

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 :(5,5 points)

I. Le but de cet exercice est de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,

On a : $C_n^2 < 2^n$.

1. a) Exprimer C_n^2 et C_{n+1}^2 en fonction de n , n étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. (0,5pt)

b) En déduire que $C_{n+1}^2 = \frac{n+1}{n-1} C_n^2$. (0,25pt)

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\frac{n+1}{n-1} \leq 2$. (0,5pt)

b) Démontrer alors par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, on a : $C_n^2 < 2^n$. (0,5pt)

II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2 . (0,5pt)

b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n$. (1pt)

2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (0,25pt)

b) Justifier que la suite (u_n) est convergente. (0,25pt)

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$. (0,5pt)

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25pt)

EXERCICE 2 :(4points)

1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi : $f' = \frac{f}{5} (E_1)$ où f désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimée en années).

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1). (1,5pt)

b) Sachant qu'à la date $t = 0$ la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de $f(t)$. (0,75pt)

2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépendant de l'effectif total). La population

suit la loi : $f' = \frac{f}{5} - \frac{f^2}{15} (E_2)$. On pose $g = \frac{f}{3-f}$ et on suppose que, pour tout t , $f(t) \neq 3$.

a) Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1). (1pt)

b) En déduire toutes les solutions f de (E_2) et trouver celle qui vérifie $f(0) = 1$ (0,5pt)

PROBLEME : (10,5points)

PARTIE A : (7points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $[0; +\infty[$. (1pt)

b) Étudier le signe de la fonction f . (0,25pt)

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (1pt)

d) Tracer la courbe (C). (0,5pt)

2. Soit D le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 8$ et $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Calculer en unité d'aire l'aire du domaine D.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de la dérivée g' de g sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $] -0,6; -0,5[$ une unique solution. (0,25pt)

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$. (0,5pt)

4. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$. (1pt)

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
(0,5pt)

c) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. (0,5pt)

d) En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite. (0,25pt)

e) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \alpha| < 10^{-6}$.
(0,5pt)

PARTIE B : (3,5points)

On considère les équations différentielles :

(E) : $4y'' + 4y' + y = x + 4$ et (E') : $4y'' + 4y' + y = 0$.

1. On pose $u(x) = ax + b$. Déterminer les réels a et b pour que la fonction u soit une solution de l'équation (E). (1pt)

2. Montrer qu'une fonction ρ est solution de (E) si et seulement si $\rho - u$ est solution de l'équation (E'). (1,5pt)

3. Résoudre l'équation (E') et déterminer la solution ρ de (E) tel que $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = \frac{1}{2}$. (1pt)