sont de degré pair : d'après le théorème d'Euler, il existe un cycle eulérien.
Le cambrioleur peut franchir toutes les portes une fois et une seule et revenir à son point de départ. Un itinéraire possible parmi plusieurs itinéraires possibles : **A –D – B – C – D – E – F – A**

3 Pour visiter toutes les pièces, le cambrioleur doit passer deux fois par la pièce D , sinon il ne peut pas ressortir de la maison par la porte A. On peut imaginer qu'il saute par la fenêtre de la pièce B .
Son itinéraire serait alors **A – F – E – D – C – B.**

70 Circuit touristique et fête de la musique

1 Le problème revient à calculer le diamètre du graphe.

Distances	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	2	3	2	1	1
B	1	0	1	2	2	1	2
C	2	1	0	1	1	2	2
D	3	2	1	0	1	2	2
E	2	2	1	1	0	1	1
F	1	1	2	2	1	0	2
G	1	2	2	2	1	2	0

Le diamètre du graphe est égal à 3. La durée maximale du trajet est donc de 30 minutes.

2 Le graphe contient 4 sommets de degré impair : A, B, C, F. D'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne. Les touristes ne peuvent pas visiter la ville en empruntant chaque avenue une fois et une seule.

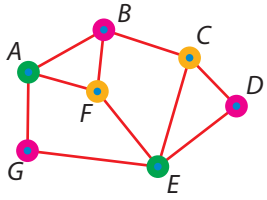
3 On recherche les chaînes de longueur 6 entre les sommets A et D.
Une chaîne de longueur 6 : **A – G – E – F – B – C – D**.
En calculant M^6, on lit le terme $a_{14} = 61$.
Le nombre de chaînes de longueur 6 entre les sommets A et D est 61.

$$M^6 = \begin{bmatrix} 112 & 101 & 90 & (61) & 137 & 87 & 52 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

4 Il s'agit de rechercher le nombre chromatique du graphe. Le plus grand sous-graphe complet contenu dans le graphe est d'ordre 3 : **A – B – F** . Donc $\gamma \geqslant 3$.

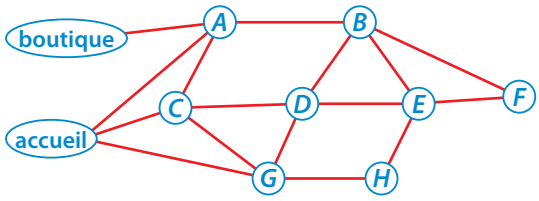
Sommet	E	A	B	C	F	D	G
Degré	4	3	3	3	3	2	2
Couleur	O	O	O	O	O	O	O

L'algorithme de Welsh-Powell fournit 3 couleurs, donc $\gamma \leqslant 3$. Le nombre chromatique est donc égal à 3.
Il faudra choisir trois genres musicaux différents.



71 Directeur d'un musée

1 Un sommet représente une salle et une arête entre deux sommets adjacents représente une porte entre deux salles.



2 Ce graphe est connexe. Deux sommets exactement du graphe sont de degré impair : les sommets « **boutique** » et « **accueil** ». Donc il existe une chaîne eulérienne reliant ces deux sommets, mais il n'existe pas de cycle eulérien.
Le directeur peut donc partir de l'accueil et arriver à la boutique sans repasser par une porte déjà ouverte, mais il ne peut pas revenir à l'accueil.

3 **a.** Si la porte entre l'accueil et la salle C est bloquée, on efface l'arête entre ces deux sommets.
Le degré du sommet **C** est alors 3 et celui du sommet « **accueil** » est 2. Deux sommets sont de degré impair : « **boutique** » et **C**.
Donc il n'existe pas de cycle eulérien. Le directeur ne peut pas partir de l'accueil et y revenir.
b. Le graphe est encore connexe : il existe une chaîne eulérienne entre les sommets « **boutique** » et **C**.
Le directeur, partant de la salle C, peut ouvrir toutes portes sans repasser par une porte déjà ouverte, puis sortir par la boutique.

4 Un chemin possible serait : **Accueil – C – G – Accueil – A – B – F – E – B – D – G – H – E – D – C – A – Boutique.**

5 Le plus grand sous-graphe complet est d'ordre 3, par exemple : **B – D – E.**
Il faut donc au minimum 3 couleurs pour colorier le graphe. L'algorithme de Welsh-Powell fournit 4 couleurs, mais on peut obtenir une coloration en 3 couleurs en ordonnant ainsi les sommets.

Sommet	A	B	C	E	D
Degré	4	4	4	4	4

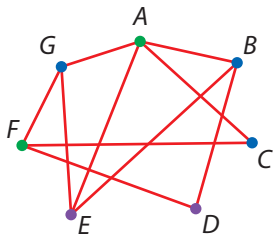
Sommet	G	Accueil	F	H	Boutique
Degré	4	3	2	2	1

On obtient donc une coloration en **trois couleurs**.

72 Tournoi d'échec à organiser.

Le problème revient à rechercher le nombre chromatique γ du graphe.

Le plus grand sous-graphe complet contenu dans ce graphe est d'ordre 3 : **A - B - E** , donc $\gamma \geqslant 3$.

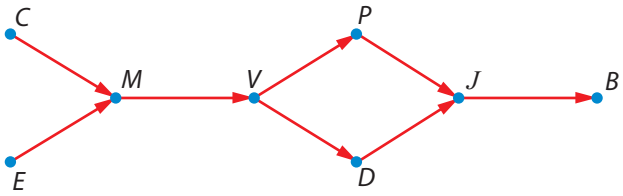


Sommet	A	B	E	F	G	C	D
Degré	4	3	3	3	3	2	2
Couleur	O	O	O	O	O	O	O

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

L'algorithme de Welsh-Powell fournit 3 couleurs, donc $\gamma \leqslant 3$.
Le nombre chromatique est donc égal à 3.
On peut organiser le tournoi sur trois jours :
B – C – G ; **A – F** ; **D – E**.

73 Ordonnancement des travaux



Remarque : ce graphe est un graphe ordonnancé par niveau.
Le niveau d'un sommet est la longueur du plus long chemin arrivant à ce sommet.

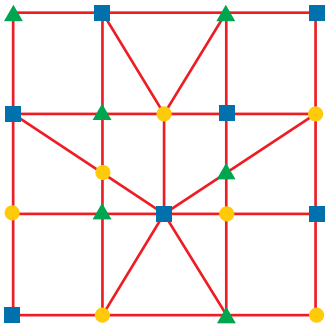
74 Décorations de Noël.

Le plus grand sous-graphe complet contenu dans ce graphe est d'ordre 3 :

5 – 10 – 13

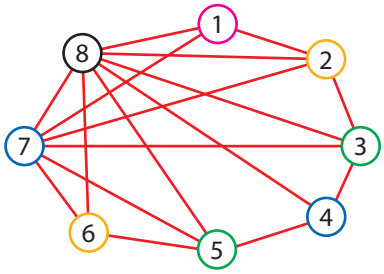
donc le nombre chromatique g est supérieur ou égal à 3.
L'algorithme de Welsh Powell fournit 3 couleurs, donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 3.
Le nombre chromatique est donc égal à 3.

Sommet	12	10	2	5	6	7	8	9	11	13
Degré	8	5	4	4	4	4	4	4	4	4
« couleur »	■	●	■	■	▲	▲	●	●	▲	▲
Sommet	14	15	16	18	3	19	1	4	17	20
Degré	4	4	4	4	3	3	2	2	2	2
« couleur »	■	●	▲	●	●	■	▲	■	■	●



75 Incompatibilité d'humeur lors d'un voyage

Le graphe correspondant au tableau d'incompatibilité est :



Le plus grand sous-graphe complet contenu dans ce graphe est d'ordre 5 :

1 – 2 – 3 – 7 – 8

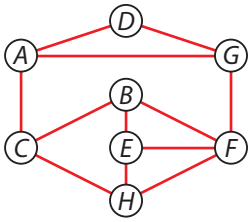
Donc $\gamma \geqslant 5$.

Sommet	8	3	7	1	2	4	5	6
Degré	7	5	5	4	4	3	3	3
Couleur	O	O	O	O	O	O	O	O

L'algorithme de Welsh Powell fournit 5 couleurs, donc $\gamma \leqslant 5$.
Le nombre chromatique est donc égal à 5. Il faudra réserver 5 chambres :
Une chambre pour (8). Une chambre pour (3) et (5).
Une chambre pour (7) et (4) ; une chambre pour (1) ; une chambre pour (2) et (6).

76 Postes de travail avec contraintes.

1 Le problème se modélise par le graphe d'incompatibilité ci-contre :
Ce graphe n'est pas orienté, car si Greg refuse de travailler avec Adrien, Adrien ne peut pas travailler avec Greg.



2 Comme Erik n'est pas en relation avec Cyril, ni avec Greg, Damien, ou Adrien, si on choisit Erik et Cyril, on ne peut pas choisir Adrien mais on peut prendre Erik, Cyril, Damien ou Erik, Cyril, Greg.
Si on choisit Erik et Adrien, on ne peut pas engager un troisième.
Il y a donc deux solutions **Erik – Cyril – Damien** ou **Erik – Cyril – Greg**.
Si on ne prend pas Erik, une combinaison possible est : **Adrien – Benjamin – Hector** ou **Benjamin – Damien – Hector** ou **Benjamin – Greg – Hector** ou **Cyril – Damien – Franck**.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie 3 Problèmes sur un graphe étiqueté

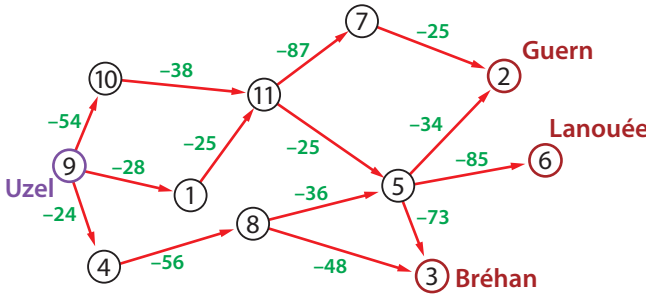
Découvrir

Activité 1 Coder par un graphe étiqueté (p. 288)

1 « le petit loup hurle » ; « un grand chien saute » ; « un féroce loup court ».

2 Les mots les plus courts comportent trois lettres : N – O – S et V – O – S .

Activité 2 Se déplacer sur un réseau (p. 288)



1 **a.** Martin se rend à Bréhan par le chemin :
9 — 1 — 11 — 5 — 3 .
Soit S la somme payée en écus, S = 28 + 25 + 25 + 73 = 151 .
Son bénéfice, en écus, est : B = 780 – 151 = 629 .
Le chemin 9 — 4 — 8 — 3 est plus rentable, la somme payée, en écus, est :
S' = 24 + 56 + 48 = 128 et son bénéfice de 652 écus.

b. Le chemin permettant de payer la somme la plus faible pour aller à Guern est : 9 — 1 — 11 — 5 — 2 .
La somme payée, en écus, est :
S = 28 + 25 + 25 + 34 = 78 et son bénéfice est de 842 écus.

c. Le chemin permettant de payer la somme la plus faible pour aller à Lanouée est : 9 — 1 — 11 — 5 — 6 .
La somme payée, en écus, est :
S = 28 + 25 + 25 + 85 = 163 et son bénéfice est de 687 écus.

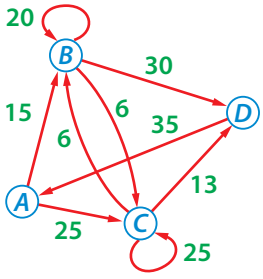
d. Son bénéfice est maximal au marché de Guern.

2 **a.** La matrice n'est pas symétrique par rapport à la diagonale donc, le graphe est orienté.

	A	B	C	D
A		15	25	
B		20	6	30
C		6	25	13
D	35			

b. Les cases vides signifient que Myriam n'effectue jamais de trajet entre ces deux endroits. Par exemple, Myriam ne va jamais directement de C vers A. Elle revient toujours en A par D. Elle ne s'arrête pas en A et en D.
Le nombre 20 se place sur une boucle en B.

c. Graphe ci-contre.



d. Myriam va prendre un café en C , puis revient en prenant le bus en D. Le temps du trajet de Myriam A — C — D — A est : T = 25 + 25 + 13 + 35 = 98 , soit 60 + 38 min.
Myriam sera absente de chez elle 1 h 38 min.

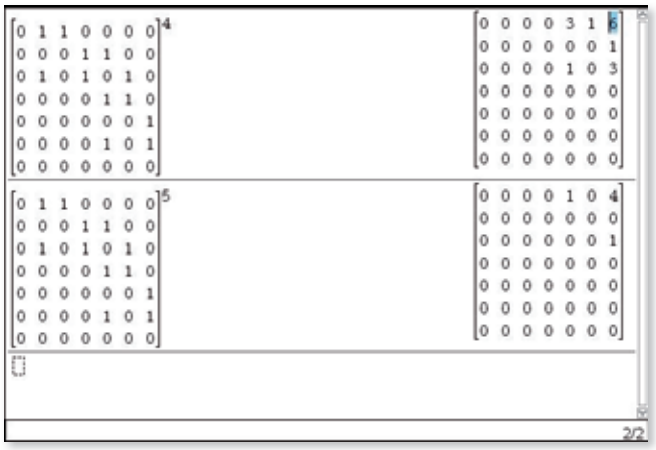
Activité 3 Rechercher le coût minimal (p. 289)

1 Pour le trajet de Cyril : D — M — G — H — C — L ,
le coût total est 1,5 + 1 + 1 + 1+ 1,8 = 6,3 € .
Pour le trajet D – G – S – L , le coût total sera égal à 1 + 2 + 1,4 = 4,4 €.

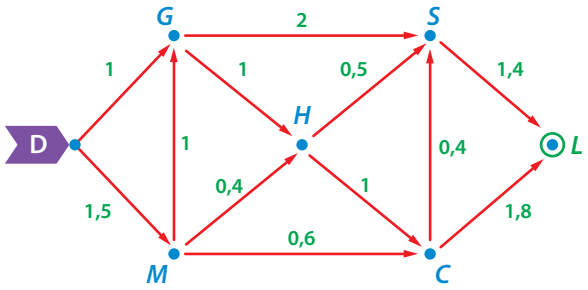
2 Matrice d'adjacence M =
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 **a.** Le trajet D – G – S – L de coût 4,4 €
et D – M – C – L de coût 3,9 € qui est le coût minimum.
b. On obtient le nombre de trajets de longueurs 4 , en calculant M^4.

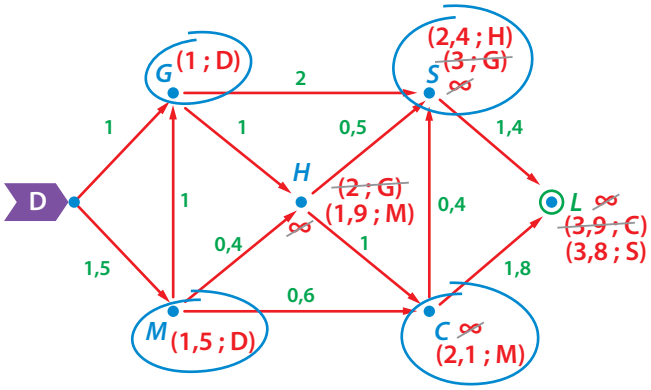


On voit en ligne 1 colonne 7 qu'il y a 6 trajets de longueur 4 de D à L .



D – M – C – S – L : coût 3,9
D – M – H – C – L : coût 4,7
D – M – H – S – L : coût 3,8
D – M – G – S – L : coût 5,9
D – G – H – S – L : coût 3,9
D – G – H – C – L : coût 4,8
c. Le coût minimum est 3,8 pour le trajet D – M – H – S – L .
d. Il y a 4 trajets de longueur 5 (on calcule M^5) .
D – G – H – C – S – L coût 4,8
D – M – G – H – C – L coût 6,3
D – M – G – H – S – L coût 5,4
D – M – H – C – S – L coût 4,7

4 **Étape 0**
Cyril part de l'ensemble des sommets
E = { D , G , M , H , S , C , L }. En D, il note 0 .



Étape 1
Pour l'instant, le moins cher venant de D est de passer par G.
Il s'occupe du tronçon suivant : à partir de G (1 ; D) .
De G , on peut atteindre le sommet S avec un coût total de 1 + 2 = 3 : Cyril marque donc S (3 ; G) .
En H , il marque 2 venant de G : H(2 ; G) .

Étape 2
Cyril enlève G de l'ensemble E de l'étape précédente.
L'ensemble des sommets restants est alors { M, H , S , C , L } .
Parmi tous les sommets restants dans cet ensemble, celui où l'on est arrivé avec le coût minimum est le sommet M noté (1,5 ; D) .
De M, il peut aller en G, en H ou en C .
Il n'est pas intéressant de passer par le tronçon M — G car le coût est de 2,5 supérieur au coût 1,5 du trajet direct venant de D.
En suivant le procédé en étape 1, Cyril va marquer le point **C (2,1 ; M)** .
Il barre la marque déjà faite en H à l'étape 1 , et marque H (1,9 ; M) , car le coût obtenu en venant de M est inférieur à celui de l'étape 1.

Étape 3
L'ensemble des sommets restants est { H , S , C , L } . **Parmi tous les sommets restants**, celui où l'on est arrivé avec le coût minimum est le sommet H (1,9 ; M) .
Du sommet H, Cyril peut aller en S ou en C . Il n'est pas intéressant de passer par C , car le coût est supérieur à celui de l'étape précédente C (2,1 ; M) .
Il barre la marque du sommet S, car le coût obtenu en venant de H est inférieur.
S est marqué S (2,4 ; H) .

Étape 4
Parmi les sommets restants, { S , C , L } celui où l'on est arrivé avec le coût minimum est le sommet C (2,1 ; M) .
Du sommet C, Cyril peut aller en L ou en S . Aller au sommet S n'est pas intéressant car le coût est supérieur au coût de l'étape précédente S (2,4 ; H) .
Cyril barre la marque ∞ de L en remplaçant par L (3,9 ; C) .

Étape 5
Parmi les sommets restants, { S , L } celui où l'on est arrivé avec le coût minimum est le sommet S (2,4 ; H) .
Du sommet S, Cyril peut aller en L . Cyril barre la marque L (3,9 ; C) , en remplaçant par L (3,8 : S) , plus petite.
Fin et conclusion : La marque la plus faible écrite en L est 3,8 en venant du point **S** , et la marque en S provient de H, celle en H provient de M et celle de M provient de D. Donc, en remontant le graphe, le trajet de coût minimum 3,8 € est :
D – M – H – S – L .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

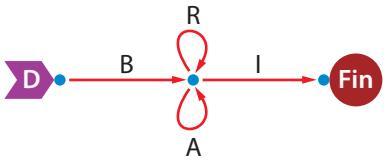
Mise en situation

VII Problèmes de graphe étiqueté (p. 292)

77 Mots reconnus

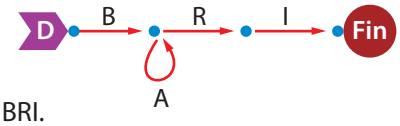
On demande cinq mots (au moins).
Il est intéressant de les proposer suivant leur longueur.

a. Pour ce graphe :



Mot de deux lettres :
BI.
Mots de trois lettres :
BRI ou BAI.
Mots de quatre lettres :
BRAI ou BARI ou BAAI ou BRRI.
Mots de cinq lettres :
BRRAI – BRARI – BARRI – BRAAI – BARAI – BAARI –BAAAI.
Les boucles permettent de trouver des mots de plus de cinq lettres.

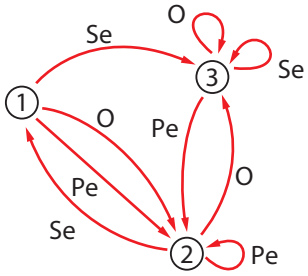
b. Pour le graphe ci-dessous, les mots ont au moins trois lettres :



Mots de trois lettres : BRI.
Mots de quatre lettres : BARI.
Mots de cinq lettres : BAARI.
Et tous les mots BA…….ARI.

78 Deux positions pour un jouet

a. Les mots qui font se lever le chien sur ses pattes arrière sont **O Se** et toutes les répétitions de ce cycle : **O Se O Se ; O Se O Se O Se** ….

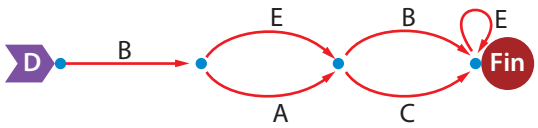


b. Le jouet est en position ②.
Au son « **O Se O Pe Pe Se** » le chien est revenu en position ① et a tourné deux fois sur lui-même.

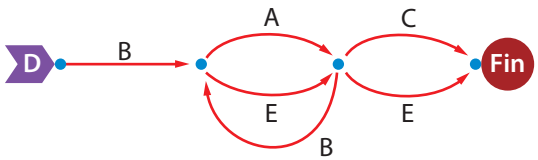
79 Programmer des lectures de mots

a. Les deux graphes ci-dessous reconnaissent les mots :
BEC ; BAC ; BABAE ; BEBEE.

1



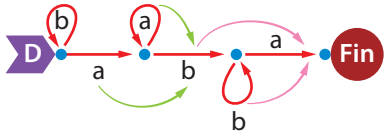
2



b. Le premier reconnait le mot BABE , mais ne reconnait pas BEBAC.
Le second ne reconnait pas BABE, mais reconnait BEBAC.
On peut chercher un graphe reconnaissant tous ces mots.

80 Robot marcheur.

1 Le robot va partir et faire son premier pas s'il reçoit **a → b** , puis le second pas avec **b → a** .
Au départ, il reçoit **a** ou **b** : tant qu'il reçoit **b** il ne bouge pas et attend, s'il reçoit **a** , il attend de recevoir **b** et tant qu'il reçoit **a** il ne bouge pas.
Après son premier pas, tant qu'il reçoit **b**, il attend. Et s'il reçoit **a**, il fait son second pas et s'arête quel que soit ce qu'il reçoit, **a** ou **b** .



b. Le mot de longueur minimale reconnu par le graphe est **a-b-a** et permet au robot de faire deux pas, en 2×10 s .
c. Pour le mot b — a — **a → b — b → a** - b - b, le robot fonctionne pendant :
$3+3+10+3+10+0+0=29$ s .
2 **a.** b — **a → b → a** : $3+10+10=23$.
b. a — a — **a → b → a** - b - b : $3+3+10+10+0+0=26$.
c. b — b — **a → b → a** - b - a - b - a :
$3+3+10+10+0+0+0+0=26$.
d. b — a — **a → b — b → a** - a - b - b - a :
$3+3+10+3+10+0+0+0+0=29$.

81 Longueur minimale Début – Fin

a. $L=3$, longueur minimale d'une chaine de ce graphe .
Il y a 4 chaînes de longueur $L=3$ sont :
• B – A – C ; • B – C – C ; • C – A – C ; • C – C – C ;
b. Mots de longueur 6 : par exemple :
• B – A – B – C – A – C
• C – C – A – B – A – C
• B – A – A – C – A – C
c. • BABAC : non reconnu (arrêt au point central)
• BCBAC CC : reconnu ;
• ABCBAC : non reconnu (arrêt au point central).
d. Le mot C – A – B – C n'est pas reconnu par le graphe.

82 QCM

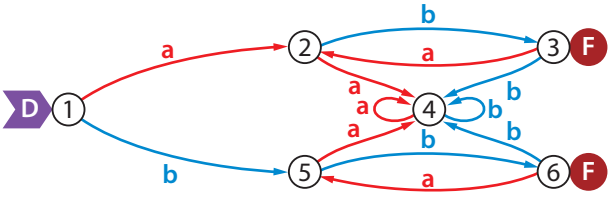
1 **a.** bbba.
2 **a.** ba ; **c.** et **d.** Une boucle permet de répéter autant de fois que l'on veut la lettre b.
3 **b.** aaaab.
4 **a.** aaaa.
b. ab – aab – aaab.
c. **Faux :** car il faut aussi que le mot se termine par b.

83 Graphe avec deux fins.

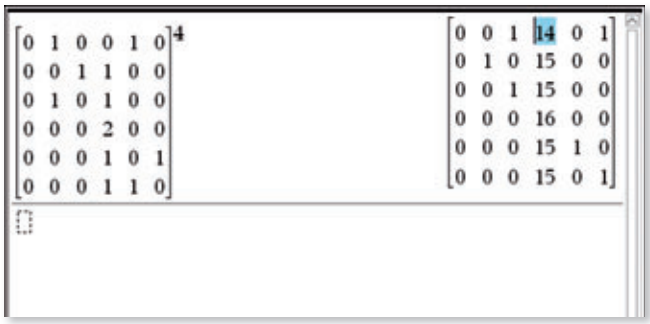
1 $10011 = 1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$
$=16+2+1=19$.
$01010 = 0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=8+2=10$.
(édition 1 lire 2^4 au lieu de 24 et 2^3 au lieu de 23)

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

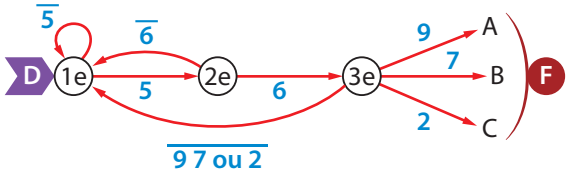
2 **a.** Les mots reconnus de longueur minimale sont : **ab** et **bb**.
b. Aucun mot de longueur 5 n'est reconnu par ce graphe.



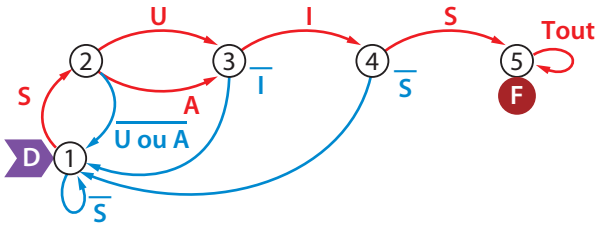
c. • abbaa = 01100 de valeur 12 .
• aaba = 0010 de valeur 2 .
• ababab = 010101 de valeur 21 .
3 **a.** La colonne de « 0 » s'explique par le fait qu'aucune arête n'arrive au sommet ①.
b. La 4e ligne est formée uniquement de « 0 », sauf à la 4e colonne. Cela signifie qu'aucune arête ne part du sommet ④ vers un autre sommet.
c. Il y a 14 mots de longueur 4, commençant au sommet ① et conduisant au sommet ④ .



84 Digicode à 9 chiffres.



85 Mots reconnus saisis au clavier



1 Les mots de longueur minimale reconnu par ce graphe sont : **SUIS** ; **SAIS** .
2 **a.** Pour le mot **SUISSE**, le trajet est
① - ② - ③ - ④ - ⑤ - ⑤ - ⑤ .
Le curseur est en ⑤ .
b. Pour le mot **SUIVANT**, le trajet est
① - ② - ③ - ④ - ① - ① - ① - ① .
Le curseur se trouve en ① .

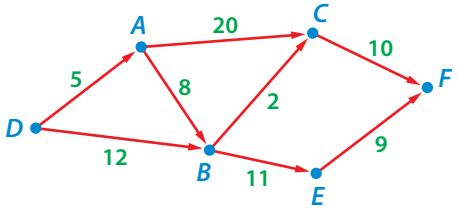
86 Déclenchement d'un système

a. Au sommet ① , seul A permet d'avancer.
Au sommet ② , seul B permet d'avancer sinon on revient à ① .
Au sommet ③ , seul C permet d'avancer, sinon on revient en ① .
Donc on ne peut terminer que si l'on a fait **A - B - C**
b. ***Algorithme en langage naturel :***

```
Début : Entrer S
    TantQue S ≠ A
        Entrer S
    FinTantQue
Entrer S
    Si S = B , alors entrer S
        si S = C , alors «déclenchement»
        Sinon recommencer au début.
        FinSi
    Sinon recommencer au début.
    FinSi
```

VIII Graphe pondéré et plus court chemin (p. 294)

87 Coût d'un trajet

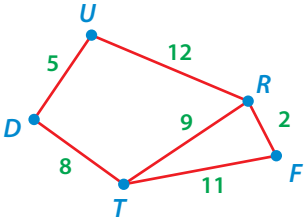


1 **a.** Entre D et F, la chaîne minimale est de longueur 3 .
b. Chaine D → A → C → F : poids 5 + 20 + 10 = 35 .
Chaîne D → B → E → F : poids 12 + 11 + 9 = 32 .
2 D → A → B → C → F : poids 5 + 8 + 2 + 10 = 25 .
3 D → B → C → F a pour poids 12 + 2 + 10 = 24 , plus faible que les précédents.

88 Nombre de points maximum

On va de D à F .

Parcours	Gain
DURF	5+12+2=19
DURTF	5+12+9+11=37
DTRF	8+9+2=19
DTF	8+11=19

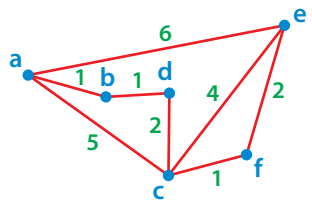


Le maximum de points est 37 .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

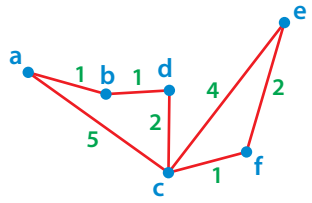
89 Dans une région inondable

1 a.



« Prendre toutes ces routes une fois et une seule » revient à chercher une chaîne eulérienne.
Seuls les sommets **a** et **e** sont de degré pair. Donc on peut prévoir un tel circuit reliant **a** et **e** . (On peut décrire le cycle « externe » **a e f c a** , puis la chaîne « interne » **a b d c e** .)
b. Comme ces sommets sont de degré impair (et non pair) , on ne peut pas revenir à la même ferme.
c. La somme des poids de toutes les arêtes donne la durée totale du circuit, soit 22 heures.

2



Si l'arête **a - e** n'existe plus, tous les sommets sont de degré pair (voir graphe ci-dessus). On peut visiter toutes les routes, quel que soit le lien du service de voirie.
3 a. De **a** à **e** , durant l'inondation , le trajet passant par le moins de fermes est le trajet de longueur minimale, soit **a c e** , de durée 9 h.
b. Comme $1+1+2<5$ et $1+2<4$, le trajet le moins long en temps est **a b d c f e** .
c. Il existe un trajet permettant de visiter toutes les fermes : c'est le trajet trouvé en **b.**

90 Itinéraire d'un livreur

1 a. Le graphe a 6 sommets. Donc il est d'ordre 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	4	5	5	2	6

b. Un itinéraire possible est A – E – D – C – B – F – A .
On fait la somme des pondérations :

$$4+4+2+9+3+6=28 .$$

Le temps de parcours est de **28 minutes**.
1 a. Il y a 8 chaînes de longueur 6 partant de A et revenant à A. On les trouve de manière empirique.
Elles sont données ci-dessous, ainsi que les temps de parcours en minute :

A–E–D–A–E–D–A	34	A–E–D–F–B–F–A	23
A–E–D–C–B–F–A	28	A–E–D–F–C–B–A	28
A–E–D–C–F–B–A	**21**	A–E–D–F–C–D–A	28
A–E–D–C–D–F–A	**21**	A–E–D–F–C–F–A	29

c. Le livreur peut minimiser son temps de parcours en choisissant le chemin A – E – D – C – F – B – A ou le chemin **A – E – D – C – D – F – A**, tous deux passant par tous les sommets, et dont le temps de parcours est **21 minutes**.

91 En visite à Revel

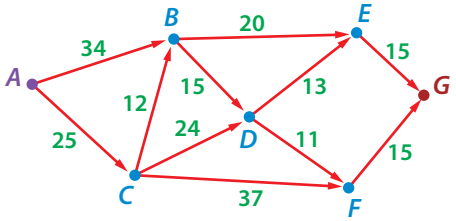


1 a. Le graphe est connexe, car entre deux sommets quelconques, il existe toujours une chaîne.
b. Il y a 7 intersections notées, donc le graphe est de sommet 7.
c. On cherche sil existe une chaîne eulérienne, or il existe 4 sommets (P A D et B) de degré impair. Donc il n'est pas possible de passer par toutes les rues en continu, sans passer deux fois par la même rue.
2 Algorithme de Dijkstra de D à F.

	D	A	B	C	H	P	F
D ; 0	0	7 ; D	5 ; D	4 ; D	∞	∞	∞
C ; 4		8 ; C	10 ; C	4 ; D	14 ; C	∞	∞
B ; 5		7 ; D	5 ; D		12 ; B	∞	∞
A ; 7		7 ; D			12 ; B	10 ; A	∞
P ; 10					11 ; P	10 ; A	14 ; P
H ; 11					11 . P		14 ; H
F ; 14							14 ; H P

Le trajet le plus court de D à F est de 14 min, il y a deux trajets possibles :
D — A — P — H — F ou **D — A — P — F** .

92 Sur le graphe d'un réseau routier



1 **A → C → F → G** mesure $25+37+15=77$ km .
A → B → E → G mesure $34+20+15=69$ km .
2 Il y a deux chaînes de longueur maximale 5 :
A → C → B → D → E → G
de poids $25+12+15+13+15=80$ km .
A → C → B → D → F → G
de poids $25+12+15+11+15=78$ km .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

3 Algorithme de Dijkstra de A à G.

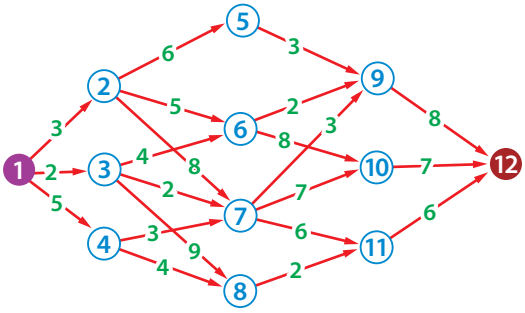
	A	B	C	D	E	F	G
A ; 0	0	34 ; A	25 ; A	∞	∞	∞	∞
C ; 25		25 + 12 = 37 ; C	25 ; A	25 + 24 = 49 ; C	∞	25 + 37 = 62 ; C	∞
B ; 34		34 ;A		34 + 15 = 49 ; B	34 + 20 = 54 ; B	62 ; C	∞
D ; 49				49 ; C et B	49 + 13 = 62 ; D	49 + 11 = 60 ; D	∞
E ; 54					54 ; B	60 ; D	54 + 15 = 69 ; E
F ; 60						60 ; D	60 + 15 = 75 ; E
G ; 69							69 ; E

Le transporteur doit prendre le trajet A → B → E → G pour le plus court chemin allant de A à la gare G pour une distance de 69 km

93 Réseau de transport avec étapes

Bien noter les sommets par un rond ① ② ③ … pour ne pas confondre avec les poids et prendre une grande feuille de papier ! Bien barrer le reste de la colonne (cases en grisée ci-dessous) quand on a fixé un sommet.

On trouve un temps minimal de 15 secondes, pour une circulation de l'information par les relais ① → ③ → ⑦ → ⑨ → ⑫



94 Feux et ronds-points

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮
① 0	0	4 ①	∞	∞	3 ①	∞									
⑤ 3		6 ⑤	∞	∞	3 ①	5 ⑤	∞								
② 4		4 ①	6 ②	∞		5 ⑤	∞								
⑥ 5			11 ⑥	∞		5 ⑤	7 ⑥	∞							
③ 6			6 ②	13 ③			14 ③	∞							
⑦ 7				15 ⑦			7 ⑥	17 ⑦	∞						
④ 13				13 ③				20 ④	22 ④	∞					
⑧ 17								17 ⑦	22 ④	18 ⑧	∞	18 ⑧	∞		
⑩ 18									20 ⑩	18 ⑧	21 ⑩	21 ⑩	∞		
⑫ 18									20 ⑩		20 ⑫	18 ⑧	∞		
⑨ 20									20 ⑩		22 ⑨		21 ⑨	∞	
⑪ 20											20 ⑫		21 ⑨	24 ⑪	∞
⑬ 21													21 ⑨	24 ⑪	26 ⑬
⑭ 24														24 ⑪	28 ⑭
⑮ 26															26 ⑬

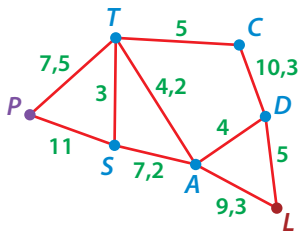
Le nombre minimal de feux est 26. Le parcours le permettant est ① → ⑤ → ⑥ → ⑦ → ⑧ → ⑩ → ⑨ → ⑬ → ⑮

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

95 Péage

1 Graphe pondéré. Les prix sont pour l'aller ou le retour.

2 Trajet le plus économique : 20,7 euros en passant par P T A D puis L .



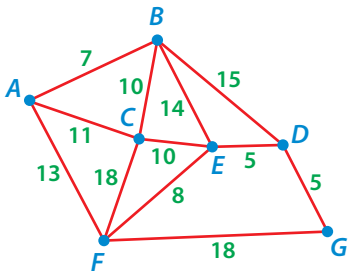
	P	T	S	A	C	D	L
P 0	0	7,5 P	11 P	∞	∞	∞	∞
T 7,5		7,5 P	10,5 T	11,7 T	12,5 T	∞	∞
S 10,5			10,5 T	17,5 S	12,5 T	∞	∞
A 11,7				11,7 T	12,5 T	15,7 A	21 A
C 12,5					12,5 T	22,8 C	21 A
D 15,7						15,7 A	20,7 D
L 20,7							20,7 D

96 Location de vélos

Graphe pondéré : *sur Édition 1 et 2 : pour l'arête CE, ajouter 10 .*

1 a. On cherche si le graphe admet une chaîne eulérienne.

On dresse un tableau donnant les sommets et leur degré.



Seuls A et D sont de degré impair, donc on peut emprunter une fois et une seule toutes les pistes cyclables.

b. On ne peut pas remettre le vélo là où on la emprunté, car la chaîne n'est pas un cycle eulérien .

2 De F à E (du 6e sommet 6 au 5e sommet) pour connaître le nombre de trajets en deux stations, on calcule M2 et on lit le nombre à l'intersection du le 6e ligne et 5e colonne.

3 Pour aller le plus rapidement possible de A à G, on applique l'algorithme de Dijkstra .

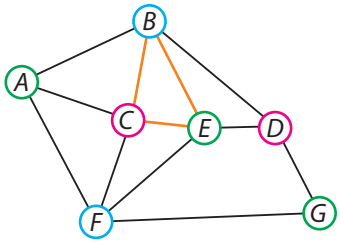
	A	B	C	D	E	F	G
A 0	0	7 A	11 A	∞	∞	13 A	∞
B 7		7 A	17 B	22 B	21 B	13 A	∞
C 11			11 A	22 B	21 C	29 C	∞
F 13				22 B	21 F	13 A	31 F
E 21				26 E	21 B, C, F		31 F
D 22				22 B			27 D
G 27							27 D

4 Le plus grand ordre d'un sous graphe complet est 3 (exemple B C E) , donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 3 .

Tableau des degrés en ordre décroissant et couleur.

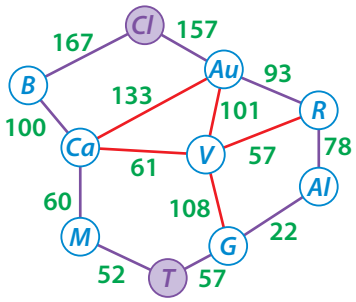
Sommet	B	C	E	F	A	D	G
Degré	4	4	4	4	3	3	2

D'après l'algorithme , on trouve 3 couleurs au maximum. Donc le nombre chromatique est 3 .



97 Transporteur dans le Sud-Ouest

1 a. On peut déterminer le trajet minimal en utilisant l'algorithme de Dijkstra sur le graphe ou à l'aide d'un tableau :



Sommet de marque fixée à chaque étape	Sommet et marques améliorées									
	Cl	Au	B	Ca	V	R	M	G	Al	T
Cl : 0	**0**	157, Cl	167, Cl	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
Au : 157		**157, Cl**	167, Cl	290, Au	258, Au	250, Au				
B : 167			**167, Cl**	267, B	258, Au	250, Au				
R : 250				267, B	307, R	**250, Au**			328, R	
V : 258				319, V	~~258, Au~~			366, V	328, R	
Ca : 267				**267, B**			327, Ca	366, V	328, R	
M : 327							**327, Ca**	366, V	328, R	379, M
Al : 328								350, Al	**328, R**	407, G
G : 350								**350, Al**		379, M
T : 379										**379, M**

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

La distance kilométrique la plus courte entre Clermont-Ferrand et Toulouse est de **379 kilomètres** en passant par Montauban, Cahors, puis Brive.

b. Le camion consomme 12 L de gasoil aux 100 km. Le livreur aura donc besoin de :

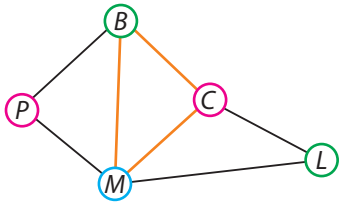
$3{,}79 \times 12 = 45{,}48$, soit **45,48 L de gasoil**.

2 Le graphe est connexe et possède exactement deux sommets de degré impair : Rodez et Gaillac.

Il existe donc une chaîne eulérienne entre ces deux sommets. En partant de Rodez, le transporteur peut emprunter toutes les routes, une fois et une seule, et arriver à Gaillac.

98 Dans la ville

1 **a.** Graphe des rues



b. Deux sommets **B** et **C** de degré pair, donc le trajet passant une fois et une seule par toutes les rues est possible : **B - C - L - M - P - B - M - C** par exemple.

c. Comme tous les degrés ne sont pas pairs, le distributeur de publicité ne peut par revenir à son point de départ sans repasser par une rue déjà parcourue.

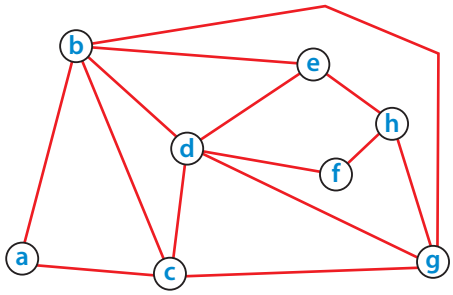
2 Trois couleurs sont nécessaires : au minimum car un sous graphe complet au maximum est d'ordre 3. (par exemple **B C M**) et on peut colorer **P** dans la couleur de **C** et **L** dans la couleur de **B** .

Voir la coloration proposée en **1 a.**.

4 Par l'algorithme de Dijkstra, on obtient 17 min, en passant par D C B M P.

	D	B	C	L	M	P
D 0	0	9 D	5 D	11 D	∞	∞
C 5		8 C	5 D	9 C	14 C	∞
B 8		8 C		9 C	13 B	18 B
L 9				9 C	19 L	18 B
M 13					13 B	17 M
P 17						17 M

99 Réseau de bus



1 **Vrai - Faux**

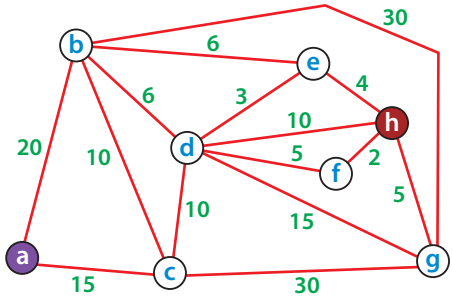
a. L'ordre 8 est le nombre des sommets.

b. **b c d g** est complet, car il y a une ligne directe entre **b** et **g** (longue certes !) .

c. Non il faut au moins 4 couleurs, pour le colorer de manière différente chaque sommet du sous graphe complet **b c d g** .

d. Non, car 4 sommets sont de degré impair : **b d e** et **h** .

2 Une ligne est ouverte entre d et h.



a. Stéphanie peut prendre le trajet **d e h f d g c a b d** , mais on ne peut pas sans repasser par un des lieux déjà visités.

b. Le second graphe a deux sommets seulement de degré impair: **b** et **e** . Donc Stéphanie peut utiliser toutes les lignes de bus une fois et une seule.

Elle doit prendre le bus en **b** ou en **e** .

Elle ne peut pas revenir à son point de départ, car tous les sommets ne sont pas de degré pair.

3 Pour aller de **d** à **g** , on dresse le tableau pour l'algorithme de Dijkstra .

Edition 1 et 2 , lire g au lieu de h en début *d'exercice.*

	a	b	c	d	e	f	h	g
a 0	0	20 a	15 a	∞	∞	∞	∞	∞
c 15		25 c	15 a	25 c	∞	∞	∞	45 c
b 20		20 a		26 b	26 b	∞	∞	50 b
d 25				25 c	28 d	30 d	35 d	40 d
e 26					26 b	30 d	30 e	40 d
f 30						30 d	32 d	40 d
h 30							30 e	35 h
g 35								35 h

Le trajet le plus court est de 35 min passant par **a b e h g** .

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques T^erm ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Partie 4 Problèmes d'évolution

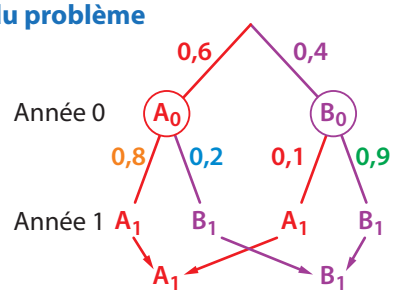
Objectif : Savoir résoudre les systèmes linéaires, en particulier liés à la recherche de courbes polynômiales, en utilisant les matrices.

Découvrir

Activité 1 Modéliser des transferts de populations (p. 298)

Partie A Approche du problème

1 a. Arbre pondéré (voir chapitre 6)



b. On calcule a_1 à l'aide des probabilités totales sur l'arbre ci-dessus.

$$a_1 = 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}4 = \mathbf{0{,}52}$$

D'où $b_1 = 1 - a_1 = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$
ou encore $b_1 = 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}9 \times 0{,}4$.
Soit 52 % en région A et 48 % en région B.

2 a. On retrouve le calcul fait pour a_1.

b. En C3 voir sortie Excel. On a $a_1 + b_1 = 1$.

c. Dès $n = 30$, la répartition stagne, à 0,0001 près.

C3 : =0,2*B2+0,9*C2

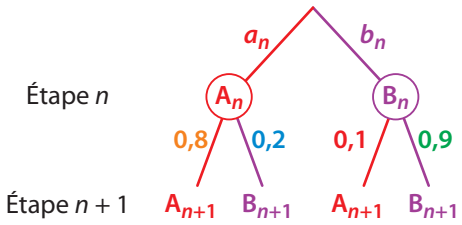
	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	0,6	0,4
3	1	0,52	0,48
4	2	0,464	0,536
5	3	0,4248	0,5752
6	4	0,39736	0,60264
7	5	0,3782	0,6218
29	27	0,3334	0,6666
30	28	0,3333	0,6667
31	29	0,3333	0,6667

Pour la région A, on obtient 0,3333, soit 33,33 % (on peut penser à un tiers).

d. Si on prenait aucun habitant en A et la totalité en B, on trouverait encore à $n = 30$ cette répartition de 1/3 en A et 2/3 en B.

	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	1	0
3	1	0,8	0,2
4	2	0,66	0,34
5	3	0,562	0,438
6	4	0,4934	0,5066
7	5	0,4454	0,5546
31	29	0,3334	0,6666
32	30	0,3333	0,6667

3. a. On dresse l'arbre pondéré par les probabilités

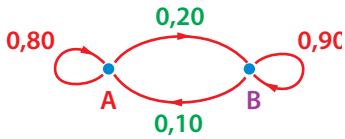


b. On en déduit l'expression des probabilités de A et de B à l'étape $n + 1$.

D'où le système $\begin{cases} a_{n+1} = \mathbf{0{,}8}a_n + \mathbf{0{,}1}b_n \\ b_{n+1} = \mathbf{0{,}2}a_n + \mathbf{0{,}9}b_n \end{cases}$.

Partie B Étude à long terme

1 Le nombre 0,2 signifie que 20 % de la population de la région A passe en région B.



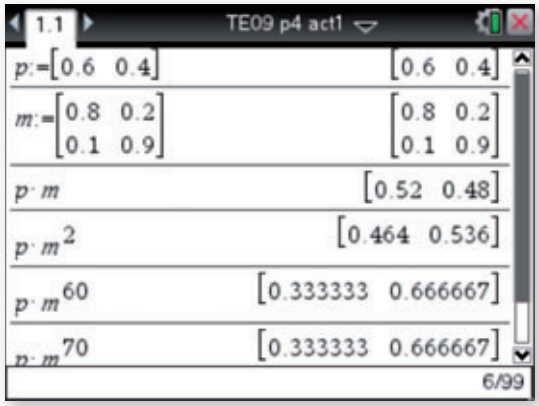
2 a. $P_{n+1} = P_n \times M = [\,a_n \;\; b_n\,] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.

En appliquant le produit de matrices (ligne par colonne) on obtient bien le système.

b. En ligne 1 de M on retrouve 0,8, poids de la boucle en A ; puis 0,2, poids de l'arête de A vers B.
Ainsi $m_{11} = 0{,}8 = P_A(A)$ et $m_{12} = 0{,}2 = P_A(B)$
Les pondérations des arêtes issues de B sont en ligne 2 de la matrice M.

3 a. Comme $P_{n+1} = P_n \times M$ quel que soit n, on a $P_1 = P_0 \times M$ et $P_2 = P_1 \times M = (P_0 \times M) \times M = P_0 \times M \times M = P_0 \times M^2$.

b. Sur TI.Nspire ou calculatrice: on retrouve 1/3 pour A et 2/3 pour B.

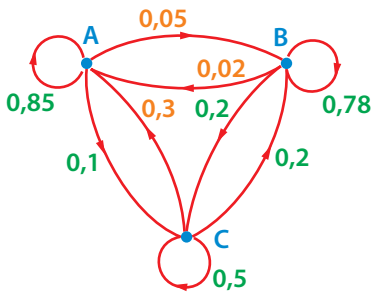


© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Activité 2 Décrire et analyser un marché à trois opérateurs (p. 299)

1 **a.** 0,85 signifie que 85 % des abonnés de l'opérateur A restent abonnés à cet opérateur l'année suivante.
Et 0,1 % des abonnés de A changent d'abonnement pour B.

b. Arbre complété
La somme des arêtes issues d'un sommet doit être égale à 1, puisque cela donne la totalité (100 % = 1) des abonnés de l'opérateur correspondant à ce sommet.

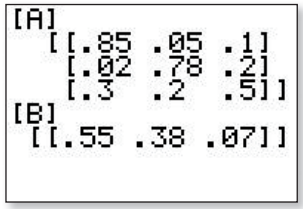


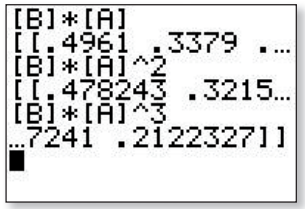
Pondération de A vers B : $1-(0{,}85+0{,}1)=0{,}05$.
Pondération de B vers A : $1-(0{,}78+0{,}2)=0{,}025$.
Pondération de C vers A : $1-(0{,}5+0{,}2)=0{,}3$.

2 **a.** Pour compléter la matrice de transition, vérifier que les nombres en ligne 1 sont les pondérations des arêtes issues de A, et la somme doit être égale à 1.

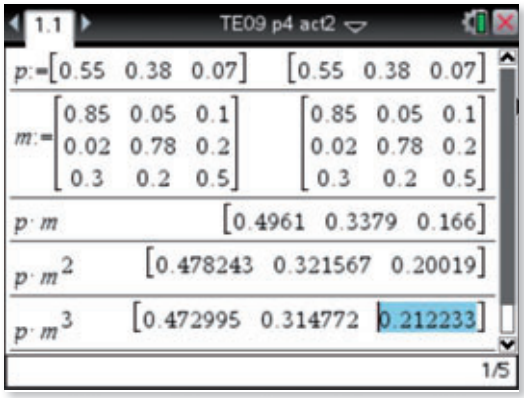
$$M=\begin{bmatrix}0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10\\ 0{,}02 & 0{,}78 & 0{,}20\\ 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}50\end{bmatrix}.$$

b. En 2015, soit $n=3$, l'opérateur C aura une part de marché de 21,22 %.
Résultat sous TI.82





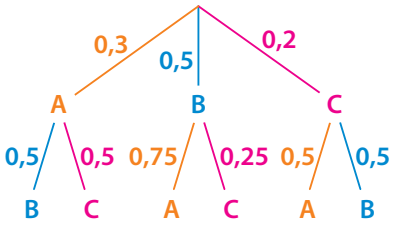
Résultat sous TI.Nspire (arrondi à 10^{-6})



Activité 3 Prévoir à long terme (p. 299)

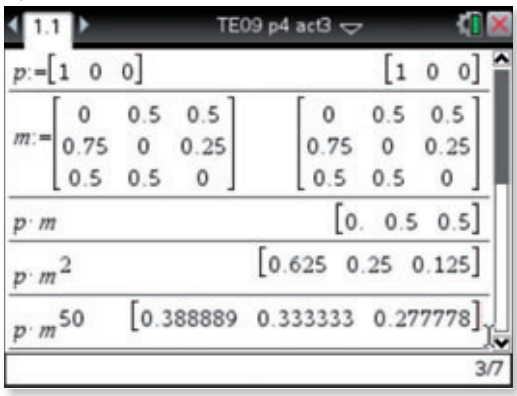
1 **a.** Si A est posée on pose B ou C à la suivante.

b. Pour chaque question posée à la première personne, on ne la pose pas à la personne suivante. Donc la matrice des pondérations a une diagonale composée de 0.



$$M=\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}.$$

2 La question A est posée à la première personne, donc $P_0=[1\ \ 0\ \ 0]$.



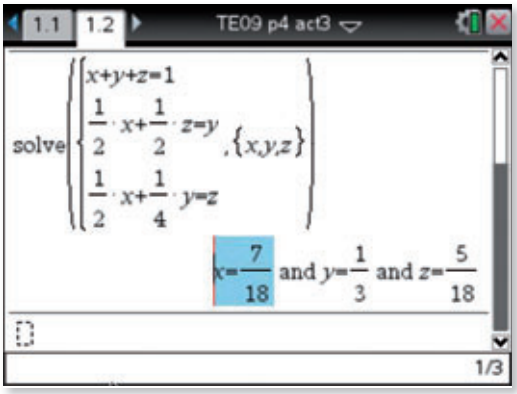
3 **a.** $P=[x\ \ y\ \ z]$. $P\times M=[x\ \ y\ \ z]\times\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}$.

Par produit matriciel, $P\times M=P$ donne le système :

$$\begin{cases}0{,}75y+0{,}5z=x\\ 0{,}5x+0{,}5z=y\\ 0{,}5x+0{,}25y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+0{,}75y+0{,}5z=0\\ 0{,}5x-y+0{,}5z=0\\ 0{,}5x+0{,}25y-z=0\end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solutions car la matrice des coefficients est « singulière » non inversible.
Comme de plus $x+y+z=1$, on peut alors résoudre le système (on remplace une des équations du système par la somme des inconnues égale à 1) :

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 0{,}5x-y+0{,}5z=0\\ 0{,}5x+0{,}25y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}25 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$



b. La question la plus posée probablement est la A, avec une probabilité de 7/18.

4. Cela ne dépend pas de la première question posée, car ce système est indépendant de P_0.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Mise en situation

IX Matrice de transition

100 Vrai ou faux ?

Si les pondérations des arêtes sont des nombres compris entre 0 et 1, et si, **pour chaque sommet**, la somme des pondérations des arêtes **partant de ce sommet est égale à 1**, alors le graphe est un graphe probabiliste. On note *A* le sommet de gauche, *B* celui de droite et *C* celui situé en bas.

a. Vrai : il suffit de rajouter 0 à l'arête de *B* à *A* .

b. Faux : une seule arête de pondération 0,9 part du sommet *A* situé à gauche. Il manque une boucle en *A* de poids 0,1 .

c. Faux : une seule arête de pondération 0,8 part du sommet *C* inférieur.

d. Faux : une seule arête de pondération 0,1 part du sommet *C* inférieur.

101 Vrai ou faux ?

a. $\begin{bmatrix} 0,25 & 0,33 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,85 & 0,15 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 0,15 & 0,15 & 0,6 \\ 0,1 & 0,85 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$

a. et **d. Faux**, car la somme des éléments composant la première ligne n'est pas égale à 1.

b. et **d. Vrai**,

102 Vrai ou faux ?

a. Faux, le carré d'un matrice M n'est pas la matrice composée des carrés des éléments de la matrice M i.

b. Vrai, $M \times M = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0,09+0,14 & 0,21+0,56 \\ 0,06+0,16 & 0,14+0,64 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0,23 & 0,77 \\ 0,22 & 0,78 \end{bmatrix}$.

103 Vrai ou faux ?

a. Faux : il faut vérifier que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

b. On ne peut rien dire, on ne connaît pas la matrice de l'état initial.

c. Vrai : la pondération de l'arête partant du sommet *A* et arrivant au sommet *B* est l'élément situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne.

d. Vrai : à la calculatrice, on obtient :

```
[D]
 [[51000  17000]]
[D]*[C]^30
[[34000.00002 3...
[D]*[C]^32
 [[34000  34000]]
```

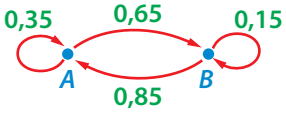
104 Écrire les matrices de transition

1 $M = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,02 & 0,98 \end{bmatrix}$ **2** $M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

3 $M = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$

105 Parts du marché

1 a. Voir graphe ci-dessous.



b. 35 % des clients de A abandonnent A pour devenir client de B.

c. On a $P_0 = [0,5 \quad 0,5]$. D'où :

$P_3 = P_0 \times M^3 = [0,575 \quad 0,425]$.

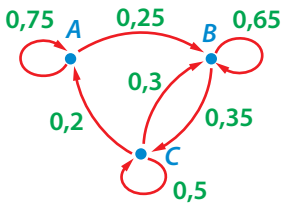
d. Si l'on change la répartition initiale des parts, la répartition P_3 au bout de trois ans est modifiée.

On choisit, par exemple, $P_0 = [0,1 \quad 0,9]$: alors

$P_3 = P_0 \times M^3 = [0,625 \quad 0,375]$.

```
[B]*[A]^3
   [[.575  .425]]
[B]*[A]^3
   [[.625  .375]]
```

2 a. Voir graphe ci-dessous.



b. 35 % des clients de B abandonnent B pour devenir client de C .

c. On a $P_0 = [0,4 \quad 0,3 \quad 0,3]$. D'où :

$P_3 = P_0 \times M^3 = [0,2704 \quad 0,3944125 \quad 0,19753751]$

```
[B]*[A]^3
[[.2704  .394412...
[B]*[A]^3
[[.439375  .3943...
```

d. Si l'on change la répartition initiale des parts, la répartition P_3 au bout de trois ans est modifiée.

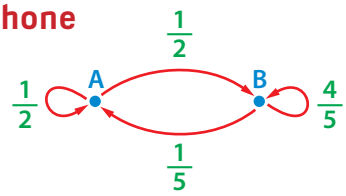
Par exemple, en choisissant $P_0 = [1 \quad 0 \quad 0]$:

$P_3 = P_0 \times M^3 = [0,439375 \quad 0,394375 \quad 0,14875]$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

106 Vente par téléphone

1 a. Graphe probabiliste correspondant à la situation.



A : Le client accepte ; B : le client refuse.

b. On en déduit la matrice de transition :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,5} & \mathbf{0,5} \\ \mathbf{0,2} & \mathbf{0,8} \end{bmatrix}.$$

On vérifie que, sur une ligne, la somme des éléments est égale à 1.

C. L'état probabiliste initial est $P_0 = [\,1 \quad 0\,]$, car Katia a convaincu le premier client.

Comme $P_1 = P_0 \times M$,

puis $P_2 = P_1 \times M = (P_0 \times M) \times M = P_0 \times M^2$,

par itération, on obtient :

$$P_{10} = P_0 \times M_{10} \approx [\,\mathbf{0,286} \quad \mathbf{0,714}\,].$$

Ne pas hésiter à mettre la calculatrice en Mode FLOTT 4, à chiffres après la virgule : La probabilité que Katia arrive à convaincre son dixième client est 0,286 .

```
[B]*[A]
          [[.5 .5]]
[B]*[A]^10
...57185035 .7142...
[B]*[A]^10
 [[.2857 .7143]]
```

D. Si Katia n'a pas su convaincre le 1er client, l'état probabiliste initial est $P_0 = [\,0 \quad 1\,]$.

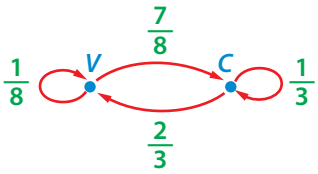
```
[B]
[[0.0000 1.0000...
[B]*[A]^10
 [[.2857 .7143]]
```

$$P_{10} = P_0 \times M^{10} \approx [\,\mathbf{0,286} \quad \mathbf{0,714}\,].$$

Le résultat est identique à 10^{-4} près, donc est indépendant de l'état initial.

107 Jeu de lettres

a. On sait que la première lettre est une voyelle. L'état initial est $P_1 = [\,1 \quad 0\,]$.



D'après le graphe, la probabilité que la deuxième lettre soit une voyelle est $\frac{1}{8}$.

b. La matrice de transition associée au graphe ci-contre est $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Soit P_n l'état probabiliste correspondant aux probabilités que la n^e lettre soit une voyelle ou une consonne.

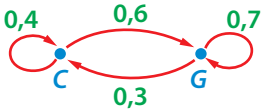
Pour tout entier n, on peut écrire $P_{n+1} = P_1 \times M^{n-1}$.

D'où $P_{25} = P_1 \times M^{24}$. Par calcul, $P_{25} \approx [\,0{,}43 \quad 0{,}57\,]$.

La probabilité que la 25e lettre soit une consonne est environ 0,57.

108 Podcast de deux émissions

a. Voir graphe ci-contre.



b. Soit M la matrice de transition du graphe, l'état initial est $P_1 = [\,0{,}5 \quad 0{,}5\,]$ et $M = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$.

Soit P_n l'état probabiliste au jour n : pour tout entier n, on a $P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

Au bout d'une semaine $n = 7$, on obtient :

$$P_7 = P_1 \times M^6 = [\,0{,}5 \quad 0{,}5\,] \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}^6$$
$$= [\,0{,}3333335 \quad 0{,}6666665\,]$$
$$\approx [\,0{,}3333 \quad 0{,}6667\,].$$

La probabilité qu'un internaute, interrogé au hasard après une semaine, ait téléchargé C est environ égale à 0,3333 .

```
[B]*[A]^6
...3335 .6666665]]
[B]*[A]^13
[[.3333333333 ...
Rep▸Frac
      [[1/3 2/3]]
```

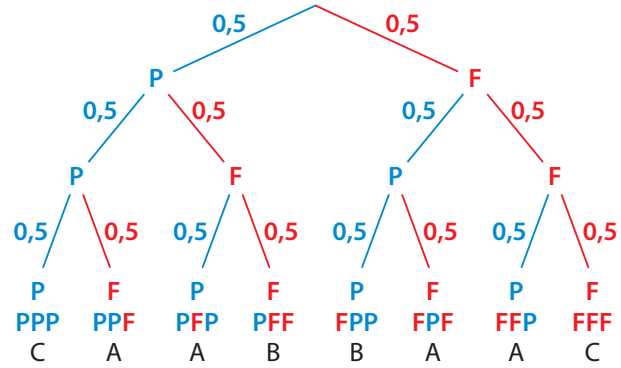
c. Au bout de deux semaines, $n = 14$:

$$P_{14} = P_1 \times M^{13} = [\,0{,}5 \quad 0{,}5\,] \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{13} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

L'émission de l 'humoriste C est la plus téléchargée.

109 Temps d'attente de 5 lancers consécutifs égaux

1 Pour des séquences de longueur 3 , on peut établir un arbre de Bernoulli (revoir la loi binomiale)



2 a. La boucle : « La probabilité qu'une séquence se termine par une séquence de longueur 1 , sachant qu'elle se terminait, au lancer précédent, par une séquence de longueur 1 », a une pondération de 0,5 . (P et F s'alternent à chaque lancer.)

La double flèche : « La probabilité qu'une séquence se termine par une séquence de longueur 2 , sachant qu'elle se terminait, au lancer précédent, par une séquence de longueur 1 » , a une pondération de 0,5 . (La séquence se termine par PFF ou FPP .)

La probabilité qu'une séquence se termine par une séquence de longueur 1 , sachant qu'elle se terminait, au lancer précédent, par une séquence de longueur 2, est égale à 0,5 . (La séquence se termine par PPF ou FFP .)

b.

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

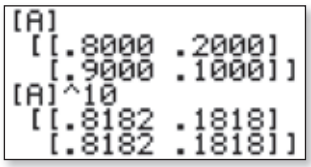
3 **a.** L'état initial est $P_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.
b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.
c. $P_{100} = P_1 \times M^{99}$. On obtient à la calculatrice :
$P_{100} \approx [0{,}0147 \quad 0{,}0076 \quad 0{,}0040 \quad 0{,}0020 \quad 0{,}9717]$.

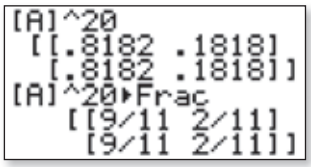
d. P(E) est le 5e élément de la matrice ligne P_{100}. La probabilité d'avoir une séquence de longueur au moins 5 est d'environ 97,17 %.

X État stable

110 Détermination de l'état stable

1. a. Calculs à la calculatrice en Mode FLOTT 4 :





b. L'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie :

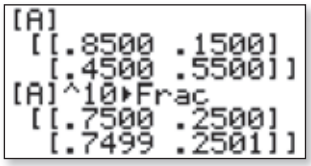
$$[x \quad y] = [x \quad y] \times M \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}8x + 0{,}9y = x \\ 0{,}2x + 0{,}1y = y \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

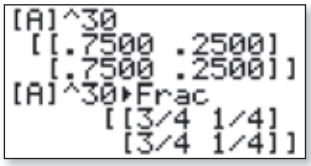
On peut résoudre ce système « à la main » :

$$\begin{cases} 0{,}2x = 0{,}9y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4{,}5y \\ 5{,}5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{11} \\ y = \dfrac{2}{11} \end{cases}.$$

L'état stable du graphe est $\mathbf{P} = \left[\dfrac{9}{11} \quad \dfrac{2}{11}\right]$.

2. a. Calculs à la calculatrice en Mode FLOTT 4 :





b. L'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie :

$$[x \quad y] = [x \quad y] \times M \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}85x + 0{,}45y = x \\ 0{,}15x + 0{,}55y = x \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

On peut résoudre ce système « à la main ».

$$\begin{cases} 0{,}15x = 0{,}45y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

L'état stable du graphe est $\mathbf{P} = \left[\dfrac{3}{4} \quad \dfrac{1}{4}\right]$.

111 Échanges de production

En prenant les sommets dans cet ordre A1 , A2, Ag .

a. $M = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}$

b. En calculant les puissances successives de M , on obtient pour état stable $P = \left[\dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3}\right]$.

Vérifions que $P \times M = P$.

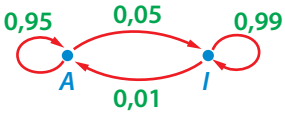
$$\left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right] \times \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}1) \quad \frac{1}{3}(0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}6) \quad \frac{1}{3}(0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right].$$

112 Banque sur Internet

1 Voir graphe ci-contre.



2 **a.** $P_0 = [0{,}92 \quad 0{,}08]$

et $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{bmatrix}$.

b. $P_1 = P_0 \times M = [0{,}8748 \quad 0{,}12521]$.
c. En 2015, $n = 5$
$P_5 = P_0 \times M^5$, donc $P_5 \approx [0{,}7195 \quad 0{,}2805]$.

3 Soit P l'état stable, P vérifie $P \times M = P$

Or $P \times M = [x \quad y] \times \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{bmatrix}$

$= [0{,}95x + 0{,}01y \quad 0{,}05x + 0{,}99y]$.

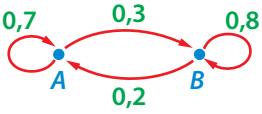
Sachant que $x + y = 1$, on résout donc le système :

$$\begin{cases} 0{,}95x + 0{,}01y = x \\ 0{,}05x + 0{,}99y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

L'état stables est $P = \left[\dfrac{1}{6} \quad \dfrac{5}{6}\right]$.

113 Évolution vers un état stable

1 **a.** Voir graphe ci-contre.



b. $M = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$.

2 **a.** $P_1 = [0{,}20 \quad 0{,}80]$.
b. $P_3 = P_1 \times M^2 = [0{,}35 \quad 0{,}65]$.
Au bout de 3 semaines, 35 % des élèves ont choisi la pièce A.

3 **a.** Soit P l'état stable $P = [x \quad y]$ qui vérifie l'équation $P = P \times M$

c'est-à-dire $[x \quad y] = [x \quad y] \times \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$.

D'où l'égalité matricielle :
$[x \quad y] = [0{,}7x + 0{,}2y \quad 0{,}3x + 0{,}8y]$ avec $x + y = 1$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

On résout le système :

$$\begin{cases} 0,7x+0,2y=x \\ 0,3x+0,8y=y \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3x \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0,4 \\ y=0,6 \end{cases}.$$

L'état stable est $P=[0,4 \quad 0,6]$.

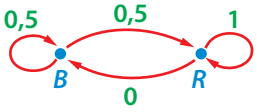
b. La pièce Bérénice finira par être la pièce préférée des élèves.

114 Évolution de la couleur des fleurs.

On note b_n et r_n les probabilités qu'une fleur soit bleue (B), respectivement rose (R) à l'année n.

On note l'état probabiliste $P_n=[b_n \quad r_n]$.

1 a. Voir le graphe ci-contre.



b. $M=\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2 a. $P_1=P_2=[1 \quad 0]$.

Et $P_3=P_2\times M=[0,5 \quad 0,5]$.

$$P_4=P_2\times M^2=[0,5 \quad 0,5]\times\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=[0,25 \quad 0,75].$$

La probabilité que la plante donne une fleur bleue la quatrième année est égale à 0,25.

b. Voir calculs ci-contre : l'état stable semble être $[0\,;1]$, c'est-à dire plus de fleurs bleues.

```
[B]*[A]^180
…25304468E-55 1…
[B]*[A]^200
…23015278E-61 1…
[B]*[A]^250
…27147875E-76 1…
```

Soit P l'état stable $P=[x \quad y]$ vérifie $P=P\times M$ c'est-à-dire :

$$[x \quad y]=[x \quad y]\times\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$[x \quad y]=[0,5x \quad 0,5x+y]$ avec $x+y=1$.

On résout le système :

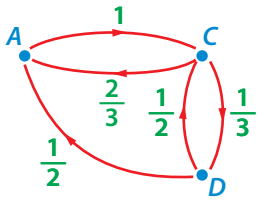
$$\begin{cases} 0,5x=x \\ 0,5x+y=y \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

L'état stable est $P=[0 \quad 1]$. À long terme, toutes fleurs seront roses.

115 Jeu à trois joueurs

a. Ali envoie toujours le diabolo à Cloé.

b. La matrice de transition du graphe est :



$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Au départ, soit Ali, soit Cloé, soit Dan a le diabolo..

L'état initial P_0 peut être soit $[1 \quad 0 \quad 0]$, soit $[0 \quad 1 \quad 0]$, soit $[0 \quad 0 \quad 1]$.

À la calculatrice en calculant $P_0\times M^{20}$, dans chacun des cas, on observe que la probabilité que Dan ait la balle après 20 échanges est presque nulle.

```
[B]*[A]^20
…53817169E-8 0]]
[B]*[A]^20
….653817169E-8]]
[B]*[A]^20
        [[1 0 0]]
```

c. Comme $[1 \quad 0 \quad 0]\times M=[1 \quad 0 \quad 0]$, donc l'état stable est $P=[1 \quad 0 \quad 0]$.

Autre méthode : Soit P l'état stable $P=[x \quad y \quad z]$ vérifie $P=P\times M$ c'est-à-dire :

$$[x \quad y \quad z]\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}=[x \quad y \quad z]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}z=x \\ \frac{1}{2}z=y \\ \frac{1}{3}y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}y=0 \\ z=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Si les joueurs jouent un très grand nombre de parties, Ali recevra toujours le diabolo.

116 Marketing

1. a. $M=\begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}$.

b. $P_0=[0 \quad 0 \quad 1]$ et $P_1=P_0\times M=[0,1 \quad 0 \quad 0,9]$.

$P_2=[0,16 \quad 0,01 \quad 0,83]$.

$P_{10}\approx[0,248488 \quad 0,0989123 \quad 0,652599]$.

2. a. Au bout de 10 mois, le bénéfice du distributeur A est environ : $0,248488\times 100\,000$, soit **24 849 €**.

Le bénéfice du distributeur C est environ : $0,0989123\times 90\,000$, soit **8 902 €**.

Le bénéfice du distributeur L est environ : $0,652599\times 80\,000$, soit **52 208 €**.

Les distributeurs A et C pourraient envisager d'arrêter la vente du produit.

b. L'état stable $P=[x \quad y \quad z]$ vérifie :

$$[x \quad y \quad z]=[x \quad y \quad z]\times M \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x+0,1y+0,1z=x \\ 0,1x+0,8y=y \\ 0,2x+0,1y+0,9z=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

On écrit ces équations sous forme linéaire et, des trois premières, on n'en conserve que deux, que l'on multiplie par 10 pour éviter les nombres décimaux.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x+0,1y+0,1z=0 \\ 0,2x+0,1y-0,1z=0 \\ 0,1x-0,2y=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-2y=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Écriture matricielle du système : $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$ avec A la matrice des coefficients et B la matrice des seconds membres.

```
[A]
      [[2  1   -1]
       [1  -2  0 ]
       [1  1   1 ]]
```

```
[B]
            [[0]
             [0]
             [1]]
```

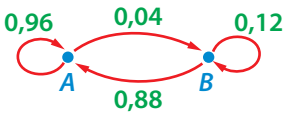
D'où la solution :

```
[A]^-1*[B]
            [[.25 ]
             [.125]
             [.625]]
```

• À long terme, le bénéfice du distributeur A est :
$0{,}25 \times 100\,000 = 25\,000$.
La vente du produit peut être poursuivie pour A.
• Le bénéfice du distributeur C est :
$0{,}125 \times 90\,000 = 11\,250$.
Le distributeur C aura intérêt à arrêter la vente du produit.
• Le bénéfice du distributeur L est :
$0{,}625 \times 80\,000 = 50\,000$.
La vente du produit peut être poursuivie pour L.

117 Étude des risques de sinistres

1 a. A est l'état probabiliste : « Aucun accident ne se produit au cours de l'année » et $\overline{A}$ l'état contraire.



b. $M = \begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}88 & 0{,}12 \end{bmatrix}$.

c. Pour tout entier n, l'état probabiliste à l'année n est $P_n = P_0 \times M^n$ où $P_0 = [1 \quad 0]$.

$P_5 = [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}88 & 0{,}12 \end{bmatrix}^5$. Donc $P_5 \approx [0{,}9565 \quad 0{,}0435]$.

La probabilité que l'assuré n'ait eu aucun accident pendant 5 ans est environ égale à 0,9565.

```
[[.9565218816 ...
[B]*[A]^10
[[.9565217391 ...
[B]*[A]^12
[[.9565217391 ...
Rep▸Frac
  [[22/23 1/23]]
```

d. On note A_n l'événement : « Aucun accident ne se produit au cours de l'année n », de probabilité $a_n = P(A_n)$.
Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, on constate que les valeurs de a_n varient peu. Au dix-millième près, pour tout entier n : $P(A_n) \approx 0{,}9565$.
Remarque : À l'aide de la calculatrice, en demandant l'écriture en fraction du résultat, on peut conjecturer que l'état stable est $P = \begin{bmatrix} \frac{22}{23} & \frac{1}{23} \end{bmatrix}$.

Prolongements :
1. On peut déterminer l'état stable algébriquement en résolvant le système :
Soit P l'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie $P = P \times M$ c'est-à-dire $[x \quad y] = [x \quad y] \times M$.

$$\begin{cases} 0{,}96x + 0{,}88y = x \\ 0{,}04x + 0{,}12 \ y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88(1-x) = 4x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 88 = 92x \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{23} \\ y = \frac{1}{23} \end{cases}.$$

2. On peut exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et étudier une suite arithmético-géométrique.
Pour tout entier n, $a_{n+1} = 0{,}96\,a_n + 0{,}88\,(1 - a_n)$
$= \mathbf{0{,}08}\,a_n + 0{,}88$.
En utilisant la suite auxiliaire de terme général : $u_n = a_n - \frac{22}{23}$.
(22/23 est la solution de l'équation $x = 0{,}08\,x + 0{,}88$.)
On trouve, pour tout entier n :

$$u_n = \left(\frac{1}{23}\right) \times \mathbf{0{,}08^n} \text{ et } a_n = \frac{22}{23} + \frac{1}{23} \times 0{,}08^n.$$

2 Un intervalle de confiance au seuil de 95 % est de la forme $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où f est la fréquence observée et n l'effectif de l'échantillon. Ainsi :

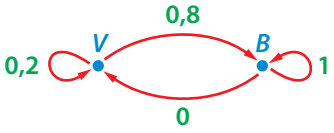
Pour A : $I_1 = \left[0{,}12 - \frac{1}{100} \ ; \ 0{,}12 + \frac{1}{100}\right] = [0{,}11 \ ; 0{,}13]$.

Pour B : $I_2 = \left[0{,}04 - \frac{1}{100} \ ; \ 0{,}04 + \frac{1}{100}\right] = [0{,}03 \ ; 0{,}05]$.

XI Lien avec les suites

118 Étude de la propagation d'un virus d'un site à l'autre

1. a. Si un site est sain, il ne propage pas le virus.
b. Matrice de transtion :



$M = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. a. $P_1 = [1 \quad 0]$ et $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où : $[v_{n+1} \quad b_{n+1}] = [v_n \quad b_n] \times \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= [0{,}2\,v_n \quad 0{,}8\,v_n + b_n]$.

Donc, pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}2\,v_n$.

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $v_1 = 1$.
Donc, pour tout entier n, $\boldsymbol{v_n = 0{,}2^{n-1}}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

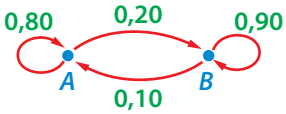
c. Comme $0{,}2 \in]0\,;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

d. Quand n devient très grand, l'état probabiliste se stabilise et devient $[0 \quad 1]$.
On peut aussi déterminer l'état stable par résolution d'un système d'équations :

$$[x \quad y] = [x \quad y] \times M \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2x = x \\ 0{,}8x + y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

119 Concurrence

1 a. $M = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.



b. $P_0 = [0{,}6 \quad 0{,}4]$.

$$P_1 = [0{,}6 \quad 0{,}4] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} = [0{,}52 \quad 0{,}48].$$

c. Soit P l'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie $P = P \times M$

c'est-à-dire $[x \quad y] = [x \quad y] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.

Doù $[x \quad y] = [0{,}8x + 0{,}1y \quad 0{,}2x + 0{,}9y]$ avec $x + y = 1$.
On résout le système :

$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}1y = x \\ 0{,}2x + 0{,}9y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 - x \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

L'état stable est donc $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

À long terme, $\frac{1}{3}$ de la population voyagera avec la compagnie A et $\frac{2}{3}$ de la population avec la compagnie B.

2 a. Pour tout entier n, on a :

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow [a_{n+1} \quad 1 - a_{n+1}] = [a_n \quad 1 - a_n] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour tout entier n, on obtient la relation de récurrence : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1(1 - a_n) = 0{,}7a_n + 0{,}1$.

b. On admet que, pour tout entier n, $a_n = \frac{4}{15} 0{,}7^n + \frac{1}{3}$.

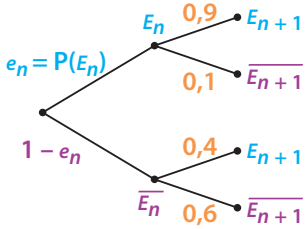
Or $0 < 0{,}7 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7 = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3} = x$.

120 Généreux donateur

1 a. $P(E_0) = 1$ et $P(\overline{E_0}) = 0$, donc :
$e_1 = P(E_1) = P(E_1 \cap E_0) = 0{,}9$.

b. Arbre de probabilité :



c. Pour tout entier n, E_n et $\overline{E_n}$ et forment une partition de l'univers, donc on calcule $P(E_{n+1})$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à E_{n+1} :

$$e_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$$
$$= 0{,}9e_n + 0{,}4(1 - e_n) = 0{,}5e_n + 0{,}4.$$

2 a. Voir graphe probabiliste ci-contre.



$$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

b. Pour tout entier n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

c. en 2014, $n = 3$, donc, comme $P_0 = [1 \quad 0]$:

$$P_3 = P_0 \times \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}^3 = [0{,}825 \quad 0{,}175].$$

La probabilité que M. X soit donateur en 2014 est égale à 0,825.

d. Pour tout entier n,

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow [e_{n+1} \quad 1 - e_{n+1}] = [e_n \quad 1 - e_n] \times \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow [e_{n+1} \quad 1 - e_{n+1}] = [0{,}9e_n + 0{,}4(1 - e_n) \quad 0{,}1e_n + 0{,}6(1 - e_n)].$$

D'où la relation de récurrence, pour tout entier n,
$e_{n+1} = 0{,}5e_n + 0{,}4$.

3 a. Soit P l'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie $P = P \times M$

c'est-à-dire $[x \quad y] \times \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} = [x \quad y]$.

$[x \quad y] = [0{,}9x + 0{,}4y \quad 0{,}1x + 0{,}6y]$ avec $x + y = 1$, on résout le système :

$$\begin{cases} 0{,}9x + 0{,}4y = x \\ 0{,}1x + 0{,}6y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

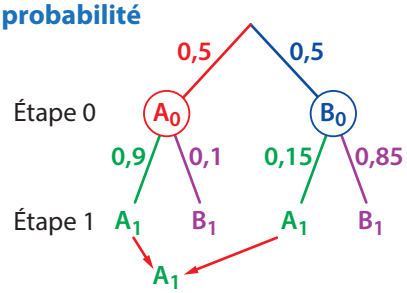
L'état stable est $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = [0{,}8 \quad 0{,}2]$.

L'association peut être confiante, la probabilité que M. X. continue ses dons, à long terme, est égale à 0,8.

121 Sondage politique

Partie A Calculs de probabilité

1 $P(A_0) = 0{,}5$
et $P_{A_0}(A_1) = 0{,}9$
et $P_{B_0}(A_1) = 0{,}15$.
D'où l'arbre pondéré ci-contre.



2 A_0 et B_0 forment une partition de l'univers.
On calcule $P(A_1)$ en ajoutant les produits des probabilités situées sur les branches arrivant à A_1.

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A_0) + P(A_1 \cap B_0) = 0{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}15$$
$$= 0{,}45 + 0{,}075 = 0{,}525.$$

Au bout d'un mois, 52,5 % des personnes sondées sont favorable au groupe A.

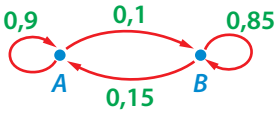
3 $P_{A_1}(A_0) = \dfrac{P(A_1 \cap A_0)}{P(A_1)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}525} = \dfrac{6}{7}$.

Partie B Étude d'un graphe probabiliste

1 $P_0 = [0{,}5 \quad 0{,}5]$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

2 Graphe probabiliste.



3 $P_2 = P_0 \times M^2$
$= [0,54375 \quad 0,45625]$
$\approx [0,54 \quad 0,46]$

4 Soit P l'état stable $P = [x \quad y]$ vérifie $P = P \times M$ c'est-à-dire $[x \quad y] \times \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix} = [x \quad y]$.

$[x \quad y] = [0,9x + 0,15y \quad 0,1x + 0,85y]$ avec $x + y = 1$, on résout le système :

$$\begin{cases} 0,9x + 0,15y = x \\ 0,1x + 0,85y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3(1-x) \\ y = 1 - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

L'état stable est donc $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = [0,6 \quad 0,4]$.

Au bout de plusieurs mois, 60 % des personnes sondées sont favorables au groupe A.

Partie C Étude dune suite

1 Pour tout entier n, on a :

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow [a_{n+1} \quad 1 - a_{n+1}] = [a_n \quad 1 - a_n] \times \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

Ainsi par produit matriciel avec la 1re colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,15(1 - a_n) = 0,75a_n + 0,15.$$

2 Pour tout entier n, on pose $u_n = a_n - 0,6$.

a. Pour tout entier n :

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,75a_n + 0,15 - 0,6 = \mathbf{0,75}a_n - 0,45$
$= \mathbf{0,75}(a_n - 0,6) = 0,75u_n$

car $-0,6 \times 0,75 = -0,15$ ou on calcule $-\frac{0,45}{0,75} = -0,6$ pour mettre **0,75 en facteur**.

La suite (u_n) est géométrique de raison **0,75** et de terme initial $u_0 = -0,1$.

b. Pour tout entier n, $u_n = -0,1 \times \mathbf{0,75}^n$,
donc $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,75^n$.

c. Or $0 < \mathbf{0,75} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{0,75}^n = 0$
d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.

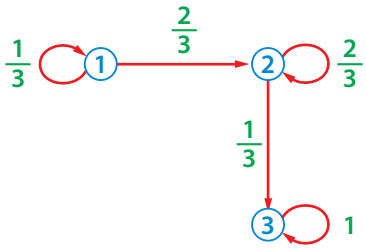
Au bout de plusieurs mois, 60 % des personnes sondées seront favorables au groupe A.

L'état stable du graphe représente l'état vers lequel converge l'état probabiliste P_n lorsque n tend vers l'infini, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x = 0,6$.

122 Publicité mensongère ?

Partie A Étude d'un graphe probabiliste

1 **a.** Voir graphe ci-contre



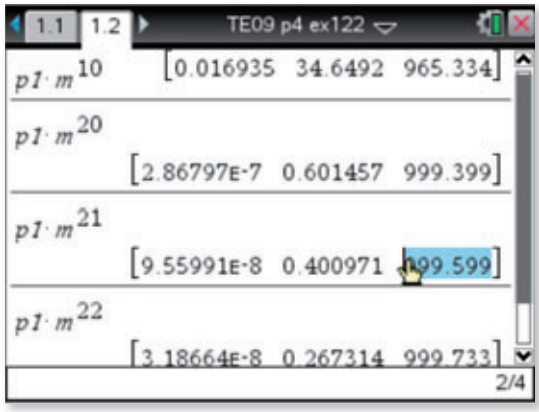
b. La matrice de transition associée est :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. $P_1 = [1\,000 \quad 0 \quad 0]$.

d. $P_{11} = P_1 \times M^{10} = [0 \quad 35 \quad 965]$,
en valeurs arrondies à l'unité.
Après avoir acheté 11 canettes, 35 personnes n'ont encore obtenu que 2 lettres appartenant au nom du groupe rock.

e. À la précision de la calculatrice,
$P_{22} = P_1 \times M^{21} = [\approx 0 \quad \approx 0,4 \quad \approx 999,6]$.
Donc arrondi à l'unité on obtient $[0 \quad 0 \quad 1000]$.
Le consommateur devra acheter au moins 22 canettes.



On peut aussi faire l'exercice sur tableur.

Partie B Étude de suite

Pour tout entier n, $P_{n+1} = M' \times P_n$ et $P_n = M'^{n-1} \times P_1$.

$$M' = {}^tM = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } P1 = \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Et $P_{11} = M'^{10} \times P_1$.

$$P_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^{10} \times \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 965 \end{bmatrix}$$

valeurs arrondies à l'unité.

Après avoir acheté 11 canettes, 35 personnes n'ont encore que deux lettres du nom du groupe rock.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Term ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

Accompagnement personnalisé

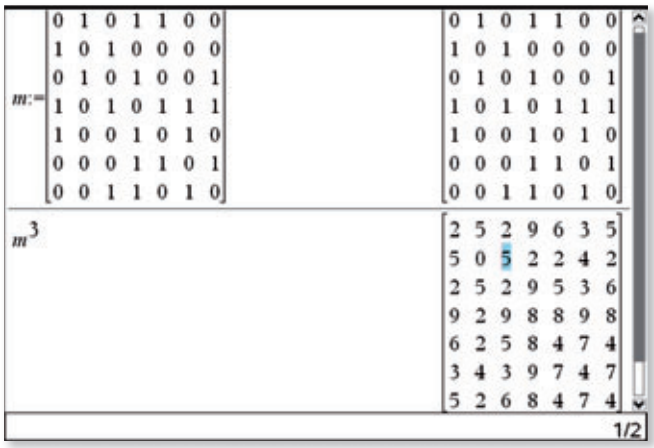
Exercice guidé

123 Partie A

1 a. Le graphe contient quatre sommets de degré impair (plus de deux) , donc Malik ne peut pas parcourir une seule fois tous les couloirs de cette entreprise.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	2	3	5	3	3	3

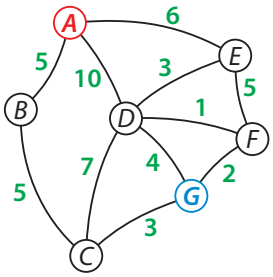
b. On lit l'élément a_{23} de la matrice M^3 donnée : il y a 5 chemins de **longueur 3** entre les sommets B et C.



2 Algorithme de Dijkstra

	A	B	C	D	E	F	G
A ; 0	0	5 , A	∞	10 , A	6 , A	∞	∞
B ; 5		5 , A	10 , B	10 , A	6 , A	∞	∞
E ; 6			10 , B	9 , E	6 , A	11 , E	∞
D ; 9			10 , B	9 , E		10 , D	13 , D
C ; 10			10 , B			10 ; D	12 , F
F ; 10						10 , D	12 ; F
G ; 12							12 , F

Le chemin contenant le minimum d'obstacle est le chemin A → E → D → F → G .
Malik rencontre 12 obstacles.



Partie B

1 Graphe probabiliste :
Matrice de transition :

$$M = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}.$$



2 Pour tout entier $n \geqslant 1$:
$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow [\,a_{n+1} \quad b_{n+1}\,] = [\,a_n \quad b_n\,] \times M$
$\Leftrightarrow [\,\boldsymbol{a_{n+1}} \quad b_{n+1}\,] = [\,\mathbf{0,7}\,\boldsymbol{a_n} + \mathbf{0,2}\,\boldsymbol{b_n} \quad 0,3\,a_n + 0,8\,b_n\,]$.
On traduit l'égalité des premiers éléments des matrice par : Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$\boldsymbol{a_{n+1}} = 0,7\,a_n + 0,2\,b_n = 0,7\,a_n + 0,2(1 - a_n) = \mathbf{0,5}\,a_n + 0,2$.

3 a. On pose la suite (u_n) , définie pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - 0,4$.
$u_{n+1} = \boldsymbol{a_{n+1}} - 0,4 = \mathbf{0,5}\,\boldsymbol{a_n} + \mathbf{0,2} - 0,4 = 0,5\,a_n - 0,2$
$= \mathbf{0,5}(a_n - 0,4) = \mathbf{0,5}\,u_n$.
(On met le **coefficient de a_n en facteur**.)
La suite est géométrique de raison **0,5** et de terme initial $u_1 = 1 - 0,4 = 0,6$.
On en déduit, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 0,6 \times \mathbf{0,5}^{n-1}$.
b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, comme $a_n = u_n + 0,4$, alors $a_n = 0,6 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.
c. Or $0 < \mathbf{0,5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{0,5}^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,4$.
d. Cette limite permet de conjecturer que l'état stable du graphe est $P = [\,0,4 \quad 0,6\,]$.
Vérification : résoudre l'équation :
$P = P \times M \Leftrightarrow [\,x \;\; y\,] = [\,x \;\; y\,] \times M$ avec $x + y = 1$

$$\begin{cases} 0,7x + 0,2y = x \\ 0,3x + 0,8y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x = 0,2y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2x + 3x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{5} = 0,6 \\ x = \dfrac{2}{5} = 0,4 \end{cases}.$$

D'où l'état stable $P = [\,0,4 \quad 0,6\,]$.
On peut aussi utiliser la conjecture et calculer $[\,0,4 \quad 0,6\,] \times M$, puis vérifier que l'on obtient $[\,0,4 \quad 0,6\,] = P$.

Réussir au Bac

124 3e degré et point d'inflexion.

1 Il y a 4 inconnues, donc pour déterminer cette fonction, 4 équations sont nécessaires, et suffisantes si la matrice des coefficients est inversible.
2 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$

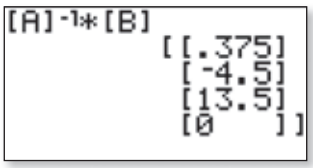
3 a.
$$\begin{cases} f(4) = 6 \\ f(6) = 0 \\ f'(6) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64a + 16b + 4c + d = 6 \\ 216a + 36b + 6c + d = 0 \\ 108a + 12b + c = 0 \\ 24a + 2b = 0 \end{cases}.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

b. Traduction matricielle du système :
$A \times X = B$, où la matrice des coefficients est :

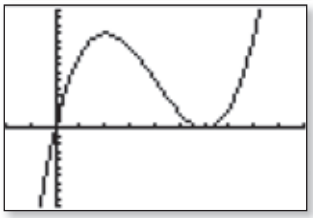
$$A = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 108 & 12 & 1 & 0 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

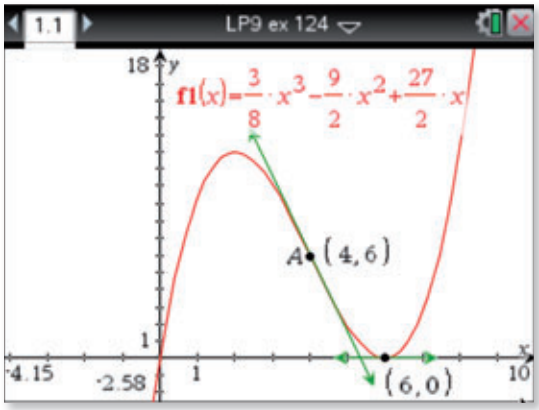
On résout et on calcule $X = A^{-1} \times B$.



$f(x) = 0{,}375x - 4{,}5x + 13{,}5$
ou $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x$.

c. Voir la représentation graphique ci-dessous à l'aide de Ti-82.
On peut faire les vérifications des données sous TI.Nspire, ou tout logiciel dynamique.





125 Discontinuité de rythme.

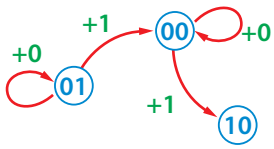
a. f est la fonction affine telle que $(11,9) = 158$ et $f(13,9) = 179$.
D'où $f(x) = 10{,}5x + 33{,}05$.
b. g est la fonction affine telle que $(14,5) = 183$ et $g(17) = 186$.
D'où $g(x) = 1{,}2x + 165{,}6$.
c. L'abscisse x du point de « cassure » vérifie

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10{,}5x + 33{,}05 = 1{,}2x + 165{,}6$$
$$\Leftrightarrow 9{,}3x = 132{,}55$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2\,651}{186} \text{ soit } \approx 14{,}25.$$

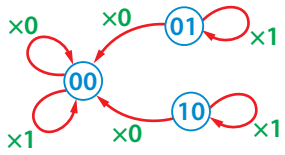
La vitesse maximale aérobie est de 14,25 km/h.

126 Addition et multiplication en binaire

1 **Attention** Le graphe dessiné dans l'édition 1 et 2 est erroné. Il faut lire 00 au lieu de 01 et 01 au lieu de 00.

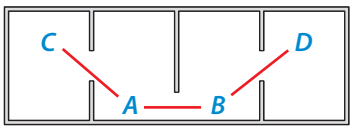


2 Graphe de la multiplication



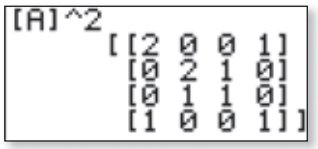
127 Nombre de chemins

1 Un plan possible des salles et le graphe



2 Le graphe est d'ordre 4, donc la matrice d'adjacence est une matrice carrée d'ordre 4.
Le graphe n'est pas orienté (on va dans les deux sens), donc la matrice est symétrique.
Le sommet **A** est de degré 2, une arête existe entre les sommets A et B et une autre entre A à C donc :
$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 1$; une arête existe entre les sommets B et D, donc $a_{24} = a_{42} = 1$.

3 On calcule le carré de la matrice d'adjacence.
La somme des éléments de la diagonale est 6.
Ce qui correspond au nombre de cycles (d'un sommet vers lui-même) de longueur 2 de ce graphe.



a. On ajoute tous les nombres des lignes de la matrice : $3+2+3+2+2+1+2+1 = 16$ chemins si on considère qu'un chemin de **A** vers **B** n'est pas le même que de B vers A. Sinon, il y en a 8, car la matrice est symétrique.
b. Il y a 3 chemins partant de la salle **A** et arrivant à la salle **B** : **A-C-A-B** ; **A-B-D-B** ; **A-B-A-B**
La matrice M^3 ne comporte que des 0 sur la diagonale, il n'y a donc aucun cycle de longueur 3 dans ce graphe.

128 Un orchestre en tournée.

1 Tableau pour la recherche d'une chaîne eulérienne.

Sommet	A	**B**	C	D	**E**	F	G	H
Degré	2	**3**	4	4	**3**	2	2	4

Le graphe est connexe et ne contient que deux sommets B et E de degré impair. Il existe donc une chaine eulérienne reliant ces sommets. On peut organiser la tournée en passant une fois et une seule sur chacun des tronçons d'autoroute.

2 $a_{28} = 3$, il existe donc 3 chemins de longueur 3 partant de B et arrivant à H.

3 Algorithme de Dijkstra

	A	B	C	D	E	G	H	F
A ; 0	0	300 , A	500 , A	∞	∞	∞	∞	∞
B ; 300		300 , A	500 , A	700 , B	∞	∞	∞	∞
C ; 500			500 , A	600 , C	700 , C	∞	∞	∞
D ; 600				600 , C	700 , C	∞	1 300 , D	1 300 , D
E ; 700					700 , C	900 , E	1 000 , E	1 300 , D
G ; 900						900 , E	1 000 , E	1 300 , D
H ; 1000							1 000 , E	1 200 , H
F ; 1200								1 200 , H

Le trajet le plus court mesure 1 200 km et passe par les sommets A-C-E-H-F.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

129 Matrice de Leontief

1 La matrice des consommations finales est :

$$C_f = \begin{bmatrix} 250 \\ 1800 \end{bmatrix}.$$

2 a. $M = \begin{bmatrix} \frac{50}{500} & \frac{200}{2500} \\ \frac{150}{500} & \frac{550}{2500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,8 \\ 0,3 & 0,22 \end{bmatrix}$

b. $P = M \times P + C_f \Leftrightarrow P - M \times P = C_f \Leftrightarrow (I - M) \times P = C_f$.

$$\begin{bmatrix} \frac{50}{500} & \frac{200}{2500} \\ \frac{150}{500} & \frac{550}{2500} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 500 \\ 2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 250 \\ 700 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 \\ 1800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 2500 \end{bmatrix}.$$

$$I - M = \begin{bmatrix} \frac{450}{500} & \frac{200}{2500} \\ \frac{150}{500} & \frac{1950}{2500} \end{bmatrix}$$

et $(I - M) \times P = \begin{bmatrix} \frac{450}{500} & \frac{-200}{2500} \\ \frac{-150}{500} & \frac{1950}{2500} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 500 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 1800 \end{bmatrix}$.

3 $\begin{bmatrix} \frac{450}{500} & \frac{-200}{2500} \\ \frac{-150}{500} & \frac{1950}{2500} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 450 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 1815 \end{bmatrix}$.

130 Durée minimale d'un trajet

Partie A Étude d'un graphe

1 a. $a_{21} = 0$ et $a_{12} = 1$ donc la matrice n'est pas symétrique, elle est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté.

b. $a_{31} = 0 = a_{13}$ donc il n'y a pas d'arête orientée entre les sommets A et C

Le graphe n'est pas complet.

c. Tableau pour la recherche d'une chaîne eulérienne.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	3	4	2	3	3	3

Le graphe est connexe et quatre sommets sont de degré impair, donc il n'existe pas de chaîne eulérienne. On ne peut pas parcourir toutes les arêtes du graphe une fois, et une seule.

2 a. M^2 M^3 M^4 et la somme de ces trois matrices.

Les éléments de la matrice $M + M^2 + M^3$ sont égaux au nombre total de chemins entre deux sommets. On lit qu'il y a 5 chemins entre les sommets A et F.

m^2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m^3

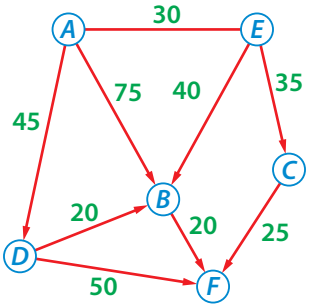
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m+m^2+m^3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. En calculant à l'aide de la calculatrice $M + M^2 + M^3$, l'élément a_{16} de cette matrice est égal à 5, donc au total, il existe 5 chemins allant de A vers F.

3 a. Visuel du graphe



b. Algorithme de Dijkstra

	A	B	C	D	E	F
A ; 0	0	75 , A	∞	45 , A	30 , A	∞
E ; 30		70 , E	65 , E	45 , A	30 , A	∞
D ; 45		65 ,D	65 , E	45 , A		95 , D
B ; 65		65 , D	65 , E			85 , B
C ; 65			65 , E			90 , C
F ; 85						85 , B

Le trajet de durée minimale est A → D → B → F.

La durée minimale est 85 minutes.

Partie B Loi de probabilité

1 a. On reconnait la répétition de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « Utiliser le trajet de plus courte durée », la probabilité de succès étant $p = 0,4$.

La variable aléatoire X égale au nombre de fois où le commercial utilise ce trajet suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0,4)$.

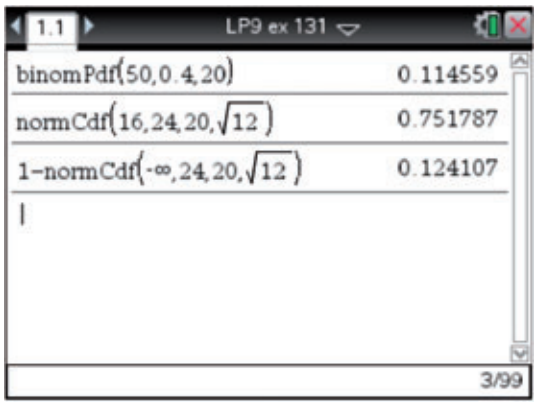
b. $E(X) = n \times p = 50 \times 0,4 = 20$.

c. $P(X = 20) \approx 0,114\,559 \approx 0,115$.

2 La variable aléatoire X suit maintenant la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 12)$. L'écart type est $\sqrt{12}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

a. $P(16 \leqslant X \leqslant 24) \approx 0{,}751787 \approx 0{,}752$.
La probabilité que le commercial utilise entre 16 et 24 fois le trajet de plus courte durée est environ égale à 0,75.
b. $P(X > 24) = 1 - P(X \leqslant 24)$,
donc $P(X > 24) \approx 0{,}124\,107 \approx 0{,}124$.

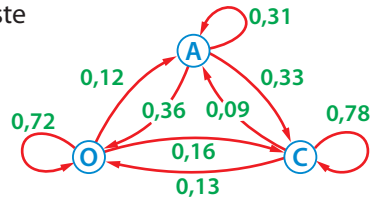


131 Mobilité sociale

1 **a.** La probabilité que ce soit un ouvrier, fils d'ouvrier est $P(O_1 \cap O_2) = \dfrac{1\,376}{2\,884} \approx 0{,}4771$.
b. On calcule la probabilité de l'événement C_2 conditionnée par l'événement O_1,

$$P_{O_1}(C_2) = \frac{P(C_2 \cap O_1)}{P(O_1)} = \frac{304}{1904} \approx 0{,}1597.$$

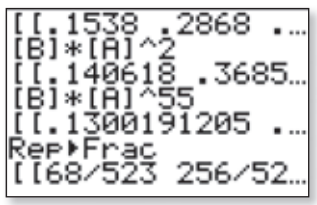
2 **a.** Graphe probabiliste



b. $M = \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}36 & 0{,}33 \\ 0{,}09 & 0{,}78 & 0{,}13 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{bmatrix}$.

c. $P_0 = [\,0{,}20 \quad 0{,}14 \quad 0{,}66\,]$.
d. $P_1 = P_0 \times M$, la matrice ligne P_1 représente la répartition des fils dans ces trois catégories.
$P_2 = P_0 \times M^2 = [\,0{,}14 \quad 0{,}37 \quad 0{,}49\,]$ et P_2 représente la répartition des petits fils dans ces trois catégories.

3 À l'aide de la calculatrice, on conjecture l'état stable.



Par le calcul, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 0{,}31x + 0{,}09y + 0{,}12z = x \\ 0{,}36x + 0{,}78y + 0{,}16z = y \\ 0{,}33x + 0{,}13y + 0{,}72z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 69x - 9y - 12z = 0 \\ -36x + 22y - 16z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Traduction matricielle du système :

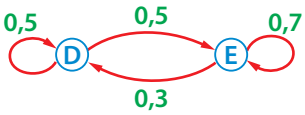
$$AX = B \text{ où } A = \begin{bmatrix} 69 & -9 & -12 \\ -36 & 22 & -16 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice on obtient $X = \begin{bmatrix} \frac{68}{523} \\ \frac{256}{523} \\ \frac{195}{523} \end{bmatrix}$.

On retrouve l'état stable conjecturer à l'aide la calculatrice.

132 Modérer son temps de jeu

1 **a.** La probabilité que Frank joue le 2e jour est égale à 0,3.
b. La probabilité qu'il ne joue pas le 2e jour est égale à $1 - 0{,}3 = 0{,}7$
2 Graphe probabiliste.



$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$.

3 **a.** $P_1 = [\,0 \quad 1\,]$ et $P_2 = P_1 \times M = [\,0{,}3 \quad 0{,}7\,]$.
b. Pour tout entier n, $P_{n+1} = P_n \times M$

$$\Leftrightarrow [\,d_{n+1} \quad e_{n+1}\,] = [\,d_n \quad e_n\,] \times \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

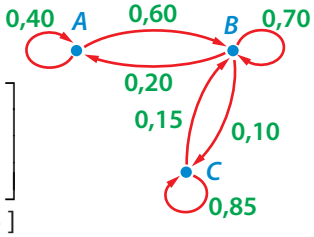
$$\Leftrightarrow [\,d_{n+1} \quad e_{n+1}\,] = [\,0{,}5d_n + 0{,}3e_n \quad 0{,}5d_n + 0{,}7e_n\,].$$

c. Pour tout entier n, on écrit la première égalité :
$d_{n+1} = 0{,}5d_n + 0{,}3e_n = 0{,}5d_n + 0{,}3(1 - d_n) = 0{,}2d_n + 0{,}3$.
4 Pour tout entier n, on pose $u_n = d_n - 0{,}375$.
a. $u_{n+1} = d_{n+1} - 0{,}375 = 0{,}2d_n + 0{,}3 - 0{,}375 = 0{,}2(d_n - 0{,}375)$.
Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}2u_n$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_1 = -0{,}375$.
On en déduit en fonction de n : $u_n = -0{,}375 \times 0{,}2^{n-1}$.
Or $0 < 0{,}2 < 1$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Comme $u_n = d_n - 0{,}375$, on en déduit que :
$d_n = 0{,}375 - 0{,}375 \times 0{,}2^{n-1}$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0{,}375$.
À long terme, la probabilité que Frank joue est égale à 0,375.

133 Cyclotourisme

1 Graphe probabiliste

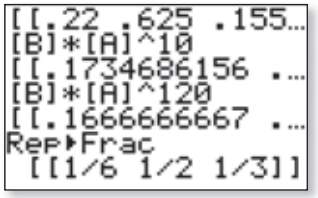


2 **a.** $M = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}$

b. $P_1 = [\,0{,}22 \quad 0{,}625 \quad 0{,}1555\,]$

et $P_{120} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

3 La calculatrice permet de conjecturer que la matrice R est la matrice représentant l'état stable.



En effet

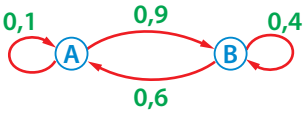
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

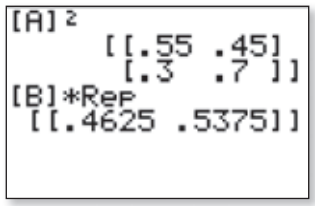
134 Qui va gagner

1 **a.** $P_1 = [\,0{,}65 \quad 0{,}35\,]$

b. Graphe probabiliste



2 La probabilité que Bruce gagne la partie 3 est environ 0,54 .



3 $P = P \times M \Leftrightarrow [\,x \;\; y\,] = [\,x \;\; y\,] \times \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}6y = x \\ 0{,}9x + 0{,}4y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}9x - 0{,}6y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Lors d'un grand nombre de parties, Bruce a trois chances sur cinq de gagner la partie.

Réinvestir... (p. 314)

135... en sociologie

Sociogramme

1 Il n'y a aucune tension dans les groupes ① et ② , car les cycles comportent un nombre pair de signes négatifs − . Dans le groupe ①, les trois personnes s'entendent. Dans le groupe ②, Laura et Brenda s'entendent. Jordan est seul. En revanche il y a une tension dans le groupe ③ Lara ne s'entend pas avec Jordan.

2 Aucune tension dans les groupes ④ et ⑥. Tous les cycles contenus dans les graphes comportent deux signes négatifs − Les groupes sont équilibrés.
En revanche, il y a des tensions dans le groupe ⑤ où plusieurs cycles comportent un seul signe négatif.

136... en SES

Matrice de Léontief

1 **a.** la production de l'énergie consommée par l'agriculture est 100 milliers d'euros.

b. Matrice des productions $P = \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{bmatrix}$

Matrice des consommations intermédiaires $C_i = \begin{bmatrix} 950 \\ 1710 \\ 1020 \end{bmatrix}$.

Matrice des consommations finales

$C_f = P - C_i = \begin{bmatrix} 1\,050 \\ 1\,290 \\ 2\,880 \end{bmatrix}$

2 **a.** **Matrice des coefficients techniques**

$$M = \begin{bmatrix} \frac{400}{2000} & \frac{400}{3000} & \frac{150}{4000} \\ \frac{600}{2000} & \frac{9000}{4000} & \frac{210}{4000} \\ \frac{100}{2000} & \frac{810}{3000} & \frac{210}{4000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{21}{400} \\ \frac{1}{20} & \frac{27}{100} & \frac{21}{400} \end{bmatrix}$$

b. $M \times P = \begin{bmatrix} \frac{400}{2000} & \frac{400}{3000} & \frac{150}{4000} \\ \frac{600}{2000} & \frac{900}{4000} & \frac{210}{4000} \\ \frac{100}{2000} & \frac{810}{3000} & \frac{210}{4000} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2\,000 \\ 3\,000 \\ 4\,000 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 400 + 400 + 150 \\ 600 + 900 + 210 \\ 100 + 810 + 210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 1\,710 \\ 1\,020 \end{bmatrix} = C_i .$$

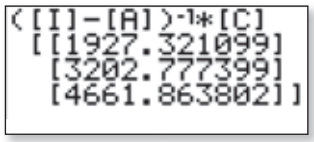
c. $M \times P + C_f = P \Leftrightarrow (I - M) \times P = C_f$.

3 Nouvelle consommation finale

$$C_f' = \begin{bmatrix} 1\,050 \times 0{,}90 \\ 1\,290 \times 1{,}10 \\ 2\,880 \times 1{,}20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 940 \\ 1419 \\ 3456 \end{bmatrix}.$$

On cherche la matrice $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ telle que :

$$(I - M) \times P = C_f' \Leftrightarrow P = (I - M)^{-1} \times C_f'$$



On obtient $P \approx \begin{bmatrix} 1927 \\ 3202 \\ 4662 \end{bmatrix}$.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.

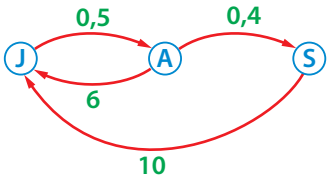
137 ... en SVT

Matrice de Leslie

Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 6 & 0 & 0{,}4 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1 a. La somme des nombres situés sur les lignes de la matrice n'est pas égale à 1, cette matrice n'est pas la matrice de transition d'un graphe probabiliste.

b. Graphe pondéré



2 a. $P_0 = [5 \quad 5 \quad 3]$ et $P_1 = P_0 \times M = [60 \quad 2{,}5 \quad 2]$.

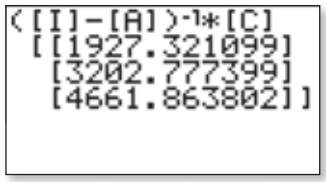
b. $P_2 = P_0 \times M^2 = [35 \quad 30 \quad 1]$

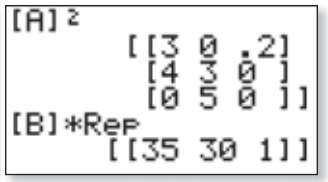
et $P_3 = P_0 \times M^3 = [190 \quad 17{,}5 \quad 12]$.

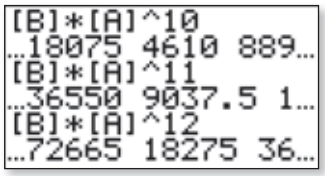
c. $P_{10} = P_0 \times M^{10} = [18\,075 \quad 40610 \quad 889]$

$P_{11} = P_0 \times M^{11} = [30\,550 \quad 9037{,}5 \quad 1\,844]$

et $P_{12} = P_0 \times M^{12} = [72\,665 \quad 18\,275 \quad 13\,615]$.







3 a. Tableau de la population

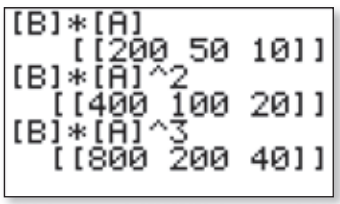
Année n	0	1	2	3	…	9	10	11	12
j_n	5	60	35	190	…	9220	18 075	36 550	72 665
a_n	5	2,5	30	17,5	…	2 222,5	4 610	9 037,5	18 275
s_n	3	2	1	12	…	4741	889	1 844	13 615
Population totale N_n	13	64,5	66	219,5		16 183,5	23 574	47 431,5	104 555
Coefficient multiplicateur		4,962	1,023	3,326			2,012	2,012	2,204

4 Si $P_0 = [1 \quad 0 \quad 0]$

Année n	0	9	10	11	12
j_n	1	224	459	1906	1825
a_n	1	58,5	112	229,5	453
s_n	0	10,81	23,4	44,81	91,81
Population totale N_n	2	293,31	594,4	1180,31	2369,81
Coefficient multiplicateur			2,027	1,986	2,008

5 a. Si $P_0 = [100 \quad 25 \quad 5]$, alors $P_1 = 2\,P_0$; $P2 = 2\,P_1$; $P_3 = 2\,P_2$.

Chaque population augmente de 100 % chaque année.



b. Pour tout entier n, $N_{n+1} = 2\,N_n$, donc la suite est géométrique de raison 2 et de terme initial $N_0 = 150$. On en déduit, pour tout entier n, $P_n = 150 \times 2^n$.

c. $P_2 = 150 \times 2^2 = 600$ et $P_{n+2} = P_2 \times 0{,}9^n = 600 \times 0{,}9^n$.

On résout $600 \times 0{,}9^n < 10 \Leftrightarrow n \ln 0{,}9 < \ln\left(\frac{1}{60}\right)$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{60}\right)}{\ln 0{,}9},$$

car $\ln 0{,}9 < 0$, l'inégalité change de sens.

On obtient $n > 38{,}86$ soit $n \geqslant 39$. Après 39 ans, la population totale sera inférieure à 10 femelles.

© Hachette Livre 2012 - Déclic Mathématiques Tᵉʳᵐ ES Enseignements spécifique et de spécialité - Livre du professeur
La photocopie non autorisée est un délit.