

B 762

Durée : 4 heures

Les trois problèmes sont obligatoires

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Le tourisme balnéaire

Dans le souci de développer le tourisme balnéaire, le conseil municipal de HOUTO a initié un projet d'aménagement de la plage. Ce projet est constitué de plusieurs lots dont :

- la construction d'un grand jardin public au centre duquel se trouve une enseigne lumineuse ayant la forme d'un tétraèdre $ABCD$. Cette enseigne est munie d'une caméra placée en un point K ;
- l'aménagement d'une nouvelle route d'accès au site, modélisable par une portion de la courbe (Γ) , de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct du plan du sol, on a : $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(2; -1; 2)$ et $D(3; 0; -2)$. Le point K est le point d'intersection du plan (ABC) désigné par (P) , du plan (Q) d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$ et du plan (R) déterminé par deux droites (Δ) et (Δ') . La droite (Δ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}) \wedge (\vec{MA} - \vec{MB}) = \vec{0}$ et un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ') est : $\frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+2}{2}$.

Enfin, deux parterres de broderie sont prévus pour les prises de vue par les visiteurs.

Corie, une élève de la classe de première scientifique qui a pris connaissance de ces différentes informations veut connaître le volume du tétraèdre, la position du point K , l'aire des parterres de broderies ainsi que la longueur de la voie d'accès au site.

Tâche : tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Corie en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1

- 1- a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) .
b) Calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 2- a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; 2)$, $(B; -3)$ et $(C; 2)$.
b) Donne un repère de la droite (Δ') .
c) Démontre que les droites (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.
d) Détermine une équation cartésienne du plan (R) .
- 3- Détermine les coordonnées du point K .

Problème 2

La terrasse à réaliser a la forme d'un pentagone dont les sommets M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 ont pour affixes les racines cinquièmes du nombre complexe

$$u = 16\sqrt{2}(-1 + i).$$

- 4- a) Ecris le nombre complexe $-1 + i$ sous forme exponentielle.
b) Détermine les affixes des points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
c) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
d) Précise la nature du pentagone représentant la terrasse.

5- L'un des parterres de broderie, noté (P_1) est délimité par le cercle de centre

I d'affixe z_I telle que $z_I = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$; et le second noté (P_2)

est l'image du premier par la similitude directe s d'écriture complexe

$$z' = (-1 + i)z + 2i.$$

a) Détermine les coordonnées du point I .

b) Détermine les éléments caractéristiques de la similitude s .

c) Justifie que l'aire de la surface de (P_2) est le double de celle de (P_1) .

Problème 3

6- Etudie les variations de la fonction f et dresse son tableau des variations.

7- a) Etudie les branches infinies de (Γ) .

b) Trace la courbe (Γ) dans un repère orthonormé.

8- En réalité, le profil de la route est assimilé à la portion de la courbe (Γ)

correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. L'unité de longueur étant le Kilomètre, on admet que la longueur de cette route est :

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

a) Justifie que pour tout nombre réel strictement positif x , on a :

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{x^2+1}{2x}.$$

b) Détermine, à un mètre près, la longueur de la route.

FIN

B 762

Durée : 4 heures

Les trois problèmes sont obligatoires

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Le tourisme balnéaire

Dans le souci de développer le tourisme balnéaire, le conseil municipal de HOUTO a initié un projet d'aménagement de la plage. Ce projet est constitué de plusieurs lots dont :

- la construction d'un grand jardin public au centre duquel se trouve une enseigne lumineuse ayant la forme d'un tétraèdre $ABCD$. Cette enseigne est munie d'une caméra placée en un point K ;
- l'aménagement d'une nouvelle route d'accès au site, modélisable par une portion de la courbe (Γ) , de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct du plan du sol, on a : $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(2; -1; 2)$ et $D(3; 0; -2)$. Le point K est le point d'intersection du plan (ABC) désigné par (P) , du plan (Q) d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$ et du plan (R) déterminé par deux droites (Δ) et (Δ') . La droite (Δ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}) \wedge (\vec{MA} - \vec{MB}) = \vec{0}$ et un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ') est : $\frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+2}{2}$.

Enfin, deux parterres de broderie sont prévus pour les prises de vue par les visiteurs.

Corie, une élève de la classe de première scientifique qui a pris connaissance de ces différentes informations veut connaître le volume du tétraèdre, la position du point K , l'aire des parterres de broderies ainsi que la longueur de la voie d'accès au site.

Tâche : tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Corie en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1

- 1- a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) .
b) Calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 2- a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; 2)$, $(B; -3)$ et $(C; 2)$.
b) Donne un repère de la droite (Δ') .
c) Démontre que les droites (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.
d) Détermine une équation cartésienne du plan (R) .
- 3- Détermine les coordonnées du point K .

Problème 2

La terrasse à réaliser a la forme d'un pentagone dont les sommets M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 ont pour affixes les racines cinquièmes du nombre complexe

$$u = 16\sqrt{2}(-1 + i).$$

- 4- a) Ecris le nombre complexe $-1 + i$ sous forme exponentielle.
b) Détermine les affixes des points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
c) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
d) Précise la nature du pentagone représentant la terrasse.

5- L'un des parterres de broderie, noté (P_1) est délimité par le cercle de centre

I d'affixe z_I telle que $z_I = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$; et le second noté (P_2)

est l'image du premier par la similitude directe s d'écriture complexe

$$z' = (-1 + i)z + 2i.$$

a) Détermine les coordonnées du point I .

b) Détermine les éléments caractéristiques de la similitude s .

c) Justifie que l'aire de la surface de (P_2) est le double de celle de (P_1) .

Problème 3

6- Etudie les variations de la fonction f et dresse son tableau des variations.

7- a) Etudie les branches infinies de (Γ) .

b) Trace la courbe (Γ) dans un repère orthonormé.

8- En réalité, le profil de la route est assimilé à la portion de la courbe (Γ)

correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. L'unité de longueur étant le Kilomètre, on admet que la longueur de cette route est :

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

a) Justifie que pour tout nombre réel strictement positif x , on a :

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{x^2+1}{2x}.$$

b) Détermine, à un mètre près, la longueur de la route.

FIN