

Exercice 2. *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.* (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i}$.

Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E , d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.

Déterminer par le calcul l'image de K par r . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?