

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (3 points) (commun à tous les candidats)

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

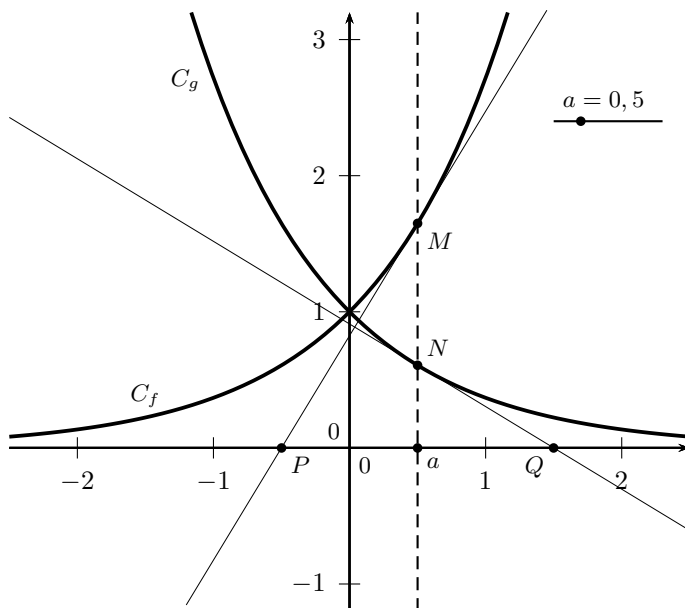
$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a , on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a .

La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P , la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q .

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a .



	A	B
1	Abcisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

- 1) Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g .
- 2) a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
b) Démontrer cette conjecture.

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le coefficient directeur de la tangente (T_f) à $\mathcal{C}_f$ en M est $f'(a)$ ou encore e^a . Le coefficient directeur de la tangente (T_g) à $\mathcal{C}_g$ en N est $g'(a)$ ou encore $-e^{-a}$.

Le produit de ces coefficients directeurs est

$$f'(a) \times g'(a) = e^a \times (-e^{-a}) = -e^0 = -1.$$

On en déduit que les deux tangentes sont perpendiculaires.

2) a) Il semblerait que la longueur PQ soit constante, égale à 2, quand a varie.

b) Une équation de (T_f) en M est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^a + e^a(x - a)$. Une équation de (T_g) est $y = g(a) + g'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^{-a} - e^{-a}(x - a)$.

P est le point de (T_f) d'ordonnée nulle. Donc, $e^a + e^a(x_P - a) = 0$ puis $e^a(1 + (x_P - a)) = 0$ puis $1 + x_P - a = 0$ (car $e^a \neq 0$) et finalement $x_P = a - 1$.

Q est le point de (T_g) d'ordonnée nulle. Donc, $e^{-a} - e^{-a}(x_Q - a) = 0$ puis $e^{-a}(1 - (x_Q - a)) = 0$ puis $1 - x_Q + a = 0$ et finalement $x_Q = a + 1$.

Donc, $PQ = |x_Q - x_P| = |(a + 1) - (a - 1)| = |a + 1 - a + 1| = 2$.