

PROBLÈME

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2 + 1}$.

1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$.
b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$.
3. a) Dresser le tableau des variations de g .
b) En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

5. a) Démontrer que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
6. On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.
a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$)
b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
7. a) Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire $x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$)
b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du obtenu.
8. a) Dresser le tableau des variations de f .
b) Donner l'allure de la courbe (C) (on prendra $f(\alpha) \approx 0,805$).
9. Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$.
a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $J_\lambda = \int_\lambda^1 f(x) dx$
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.
c) Calculer $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \mathcal{A}(\lambda)$.