

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est : 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i$; 2 et $1 + i\sqrt{3}$.

1. a) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J) .
2. Soit $\mathcal{F}$ la similitude directe de centre O qui transforme B en C.
a) Justifie que l'expression complexe de $\mathcal{F}$ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.
b) Justifie que $\mathcal{F}$ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.
3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.
a) Détermine et construis (E).
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par $\mathcal{F}$.
4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.
a) Détermine et construis (F).
b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment [BC] appartiennent à (F).
c) Justifie que l'image de (F) par $\mathcal{F}$ est la droite (OJ).

EXERCICE 2

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1 000). L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f . Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1): y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ par : $h(t) = \frac{200}{t}$.
Vérifie que h est une solution de (E_1) .
2. Résous l'équation différentielle
 $(E_2): y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0$.
3. a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2) .
b) Déduis-en les solutions de (E_1) .
c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :
$$\forall t \in [2000; +\infty[, f(t) = 999,9 e^{(10 - \frac{t}{200})} + \frac{200}{t}.$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = 2 + x - 3x \ln(x)$.

1. Calcule la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.
2. a) On désigne par g' , la fonction dérivée de g .
Calcule $g'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
b) Étudie les variations de g .
c) Vérifie que : $g(e^{-\frac{2}{3}}) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$.
Dresse le tableau de variation de g .
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$, une solution unique notée α .
b) Justifie que : $1,9 < \alpha < 2$.
4. Démontre que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{20 \ln(x)}{(x+2)^3}$.

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

1.
 - a) Calcule la limite de f en 0.
Interprète graphiquement le résultat.
 - b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.
Interprète graphiquement le résultat.
2. On note f' la fonction dérivée de f .
 - a) Démontre que :
$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}.$$
 - b) Dédus-en les variations de f .
 - c) Dresse le tableau de variation de f . On ne calculera pas $f(\alpha)$.
3. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = \frac{20}{27}x - \frac{20}{27}$.
4. Trace (T) et $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = 1,95$ et $f(\alpha) = 0,22$.

Partie C

On pose : $U = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2} dx$ et $V = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3} dx$.

1. On admet que : $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}$
Dédus-en que : $U = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{24}$
2.
 - a) À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $V = -\frac{\ln 2}{32} + \frac{1}{2}U$.
 - b) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) , les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.