

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique et non graphique est autorisée.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

1. u et v sont deux fonctions numériques, x_0 , ℓ et m trois nombres réels de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. v est continue en ℓ .
Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \ell} v(x) = m$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} v \circ u(x) = m$.
2. Soit f une bijection d'un intervalle K sur $f(K)$ et f^{-1} sa bijection réciproque.
 a est un élément de K tel que $f'(a) = 0$.
Si $f(a) = b$, alors f^{-1} est dérivable en b .
3. $(X; Y)$ est une série statistique double.
Soit (D) une droite d'équation $x = \alpha y + \beta$.
Si (D) est la droite de régression de X en Y , alors $\alpha = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}$.
4. Si E et F deux événements d'un univers Ω , de probabilités non nulles, alors $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.

Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. Soit S une similitude directe du plan d'écriture complexe $z' = bz + c$, où $b \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$.
Si $b \neq 1$, alors S admet un point invariant dont l'abscisse est :
A) $\frac{b}{1-c}$; B) $\frac{c}{1-b}$; C) $\frac{1}{c-b}$; D) $\frac{b}{c-b}$.
2. L'équation différentielle $y' - \frac{1}{3}y = 2$ a pour solutions sur $\mathbb{R}$, les fonctions de la forme :
A) $x \mapsto ke^{-\frac{1}{3}x} + \frac{1}{6}$; B) $ke^{\frac{1}{3}x} + 6$; C) $x \mapsto ke^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{6}$; D) $x \mapsto ke^{\frac{1}{3}x} - 6$.
3. Une primitive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ est...
A) $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$; B) $x \mapsto -\frac{1}{\cos x}$; C) $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$; D) $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.
4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation : $\ln(4-x) \geq \ln(x-3)$ est ...
A) $]0; \frac{7}{2}]$; B) $] \frac{7}{2}; +\infty[$; C) $]3; \frac{7}{2}]$; D) $[\frac{7}{2}; 4[$.

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4, & u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = \frac{4}{5}u_{n+1} - \frac{4}{25}u_n \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n$.

1. a) Justifie que $v_0 = \frac{17}{5}$
 b) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
 c) Exprime v_n en fonction de n .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
 a) Calcule w_0 .
 On admet que (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.
 b) Exprime w_n en fonction de n .
 c) Démontre que : $u_n = \frac{2^{n-1}}{5^n} (17n + 8)$.

EXERCICE 4 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 13z^2 + 59z - 87.$$

1. a) Détermine les nombres réels a et b tels que :
 $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$.
 b) On admet que : $a = -10$ et $b = 29$.
 Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
2. Soit les points A, B et C d'afixes respectives : 3 ; $5 - 2i$; $5 + 2i$.
 a) Vérifie que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
 b) Déduis-en la nature du triangle ABC.
3. Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre A qui transforme B en C.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$, par $g(x) = e^x - \ln x - 1$.

On admet que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g(x) > 0$.

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = e^x - x \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1. a) En remarquant que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $e^x - x \ln x = e^x (1 - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{\ln x}{x})$, justifie que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 b) Calcule la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$: (on remarquera que $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} (1 - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{\ln x}{x})$).
 c) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
2. a) Justifie que f est continue en 0.
 b) Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, justifie que : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \ln x$.
 c) Étudie la dérivabilité de f en 0.
3. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
 a) Pour tout élément x de $]0 ; +\infty[$, justifie que : $f'(x) = g(x)$.
 b) Dresse le tableau de variation de f .
4. a) Soit λ un nombre réel de $]0 ; 1[$. On pose : $K = \int_{\lambda}^1 x \ln x dx$.
 À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $K = \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4}$.
 b) Calcule en cm^2 , l'aire A_{λ} de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) , les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
 c) Calcule la limite de A_{λ} lorsque λ tend vers 0.

EXERCICE 6 (5 points)

Un centre de données situé à Abidjan est équipé de 10 serveurs identiques, chacun fonctionnant indépendamment des autres. Chaque jour, la probabilité qu'un serveur tombe en panne est $q = 0,1$. Le système est considéré comme « opérationnel » si au moins 8 serveurs fonctionnent correctement dans la journée.

A l'occasion d'un séminaire international à l'hôtel Ivoire, les données du centre seront sollicitées. Soucieux de la qualité du service pendant les 5 jours de séminaire, le nouveau directeur surveille quotidiennement l'état (opérationnel ou non) du centre.

On suppose que l'état d'un serveur est indépendant d'un jour à l'autre.

Le Directeur souhaite être rassuré : pour cela, il faudra que la probabilité que le centre soit opérationnel au cours d'une journée dépasse 0,90 et que la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours dépasse 0,60.

1. Justifie que la probabilité que le centre soit opérationnel au cours d'une journée est de 0,9298.
2. À l'aide d'une production argumentée, indique si le Directeur peut être rassuré ou non.