

D 672

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Une démarche originale vers l'extension d'un maquis-bar

Pour le compte du maquis-bar de M. Sokéo, une enquête a été menée pendant dix mois au sujet du nombre X de clients par mois et la recette mensuelle Y en million de francs CFA. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-après :

x_i	1000	1500	2500	5000	4000	4500	2000	1500	3000	3500
y_i	2	3,5	5,5	11	8,5	10	4,5	3	6,5	8

Têê, fils de Sokéo, s'intéresse à la série statistique double (X, Y) , X correspondant aux valeurs x_i et Y aux valeurs y_i ainsi définies. Par ailleurs, Têê offre ses services à son père pour quelques constructions mathématiques en vue de la décoration d'un autre maquis-bar en projet.

Tâche Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Têê en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) a) Représente le nuage de points de la série double de caractère (X, Y) . (Tu prendras 1 cm pour 1000 clients sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 million de FCFA sur l'axe des ordonnées).
- b) Ecris une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X .
- 2) a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.
- b) Interprète ce coefficient.

Problème 2

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (1 + \sqrt{3} + 2i)z + \sqrt{3} - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = 0$$

dont les solutions u et v sont les affixes respectives des points A et B tels que :

$\operatorname{Re}(u) > \operatorname{Re}(v)$. On désigne par r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en B .

Une première décoration proposée par Têê est composée du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC et de son image (Γ') par r .

- 3) a- Calcule $(1 - \sqrt{3})^2$.
- b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- c- Détermine une écriture complexe de la rotation r .
- 4) a- Justifie que le point C a pour affixe $w = \frac{2(1-i)}{1-i\sqrt{3}}$.
- b- Ecris w sous forme exponentielle.
- c- Précise la nature du triangle ABC .
- d- Construis l'image (Γ') du cercle (Γ) par la rotation r .

Problème 3

Une autre décoration proposée par Têê est le domaine plan (Δ) délimité par les courbes représentatives (Γ_f) et (Γ_g) de deux fonctions f et g et l'axe des abscisses.

La fonction f est la primitive sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 en 0 de la fonction $x \mapsto 1 + (1+x)e^x$.

La fonction g est définie par : $g(x) = 1 - x - \frac{x}{e^x}$.

- 5) a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que $\int_0^x (1+t)e^t dt = xe^x$.
- b) Démontre que pour tout nombre réel x , $f(x) = x + 1 + xe^x$.
- 6) a) Justifie que la dérivée f' de la fonction f admet un minimum que tu préciseras.
- b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
- 7) Achève l'étude des variations de f .
- 8) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.
- 9) a) Etudie les branches infinies de (Γ_f) .
- b) Trace la courbe (Γ_f) .
- 10) a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$.
- b) Déduis-en que (Γ_g) est l'image de (Γ_f) par une transformation que tu caractériseras.
- c) Construis (Γ_g) sur la même figure que (Γ_f) .
- 11) a) Justifie que $\int_0^{-\alpha} g(x) dx = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$.
- b) Calcule $\int_{\alpha}^0 f(x) dx$.
- c) Démontre que l'aire en unités d'aire du domaine (Δ) est $S = -\left(\alpha^2 + \frac{2}{\alpha} + 2\right)$.

FIN