ANNALES BAC 2025

Sujets 2000-2024

MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2/S4

- Sujets 1er Groupe
- Corrigés 1er Groupe
- Sujets 2nd Groupe
- Mémo Bacs et Rappels

M. Mendes

TABLE DES MATIERES

SUJETS 1

BAC 2000 2
BAC 2001 5
BAC 2002 7
BAC 2003 9
BAC 2004 11
BAC 2005 16
BAC 2006 18
BAC 2007 20
BAC 2008 22
BAC 2009 24
BAC 2010 26
BAC 2011 28
BAC 2012 30
BAC 2013 32
BAC 2014 34
BAC 2015 36
BAC 2016 39
BAC 2017 41
BAC 2018 43
BAC 2019 45
BAC 2020 47
BAC 2021 49
BAC 2022 51
BAC 2023 53
BAC 2024 55

CORRIGES 58

BAC 2000 59
BAC 2001 63
BAC 2002 66
BAC 2003 69
BAC 2004 74
BAC 2005 77
BAC 2006 82
BAC 2009 85

BAC 2010 ... 93
BAC 2011 ... 106
BAC 2012 ... 112
BAC 2013 ... 121
BAC 2014 ... 127
BAC 2015 ... 137
BAC 2016 ... 147
BAC 2018 ... 155
BAC 2019 ... 161
BAC 2020 ... 168
BAC 2021 ... 177
BAC 2022 ... 183
BAC 2023 ... 188
EPREUVES 2ième GROUPE ... 205
BAC 2007 ... 206
BAC 2008 ... 208
BAC 2009 ... 210
BAC 2010 ... 212
BAC 2011 ... 214
BAC 2012 ... 216
BAC 2017 ... 217
BAC 2018 ... 219
BAC 2019 ... 220
BAC 2020 ... 221
BAC 2021 ... 223
BAC 2022 ... 224
BAC 2023 ... 225
BAC 2024 ... 226
MEMO BACS ET RAPPELS ... 227

M.MENDES

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES AU LYCEE TECHNIQUE DE KEDOUGOU

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.

Sujets

M.MENDES

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.

2000

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. du 12.08.1988).

EXERCICE I (04 points)

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives :

$$Z_1 = 1 \; ; \; Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \; , \; Z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

1-a) – Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$.

b) – Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique $\dfrac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) – Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1.

a) – Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) – On désigne par M' d'affixe Z', l'image par S du point M d'affixe Z. Exprimer Z' en fonction de Z ; en déduire l'image, par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}\, e^{\frac{-i\pi}{3}}$

EXERCICE II (05 points)

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.

1-a) – Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) – En déduire p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.

2) – On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) – Déterminer la loi de probabilité de X.

b) – Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3) – Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) – Déterminer la loi de probabilité de S.

b) – On gagne à ce jeu lorsque $s \geq 4$ Déterminer la probabilité de gagner.

.../... 2

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

PARTIE A

1-a) – Montrer que f est continue en $x_o = 0$.
b) – Etudier la dérivabilité de f en 0.

2-a) – Montrer que pour $x < 0$, on a $f'(x) > 0$.
b) – Etudier les variations de f' sur $[0 ; +\infty[$.
En déduire que pour $x > 0$, $f'(x) > 0$.
c) – Donner le tableau de variation de f.

3-a) - Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ (On pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

b) - Montrer que (D) : $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$. On admettra que $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D).

4-a) – Construire $(\mathcal{C})$, on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Δ) pour $x > 0$.
b) – Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

PARTIE B

1) – Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$ $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2) – En déduire au moyen d'une intégration par parties que la fonction F telle que :

$F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

3) – Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (Δ), $(\mathcal{C})$ et les droites d' équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

.../... 3

Epreuve du 1er groupe

PARTIE C

1-a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.
b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1}.

2) – Construire $(\mathcal{C}')$ courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

3) – Déduire du B.3) l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x). \end{cases}$

BAREME

EXERCICE I (04 points)

1-a) = 01 point
b) = 0,75 pt + 0,5 pt

2-a) = 0,5 point
b) = 0,75 pt + 0,5 pt

EXERCICE II (05 points)

1-a) = 0,5 point
b) 0,25 x 5 = 01,25 point

2-a) = 0,75 point
b) = 0,5 point + 0,5 point

3-a) = 01 point
b) = 0,5 point

PROBLEME (11 points)

PARTIE A

1-a) = 0,5 point
b) = 0,5 point

2-a) = 0,75 point
b) = 01 pt + 0,5 pt
c) = 0,75 point

3-a) = 0,5 point
b) = 0,5 point

4-a) = 0,5 point
b) = 0,5 point

PARTIE B

1) = 0,5 point
2) = 01 point
3) = 01 point

PARTIE C

1-a) = 0,5 point
b) = 01 point
2) = 0,5 point
3) = 0,5 point



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Série : S2 – Coef. 5

2001

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électriques non imprimantes avec entrée par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. du 12.08.1988).

EXERCICE I (04 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application de $\mathbb{C} / \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i}.$$

a) – Résoudre dans $\mathbb{C}$: $f(z) = z$.
Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b) – Calculer $z_1^4 + z_2^4$.

1. Soit M(z) un point de P.
Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que f(z) soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ). Tracer (Γ).

2. Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

EXERCICE II (04 points)

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. Quelle est la probabilité des évènements :

A = « les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 ».

B = « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second ».

2. Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour que à l'issue de la 7ème partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? au moins une fois ?

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = x(1 - \ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$
où ln x désigne le logarithme népérien de x, on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) - Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.
b) - Etudier les variations de g.
c) - Tracer $(\mathcal{C})$.

Epreuve du 1er groupe

2. a) – Soit α un réel appartenant à l'intervalle] 0, e [.

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives :
$x = \alpha$ et $x = e$.

b) – Calculer $\lim_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

3. a) – Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\Delta) : y = x$.

b) – Pour quelles valeurs de m la droite $(\Delta_m) : y = mx$, recoupe-t-elle la courbe $\mathcal{C}$ en deux points M_1 et M_2 autres que 0 ?

c) – La droite (Δ_m) coupe la droite D d'équation $x = e$ en P. Montrer $0M_1 \times 0M_2 = 0P^2$.

4. a) – Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[e, +\infty[$ admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) – Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ?
Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

c) – Construire la courbe de h^{-1} dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

BAREME

EXERCICE I **(04 points)**

1.a) = 01,5 point
b) = 0,5 point

2) = 01,5 point

3) = 0,5 point

EXERCICE II **(04 points)**

1.A) = 01 point
B) = 01 point

2) = 02 points

PROBLEME **(12 points)**

1.a) = 01 point
b) = 01,5 point
c) = 0,5 point

2.a) = 01 point
b) = 01 point

3.a) = 01 point
b) = 01 point
c) = 01 point

4.a) = 01 point
b) = 02 points
c) = 01 point

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

02

02 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électriques non imprimantes avec entrée par clavier sont autorisées Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n 5990/OB/Dir. du 12.08.1988).

EXERCICE I (05 points)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que, dans $\mathbb{C}$, la somme des racines $n^{ième}$ de l'unité est égale à zéro ($n \geq 2$).
2. En utilisant les résultats du 1) montrer que $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$; $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{10}$.

EXERCICE 2 (05 points)

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.
Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné :

Note en SP \ Note en Maths	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle $X = (x_i)$ la série statistique des notes de Sciences Physiques et $Y = (y_i)$ la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne z_i de la série conditionnelle y/x_i.
2. On considère la série double (x_i, z_i)
   a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points $M(x_i, z_i)$.
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série $X = (x_i)$ et $Z = (z_i)$.
   c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z en X par la méthode des moindres carrés.
   d) Tracer cette droite.

.../... 2

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME **(10 points)**

A - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln^2(x)} - \frac{1}{\ln x} \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ ; } g(0) = 0.$$

1. Montrer que g est continue à droite en zéro.
2. Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   Dresser le tableau de variations de g.
   En déduire le signe de g(x) en fonction de x.

B - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, par :

$$f(x) = \frac{-x}{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ ; } f(0) = 0 .$$

1. Montrer que f est continue à droite et dérivable à droite au point O. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0.
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Comparer f '(x) et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse e^2.
5. Soit M le point de C d'abscisse x et N le point de D de même abscisse x. On pose $\varphi(x) = \overline{NM}$.
   Montrer que : $\varphi(x) = f(x) + \frac{x + e^2}{4}$.
   Déduire de A) le tableau de variations de $\varphi'(x)$ puis le signe de $\varphi'(x)$ sur $]1, +\infty[$.
   En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]1, +\infty[$ et la position de C par rapport à D pour les points d'abscisse $x > 1$.
6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe C et la droite D (unité : 2 cm).

C - On revient à la fonction g du A).
On note Γ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).
Sans construire Γ, calculer en cm^2 l'aire de la partie plane comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = e$ et $x = e^2$.

BAREME

EXERCICE 1 **(05 points)**

1) = 01 point
2) = 01 point
3) = 03 points = 1 + 1 +1

EXERCICE 2 **(05 points)**

1) = 01,5 point
2.a) = 0,5 point
b) = 01 point
c) = 01,5 point
d) = 0,5 point

PROBLEME **(10 points)**

A.1) = 0,5 point
2) = 02 points
B.1) = 01 point
2) = 0,75 point
3) = 01 point
4) = 0,5 point
5) = 02 points
6) = 01,25 point
C. = 01 point

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

03 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S4-S5 – Coef. 5

03

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrice électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.
On note : T l'événement « avoir un test positif à cette maladie »
M l'événement « être malade »
$\overline{M}$ est l'événement contraire de M.
On rappelle que pour tous événements A et B on a :
(*) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1) a) Réécrire la relation (*) pour A = T et B = M puis pour A = $\overline{M}$ et B = $\overline{T}$.
b) En déduire que $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M})[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})]$

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.
b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :
(E) : $Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0$.

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
b) Montrer que 1 + 2i et −2 + 3i sont solutions de (E).
c) Donner l'ensemble des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soit les points A, B et C d'affixes respectives 1 + 2i, 3i, -2 + 3i.
Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, - 2 et 1.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $2i$, et $2\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

.../... 2

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME

A. On considère la fonction :

$$u : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de u ; Calculer u (0) et $\lim_{x \to +\infty} u(x)$.

2) Etudier les variations de u.
Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3) Déduire des résultats précédents que :
a) $\forall x \in [0 ; 1[, \quad u(x) \geq 0$.
b) $\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad u(x) < 0$.

B. Soit g la fonction définie par
$$g : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1.$$

1) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

2) a) Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$.

b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
Interpréter géométriquement, ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0 ; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

Soit $f : [0 ; 1[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0 ; 1[$ et que $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [0 ; 1[$.

2) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_g$; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

.../... 3

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

04 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

04

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrice électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (06 points)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1) a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) En déduire z_n.

2) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

3) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4) Pour tout entier naturel n on pose $Z_n = z_0 z_1 z_2 \ldots\ldots z_n$

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n.

b) Démontrer que si n est impair alors Z_n est réel.

EXERCICE 2 (04 points)

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500 F ».

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

PROBLEME **10 points**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f et trouver les trois réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f, on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{e^x - 1}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

3) a) Déterminer la fonction dérivée de f.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.
c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f.

4) On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité est 2 cm.
Démontrer que les droites d'équations respectives : $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de $(\mathcal{C})$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
Préciser l'autre asymptote.

5) Soit x un réel de D_f, on considère les deux points M et M' de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu Ω de segment [M M']. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

6) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

7) a) Trouver les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble D_f on ait : $f(x) = 2x + \alpha + \dfrac{\beta e^x}{e^x - 1}$

b) Soit k un réel supérieur ou égal à 2
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(k)$ en cm^2 de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x ; y) vérifient :
$\ln 2 \leq x \leq \ln k$ et $2x - 1 \leq y \leq f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathcal{A}(k)$.

BAREME

EXERCICE 1 = 06 points
1) a) = 01,5 point
b) = 0,5 point
2) = 01 point
3) a) = 0,5 point
b) = 0,75 point
4) a) = 01 point
b) = 0,75 point

EXERCICE 2 = 04 points
1) = 0,5 point
2) a) = 01,5 point
b) = 01 point
3) = 01 point

PROBLEME = 10 points
1) = 01 point
2) = 01 point
3) a) = 0,5 point
b) = 0,5 point
c) = 01,5 point
4) = 01,25 point
5) = 01 point
6) = 01,5 point
7) a) = 0,5 point
b) = 01 point
c) = 0,25 point

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE I (04,5points)

1) a) Montrer que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$, On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation. : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (E). On remarquera que (E) est équivalente à : $\left(\frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$.

2) a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b)En déduire les arguments des solutions de (E).

3) Déduire des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes des cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

4/Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'afixe z' tel que

$$z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}$$

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F.
b) Construire l'image B du point A d'affixe –1.

EXERCICE 2 (05points)

Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci dessous :

Y \ X	[5 ; 7 [	[8 ; 10 [	[11 ; 13 [	[14 ; 18 [
[10 ; 15 [	1	3	0	0
[15 ; 25 [	5	9	8	3
[25 ; 35 [	0	7	5	9

Epreuve du 1er groupe

1) Calculer la moyenne et l'écart type des séries marginales X et Y.
2) A chaque centre x_i de classe de la série de X on associe la moyenne z_i de Y sachant que $X = x_i$;
On obtient une série double (x , z). Déterminer cette série.

3) Dans la suite on considère la série (x , z) définie par le tableau suivant.

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

a)Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z .
Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier votre réponse)
b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
c) Estimer la quantité moyenne d'huile consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

PROBLEME : **(10,5 points)**

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A (0 ; -1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

1/ Etudier les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

2/ Soit Γ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$;
unité 2cm.

a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln2.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Interpréter géométriquement le résultat ;

3/ a) Tracer (Γ).

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 du domaine délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ ($\alpha < 0$), $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

1) Démontrer que h est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J à préciser.
2) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis calculer $(h^{-1})'(3)$.
3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.
4) Tracer ($\mathcal{C}'$) la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

.../...3

Epreuve du 1er groupe

Partie D

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$U_n = e^{2n}$ et $V_n = -2e^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que (U_n) et (V_n) sont des suites géométriques dont on précisera pour chacune la raison et le premier terme.

2) Soit (W_n) la suite définie par $W_n = \ln|U_n V_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que (W_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = \ln|U_0 V_0| + \ln|U_1 V_1| + ... + \ln|U_n V_n| .$$

NB : La partie D est indépendante des parties A,B et C

BAREME

EXERCICE 1 (4,5points)

1) a) 0,5pt
b) 0,5pt
c) 0,5pt

2) a) 0,25pt
b) 1 pt

3) a) 0.5pt

4) a) 0,75pt
b) 0,5 pt

EXERCICE 2 (5 points)

1) 1,5pt (0,75x2)
2) 1pt
3) a) 1pt
b) 1pt
c) 0,5pt

PROBLEME

PARTIE A : (1point)
PARTIE B : (4,5 points)
1) 1pt

2) a) 0,5pt
b) 0,5pt

3) a) 1pt
b) 1pt
c) 0,5pt

PARTIE C : (3points)
1) 0,5pt
2) 1pt (0,5x2)
3) 0,5pt
4) 1pt

PARTIE D :(2 points)
1) 0,5pt
2) a) 0,5pt
b) 1 pt

05 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrice électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1

1) Résoudre dans ¢ : $z^3 = 1$.
2) a) Développer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$.
   b) Soit l'équation E : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$.

En posant $u = \dfrac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation E.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont xi et y celle dont les valeurs sont les yi.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.
   a) Déduire de la précédente question que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité :
   $z = -5{,}95\,x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.
   b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

N.B : Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : Bénéfice = Prix de vente – prix de revient.

.../... 2

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$

1) a) Etudier les variations de f.
   b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe. (Unité : 2 cm).
   c) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, 0[$.

2) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.
   a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x) = e^{-x} . f(x)$.
   c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
   d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3) a) Montrer que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
   b) A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)\,dx$. Justifier l'existence de $I(\lambda)$. Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.
   c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2) a) Calculer g(0).
   b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln2.
   c) Déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln2.

BAREME

EXERCICE 1 (04 points)
1) 01 point
2) a) 0,5 point
   b) 0,75 + 0,75 point
3) 0,5 + 0,5 point

EXERCICE 2 (04 points)
1) 02 points
2) 0,5 point
3) a) 01 point
   b) 0,5 point

PROBLEME (12 points)

PARTIE A
1) a) 01,5 point
   b) 01,25 point
   c) 01 point
2) a) 01 point
   b) 0,5 point
   c) 0,5 point
   d) 01 point
3) a) 0,5 point
   b) 01,5 point
   c) 0,5 point

PARTIE B
1) 01 point
2) a) 0,25 point
   b) 0,5 point
   c) 01 point

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

06 G 26 A 01
Durée : 04 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Exercice n°1 (0 4 points)

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$. **(0,5 pt)**

   On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution de (E).

   b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $\sqrt{3}+1$. Placer les points A, B et C. **(0,5 pt)**

   Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. **(0,5 pt)**

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$ **(0,5 pt)**

3. On considère l'équation différentielle (1) : $ay'' - by' + cy = 0$, où a, b et c désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

   Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur b et le troisième celle de c.

   a) Justifier que l'équation différentielle : $ay'' - by' + c = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, où A et B sont des réels si et seulement si 1 + i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, $az^2 - bz + c = 0$. **(01 pt)**

   b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, A et B étant des constantes réelles. **(01 pt)**

Exercice 2 (05,5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A- Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km /h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1. Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km /h et en ordonnée 1 cm pour 5 m. **(0,75 pt**

   N : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km /h et en ordonnée graduations à partir de 8 m. **(0,75 p**

2. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ? **(0,5 pt) +(0,25**

S_2 39

4. a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km /h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ? **(01 pt)**

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ? **(0,75 pt)**

B- Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport :Y / Cause des accidents :X	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1. Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude. **(0,5 pt)**
2. Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2}. **(0,5 pt)**
3. Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et f_2. **(0,5 pt)**

Problème : **(10,5 points)**

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 + e^{2-x})$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2cm).

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h). **(01 pt)**

b) En déduire le signe de h (x) sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

2. **a)** Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,25 pt +0,25 pt)**

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$. **(0,5 pt)**

c) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu. **(0,5 pt +0,5 pt)**

d) Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$. **(0,5 pt)**

3. **a)** Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ? **(0,5 pt)**

d) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2. **(0,5 pt)**

e) Construire $(\mathscr{C})$ (on tracera la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2). **(1 pt)**

f) Construire $(\mathscr{C}')$ courbe de f^{-1} dans le repère précédent. **(1,5 pt)**

II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y = f(x)$ et $y = x$. Soit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2.

1. Calculer $a(\lambda)$ en fonction de λ. **(0,5 pt)**
2. Déterminer $a = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} a(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. **(01 pt)**

(0,5 pt)+(0,5 pt)

S_2 40

07 G 26 A 01
Durée : 04 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (04 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :
$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$.

1. a) Déterminer la solution réelle de cette équation. **(0,5 pt)**

b) Montrer que i est une solution de cette équation. **(0,5 pt)**

c) Déterminer la troisième solution de cette équation. **(0,5 pt)**

2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2 + i.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. **(01 pt)**

b) En déduire la nature du triangle ABC. **(0,5 pt)**

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **(0,5 pt)**

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I (1+i) et de rayon r à déterminer. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient :
$p_1 = p_2$; $p_3 = p_4 = 2\,p_1$; $p_5 = p_6 = 3\,p_1$;

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$. **(01 pt)**

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : « obtenir 3 ou 6 » est égale à $\frac{5}{12}$. **(0,5 pt)**

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci- dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{2}{5}$.

On note C l'événement : « la cible est atteinte ».

a) Déterminer p (C/A) et p (C/$\overline{A}$). **(0,5+0,5 pt)**

En déduire que p (C) = $\frac{29}{60}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer p (A/C). **(0,5 pt)**

3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois. **(0,5 pt)**

Problème : **(12 points)**

I. Soit g la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par : g(x) = 1 + x + ln x.

1. Dresser le tableau de variation de g. **(01,5 pt)**

2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation g(x) = 0. Vérifier que α appartient à]0,2 ; 0,3 [. **(0,5 pt)**

3. En déduire le signe de g sur] 0 ; +∞ [. **(0,5 pt)**

4. Etablir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$. **(0,5 pt)**

II. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0 puis sur] 0 ; +∞ [. **(0,5+0,5 pt)**

2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. **(0,5+0,5 pt)**

3. Déterminer la limite de f en +∞. **(0,5 pt)**

4. Montrer que, quel que soit x élément de] 0 ; +∞ [, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$. **(01 pt)**

En déduire le signe de f '(x) sur] 0 ; +∞ [. **(0,5 pt)**

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$. **(0,5 pt)**

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0,5 pt)**

7. Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 5cm. Prendre $\alpha \approx 0{,}3$. **(1,5 pt)**

III. **1.** A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e x.\ln(x).\,dx$. **(01 pt)**

2. Montrer que pour tout x élément de [1 ; e], $\dfrac{x\ln x}{e+1} \le f(x) \le \dfrac{x\ln x}{2}$. **(01 pt)**

En déduire que : $\dfrac{e^2+1}{4(e+1)} \le \int_1^e f(x).\,dx \le \dfrac{e^2+1}{8}$. **(0,5 pt)**

08 G 26 A 02
Durée : 4 heures
Séries : S2-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (05 points)

1) On considère l'équation (E) : $z^3 + (-6 – 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 – 45i = 0$.
   a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E). **(01point)**
   b) Achever la résolution de (E) (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution). **(01point)**

2) Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
   On considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i, 3 + 3i et 3 – 2i.
   a) Placer les points A, B et C dans le repère. **(0,5 point)**
   b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC. **(01,5 point)**

3) Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
   a) Donner une écriture complexe de f. **(0,5 point)**
   b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de f. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 (05 points)

1) Soient les équations différentielles (E_0) : y' + y = 0 et (E), y' + y = e^{-x} cos x.
   a) Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E), avec h(x) = (a cos x + b sin x) e^{-x} . **(0,5 point)**
   b) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f-h est solution de (E_0). **(0,5 point)**
   c) Résoudre (E_0). **(0,5 point)**
   d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E). **(0,5 point)**
   e) Déterminer la solution g de (E) telle que g(0) = 0. **(0,5 point)**

2) Soit ℓ la fonction définie par $\ell(x) = e^{-x} \sin x$.
   a) Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de cosx et sin x. **(0,5 point)**
   b) Etudier les variations de ℓ sur $[0, 2\pi]$. **(01,5 point)**
   c) Calculer $I = \int_0^{2\pi} \ell(x)\, dx$. **(0,5 point)**

EXERCICE 3 (05,5 points)

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3.
U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ;
U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;
U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1.
Si elle est verte on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2.
Si elle est rouge, on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3.

…/… 2

Epreuve du 1er groupe

Question

A) 1) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte. **(0,5 point)**

2) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge. **(0,5 point)**

3) En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage. **(01 point)**

4) Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage. **(0,5 point)**

5) Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage. **(0,5 point)**

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- Une boule verte, on gagne 1000 F
- Une boule jaune, on gagne 500 F
- Une boule rouge, on perd 500 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X. **(0,5 point)**
2) Calculer l'espérance mathématique de X. **(0,5 point)**

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième près par défaut.

1) Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0,5 point)**
2) Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0,5 point)**
3) Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage. **(0,5 point)**

EXERCICE 4 **(04,5 points)**

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnes à 10^{-1} près.
Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son age (x).

x (années)	0	1	2	4	7	11	12
y (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal. **(01 point)**

Unité graphique : en abscisse 1 cm pour 1 année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G. **(0,5 point)**

3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. **(0,5 point)**
b) Interpréter votre résultat. **(0,5 point)**

4) Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x. **(0,5 point)**
Tracer (D). **(0,5 point)**

5) a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg. Expliciter votre raisonnement. **(0,5 point)**
b) Retrouver ce résultat par le calcul. **(0,5 point)**

09 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdits.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE I (03 Points)

1) (X,Y) est unes série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

$(D_1) : y = a x + b$ et $(D_2) : x = a' y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Etablir que $r^2 = aa'$. **(01 point)**

2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x – y = 0$
- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5 y – 9 x + 24 = 0$.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive. **(0,5 point)**

b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y. **(0,75 + 0,75 point)**

EXERCICE II (05 Points)

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ''M appartient à l'axe des abscisses'' ; **(0,5 point)**

B : ''M appartient à l'axe des ordonnées'' ; **(0,5 point)**

C : ''M appartient aux deux axes'' ; **(0,5 point)**

D : ''M n'appartient à aucun des axes'' ; **(0,5 point)**

E : ''l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ est égal à $-\frac{\pi}{4}$'' ; **(0,5 point)**

F : ''le point M appartient au cercle trigonométrique ''. **(0,5 point)**

2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(01 point)**

b) Déterminer la fonction de répartition de X. **(01 point)**

…/…2

EXERCICE III (05 Points)

1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$. **(0,5 point)**

2- Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E'). **(0,25 point)**

3a- Démontrer que g est solution de (E') si et seulement $g - h$ est solution de (E). **(0,5 point)**

3b- Résoudre alors (E'). **(0,25 point)**

3c- Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. **(0,5 point)**

4- Soit la fonction k définie par $k(x) = (x + 2)e^{-x}$.

4a- Etudier les variations de k. **(01,5 point)**

4b- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$) de k au point d'abscisse 0. **(0,25 point)**

4c- Démontrer que le point I (0 ; 2) est un point d'inflexion de la courbe ($\mathcal{C}$). **(0,5 point)**

4d- Tracer ($\mathcal{C}$) et (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,75 point)**

EXERCICE IV (07 Points)

1a- Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x+1)$. **(01,5 point)**
Tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm. **(01 point)**

1b- Démontrer que sur $[2 ; +\infty[$ la fonction ℓ, définie par $\ell(x) = f(x) - x$, est bijective et l'équation $\ell(x) = 0$ admet une solution unique λ. **(01 point)**

2- On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$

2a- Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique. **(0,5 point)**

2b- Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$. **(0,5 point)**

2c- Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **(0,5 point)**

2d- En déduire que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, **(0,5 point)**

que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et que la suite (U_n) converge vers λ. **(0,5 + 0,25 point)**

2e- Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p pour λ. **(0,25 + 0,5 point)**

10 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (03 points)

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$. **(0,25 + 0,25 pt)**
2) Dans la suite, on suppose que a = 40 et b = 20. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : $Y/X = x_i$. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

a) Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat. **(01,75 pt)**
b) Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X. **(0,5 pt)**
c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$; l'unité est le centimètre.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. **(0,75 pt)**
b) En remarquant que $2^3 = 8$, déduire de 1)a) les solutions de l'équation $z^3 = 8$. **(0,75 pt)**
2) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$, 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.
a) Placer ces points dans le repère. **(0,75 pt)**
b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. **(0,5 pt)**
c) En déduire la nature du triangle ABC. **(0,25 pt)**
3) On considère f, la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.
a) Déterminer la nature de f puis donner ses éléments géométriques caractéristiques. **(01 pt)**
b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f. **(0,5 pt)**
c) En déduire l'image de la droite (AC) par f. **(0,5 pt)**

EXERCICE 3 **(03 points)**

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.
   a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ». **(0,5 pt)**
   b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ». **(0,5 pt)**
   c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$. **(0,25 pt)**
2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
   On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
   a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que la loi de probabilité de X est : p(X = 2) = $\frac{1}{6}$; p(X= 3) = $\frac{1}{3}$ et p(X=4) = $\frac{1}{2}$. **(0,75 pt)**
   c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type. **(0,25 + 0,25 pt)**

PROBLEME **(09 points)**

Les parties A et B du problème ne sont pas indépendantes.

PARTIE A

1) Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^{x} + 1$. **(0,5 pt)**
2) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x}+2$.
   a) Déterminer son domaine de définition Dφ et calculer ses limites aux bornes de Dφ. **(0,75 pt)**
   b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations. **(01 pt)**
   c) En déduire son signe. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f. **(0,5 pt)**
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de ($\mathscr{C}_f$). **(01 + 0,5 pt)**
   c) Etudier la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty, 0]$. **(0,25 pt)**
2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,25 pt)**
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 + 0,25 pt)**
3) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f. **(0,5 + 0,5 pt)**
4) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe ($\mathscr{C}_f$) et les demi-tangentes. On remarquera que f(1) = 0 et f'(1) = 0. **(02 pts)**
5) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par ($\mathscr{C}_f$), la droite d'équation y = x et les droites d'équations x = - ln8 et x = - ln4. **(0,5 pt)**

11 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (05,75 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$) direct.

I. Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Posons z = x + iy, x et y réels.

1) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ? **(0,25 pt)**
2) Quel est le module de z ? **(0,25 pt)**
3) Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$.
Déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z. **(0,5 pt)**
4) Soit M(z) un point du plan complexe et M'(z') l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.
Exprimer z' en fonction de z et θ. **(0,5 pt)**

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit.
(E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$.

1) Résoudre l'équation (E). **(0,5 pt)**
2) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
Calculer OA, OB et AB. **(0,75 pt)**
En déduire la nature du triangle OAB. **(0,5 pt)**

3) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. **(0,25 pt)**
Déterminer l'affixe du point D.

4) On appelle G le barycentre des points pondérés (O, 1) ; (D, -1) et (B, -1).
a) Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$. **(0,5 pt)**
b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1 cm) **(01 pt)**

5) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$. **(0,5 pt)**
En déduire la nature du triangle GAC. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (05,75 points)

I. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des évènements suivants :
A, A sachant B, $A \cap \overline{B}$ et $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$. **(02 pts)**

II. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.
Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

…/… 2

- Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'évènement : « La ville est délestée le n^ième jour » et p_n la probabilité de l'évènement D_n, $p_n = p(D_n)$.

1) Montrer les égalités suivantes :
$p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{5}{6}$ **(0,75 pt)**

2) Exprimer p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \overline{D}_n)$. **(0,5 pt)**

3) En déduire que, quel que soit $n \in IN^*$, on a :
$p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$ **(0,25 pt)**

4) On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in IN^*$.
a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme. **(0,75 pt)**
b) Exprimer U_n puis p_n en fonction de n. **(01 pt)**
c) Un match de football doit se jouer le 20ème jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage. **(0,5 pt)**

PROBLEME **(08,5 points)**

I. Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(0,5 pt)**
2) Déterminer la dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f. **(01, 5 pt)**
3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in IR$. **(01 pt)**
En déduire que $3 < \alpha < 4$.

II. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$.

1) a) Montrer que g est définie sur IR*. **(0,5 pt)**
b) Démontrer que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser . **(0,25 pt)**
c) Etudier la parité de g. **(0,25 pt)**
d) On note $D_E =]0, +\infty[$.
Soit k la restriction de g à D_E.
Calculer les limites de k aux bornes de D_E. Etudier les branches infinies. **(01 pt)**

2) a) En utilisant les questions I) et II 1) b.
Calculer k' (x) et étudier les variations de k sur D_E. **(0,5 pt)**
Dresser le tableau de variations de k sur D_E. **(0,5 pt)**
b) Déterminer le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et préciser le signe de k. **(0,5 pt)**

3) a) Montrer que k réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
c) Construire les courbes $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{C}_k^{-1})$, $\mathscr{C}_k^{-1}$ est la courbe représentative de la bijection réciproque k^{-1} de k dans un repère orthonormé ; unité graphique : 1 cm **(01 pt)**
Tracer la courbe de g dans le repère précédent. **(0,5 pt)**

12 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 ï Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant dôafficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (03,75 points)

Une urne contient 3 boules vertes et 4 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule dans lôurne.

- Si elle est rouge, on la remet dans lôurne, puis on tire simultanément deux boules.
- Si elle est verte, on ne la remet pas, puis on tire une boule de lôurne.

Soit les événements suivants :

 : la boule tirée au premier tirage est rouge ;

 : les boules tirées au deuxième tirage sont rouges ;

 : les boules tirées au deuxième tirage sont vertes ;

 : la boule tirée au deuxième tirage est rouge.

Soit la probabilité sur lôunivers .

1) Vérifier que

 ; ; ; . **(0,25pt +0,25pt +0,25pt +0,5 pt)**

2) Montrer que la probabilité :

a) de ne pas avoir de boule rouge au deuxième tirage est ; **(0,5 pt)**

b) dôavoir deux boules rouges au deuxième tirage est . **(0,5 pt)**

3) Soit la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues au deuxième tirage.
Déterminer la loi de probabilité de . **(0,5 pt)**

4) Déterminer puis représenter graphiquement la fonction de répartition de .
(01 pt)

Echelle pour la représentation :

- Sur lôaxe des abscisses 2 cm → 1 unité
- Sur lôaxe des ordonnées 4 cm → 1 unité.

EXERCICE 2 (07,5 points)

A) On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1) Calculer g(1). **(0,25 pt)**

2) Etudier les variations de g. **(02 pts)**

3) Déduire de cette étude le signe de g(x) pour tout x de lôensemble de définition de Dg de la fonction g. **(0,5 pt)**

B) On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

1) Préciser lôensemble de définition D_f de f. **(0,25 pt)**

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **(02,5 pts)**

3) a) Montrer que la courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation y = −x + 2. **(0,25 pt)**
   b) Etudier la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ) suivant les valeurs de x. **(0,25 pt)**

4) Déterminer les coordonnées du point A de ($\mathscr{C}_f$) où la tangente est parallèle à (Δ). **(0,5 pt)**

5) Représenter dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique : 2 cm) la courbe ($\mathscr{C}_f$) et les droites asymptotes. **(01 pt)**

EXERCICE 3 **(06points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1) Résoudre dans ℂ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.
   $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$. **(E)** **(0,75 pt)**

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1 +i, 2i et i. Placer A, B et C dans le repère. (unité graphique : 2cm). **(0,25 pt)**

3) Pour tout nombre complexe z différent de 1 + i, on associe le nombre complexe z' définie par : $z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$.

   a) Interpréter graphiquement $|z'|$ et arg (z'). **(01 pt)**

   b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur. **(0,75 pt)**

   c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$. **(0,75 pt)**

4) Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B.

   a) Déterminer la nature du triangle ABC. **(0,25 pt)**

   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S. **(0,25 pt)**

   c) Déterminer les images par S de (E_1) et (E_2) puis les construire. (Utiliser des couleurs différentes). **(01 pt + 01pt)**

EXERCICE 4 **(02,75 points)**

On donne l'équation différentielle $f'' + 2f' + f = 0$ (E).
On pose pour tout réel x, $k(x) = e^{-x} h(x)$.

1) Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $h''(x) = 0$. **(0,5 pt)**

2) Résoudre l'équation différentielle $h'' = 0$. **(0,25 pt)**

3) En déduire la solution générale f de (E). **(01 pt)**

4) Déterminer toutes les primitives de f sur IR. **(01 pt)**

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE-I (05 points)

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité Y_i du Lac Rose pendant le $i^{ème}$ mois de pluie, noté X_i.

X_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Y_i	**4,26**	**3,4**	**2,01**	**1,16**	**1,01**

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} près.

1) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interpréter le résultat. **(01,5 point = 0,25pt + 1,25pt)**

b) Quelle est l'équation de la droite de régression de Y en X. **(0,5 pt = 0,25pt + 0,25pt)**

c) Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au $6^{ième}$ mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse. **(0,25pt)**

2) On pose $Z = \ln(Y - 1)$.

a) Donner le tableau correspondant à la série (X, Z). Les résultats seront arrondis au millième près. **(0,5 pt)**

b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X , Z). **(01,5 point = 0,25pt + 1,25pt)**

c) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X, puis exprimer Y en fonction de X. **(0,5 pt = 0,25pt + 0,25pt)**

d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c). **(0,25pt)**

EXERCICE-II (05 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. S est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec M' = S (M).

1) Exprimez z' en fonction de z. **(0,5 pt)**

2) On définit la suite des points $(Mn)_{n \in IN}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} M_o \text{ d'affixe } z_0 = 1 + i \\ M_n = S(M_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

z_n est l'affixe de M_n, pour tout entier naturel n.

a. Déterminer les affixes des points M_1, M_2 et M_3. **(01,5 pt)**

b. Exprimer z_n en fonction de z_{n-1} pour $n \geq 1$. **(0,5 pt)**

c. En déduire que $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n z_0$. **(01 pt)**

d. Soit $a_n = |z_n|$, montrer que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 pt)**

e. Etudier la convergence de la suite (a_n) , $n \in IN$. **(0,5 pt)**

…/…2

PROBLEME **(10 points)**

Les résultats de la partie A seront utiles dans la partie B.

PARTIE A

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x} = 0$. **(0,5 pt)**

2) Soit k :]0 ; +∞[→ IR
$x \longmapsto x(1 - \ln x)$

a) k est-elle continue sur]0 ; +∞[? Justifier la réponse. **(0,5 pt)**

b) Soit K :]0 ; +∞[→ IR
$x \longmapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$

Vérifier que K est une primitive de k, dans]0 ; +∞[. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & si\ x \leq 0 \\ x\ lnx & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de f. Puis calculer les limites de f aux bornes de D_f. **(0,75 pt)**
2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement les résultats. **(0,1 pt)**
3) Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de f. **(02x 0,25 pt)**
4) Calculer la dérivée de f sur son domaine d'existence et étudier son signe. **(01 pt)**
5) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5 pt)**
6) Montrer que la droite (Δ) d'équation : y = -x-1 est une asymptote de la courbe (C_f) de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quand x tend vers - ∞. **(0,25 pt)**
7) Préciser la nature de la branche infinie de (C_f) quand x tend vers +∞. **(0,25 pt)**
8) Représenter graphiquement la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 0 et tracer (Δ). **(02 pts)**
9) Soit h la restriction de f à $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
   b) Représenter graphiquement ($C_{h^{-1}}$), la courbe représentative de h^{-1} dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, à l'aide de (C_f). **(0,5 pt)**
10) Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine du plan délimité par $x = \frac{1}{e}$, $x = e$, la courbe (C_f) et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : y = x.
   a) Calculer $\mathcal{A}_1$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine du plan délimité par les droites d'équations respectives : $x = -\frac{1}{e}$, $y = \frac{1}{e}$, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe ($C_{h^{-1}}$). **(0,5 pt)**

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE1 (06 points)

A) **Questions de cours**

1) Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. **(0,75 point)**
2) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre K(z_0), d' angle θ. **(0,5 point)**

B) On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Donner une écriture trigonométrique de z_0. **(0,5 point)**
2) Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8\ i\sqrt{3}$. **(0,25 point)**
3) Résoudre dans ℂ l'équation $z^4 = 1$. **(0,5 point)**
4) En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8\ i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique. **(01 point)**

   On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$
5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$. **(0,75 point)**
6) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **(0,5 point)**
7) Vérifier que : r (A) = C ; r (C) = B et r (B) = D. **(0,75 point)**
8) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 (04 points)

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

A) **Question de cours**
Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. **(01 point)**

B) Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.
On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1) On note : A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ;
   B, l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».
   a) Calculer la probabilité de A. **(0,25 point)**
   b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$. **(0,25 point)**
   c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? **(0,25 point)**
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(0,75 point)**
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. **(0,25 point)**
   c) Calculer la variance de X. **(0,25 point)**

C) L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1) Déterminer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ». **(0,25 point)**

…/… 2

2) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.
On note p_n, la probabilité de l'évènement D_n « C soit réalisé au moins une fois »
Exprimer p_n en fonction de n. **(0,25 point)**

3) Etudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in IN}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. **(0,5 point)**

PROBLEME **(10 points)**

NB : Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

PARTIE A : **(03,25 points)**

Soit g la fonction définie dans]0, +∞[par :

$g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 point)**
b) Calculer les limites de g aux bornes de D_g. **(0,75 point)**
(Pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser h = x – 1).

2) Déterminer g', la fonction dérivée de g, et dresser le tableau de variations de g. **(01 point)**

3) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$. **(0,5 point)**

4) Déduire de l'étude précédente le signe de g sur D_g. **(0,5 point)**

PARTIE B : **(06,75 points)**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$, si $x > 0$

$f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}$, si $x \leq 0$

1) a) Vérifier que f est définie sur IR \ {1} et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(01 point)**
b) Préciser les droites asymptotes à ($\mathscr{C}_f$), la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. **(0,5 point)**

2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 point)**
b) On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{-1}{2}$.
Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{6}$. **(0,5 point)**
Donner l'interprétation graphique de ces résultats. **(0,5 point)**

3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$. **(0,25 point)**
b) Calculer f '(x) sur les intervalles où f est dérivable puis dresser le tableau de variations de f. **(01 point)**

4) Construire ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm. **(01,5 point)**
On pourra prendre $\alpha \simeq 4,5$.
On placera les points d'abscisses – 1 ; 0 ; 2 et 5.

5) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in$ IR \ {-2 ; -1}, on ait :

$\frac{-6x}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$ **(0,25 point)**

b) En déduire que :

$\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \frac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **(0,25 point)**

c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par ($\mathscr{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = - ln 2 et x = 0. **(0,5 point)**

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (03,5 points)

Le 1), 2) et 3) de cet exercice sont faits chacun de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle et vraie ou fausse.

1) L'évènement contraire de « A sachant B » est : **(0,5 pt)**
   a) $\overline{A}$ sachant B b) A sachant $\overline{B}$
   c) $\overline{A}$ sachant $\overline{B}$ d) $\overline{A} \cap B$.

2) Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a : **(0,5 pt)**
   a) p(E/F) = 0 b) $p(E \cup F) = p(E) \times p(\overline{F}) + p(F)$
   c) $p(E \cap F) = 0$ d) p(E/F) = 1.

3) Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n = 4 et $p \in]0, 1[$

   a) si $p = \frac{1}{2}$ alors p(X = 2) = 2p(X = 1),
   b) si $p = \frac{1}{4}$ alors $p(X = 3) > \frac{1}{4}$
   c) si $p = \frac{1}{2}$ alors p(X > 1) = 1,
   d) si p (x = 1) = 8 p (X = 0) alors $p = \frac{2}{3}$. **(0,75 pt)**

4) Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives z_A et z_B.
   Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B.
   Notons z et z' les affixes respectives de M et M'.
   Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

   a) $|z - z_A| = 1$. **(0,25 pt)** b) $|z - z_A| = |z - z_B|$. **(0,5 pt)**
   c) $|z'| = |z_A - z_B|$. **(0,5 point)** d) $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\frac{z' - z_A}{z' - z_B}\right)\ [\pi]$. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

1) Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.
   a) Démontrer que 2 + i est une racine de p(z). **(0,25 pt)**
   b) En déduire les solutions de l'équation p(z) = 0 dans $\mathbb{C}$. **(01 pt)**

2) Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives 2 + i, -1 – 2i et -4 + i.
   a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC. **(0,75 pt)**
   b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [2\pi]$. **(0,25 pt)**
   c) En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. **(0,25 pt)**
   d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. **(0,25 pt)**

3) Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
   a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : **(0,5 pt)**
   f(z) = iz – 3 – i.
   b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r. **(0,25 pt)**

4) Soit T : M(z) ⟼ M' (z') telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
   a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2. **(0,5 pt)**

…/… 2

b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg\alpha = -\frac{\pi}{4}$. **(0,25 pt)**

5) On considère la transformation g = roT. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : **(0,25 pt)**
h(z) = 2iz – 2.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g. **(0,5 pt)**

EXERCICE 3 (02,5 points)

Au Sénégal une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté Y (X et Y sont en milliards de FCFA).
On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1,8
Y	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.
Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.
1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. **(01 pt)**
2) a) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X. **(01 pt)**
b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaire de 300 milliards si cette tendance se poursuit. **(0,5 pt)**

EXERCICE 4 (09 points)

A) 1) En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout réel α :
I (α) = $\int_0^{\alpha} e^t(t+2)\,dt$. **(0,5 pt)**
En déduire I(x). **(0,25 pt)**

2) Soit k une fonction dérivable sur IR. Considérons la fonction h telle que
$h(x) = k(x)\, e^{-x}$, $\forall\, x \in IR$.
On se propose de déterminer la fonction h de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes, $\forall\, x \in IR$:

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) = x + 2 \\ h(0) = 2. \end{cases}$$

a) Vérifier que $k'(x) = (x + 2)\, e^x$. **(0,5 pt)**
b) En déduire k puis h. **(0,25 + 0,25 pt)**

B) I) 1) Etudier les variations sur IR de la fonction g définie par :
$g(x) = x + 1 + e^{-x}$. **(01,5 pt)**
2) En déduire que g(x) est strictement positif. **(0,25 pt)**

II) Soit la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.
($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. **(02,5 pts)**
2) Pour tout x strictement positif, on note M, le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse x et N le point de ($\mathscr{C}_f$) de même abscisse.

a) Démontrer que $0 < \overline{MN} < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. **(0,25 pt)**

b) Quelle est la limite de $\overline{MN}$ quand x tend vers $+\infty$. **(0,25 pt)**

3) a) Démontrer que :
$f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$, $\forall x \in IR$. **(0,5 pt)**
b) En déduire que ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et déterminer la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ) pour $x<-1$. **(0,25 + 0,25 pt)**
4) Construire ($\mathscr{C}_f$) et (Δ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(01,5 pt)**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 2

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (04 *points*)**.**

1. On considère l'équation $(E) : z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer la solution réelle de (E). $0,5$ *pt*

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E). $0,5$ *pt*

2. On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a. Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC. $0,5 + 0,5$ *pt*

b. On pose $Z = \dfrac{z-3}{z-5+2i}$.

Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z. $0,5$ *pt*

En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul. $0,5$ *pt*

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$. $0,5$ *pt*

b. Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire (C'). $0,5$ *pt*

Exercice 2 (06 *points*)**.**

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second tirage successif avec remise de 2 autres boules.
- Si les deux boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au premier tirage. » $0,25$ *pt*

B : « Le professeur tire deux boules de couleurs différentes au premier tirage. » $0,25$ *pt*

C : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de même couleur. » $0,5$ *pt*

D : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » $0,5$ *pt*

E : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » $0,5$ *pt*

F : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. » $0,5$ *pt*

2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FOSCO 1000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1000 F.
Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FOSCO.

a. Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité. 1 *pt*

b. Déterminer la fonction de répartition de X. 1 *pt*

3. Etant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des évènements suivants :

G : « le FOSCO réalise un gain de 100 000 F. » $0,5$ *pt*

H : « le collectif des professeurs réalise un gain de 100 000 F. » $0,5$ *pt*

I : « Ni gagnant, ni perdant. » $0,5$ *pt*

PROBLEME (10 *points*)**.**

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.

1. a. Déterminer Dg, puis calculer les limites de g aux bornes de Dg. $0,75$ *pt*

b. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g. 1 *pt*

2. a. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in]-0,72, -0,71[$. $0,25 + 0,5$ *pt*

b. Déterminer le signe de $g(x)$. $0,5$ *pt*

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{ln(x+1)} & \text{si} \quad x > -1 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que $Df = \mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de Df. $0,75$ *pt*

b. Etudier la nature des branches infinies. $0,5$ *pt*

2. a. Etudier la continuité de f en -1 et en 0. $0,5$ *pt*

b. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats. 1 *pt*

3. a. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et $x \neq 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$ et calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[$. $0,5$ *pt*

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 1 *pt*

4. Soit h la restriction de f à $[0, +\infty[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. $0,25$ *pt*

b. Donner le sens de variation de h^{-1}. $0,25$ *pt*

c. Construire Cf et Ch^{-1}. $1,25$ *pt*

Partie C

Soit m la fonction définie par $m(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. a. Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $0,25$ *pt*

b. En déduire la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ telle que $H'(x) = m(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{f(x)}dx$. $0,75$ *pt*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/2

OFFICE DU BACCALAURÉAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Télélax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

26

17 G 26 A01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 points).

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse.
Chaque réponse trouvée rapporte 0,5 point et la justification 0,5 point ; soit au total **1point** pour la réponse trouvée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ est égale à :
   a. 0.
   b. 0,5.
   c. 1.

2. $\int_1^e \ln x \, dx$ est égale à :
   a. 1.
   b. $e-1$.
   c. e.

3. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = 0$ est donnée par :
   a. $y(x) = Axe^{-3x}$.
   b. $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{3x}$.
   c. $y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$.

4. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. Alors $f'(x)$ est égale à :
   a. $(\ln x)^2$.
   b. $x \ln x$.
   c. $(\ln x)^2 + 2\ln x$.

Exercice 2 (6 points).

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(z)$ défini par : $P(z) = z^4 + (3-i)z^3 + (4-3i)z^2 + (12-4i)z - 12i$ et l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. a. Montrer que $P(z)$ est divisible par $(z-i)(z+3)$. 0,5 pt
   b. Factoriser $P(z)$. 0,5 pt
   c. En déduire les solutions de l'équation : $P(z) = 0$ sous la forme trigonométrique. 1 pt

2. a. Déterminer les nombres complexes α et β solutions de l'équation (E) avec $Im\alpha > 0$. 0,5 pt
   b. Ecrire α et β sous la forme trigonométrique. 0,5 pt

3. On considère un dé bien équilibré à six faces et sur chaque face, on inscrit l'un des nombres : i ; $2i$; $-2i$; $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$ et -3.

On lance ce dé et on note z le nombre qui apparait sur sa face supérieure.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants : **1 pt**
A : « z est réel » ; B : « z est imaginaire pur ».

b. On lance 5 fois de suite ce même dé. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la réalisation de l'évènement B. **0,5 pt**

4. On définit la variable aléatoire θ qui, à chaque nombre z inscrit sur une face, associe son argument principal.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par θ. **0,5 pt**

b. Déterminer la loi de probabilité de θ. **0,5 pt**

c. Calculer son espérance mathématique $E(\theta)$. **0,5 pt**

PROBLEME (10 points).

Partie A

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 + \ln(2e^{-x} - 1) & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{-1}{x(1 - \ln x)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}\backslash\{e\}$, puis calculer les limites aux bornes de D_f. **1,5 pt**

b. Montrer que pour tout $x \leq 0$, $f(x) = x + 2 + \ln(2 - e^x)$. **0,25 pt**

c. Etudier le signe de $x(1 - \ln x)$. **0,25 pt**

d. Etudier la continuité de f en 0. **0,5 pt**

e. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2 - e^x)}{x} = -1$. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter géométriquement le résultat. **1 pt**

f. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2 + \ln 2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$, puis étudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ). **0,5 pt**

2. a. Etudier les variations de f. **1,5 pt**

b. Dresser son tableau de variations. **0,5 pt**

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ située dans l'intervalle $]-3; -2[$. En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près. **0,5 pt**

3. Tracer les droites asymptotes à (C_f), puis la courbe (C_f) . **1,25 pt**

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]e\ ; +\infty[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **0,25 pt**

2. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a. Dresser le tableau de variations de g^{-1}. **0,25 pt**

b. Comment obtient-on la courbe $(C_{g^{-1}})$ à partir de la courbe (C_g) ? (On ne demande pas la construction de $C_{g^{-1}}$). **0,25 pt**

Partie C

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \ln|1 - \ln x|$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F de F. **0,5 pt**

2. Déterminer la fonction dérivée F' de F. **0,5 pt**

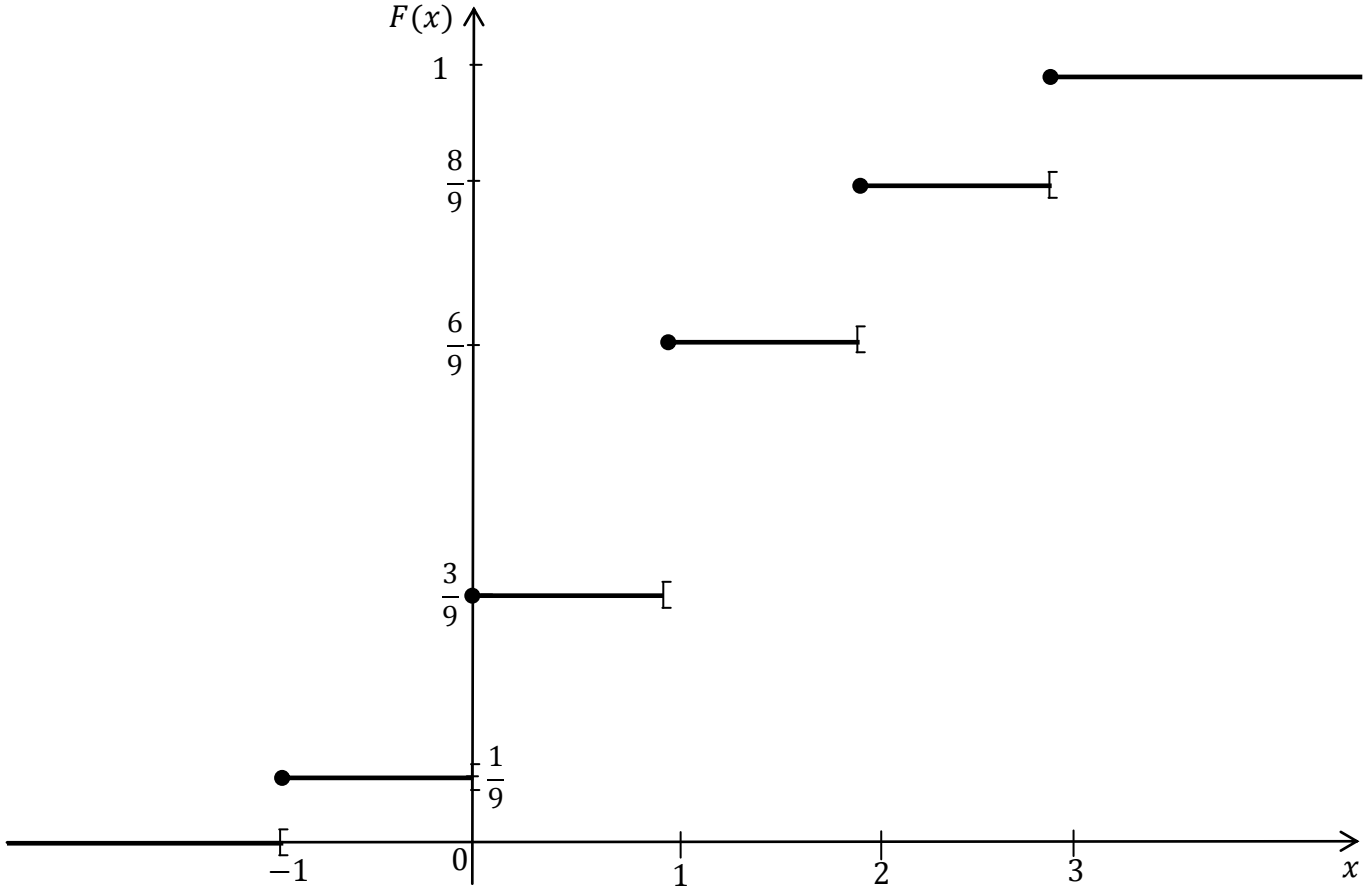
3. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 5$. **0,5 pt**

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

1) On considère la fonction de répartition F de la variable aléatoire X,
$F : IR \to [0,1]$
$x \mapsto p(X \leq x)$, p étant une probabilité définie sur un univers fini et non vide.
Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de F est la suivante :



a) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer la loi de probabilité de X. **(1 pt)**

c) Calculer les probabilités $p(X \leq 0)$ et $p(X \geq 1)$. **(0,5+0,5 pt)**

d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. **(0,5 pt)**

e) Vérifier que l'écart type $\sigma(X)$ de X est égal à $\frac{\sqrt{12}}{3}$. **(0,5 pt)**

2) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 3 boules. Les boules de U_1 sont numérotées respectivement $1, 2, 3$ et celles de U_2 portent respectivement les nombres $-2, -1, 0$. On tire au hasard une boule de chaque urne et on effectue la somme Y des numéros des boules tirées.

a) Dresser un tableau à double entrée permettant d'obtenir les valeurs possibles de Y. **(0,75 pt)**

b) En déduire que Y et X ont la même loi de probabilité. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 (5 points)

1) Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2$. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$. **(0,25+0,5 pt)**

2) On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (que l'on déterminera. **(0,25 pt)**
b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes. **(0,5 pt)**

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $Z_B = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $Z_C = -1$.
a) Déterminer la forme exponentielle de Z_A et celle de Z_B. **(0,5 pt)**
b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. **(0,75 pt)**

4) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
a) Donner l'affixe Z_D du point D sous forme algébrique. **(0,25 pt)**
b) Démontrer que : $\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD. **(0,25x2 pt)**

5) Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O. On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B.
a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques. **(0,25x4 pt)**
b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1 . Déterminer l'image (C') de (C) par S. **(0,5 pt)**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Déterminer les solutions h de (E) définies sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

2) On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F). **(0,5 pt)**
b) Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (E). **(0,75 pt)**
c) En déduire toutes les solutions de (F). **(0,5 pt)**
d) Donner la solution f de (F) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$. **(0,5 pt)**

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty ; -1[\cup [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right), \text{si } x < -1 \\ xe^{-2x} + e^{-2x} - x + 1, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

. et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1) a) Calculer les dérivées f' et f'' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. **(1 pt)**
b) Etudier les variations de f', puis dresser le tableau de variation de f' sur $[0 ; +\infty[$. **(0,5+0,5 pt)**
c) En déduire le signe de f' sur $[0 ; +\infty[$. **(0,5 pt)**

2) Etudier les variations de f sur $]-\infty ; -1[$. **(0,5 pt)**
3) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 \leq \alpha \leq 2$. **(0,5+0,5 pt)**
5) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) que l'on déterminera, puis étudier la position de (D) par rapport à la courbe (C_f). **(0,5+0,5 pt)**
6) Construire les asymptotes, puis la courbe (C_f). **(1,75 pt)**

01-19 G 26 A-20
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5–Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (4,5 pts)

Dans une classe de première S_2, sur 45 élèves 30 ont eu la moyenne au premier devoir de mathématiques. On considère que dans cette classe si un élève a la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{2}$ et s'il a raté la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{3}$.

Soit E_n l'événement « l'élève a eu la moyenne au n-ième devoir », $\overline{E_n}$ l'événement « l'élève n'a pas eu la moyenne au n-ième devoir » et p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1) Déterminer p_1. **(0,5 pt)**
2) a) Déterminer $p(E_2 / E_1)$ et $p(E_2 / \overline{E_1})$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire p_2. **(0,5 pt)**
3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3}$. **(0,75 pt)**
4) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 pt)**
   b) Exprimer u_n en fonction de n puis p_n en fonction de n. **(01 pt)**
   c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (5,5 pts)

PARTIE A

Pour tout complexe z on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1) Déterminer le polynôme Q tel que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$. **(0,5pt)**
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : f(z) = 0. **(0,5pt)**
3) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). **(0,5 pt + 0,5pt)**

PARTIE B

Considérons les points A, B, C et D du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$ et $D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? **(0,5pt)**

2) Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D.
Déterminer l'écriture complexe de r. **(0,5pt)**
3) Quelle est la nature du triangle ΩAD? **(0,5pt)**
4) Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD. **(0,5pt)**
5) On pose $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel. **(1pt)**
6) Donner la forme algébrique de u_{2019}. **(0,5pt)**

PROBLEME (10 pts)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}}$.
On note $\boldsymbol{C_f}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On choisit $2cm$ pour unité graphique.

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique définie pour tout x réel par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.
1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,75pt)**
2) Etudier le sens de variations de g puis dresser le tableau de variations de g. **(1pt)**
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule puis prouver que $0{,}70 \leq \alpha \leq 0{,}71$. **(0,75pt)**
Etudier le signe de $g(x)$. **(0,5pt)**

PARTIE B :

1) a) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. **(0,5pt)**
b) En déduire le sens de variations de f. **(0,5pt)**
c) Démontrer que : $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$, où α est le nombre défini en 3) **Partie A**. **(0,5pt)**
2) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1. **(0,5pt)**
3) a) Déterminer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. **(0,75pt)**
b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. **(0,25pt)**
4) Démontrer que $\boldsymbol{C_f}$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (D) dont on donnera une équation. **(0,5pt)**
5) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5pt)**
6) Tracer sur le même graphique $\boldsymbol{C_f}$ et (D). **(1,5pt)**
7) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x l'intégrale $I(x) = \int_0^x (2t - 4)e^{\frac{t}{2}}\, dt$. **(0,75pt)**
8) Soit λ un réel négatif. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ du domaine constitué des points de coordonnées (x, y) satisfaisant à : $\lambda \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 2 - x$. **(0,25pt)**
Interpréter graphiquement la limite de l'aire $\mathscr{A}$ quand λ tend vers $-\infty$. **(0,5pt)**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 2

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (07 points).

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Compléter les propriétés sur les modules et arguments suivantes :

a. $|z^n| = ...$; **b.** Si z' non nul, alors $|\frac{z}{z'}| = ...$; **(0,25 + 0,25) pt**

c. $\arg(z^n) = ...$, n un entier naturel ; **d.** Si z' non nul, alors $\arg(\frac{z}{z'}) = ...$ **(0,25 + 0,25) pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Donner l'interprétation géométrique de :

a. $|z_B - z_A|$; **b.** $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C})$. **(0,25 + 0,25) pt**

3. Rappeler la formule de Moivre. **0,5 pt**

Partie B

Soit s une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. On donne $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. **2 pts**

2. Déterminer les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation. **1 pt**

b. s est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. **1 pt**

c. s est une homothétie de rapport -8. **1 pt**

Exercice 2 (03 points).

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.

a. Déterminer les valeurs possibles de S. **0,5pt**

b. Déterminer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9. **0,5pt**

2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

a. Quelle est la probabilité que chacun affiche un même score de 9, 7 ou 8 ? **0, 75pt**

b. Quelle est la probabilité qu'ils affichent le même score. **0, 5pt**

c. Celui qui affiche le plus grand score gagne. Calculer la probabilité pour que Marame gagne. **0, 75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} & si \ \ x \leq 0 \\ \\ x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$. **0, 5 pt**

2. a. Etudier la continuité de f en 0. **0, 75 pt**

b. Pour $x < 0$, montrer que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$. **0, 5 pt**

En déduire $\lim\limits_{x \to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. **0, 25 pt**

c. Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. **0, 5 pt**

3. a. En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrer que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$. **0, 5pt**

En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0, 5pt**

b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser **3.a.** pour déterminer son signe. **(0, 5 + 0, 5) pt**

c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe. **(0, 5 + 0, 25) pt**

4. a. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. **0, 5 pt**

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0, 25 + 0, 25) pt**

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0, 25 + 0, 25) pt**

d. Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats. **(0, 25 + 0, 25 + 0, 25) pt**

5. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$. **0, 25 pt**

6. Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. **0, 5 pt**

7. Représenter graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère. **1 pt**

8. Calculer $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big) dx$. **0, 5 pt**

9. Interpréter le résultat précédent en terme d'aire. **0, 25 pt**

OFFICE DU BACCALAUREAT
E .mail : office@ucad.edu.sn
Site web : officedubac.sn

Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

Une urne U_1 contient 4 boules noires et 3 boules blanches.
Une urne U_2 contient 3 boules noires et 2 boules blanches.
Expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître. Si la face numérotée 6 apparaît, on tire une boule dans U_1, sinon on tire une boule dans U_2.
On considère les événements suivants : A « obtenir la face numérotée 6 », B « tirer une boule blanche ».

1. Schématiser la situation de l'expérience sous forme d'un arbre pondéré. **(0,5 pt)**
2. Donner les probabilités de A et $\bar{A}$, où $\bar{A}$ est l'événement contraire de A. **(0,5 pt)**
3. Déterminer la probabilité de l'événement B. **(0,75 pt)**
4. Calculer $p_B(A)$, probabilité de A sachant B. **(0,5 pt)**
5. L'expérience précédente se déroule 5 fois de suite de façon indépendante.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
6. Donner la loi de probabilité de X. **(1,5 pt)**

a. Trouver l'espérance mathématique de X, $E(X)$ et la variance de X, $V(X)$. **(0,5 pt)**

7. L'expérience se déroule en n parties indépendantes.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche dépasse $0{,}99$. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 (05 pts)

1. a. Déterminer le nombre complexe a tel que $a(1+i) = 1+3i$, puis calculer ia^2. **(0,5+0,5 pt)**
   b. Montrer que l'équation $Z^2 - (1+3i)Z - 4 + 3i = 0$, $Z \in \mathbb{C}$ a pour solutions a et ia. **(0,5+0,5 pt)**
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\,cm$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+i$ et $b = -1+2i$.
   a. Placer A et B dans le repère. **(0,5 pt)**
   b. Vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB. **(0,25+0,5 pt)**
3. Soit C le point d'affixe $c = 1 + \frac{1}{2}i$.
   a. Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que mes $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$. **(0,75 pt)**
   b. On note J, K, L et M les milieux respectifs de $[AB], [DA], [CD]$ et $[BC]$.
   Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$ et justifier la réponse. **(1 pt)**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

1) Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - \ln(1+x)$.

a. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,,+\infty[$. **(1 pt)**

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,,+\infty[$ · **(0,25 pt)**

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$.
On considère la fonction f de représentation graphique (C_f) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}[1+\ln(1+x)] \text{ si } x \geq 0 \\ x + \dfrac{2e^x}{e^x+1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

a. Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

b. Etudier les limites de f aux bornes de D_f. **(0,75 pt)**

c. Montrer que f est continue en 0 · **(0,5 pt)**

d. Démontrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$,on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$ · **(0,5 pt)**

e. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(1,25 pt)**

3) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles où f est dérivable. **(1 pt)**

4) Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations. **(1 pt)**

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty\,,0[$ et vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$. **(0,75 pt)**

6) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et donner l'autre asymptote à (C_f) · **(0,5 pt)**

7) Préciser la position de (Δ) par rapport à (C_f) sur $]-\infty\,,0[$ · **(0,25 pt)**

8) Tracer (C_f) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**

PARTIE B

Soit $\lambda \in]-\infty\,,0[$ tel que $\lambda < \alpha$, α étant le réel défini dans la **partie A.**
Soit la partie du plan comprise entre (C_f), (Δ), les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \alpha$ et par $\mathcal{A}(\lambda)$ son aire exprimée avec l'unité d'aire.

1. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et α. **(0,75 pt)**

2. En déduire $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. **(0,25 pt)**

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrer que $a^2=-2\sqrt{3}-2i$, puis en déduire le module de a. **0,5+0,5 pt**
2. Ecrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$. **0,5+0,5 pt**
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **01 pt**
4. Représenter sur le même graphique les points images de $a, -a$ et a^2. **01 pt**

EXERCICE 2 : (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c. Puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$. On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) et $b=6$ ».
   Justifier que la probabilité de l'événement A est $p(A)=\frac{5}{216}$. **0,5 pt**
2. On considère les événements suivants :
   B: « -2 est solution de (E) et $c=4$ ».
   C: « la somme des solutions est -2 et leur produit est 1 ».
   D: « les deux solutions sont confondues et $b=4$ ».
   La probabilité de chacun des événements B, C et D appartient à l'ensemble $I=\left\{\frac{1}{72};\frac{1}{108};\frac{1}{54}\right\}$.
   Donner la probabilité de chacun des événements B, C et D en le justifiant. **01,5 pt**
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.
   a) Soit F l'événement : " L'événement A se réalise une seule fois au 3ème essai".
      Montrer que la probabilité de l'événement F est $p(F)=\frac{5\times(211)^9}{(216)^{10}}$. **0,5 pt**
   b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.
   b-1) Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,5 pt**
   b-2) Montrer que le nombre espéré de réalisations de A est égal à $\frac{25}{108}$. **0,5 pt**
   b-3) Calculer la variance de Y. **0,5 pt**

…/… 2

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME : **(12 points)**

A. Soient la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - x\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère othonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité 2cm.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]0, +\infty[$ · **0,5 pt**
2. Etudier la continuité de f en 1 · **0,5 pt**
3. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus. **1,25 pt**
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **0,75 pt**
5. Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite en 0 et définir ce prolongement h. **0,5 pt**
6. Etudier la dérivabilité de h à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat. **0,5 pt**
7. Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. **01 pt**
   Dresser le tableau de variations de f · **01 pt**
8. a. Tracer (C_f) · **01 pt**
   b. Calculer l'aire A en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f), la droite d'équation $y = 1$, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = 4$. **01 pt**

B. 1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$ ·
En déduire un encadrement de α à 10^{-1} près. **01,25 pt**

b. Montrer que : $\forall\, x \in [1, +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ · **0,5 pt**

c. En déduire que : $\forall\, x \in [1, +\infty[, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. **0,25 pt**

2. Soit (W_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{W_n}} \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

a. $W_n \geq 1$ · **0,75 pt**

b. $|W_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|W_n - \alpha|$ · **0,25 pt**

c. $|W_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$ · **0,75 pt**

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$. **0,25 pt**

Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (03 points)

1) Soit a un nombre rationnel strictement positif et n un entier naturel. Donner les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. **(1,5 pt)**
2) Donner les primitives des fonctions suivantes :
   a) $(exp\circ f)f'$ b) $\frac{f'}{f}$. **(1,5 pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$P(z) = 2\,z^3 - 3\,(1+i)\,z^2 + 4i\,z + 1 - i$, où $z \in \mathbb{C}$.

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble (E) des points M de son plan de représentation tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\right\| \leq 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

1) Vérifier que 1 et i sont des racines de P. **(0,5 pt)**
2) Déterminer le polynôme g tel que $P(z) = (z-1)\,(z-i)\,g(z)$. **(0,5 pt)**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,5 pt)**
4) On pose $z_A = 1, z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$.
   a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ en choisissant comme unité graphique $4\ cm$. **(0,75 pt)**
   b) Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble (E). **(0,5 pt)**
   c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1)\ ;\ (B,1)\ ;\ (O,2)\}$, puis placer G. **(0,5 pt)**
5) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\right\| \leq 2$. **(0,5 pt)**
6) Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif ? **(0,25 pt)**

EXERCICE 3 (04 points)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}U_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer U_1 et U_2. **(0,5 pt)**
2) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geq \sqrt{3}$. **(01 pt)**
3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\,x$.
   a) Etudier le sens de variations de f. **(01 pt)**
   b) En déduire par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**
4) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **(01pt)**

PROBLEME (09 pts)

PARTIE A (02 pts)

On considère l'équation différentielle $(E) : \frac{1}{2}\,y' + y = 3\,e^{-2x} + 2$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : \frac{1}{2}\,y' + y = 0$. **(0,25 pt)**
2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\,e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E). **(0,5 pt)**
3) a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $a = 6$ et $b = 2$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

…/… 2

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E). **(0,5 pt)**

4) Déterminer la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O. **(0,25 pt)**

PARTIE B **(07 pts)**

Soient f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}(6x-2)e^{-2x}+2 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **(0,5 pt)**
2) Etudier les limites aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **(01,5 pt)**
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 pt)**
4) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**
5) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(01 pt)**
6) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[\backslash\{1\}$. **(0,75 pt)**
7) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5 pt)**
8) Montrer sur l'intervalle $]1\ ,2[$ que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $1,2<\alpha<1,3$. **(0,5 pt)**
9) Construire (C_f) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**
10) Calculer en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x=2, x=3$, $y=-1$ et la courbe (C_f) de f. **(0,5 pt)**

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (05 points)

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3i$, $z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.
   a. Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. **(0, 75 point)**
   b. En déduire la nature du triangle ABC. **(0, 75 point)**
   c. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré. **(0,5 point)**
   d. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0, 75 point)**

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   Soit S l'application du plan dans le plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$.
   a. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 2 - i$. **(0,5 point)**
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **(0,75 point)**
   c. Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$. **(0,5 point)**
   d. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1 + i)z + 2 - i| = 2$. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 (05 points)

Une entreprise fabrique des articles dans deux unités de production notées U_1 et U_2. L'unité U_1 assure 60% de la production.

On a constaté que :

- 3% des articles provenant de l'unité U_1 présentent un défaut de fabrication.
- 8% des articles provenant de l'unité U_2 présentent un défaut de fabrication.

L'entreprise envisage de mettre en place un test de contrôle de ces articles avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 82% des articles défectueux, mais il élimine également à tort 4% des articles non défectueux. Les articles non éliminés sont alors mis en vente.

L'entreprise souhaite que moins de 1% des articles vendus soient défectueux.

A l'aide des informations ci-dessus et des outils mathématiques au programme :

1. démontrer que 5% des articles produits présentent un défaut de fabrication, **(02 points)**

…/… 2

2. en prenant au hasard un article fabriqué, montrer que la chance que cet article soit mis en vente après contrôle est de $0{,}921$, **(02 points)**
3. vérifier si ce contrôle permet à l'entreprise de réaliser son souhait. **(01 point)**

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A **(02 points)**

1. Pour tout $x < 0$, on pose : $u(x) = x + 1 - e^{-x}$.
   Etudier le signe de $1 - e^{-x}$ pour $x < 0$. **(0,25 point)**
   En déduire que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$. **(0,25 point)**

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $v(x) = x - 1 - ln\, x$.
   a. Dresser le tableau de variations de v. **(01 point)**
   b. En déduire le signe de $v(x)$ pour $x > 0$. **(0,5 point)**

PARTIE B **(08 points)**

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x\, ln\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. **(0,5 point)**
   b. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5 point)**
   c.Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$. **(0,25 point)**
   Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) sur $]-\infty, 0[$. **(0,25 point)**
   d.Etudier la nature de la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. **(0,5 point)**
2. a. Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 point)**
   b. Etudier la dérivabilité de f en 0. **(0,5 point)**
   Interpréter graphiquement les résultats obtenus. **(0,5 point)**
3. a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f'(x) = u(x)e^x$. **(0,5 point)**
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$. **(0,25 point)**
   b. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2v(x)$. **(0,5 point)**
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$. **(0,25 point)**
   c. Dresser le tableau de variations de f. **(0,5 point)**

…/… 3

Epreuve du 1er groupe

4. Tracer (D) et (C_f) dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,25 point + 0,5 point)**

5. a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.

   Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont en précisera l'ensemble de définition et le sens de variations. **(0,25 point + 0,25 point + 0,25 point)**

   b. Tracer la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,25 point)**

6. Soit λ un réel strictement négatif.
   a. Exprimer l'aire $A(\lambda)$ en fonction de λ de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x=\lambda$, $x=0$, $y=-x-1$ et la courbe (C_f). **(0,5 point)**

   b. En déduire $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$. **(0,25 point)**

Corrigés

M.MENDES

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.

BAC 2000

EXERCICE I

1. **a)** $z_2 - z_1 = 1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}(1+i)$ donc $|z_2 - z_1| = 2$ et $\arg(z_2 - z_1) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

   $z_3 - z_1 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ donc $|z_3 - z_1| = \frac{1}{2}$ et $\arg(z_3 - z_1) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

   b) $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{8\sqrt{2}}$; donc $\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \frac{1}{4}$ et $\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ par identification de la forme algébrique et de la forme trigonométrique de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, on obtient : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. $S : A_2 \mapsto A_3$; $A_1 \mapsto A_1$.

   a) le centre de S est A_1 ; le rapport de S est : $\frac{A_1A_3}{A_1A_3} = \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \frac{1}{4}$ et l'angle de S est : $\left(\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\pi}{12}$

   b) $M(z) \mapsto M'(z')$ alors $z' - z_1 = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_1)$ et donc $z' = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}z - \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}} + 1$. Si S(B) = B' alors $z_{B'} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}} \times (1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}) - \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}} + 1 = -i$.

EXERCICE II

1. **a)**

   $p_{i+1} = p_i + \frac{1}{30}$; $\sum_{i=1}^{i=6} p_i = 1$ donc $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ et comme on est en présence d'une progression arithmétique, la somme des termes donne :

   $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{(p_1 + p_6) \times 6}{2} = 3(p_1 + p_1 + \frac{5}{30}) = 1$ on en déduit que $p_1 = \frac{1}{12}$

   b) $p_2 = \frac{7}{60}$; $p_3 = \frac{9}{60}$; $p_4 = \frac{11}{60}$; $p_5 = \frac{13}{60}$; $p_6 = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$;

2. **a)** $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$. On est en présence d'une alternative qui se répète 3 fois , avec probabilité d'obtenir un jeton portant un numéro pair qui est égale à : $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{11}{20}$. La binomiale permet d'écrire que : $p(X = k) = C_3^k (\frac{11}{20})^k (\frac{9}{20})^{3-k}$ avec k prenant les valeurs 0,1,2 et 3.

   b) $E(X) = 3 \times \frac{11}{20} = \frac{33}{20}$ $\sigma_X = \sqrt{3 \times \frac{11}{20} \times \frac{9}{20}} = \frac{3}{20}\sqrt{33}$

3. Dans cette question, l'énoncé ne précise pas comment se comportent les probabilités d'extraction de deux boules. Nous supposerons donc que les jetons sont équiprobables ainsi :
a) $S(\Omega)=\{1;2;3;4;5\}$ .les différentes valeurs de S , ainsi que les différents tirages possibles sont répertoriés dans le tableau triangulaire ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6
1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2			**1**	**2**	**3**	**4**
3				**1**	**2**	**3**
4					**1**	**2**
5						**1**
6						

Remarque : on ne prend en considération qu'une partie du tableau car les tirages étant simultanés, l'ordre n'intervient pas ici. Il suffit de lire et de compter sur le tableau pour donner la loi de probabilité de S.

$p(S=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ $p(S=2)=\frac{4}{15}$ $p(S=3)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ $p(S=4)=\frac{2}{15}$ $p(S=5)=\frac{1}{15}$

b) la probabilité de gagner est celle d'avoir ($S=4$) ou ($S=5$)donc elle est : $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

PROBLEME

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ f(x)=x\ln(1+x) & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Partie A

1.**a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} xe^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$ car $\frac{1}{x}\to-\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0$; f est continue à gauche en 0

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(1+x)=0=f(0)$; f est continue en 0 à droite et par suite f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}}=0$ f est dérivable en 0 à gauche.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(1+x)=0$ f est dérivable en 0 à droite ; les deux nombres dérivés sont égaux donc f est dérivable en 0.

2. **a)** $x\mapsto x; x\mapsto\frac{1}{x}; x\mapsto e^x$ sont dérivables sur IR* donc f est dérivable pour $x<0$ et :

$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ le signe de f'(x) dépend de celui de $\frac{x-1}{x}$ qui est positif pour $x<0$.

b) $x\mapsto x; x\mapsto\ln(1+x)$ sont dérivables sur IR^+, donc f est dérivable sur IR^+ et :

$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$ f' est dérivable sur IR^+ et, $f''(x)=\frac{2+x}{(1+x)^2}>0$ pour $x\geq 0$ la fonction dérivée f' est croissante et $f'(0)=0$ donc $f'(x)>0$ sur IR^+.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u} = 1.$

b) $f(x)-(x+1) = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = 0$ d'où la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

4. **a)** $(C)\cap\Delta$ pour $x > 0$ $\quad x = x\ln(1+x)$ donc $x = e-1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x) = +\infty$ la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

Partie B

1. $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$

2. ici , l'intégration par parties consiste en une intégrale dite indéfinie, c'est à dire une intégrale sans borne. $\int f(x)dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(1+x)\right] - \dfrac{1}{2}\int(x-1+\dfrac{1}{1+x})dx$ obtenu en posant u'$=\dfrac{x^2}{2}$ et v = ln(x + 1). Donc une primitive de f est F telle que :

$F(x) = \dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}(x^2-2x).$

3. $\mathcal{A} = \int_0^{e-1} f(x)dx = F(e-1)-F(0) = \dfrac{e^2-3}{4}\times 4cm^2 = (e^2-3)$ en cm²

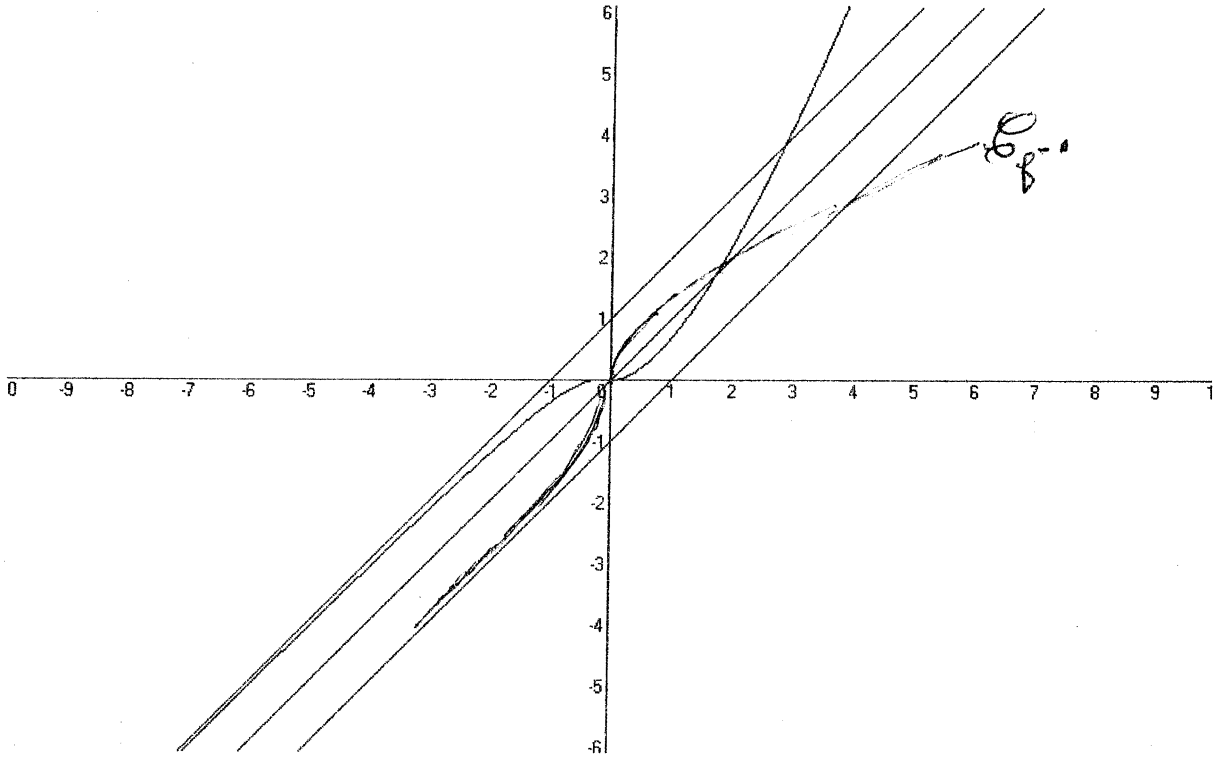
Partie C

1. a) f est continue sur IR et strictement croissante donc elle est bijective. Elle admet une bijection réciproque f^{-1}.

b) f^{-1} est dérivable en 0 si $f'(f^{-1}(0)) \neq 0$ or $f^{-1}(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable ne 0. La courbe (C') admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

2. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.

3. pour des raisons de symétrie, l'aire demandée est le double de l'aire obtenue en faisant la différence entre l'aire du triangle OAB et celle calculée précédemment. On a donc : $2\times\left[4\times\dfrac{(e-1)^2}{2} - (e^2-3)\right]$


6
5
4
3
2
1
0 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
-1
-2
-3
-4
-5
-6

BAC2001

EXERCICE I

$f(z)=\dfrac{2z-i}{z-2i}$

a) $f(z)=z$ est équivalent à $\dfrac{2z-i}{z-2i}=z$ donc $z^2-z(2+2i)+i=0$ $\Delta=i$ qui a pour racines carrées $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ d'où les solutions sont :$z_1=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$; $z_2=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

$z_1=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}+1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad z_2=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $z_1^4+z_2^4=\left(\sqrt{2}+1\right)^4e^{i\pi}+\left(\sqrt{2}-1\right)^4e^{i\pi}=-34$ car $e^{i\pi}=-1$

1. $f(z)=\dfrac{2(x+iy)-i}{x+iy-2i}=\dfrac{2x^2+2y^2-5y+2-5ix}{x^2+(y-2)^2}$ en posant $z=x+iy$; $f(z)$ est imaginaire pur si

$2x^2+2y^2-5y+2=0$ avec $x^2+(y-2)^2\neq 0$ donc $(x-0)^2+(y-\dfrac{5}{4})^2=\dfrac{9}{16}$

Γ est le cercle de centre $\Omega(0;\dfrac{5}{4})$ et de rayon $\dfrac{3}{4}$ privé du point A(0;2).

2. si $|z|=1$ alors $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$; $\overline{f(z)}=\dfrac{2\bar{z}+i}{z+2i}=\dfrac{\frac{2}{z}+i}{\frac{1}{z}+2i}=\dfrac{2+iz}{1+2iz}=\dfrac{i(z-2i)}{i(2z-i)}=\dfrac{1}{f(z)}$ donc $|f(z)|=1$

si $|f(z)|=1$ alors $\dfrac{\overline{2z-i}}{z-2i}=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ donc $\dfrac{2\bar{z}+i}{z+2i}=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ d'où $3z\bar{z}=3$ et par suite $|z|=1$.

Nous avons montré ainsi « équivaut à ».

EXERCICE II

Tirages successifs et sans remise donc A_n^p. Card $\Omega=A_{10}^2=90$

1. Il faut tirer parmi les 4 jetons 1,2,3 et 4 donc cardA $=A_4^2=12$ et $p(A)=\dfrac{12}{90}=\dfrac{2}{15}$.

B est réalisé par les tirages suivants : si le second jeton tiré porte le 1 alors, on peut avoir tous les jetons de 3 à 10 au 1er tirage. Cela fait 8 éventualités.
Si le second jeton tiré porte le 2, alors le 1er jeton peut porter les numéros de 5 à 10 .D'où 6 éventualités.
Si le second jeton tiré porte le 3, alors le 1er jeton peut porter les numéros de 7 à 10. D'où 4 éventualités.
Si le second jeton tiré porte le 4, alors le 1er jeton peut porter les numéros de 9 à 10. D'où 2 éventualités. Card B = 20 et $p(B)=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$

2. $p(B$ est réalisé exactement 2fois.)$= C_7^2\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{7}{9}\right)^5$. Pour B est réalisé au moins 1 fois , choisissons l'événement contraire donc B n'est pas réalisé une seule fois ; appelons cet événement C. $p(C) = C_7^0\left(\frac{2}{9}\right)^0\left(\frac{7}{9}\right)^7 = \left(\frac{7}{9}\right)^7$ d'où $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^7$.

PROBLEME

$$\begin{cases} g(x) = x(1-\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1: a) $D_g = IR_+$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x - 2x\ln x - x\ln^2 x) = 0 = g(0)$ car $x\ln^2 x = \left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right)^2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta \ln x = 0$ $(\beta>0)$ g est continue en 0. Sur]0 ;+∞ [g est continue car produit de fonctions continues.(la fonction identité et la fonction ln).Donc g est continue sur [0 ;+∞ [. Pour les mêmes raisons g est dérivable sur]0 ;+∞ [.

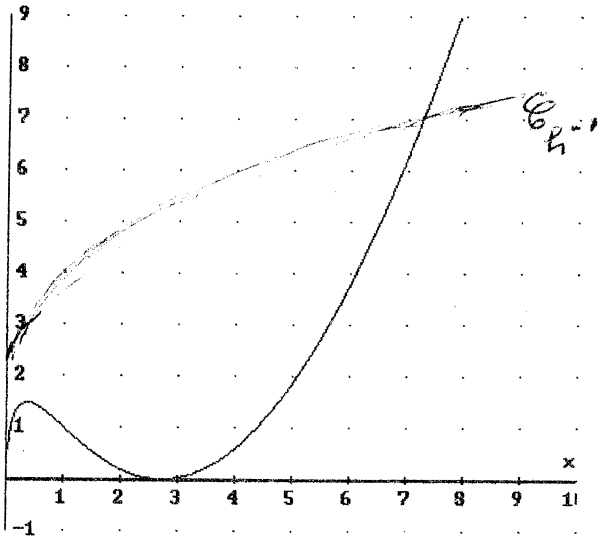
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1-\ln x)^2 = +\infty$; g est donc dérivable sur]0 ;+∞[.

b) $g'(x) = (1-\ln x)(-\ln x - 1) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$

x	0		e^{-1}		e		+∞
g'(x)		+	0	-	0	+	
g	0	↗	4	↘	0	↗	+∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

c) Remarquons qu'au point d'abscisse 0 la courbe de g admet une tangente verticale.



2.a $a(\alpha)=\int_{\alpha}^{e} g(x)dx=\int_{\alpha}^{e} x(1-\ln x)^2 dx \quad u'=x \quad u=\frac{x^2}{2} \quad v=(1-\ln x)^2 \quad v'=\frac{-2}{x}(1-\ln x)$

$a(\alpha)=\left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2\right]_{\alpha}^{e}+\int_{\alpha}^{e} x(1-\ln x)dx \quad u'=x \quad u=\frac{x^2}{2} \quad v=1-\ln x \quad v'=\frac{1}{x}$

$a(\alpha)=\left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2+\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_{\alpha}^{e}+\int_{\alpha}^{e}\frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{2}\left((1-\ln x)^2+(1-\ln x)+\frac{1}{2}\right)\right]_{\alpha}^{e}$ donc

$a(\alpha)=\frac{e^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}\left((1-\ln\alpha)^2+(1-\ln\alpha)+\frac{1}{2}\right)$

c) $\lim_{\alpha\to 0} a(\alpha)=\frac{e^2}{4}$ voir le calcul de limite pour la continuité de g en 0.

3. a) $(C)\cap\Delta$: $g(x)=x \quad x(1-\ln x)^2=x$ qui donne $x=1$ ou $x=e^2$ les points sont : (1;1) et $(e^2:e^2)$

b) les abscisses des points d'intersection de (C) et Δ_m sont les solutions de l'équation : $g(x) = m\,x.$ donc $(1-\ln x)^2=m$. Cette équation admet solution si m >0.

c) $\Delta_m \cap D$: $x=e \quad y=me$ donc $P(e;me)$

$OM_1\times OM_2=\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}\times\sqrt{x_2^2+m^2x_2^2}=(1+m^2)x_1.x_2$ calculons le produit

$x_1.x_2$. $x_1$et $x_2$sont solutions de l'équation $\ln^2 x-2\ln x+1-m=0$ les solutions de cette équation sont : $e^{1-\sqrt{m}}$ et $e^{1+\sqrt{m}}$ dont le produit donne e² .d'où $OM_1\times OM_2=e^2(1+m^2)$ et $OP^2=e^2(1+m^2)$

4. a) h et continue strictement croissante donc bijective. Elle admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur [0 ;+∞[

b) $h^{-1}(0)=0$ et $h'(0)=0$ donc $h'(h^{-1}(0))=0$ h^{-1} n'est donc pas dérivable en 0 elle est donc dérivable sur]0 ;+∞[.

c) courbe (voir plus haut)

BAC2002

EXERCICE 1

1. Soit $z = re^{i\alpha}$ tel que $z^n = 1$ alors, $r^n e^{in\alpha} = e^{i0}$ donc $r = 1$ et $n\alpha = 0 + 2k\pi$; on en déduit que les racines n$^{\text{ièmes}}$ de 1 sont de la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec k allant de 0 à n-1 ces solutions s'écrivent, en extension, 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{n}}$; $e^{i\frac{4\pi}{n}}$; $e^{i\frac{6\pi}{n}}$; $e^{i\frac{8\pi}{n}}$; ....;$e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$ .On a les termes d'une progression géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et de 1$^{\text{er}}$ terme 1. La somme de ces termes donne : $1\times\dfrac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \dfrac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$
2. Considérons n = 5 les racines 5$^{\text{èmes}}$ de 1 sont : 1; $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$; $\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$ leur somme est nulle et sous forme algébrique, elle permet d'annule les parties réelle et imaginaire donc : $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$ or $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{8\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$ d'où $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$ $\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}$ $\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1$ on a donc $4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$ qui donne en posant X=$\cos\frac{\pi}{5}$ $4X^2-2X-1=0$.
3. Cette équation admet comme solutions : $X' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $X'' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\frac{\pi}{5}\in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{\pi}{5}>0$ d'où $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ $\cos\frac{\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{10}-1$ donc $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+5}{8}$

$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$

EXERCICE II

	2	6	10	14	18	totaux	
6	4	2	1	0	0	7	4,29
8	2	5	2	0	0	9	6,00
10	1	6	16	5	1	29	9,86
12	0	2	3	6	2	13	12,46
14	0	1	0	1	3	5	14,80
totaux	7	16	22	12	6	63	

2. a) construire le nuage de points associé à $(x_i ; z_i)$

b)

x_i	6	8	10	12	14
z_i	4,29	6	9,86	12,46	14,80

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$; $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = 9,482$; $\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 8$

$\text{cov}(x,z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \bar{x}\times\bar{z} = 10,992$ $\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 15,274$

$r = \frac{\text{cov}(x,z)}{\sigma_X \times \sigma_Z} = 0,994$

c) $a = \frac{\text{cov}(x,z)}{V(x)} = 1,374$ et $b = \bar{z} - a\bar{x} = -4,258$

$D_{Z/X} : z = 1,374x - 4,258$

PROBLEME

A) $g(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$ $x > 0$ et $x \neq 1$ et $g(0) = 0$

1. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right) = 0 = g(0)$ g est continue en 0 à droite .

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right) = +\infty$

$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln x \neq 0$ si $x \neq 1$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$g'(x) = \frac{-\frac{2}{x}\ln x}{\ln^4 x} - \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-2 + \ln x}{x \ln^3 x}$

x	0	1	e	e^2	$+\infty$
$(\ln x)^3$	-	+	+	+	
$\ln x - 2$	-	-	-	0	+
g'(x)	+	-	-		+
g	0 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘	0 ↘	-1/4 ↗	0

g(x) = 0 pour 1 – ln x = 0 donc x = e

Sur]0 ;1[U]1 ; e[g(x) > 0 et sur]e ; + ∞ [g(x) < 0.

B) $f(x) = \frac{-x}{\ln x}$ si $x > 0$ et $x \neq 1$; $f(0) = 0$

1. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-x}{\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$ f est donc continue en 0 à droite.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-1}{\ln x} = 0$ donc f est dérivable en 0 à droite et $f'(0) = 0$. La courbe de f admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$; $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-x}{\ln x} = +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \ln x = 0^-$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-x}{\ln x} = -\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln x = 0^+$

3. f est dérivable sur $D_f \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables et

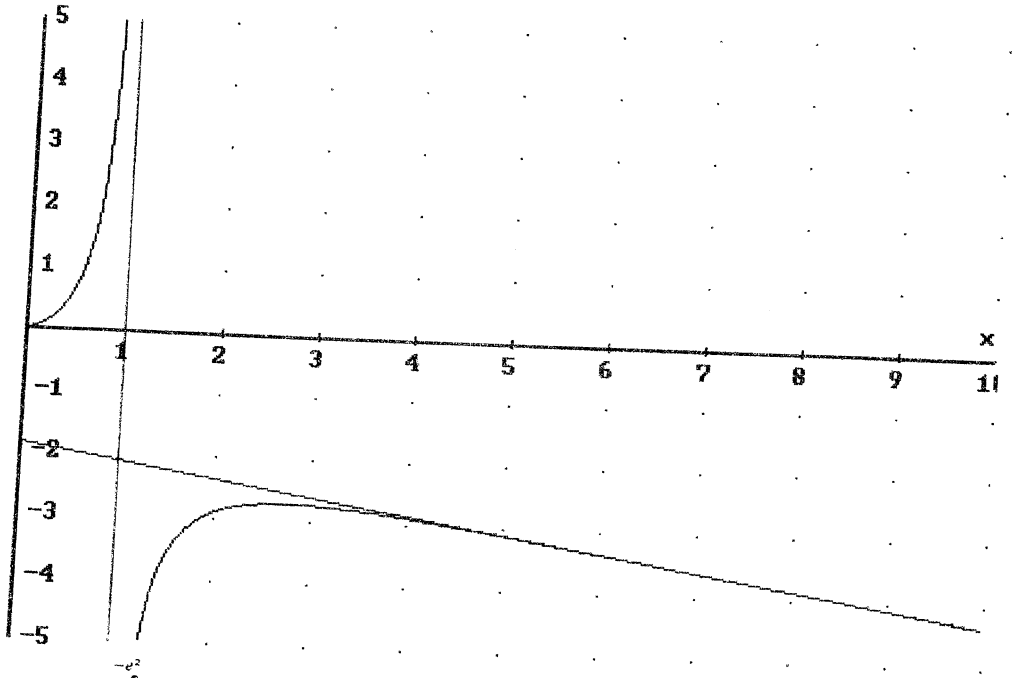
$f'(x) = \frac{-\ln x + 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} = g(x)$

x	0		1		e		$+\infty$
f '(x)		+	‖	+	0	-	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-e	↘	$-\infty$

4. D ; y = f ' (e^2) (x – e^2) + f (e^2) donne $y = -\frac{x+e^2}{4}$

5. $\varphi(x) = \overline{NM} = y_M - y_N = f(x) + \frac{x+e^2}{4}$; φ est dérivable et $\varphi'(x) = f'(x) + \frac{1}{4} = g(x) + \frac{1}{4}$; φ' est dérivable et $\varphi''(x) = g'(x)$ sur]1 ; +∞ [g admet comme minimum absolu la valeur $-\frac{1}{4}$ donc φ admet comme minimum absolu 0. D'où φ'(x) >0 et par suite φ est croissante et comme φ(e^2) = 0 alors sur]1 ; e^2 [φ (x) <0 donc la courbe est en dessous de (D) ; et sur]e^2 ; + ∞ [φ (x) > 0 donc la courbe est au dessus de (D)

6.



C) $A = (\int_2^{-e^2} -g(x)dx) \times 4cm^2 = \left[-f(x)\right]_2^{e^2} \times 4cm^2 = 2e^2 - 4e \ cm^2$ (Ne pas oublier que f '(x) = g(x)) et le signe de g(x) dans l'intervalle en question..

BAC 2003

EXERCICE I

1)

a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Pour A = T et B = M on a : $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$

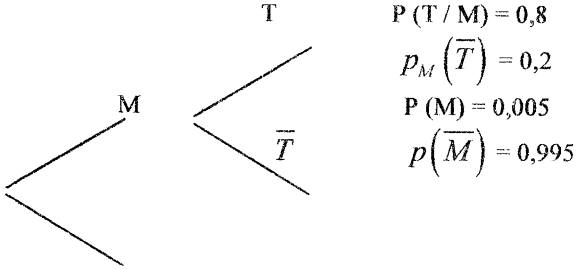
Pour A = $\overline{M}$ et B = $\overline{T}$ on a : $\overline{M} = (\overline{M} \cap \overline{T}) \cup (\overline{M} \cap T)$

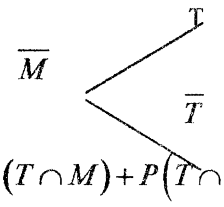
b) $p(\overline{M}) = p(\overline{M} \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T)$

$p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) - p(\overline{M} \cap \overline{T}) = p(\overline{M}) - p_{\overline{M}}(\overline{T}).p(\overline{M})$

d'où $p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M})\left[1 - p_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$

2) Faisons l'arbre pour traduire l'énoncé





$p_M(T)=0,1$

$p_{\overline{M}}(\overline{T})=0,9$

$p(T)=P(T\cap M)+P(\overline{T}\cap\overline{M})$

$=P_M(T).P(M)+P(\overline{M})(1-P_{\overline{M}}(\overline{T}))$ voir 1°) b)

$=0,8\times0,005+0,995(1-0,9)=0,1035=\frac{207}{2000}$

3)

a) $p_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P_M(T).P(M)}{P(T)}=\frac{0,8\times0,005}{0,1035}=\frac{8}{207}$

b) $P_{\overline{T}}(M)=\frac{P(M\cap\overline{T})}{P(T)}=\frac{P_M(\overline{T}).P(M)}{P(\overline{T})}=$

$=\frac{0,2\times0,005}{0,8965}=\frac{2}{1793}$

EXERCICE II

(E) : $Z^3+(1-8i)Z^2-(23+4i)Z-3+24i=0$

1. a) (E) admet une solution imaginaire pure $z_0=iy$ avec y réel si et seulement si :

$(iy)^3+(1-8i)(iy)^2-(23+4i)(iy)-3+24i=0$

d'où $(-y^2+4y-3)+i(-y^3+8y^2-23y+24)=0$

il faut pour cela que: $\begin{cases} -y^2+4y-3=0 \\ -y^3+8y^2-23y+24=0 \end{cases}$

$-y^2+4y-3=0$ pour $y=1$ ou $y=3$

$y=3$ est solution du système donc $z_0=3i$

b) la question incite à remplacer z par $1+2i$ et ensuite par $-2+3i$ et vérifier l'équation (E). On peut aussi résoudre (E) entièrement.

(E) est équivalent à $(z-3i)(z^2+(1-5i)z-8-i)=0$ il est simple de vérifier que

$1+2i+(-2+3i)=-1+5i$; $\left(-\frac{b}{a}\right)$

$(-2+3i)^2+(1-5i)(-2+3i)-8-i=0$ ou bien vérifie que

$(1+2i)(-2+3i)=-8-i$; $\left(\frac{c}{a}\right)$

On peut aussi calculer Δ et avoir $\Delta=8-6i=(3-i)^2$

c) $S\{3i\ ;\ 1+2i\ ;\ -2+3i\}$

2. a) affixe de G ; $Z_G = \dfrac{2Z_A - 2Z_B + Z_C}{1}$

$Z_G = 2(1+2i) - 2(3i) + (-2+3i) = i$

$\overrightarrow{GA}$ a pour affixe $1+2i-i = 1+i = \sqrt{e}\ e^{\frac{i\pi}{4}}$

$\overrightarrow{GB}$ a pour affixe : $3i - i = 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$

$\overrightarrow{GC}$ a pour affixe : $-2+3i-i = -2+2i = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4.e^{i\pi} = \left(2.e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2$ donc les affixes sont

en progression géométrique $(a \times c = b^2$ pour a, b, c$)$

la raison est : $\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

Remarquons que l'on a : 1+i ; $(1+i)^2 = 2i$; $2i(1+i) = -2+2i$

b)

$S : A \mapsto B$

$B \mapsto C$

$\left(\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}\right) = \arg \sqrt{2}.e^{i\pi/4} = \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{GC}{GB} = \sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB}\right) = \arg \sqrt{2}.e^{i\pi/4} = \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{GA}{GB} = \sqrt{2}$

La similitude S a pour centre G , pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\pi/4$

Remarque : la question dit en déduire, donc utiliser la question précédente.

PROBLEME

$u : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

u est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} \neq 0$ donc pour $x \neq 1$ dans $[0;+\infty[$

$D_u = [0;1[\cup]1;+\infty[$

$u(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{2x}{x^2-1} = 0$ car ln1=0

$x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$; $x \mapsto \ln x$

Sont dérivables sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ donc u est dérivable sur D_u comme somme, composée de fonctions dérivables

$$u'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}>0$$

X	0	1	$+\infty$
u'(x)	+	+	
u	0 ↗	‖	↗ $+\infty$

a) $\forall x\in[0;1[\quad u(x)\geq 0$ car u croissante et $u_0=0$

b) $\forall x\in[0;+\infty[\quad u(x)<0$ car u croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$

$g:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\to x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$$

$Dg=[0,1[\cup]1,+\infty]$ voir D_u

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1} x.\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1=+\infty \text{ car } \lim_{x\to 1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=+\infty$$

a)

$$1+\frac{2}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1 \text{ en posant } t=\frac{2}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

or quand x tend vers $+\infty$ $\quad\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2.\frac{x-1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)-1$$

$$=2-1=1$$

la courbe de g admet une asymptote horizontale d'équation y = 1

c) g dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables

$$g'(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{-2x}{x^2-1}=u(x)$$

Tableau de variations

X	0	1	+∞
g'(x)	+	-	
g	-1 ↗ +∞	+∞ ↘ 1	

d) sur $]0,1[$ g est continue strictement monotone et $g <]0,1[>=]-1,+\infty[$ qui contient 0. Il existe donc un réel α unique dans $]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}\right|-1=\frac{1}{2}\ln 3-1=-0,45$$

$g(0,6)=-0,168$

$g(0,7)=0,21$ donc $0,6<\alpha<0,7$

Cg voir plus bas

$$f:[0;1[\to\mathbb{R}\quad f(x)=\left(x^2-1\right)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

1)

$x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$; $x\mapsto x^2-1$; $x\mapsto\sqrt{x}$; $x\mapsto\ln x$ sont

dérivables sur $]0,1[$; pour tout $x\in[0,1[$ $\frac{x+1}{x-1}>0$

donc $x\mapsto\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ dérivable sur $[0,1[$ et par suite f est

dérivable sur $[0,1[$ et $f(x)=2x\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\left(x^2-1\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x^2-1}\right)$

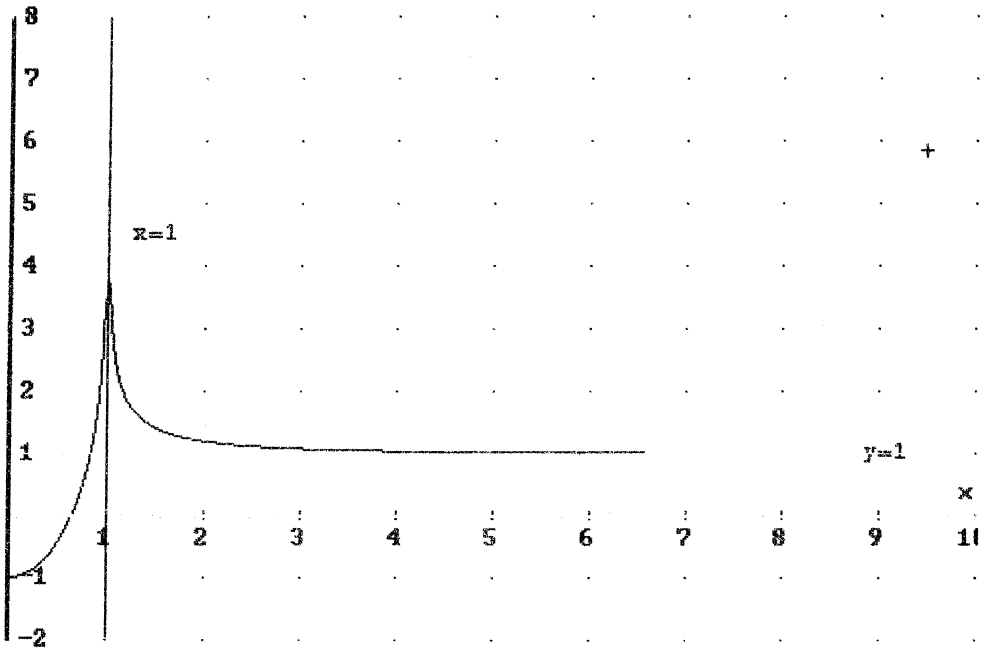
$$=x\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-1=g(x)$$

car sur $[0,1[$ $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\frac{x+1}{1-x}$

2)

$a=\int_0^{\alpha}-g(x)dx$ car $g(x)\le 0$ sur $[0;\alpha[$

donc $a=-f(\alpha)+f(0)=-f(\alpha)=-\left(\alpha^2-1\right)\ln\sqrt{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}}$



BAC2004

EXERCICE I

1. a) $U_n = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $V_n = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$

b) $z_n = U_n e^{iV_n} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{n\pi}{2}} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}i\right)^n$

2. z_n est de la forme $z_0 q^n$ avec $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$ et $q = \frac{1}{2}i$

3. $F : M_n(z_n) \mapsto M_{n+1}(z_{n+1})$ avec $z_{n+1} = \frac{1}{2}i.z_n = az_n + b$ avec $a \notin \mathbb{R}$.

a) F est une similitude

b) F est la similitude de centre O *(car b = 0)* et de rapport $\left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$.

4.a) $\arg Z_n = \arg(z_0 \times z_1 \times z_2 \times ... \times z_n) = \arg z_0 + \arg z_1 + \arg z_2 + ... + \arg z_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$

cette suite étant arithmétique, la somme est égale à : $\arg Z_n = \frac{(V_0+V_n)(n+1)}{2} = \frac{\pi}{4}(n+1)^2$

b) si n est impair alors $n+1$ est pair et $\arg Z_n = \frac{\pi}{4}(2k)^2 = k^2\pi$ avec k entier d'où Z_n est réel.

EXERCICE II

Tirages simultanés donc combinaisons ; card $\Omega = C_{10}^3 = 120$

1. $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}$
2. a) $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$; (X = 0) est réalisé si les 3 pièces tirées sont de 200 F.

$$f(0) = p(X=0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{6}$$

$(X=1)$ est réalisé si l'enfant tire une pièce de 500F et 2 de 200F. $f(1) = p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{120} = \frac{1}{2}$

de même $f(2) = p(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{120} = \frac{3}{10}$

$$f(3) = p(X=3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = 0\times\frac{20}{120} + 1\times\frac{60}{120} + 2\times\frac{36}{120} + 3\times\frac{4}{120} = \frac{6}{5}$$

$$V(X) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(E(X)\right)^2 = \frac{0\times20 + 1\times60 + 4\times36 + 9\times4}{120} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

la probabilité pour que l'événement A se réalise 3 fois est : $p = C_5^3\left(\frac{1}{30}\right)^3\left(\frac{29}{30}\right)^2$

PROBLEME

$$f / f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

1. f(x) existe si $e^x - 1 \neq 0$ donc pour $x \neq 0$ d'où $D_f = IR^*$.

$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1} = \frac{(ax+b)e^x - ax - b + c}{e^x - 1}$ et par identification , on obtient: $a = 2; b = -1; c = 1$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = \frac{2x - 1 - 2xe^{-x} + 2e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = -\infty$

3. *a)* $x \mapsto 2x-1; x \mapsto e^x-1; x \mapsto -2x+2$ sont dérivables sur IR /{0}et comme le dénominateur est non nul alors f est dérivable sur IR/{0} $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{\left(e^x-1\right)^2}$

b) résolvons $2e^{2x}-5e^x+2=0$; posons X=$e^x>0$ on a :X'=$\dfrac{1}{2}$ et X"=2 cela conduit à : $x=-\ln 2$ ou $x=\ln 2$

c) $f'(x)=\dfrac{2(e^x-\frac{1}{2})(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$ $f'(x)>0$ sur]- ∞ ;-ln2 [U]ln2 ; + ∞ [et f croissante $f'(x)<0$ sur]-ln2 ; ln2 [et f décroissante.

x	-∞	-ln2	0	ln2	+ ∞
f '(x)		+ 0 -	||	- 0 +	
f	- ∞	-2ln2-3	+∞ ||	2ln2	+∞
			- ∞		

4. $f(x)-(2x-1)=\dfrac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}-(2x-1)=\dfrac{1}{e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0$ donc la droite d'équation y = 2x −1 est asymptote à la courbe de f. en + ∞.

$f(x)-(2x-2)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=0$ donc la droite d'équation : $y=2x-2$ est asymptote à la courbe de f en -∞ .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C_f).

5.

$M(x,f(x))$ $M'(-x,f(-x))$ le milieu Ω de $[MM']$ a pour ordonnée $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=-\dfrac{3}{2}$ et pour abscisse 0. On en déduit que le point Ω est centre de symétrie de la courbe.

6. courbe voir plus loin

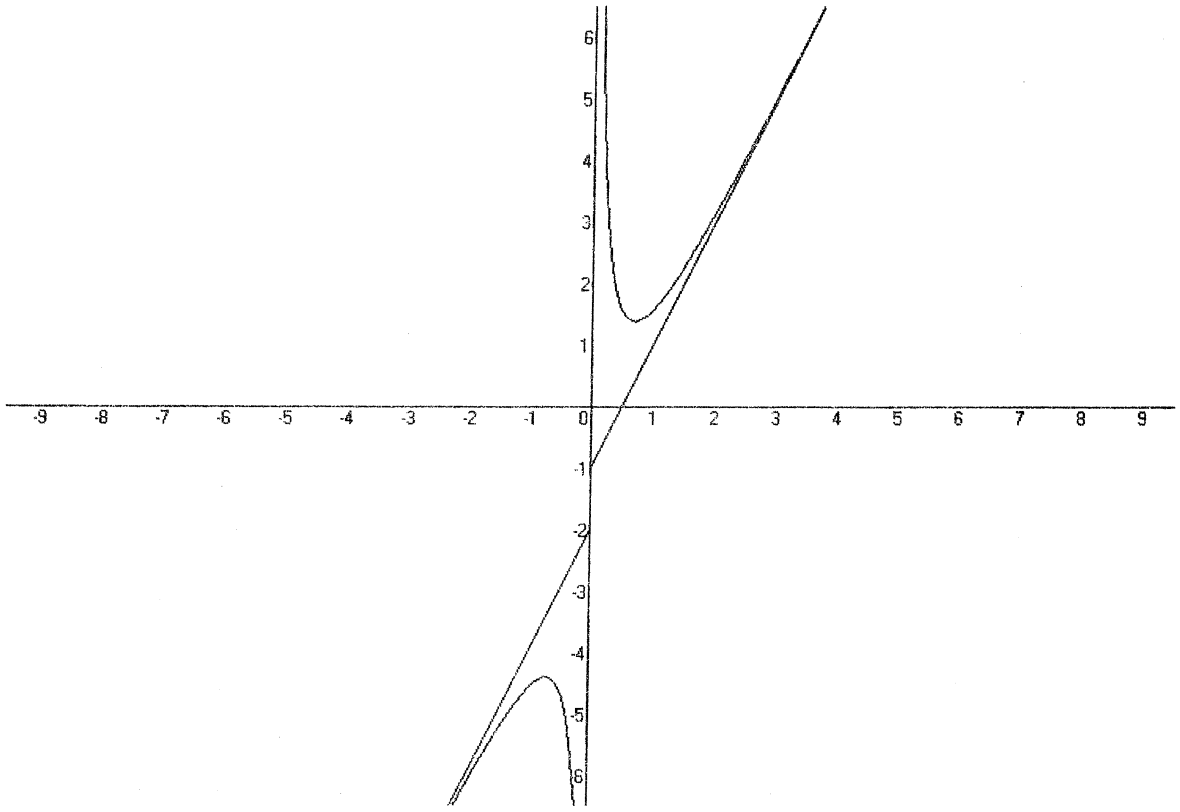
7. a) $f(x)=2x+\alpha+\dfrac{\beta e^x}{e^x-1}=\dfrac{(2x+\alpha+\beta)e^x-2x-\alpha}{e^x-1}$ et par identification on a:$\beta=1$ *et* $\alpha=-2$

d'où $f(x)=2x-2+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

b) $A(k)=4cm^2\times\int_{\ln 2}^{\ln k}(f(x)-(2x-1))dx=4cm^2\times\int_{\ln 2}^{\ln k}(-1+\dfrac{e^x}{e^x-1})dx=4cm^2\times\left[-x+\ln(e^x-1)\right]_{\ln 2}^{\ln k}$

$A(k)=4cm^2\times\ln\dfrac{2(k-1)}{k}$

c) $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k)=4\ln 2$ en cm^2



BAC2005

EXERCICE I

1.Résolvons $z^3 = 1$ on est amené à donner les racines cubiques de 1. Sous forme algébrique les solutions de cette équation sont : $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sous forme exponentielle, les solutions sont : $1 = e^{i0}$; $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

2. a) $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3 = 4\sqrt{2}\left(-1 - i\right)$

b) $z^3 = 4\sqrt{2}\left(-1 - i\right)$ si $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ alors $z^3 = \left(u(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3 = u^3 \times 4\sqrt{2}\left(-1 - i\right)$ donc l'équation (E) est équivalente à $u^3 = 1$; les valeurs de u sont les racines cubiques de 1 et celles

de z sont obtenues en multipliant ces racines par $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. D'où les solutions de (E) sont :

$\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$.

3.Sous forme exponentielle, les solutions de (E) sont :

$2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $2e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=2e^{i\frac{13\pi}{12}}$ donc

$2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ d'où $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE II

Remarque : la valeur de z donnée dans l'énoncé suppose que l'élève fasse un calcul presque manuel et garde lui même le nombre de chiffres qui l'intéressent après la virgule .Les simples machines « collège » donnent en arrondissant elles mêmes des résultats différents.

1.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200	1040
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84	4032
x_i^2.	3600	6400	10000	14400	19600	25600	32400	40000	152000
y_i^2	906304	648025	396900	272484	260100	104976	42025	7056	2637870
$x_i.y_i$	57120	64400	63000	62640	71400	51840	36900	16800	424100
									totaux

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_i x_i=130$; $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_i y_i=504$; $V(x)=\frac{1}{n}\sum_i x_i^2-\bar{x}^2$

$v(y)=\frac{1}{n}\sum_i y_i^2-\bar{y}^2=75717,75$; $\text{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_i x_i\times y_i-\bar{x}\times\bar{y}=-12507,5$

$r=\frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{V(x)}\times\sqrt{V(y)}}=-0,99$

la corrélation est très forte donc un ajustement est justifié.

2. Droite de y en x : y = a x + b avec : $a=\frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}=-5,95$ et $b=\bar{y}-a\bar{x}=1277,5$ d'où

$D_{y/x}: y=-5,95x+1277,5$

3. a) le prix de vente est le produit de x et y car ils représentent respectivement le prix et le nombre d'exemplaires produits. $PV=-5,95x^2+1277,5x$. Prix de revient = coût de fabrication + frais de conception. (Ne pas oublier que les sommes sont en milliers de francs.)

$PR=25\times y+28000=-5,95\times25\times x+1277,5\times25+28000$. Le bénéfice est donc :

$z=-5,95x^2+1277,5x+148,75x-31937,5-28000=-5,95x^2+1426,25x-59937,5$

b) $z=f(x)$. Le bénéfice est maximal si la dérivée première s'annule en changeant de signe. $f'(x)=-11,9x+1426,25$ $f'(x)=0$ pour $x=119,85$ ce nombre étant compris entre deux entiers , vérifions pour lequel de ces deux le bénéfice est maximal.

pour $x=119$ $z=25540,2$ pour $x=120$ $z=25544,5$

le bénéfice maximal est pour $x=120$ et il est de 25 544 500 F

PROBLEME

Partie A : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$

1. a) $x\mapsto e^x; x\mapsto 1+e^x$ sont dérivables sur IR $x\mapsto \ln x$ est dérivable sur]0 ;+ ∞ [et comme $1+e^x>0$ alors f est dérivable sur IR comme composée de fonctions dérivables. $f'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}<0$ f est donc décroissante sur IR.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)-1+\ln e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}+\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)-1\right)=0$

   car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$ et $\ln 1=0$ la droite d'équation y = - x + 1 est asymptote à la courbe de f.

x	-∞	+∞
f'(x)	-	
f	0 ↘	-∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

courbe voir plus loin

c) f est continue strictement décroissante sur IR donc f réalise une bijection de IR dans l'intervalle d'arrivée qui est]- ∞ ; 0 [.

2. g / $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$

a) $x\mapsto e^{-x}; x\mapsto \ln(1+e^x)$ sont dérivables sur IR (voir 1) donc g est dérivables sur IR comme produit de fonctions dérivables.

b) $g'(x)=-e^{-x}\ln(1+e^x)+e^{-x}\times\dfrac{e^x}{1+e^x}=e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x\right)=e^{-x}\times f(x).$

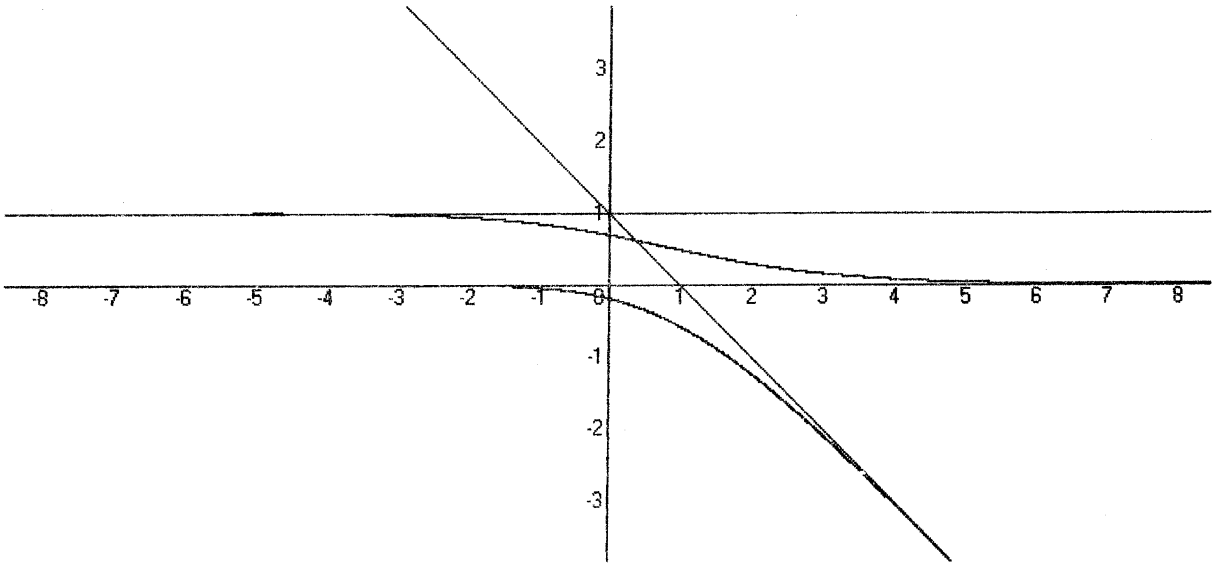
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}=0$ car de la forme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ en effet

$\dfrac{\ln(1+a)}{a}=\dfrac{\ln(1+a)}{1+a}\times\dfrac{1+a}{a}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}=1$ (nombre dérivé de ln en 1)

d)

x	-∞	+ ∞
g'(x)	-	
g	1 ↘	0

Courbe voir graphique précédent



3. a) $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{\dfrac{1}{e^{x}}}{1+\dfrac{1}{e^{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

b) I(λ) existe car g est continue sur [0 ; λ] et admet donc primitives. $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx = \int_0^{\lambda} e^{-x}\ln(1+e^{x})dx = \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} \dfrac{1}{1+e^{x}}dx$ ceci en posant : $u' = e^{-x}$ donc $u = -e^{-x}$ et $v = \ln(1+e^{x})$ donc $v' = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ compte tenu du a) , on a :

$I(\lambda) = \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x}) - \ln(1+e^{-x})\right]_0^{\lambda} = -e^{-\lambda}\ln(1+e^{\lambda}) - \ln(1+e^{-\lambda}) + 2\ln 2$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} I(\lambda) = 2\ln 2$

Partie B

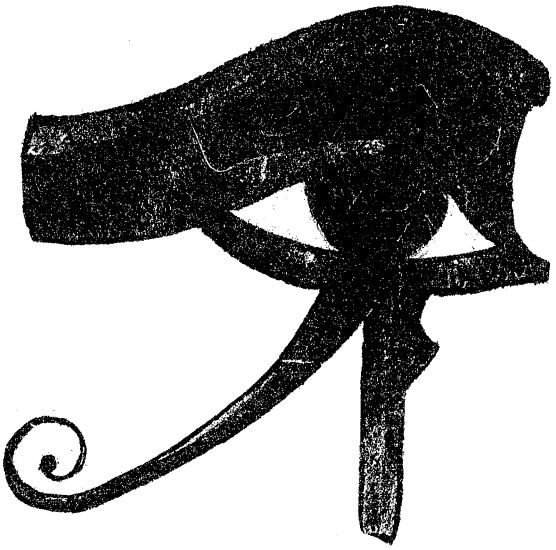
1) g est continue strictement décroissante sur IR donc g est une bijection de IR sur l'image de IR par g qui est] 0 ; 1 [.

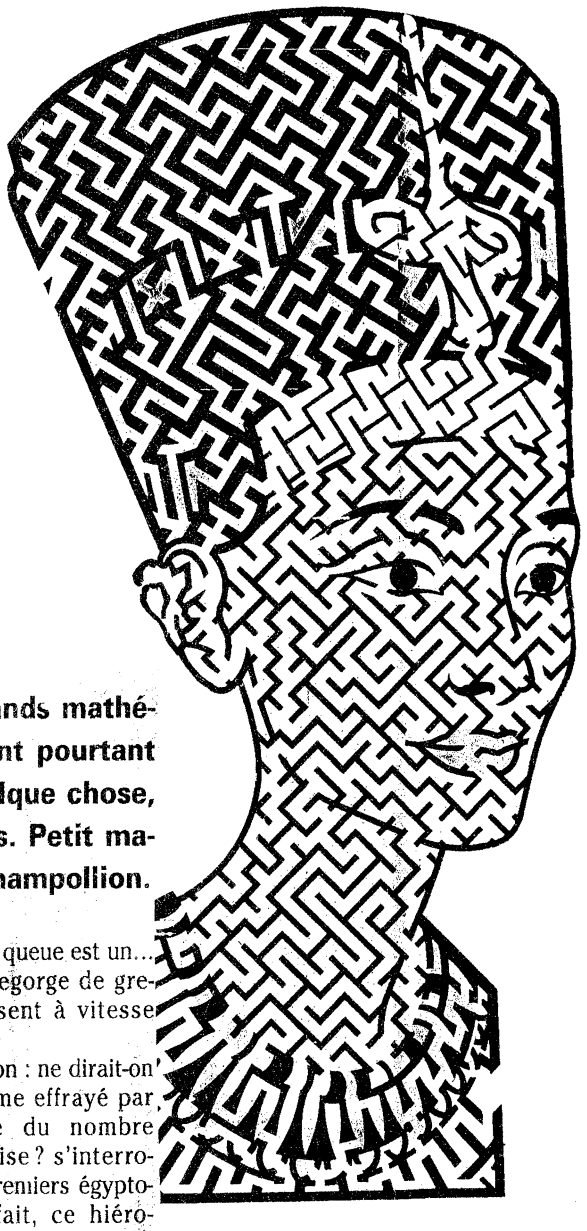
2) a) g (0) = ln2

b) g^{-1} est dérivable en ln2 si $g'(g^{-1}(\ln 2)) \neq 0$ or $g^{-1}(\ln 2) = 0$ et $g'(0) = f(0) = \dfrac{1-\ln 4}{2} \neq 0$

g^{-1} est donc dérivable en ln 2.

c) Equation de la tangente : $y = \dfrac{2}{1-\ln 4}x - \dfrac{\ln 4}{1-\ln 4}$





Les architectes des bords du Nil n'étaient pas de grands mathématiciens... Les pyramides qu'ils édifièrent continuent pourtant de nous narguer. Les dieux y sont peut-être pour quelque chose, mais leurs calculs ne devaient pas être si fantaisistes. Petit manuel d'arithmétique égyptienne à l'usage des futurs Champollion.

D'abord, apprendre à écrire les nombres. Les Égyptiens comptent en base 10. Pour chaque puissance de 10, donc, un hiéroglyphe.

● L'unité : un bâton, comme ceux dont se servent les habitants de la vallée du Nil pour tracer leurs calculs dans le sable ou la poussière.



● La dizaine : sorte de « u » majuscule à l'envers comme une anse de panier pour récoltes et victuailles.

● La centaine : spirale enroulée comme un rouleau de papyrus. Normal, dans le pays des scribes.

● Le millier : une des innombrables fleurs de lotus qui ornent le Nil et son delta.

● La dizaine de mille : un doigt pointé vers le ciel. Où scintillent des myriades d'étoiles ?

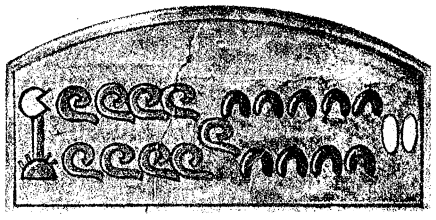
● La centaine de milliers : certains ont cru reconnaître dans cette bestiole un oiseau baptisé « burbot ». Mais d'autres chercheurs leur ont cloué le bec. Ce petit animal aplati à longue queue est un... têtard. Parce que le Nil regorge de grenouilles qui se reproduisent à vitesse grand V ?



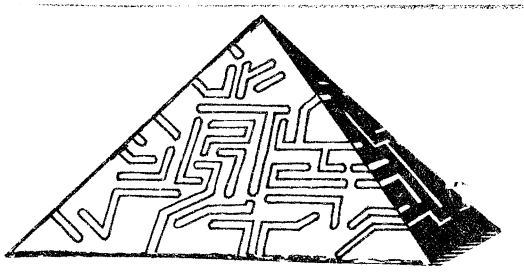
● Le million : ne dirait-on pas un homme effrayé par l'importance du nombre qu'il symbolise ? s'interrogeaient les premiers égyptologues. En fait, ce hiéroglyphe représente un dieu agenouillé soutenant la voûte du ciel. Et signifie également « millions d'années ou éternité ».

C'est tout : les Égyptiens ne savent pas compter plus loin.

Comme les Romains, les Aztèques, les Crétois et les Hittites, les Égyptiens additionnent leurs symboles pour écrire un nombre. Prenez, par exemple, 1992 : en hiéroglyphes, vous l'écrirez :



Mathématique Égyptienne "traditionnelle"



BAC2006

EXERCICE I

1. a) résolvons l'équation (E) :$z^2 - 2z + 2 = 0$

   $\Delta' = -1 = i^2$; les solutions sont $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

   b)

   $AB = |z_2 - z_1| = |-2i| = 2$; $AC = BC$ car C est sur x'ox qui est médiatrice de [AB]

   $AC = |z_C - z_1| = |\sqrt{3} + 1 - 1 - i| = |\sqrt{3} - i| = 2$ d'où $AB = AC = BC$ et le triangle ABC est équilatéral.

2. Résolvons $y'' - 2y' + 2y = 0$ l'équation caractéristique est celle du 1. La solution générale de l'équation différentielle est donc ; $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$

3. a) $ay'' - by' + cy = 0$ a pour solution $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées qui ont pour partie réelle 1 et l'une a pour partie imaginaire 1.(car la forme générale est $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ si $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\beta$)

   b) il faudrait donc que 1 + i soit solution de l'équation $ar^2 - br + c = 0$ donc il faut avoir : $a(2i) - b(1+i) + c = 0$ ou encore $-b + c + i(2a - b) = 0$. a et b étant réels , on a :

   $\begin{cases} -b + c = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$ système qui donne $b = c = 2a$

   les valeurs possibles sont donc pour a : 1 ; 2 ; 3. Et les triplets possibles sont (1 ;2 ;2) (2 ;4 ;4) (3 ;6 ;6) la probabilité d'avoir comme solution de (1) $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ est $\frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$ car le nombre de triplets possibles est 6^3.

EXERCICE II

2)

x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	**720**
y_i	8	12	18	24	32	40	48	58	72	**312**
x_i^2	1600	2500	3600	4900	6400	8200	10000	12100	14400	**63700**
y_i^2	64	144	324	576	1024	1600	2304	3364	5184	**14584**
$x_i \times y_i$	320	600	1080	1680	2560	3600	4800	6380	8640	**29660**
										totaux

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{720}{9} = 80;\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i = \frac{312}{9} = 34,66\ ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{63700}{9} - 6400 = 666,66$$

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_i y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{14584}{9} - (34,66)^2 = 1620,44 \quad ; \sigma_x = 25,82;\ \sigma_y$$

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_i x_i y_i - \overline{xy} = 522,75$$

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} = 0,78 \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} = -27,74$$

$\Delta_{Y/X} : y = 0,78x - 27,74$

3. $r = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y} = 0,99$ $\quad 0,7 < |r| < 1$ il y a donc une très forte corrélation.

4. a) $x = 150$ donne $y = 0,78 \times 150 - 27,74 = 89,26$; il percutera l'obstacle.

b) $y \le 85$ donne $0,78x - 27,74 \le 85$ ce qui conduit à $x \le 144,5$. La vitesse maximale à laquelle il devrait rouler pour ne pas percuter l'obstacle est :144,5 km/h

B) 1. Effectif total : 1000

2 $f_{y_2/x_1} = \dfrac{360}{800} = 0,45$ $\qquad f_{x_2/y_2} = \dfrac{90}{450} = 0,2$

3 $f_{.1} = f_{11} + f_{21} = \dfrac{550}{1000} = 0,55$ $\qquad f_{2.} = f_{21} + f_{22} = \dfrac{200}{1000} = 0,2$

PROBLEME

I $f(x) = x(1 + e^{2-x})$

1. Soit $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$

a) $x \mapsto 1 - x; x \mapsto e^{2-x}$ sont dérivables sur IR donc h est dérivable sur IR comme produit et $h'(x) = e^{2-x}(-2 + x)$

X	$-\infty$		2		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h		↘	0	↗	

b) $h(x) > 0$ car h admet un minimum nul.

2. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+xe^{2-x}) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{2-x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{2-x} = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+e^{2-x}\right) = +\infty$ La courbe de f admet une branche parabolique de direction y' o y.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} xe^{2-x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ la droite Δ : y = x est asymptote à la courbe de f en + ∞.

d) $f(x)-x = xe^{2-x}$ $f(x)-x > 0$ si $x > 0$ et la courbe de f est au dessus de Δ.

$f(x)-x < 0$ si $x < 0$ et la courbe de f est en dessous de Δ

3.a) $x \mapsto x; x \mapsto 1+e^{2-x}$ son dérivables sur IR donc f est dérivable sur IR et $f'(x) = h(x)$

x	-∞	2	+∞
f'(x)		+ 0 +	
f	-∞	4	+ ∞

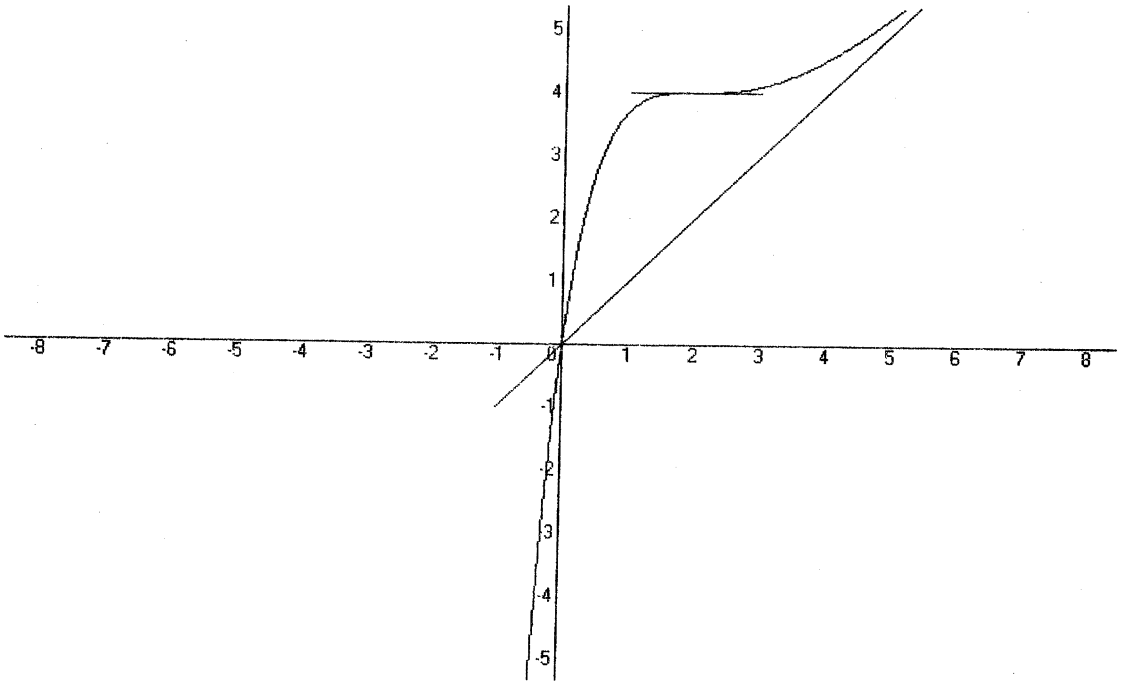
b) f est continue strictement croissante sur IR donc bijective. Elle admet donc une réciproque définie sur f<IR> = IR.

c) $f^{-1}(4) = 2$ or $f'(2) = 0$ donc f^{-1} non dérivable en 4

d) T : y = f(2) = 4. Remarquons qu'en x = 2 la courbe admet un point d'inflexion car la dérivée 1ère s'annule en changeant de signe.

Si x < 2 alors f(x) – 4 < 0 (voir tableau) et la courbe est en dessous de T.

Si x > 2 alors f(x) –4 > 0 et la courbe est au dessus de T.



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 8
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 26 A 01
Durée: 4 heures
Séries : S2-S4-S5 - Coeff. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

EXERCICE 1. [1]

1. (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation : $y = ax + b$, on a

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation : $x = a'y + b'$, on a

$$a' = \frac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} \text{ et } b = \bar{x} - a'\bar{y}$$

On en déduit que $aa' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}\dfrac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} = \dfrac{\Big(\text{cov}(X,Y)\Big)^2}{V(X)V(Y)} = \Big(\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\Big)^2 \Rightarrow$

$$aa' = r^2.$$

2. (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite $y = 2,4x$, on a : $a = 2,4$ et $b = 0$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation réduite : $x = \dfrac{3,5}{9}y + \dfrac{24}{9}$, on a , on a : $a' = \dfrac{3,5}{9}$ et $b' = \dfrac{24}{9}$.

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$r^2 = aa' = 2,4\ \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}.$$

Puisque $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont positifs par définition et que $\text{cov}(X,Y)$ est positif par hypothèse, alors r est positif. Donc $r = \sqrt{\dfrac{14}{15}}$

3. On a $\left\{\begin{array}{rcll} -a\bar{x} + \bar{y} & = & b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} & = & b' & (2) \end{array}\right.$ Je garde l'équation 1. Je multiplie l'équation 2 par a pour éliminer $\bar{x}$ $\left\{\begin{array}{rcl} -a\bar{x} + \bar{y} & = & b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} & = & ab' \end{array}\right.$

j'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$ c'est à dire

$$\bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

1. pour voir d'autre corrections consulter http ://irempt.education.sn

Pour trouver $\bar{x}$ j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la 2 : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$ c'est à dire

$$\bar{x} = b' + a'\frac{b+ab'}{1-r^2} = \frac{b' - r^2b' + a'b + a'ab'}{1-r^2} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1-r^2}$$

Application numérique : Comme $\frac{1}{1-r^2} = 15$, on a $\bar{y} = 15 \times \ 2,4 \times \frac{24}{9}$ et $\bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$ Donc

$$\bar{y} = 96 \text{ et } \bar{x} = 40$$

EXERCICE 2.

1. ✉ Pour que M appartiennent à l'axe des abscisses, il faut et il suffit que la partie imaginaire de z soit nulle c'est à dire $\ln y = 0$ ou $y = 1$. Donc $p(A) = p(y = 0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

✉ Pour que M appartiennent à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit que la partie réelle de z soit nulle c'est à dire $\ln x = 0$ ou $x = 1$. Donc $p(B) = p(x = 0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

✉ L'événement contraire de C est " M appartient à au moins un des axes" c'est à dire $A \cup B$.

L'événement $A \cap B$ est "M appartient à chacun des axes" c'est à dire $z = 0$ ou $\ln x = 0$ et $\ln y = 0$ finalement $x = y = 1$.

Puisque le tirage est avec remise, les événements A et B sont indépendants, donc :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) = \frac{1}{9}.$$

Par conséquent :

$$p(\bar{C}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

✉ Pour que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{i})$ soit égal à $-\frac{\pi}{4}$ il faut et il suffit que les coordonnées de M soient égales et strictement positives c'est à dire $\ln x = \ln y > 0$ ou $x = y = \mathrm{e}$. Par conséquent, D est l'événement "$x = y = \mathrm{e}$".

$p(x = \mathrm{e}) = p(y = \mathrm{e}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ et $p(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

✉ Pour que M appartienne au cercle trigonométrique, il faut et il suffit que $OM = 1$ c'est à dire $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$. Puisque x et y ne prennent que les valeurs $1, \mathrm{e}$ et $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\ln x$ et $\ln y$ ne prennent que les valeurs $0, 1$ et -1 ;

Les seuls couples possibles pour réaliser $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$ sont donc

$$(\ln x, \ln y) = (1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ \text{ou } (0,-1)$$

$$\text{c'est à dire } \ (x,y) = (\mathrm{e},1),\ (\tfrac{1}{\mathrm{e}},1),\ (1,\mathrm{e}),\ \text{ou } (1,\tfrac{1}{\mathrm{e}}).$$

$$\text{Or } p\Big((x,y) = (\mathrm{e},1)\Big) = p\Big((x,y) = (1,\mathrm{e})\Big) = \frac{2}{12} \times \frac{4}{1.2} = \frac{1}{18}$$

$$p\Big((x,y) = (\tfrac{1}{\mathrm{e}},1)\Big) = p\Big((x,y) = (1,\tfrac{1}{\mathrm{e}})\Big) = \frac{6}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Donc } \ p(E) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

2. a. Puisque x et y ne prennent que les valeurs $1, \mathrm{e}$ et $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\ln x$ et $\ln y$ ne prennent que les valeurs $0, 1$ et -1 ; Les couples de coordonnées possibles sont donc :

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,0),\ (-1,1),\ (-1,-1)$$

correspondant aux valeurs suivantes du couples (x, y) :

$$(1,1),\ (1,\mathrm{e}),\ (1,\frac{1}{\mathrm{e}}),\ (\mathrm{e},1),\ (\mathrm{e},\mathrm{e}),\ (\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}}),\ (\frac{1}{\mathrm{e}},1),\ (\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}),\ (\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})$$

Les distances OM possibles sont donc : $0,\ 1,\ \sqrt{2}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs $0,\ 1,\ \sqrt{2}$

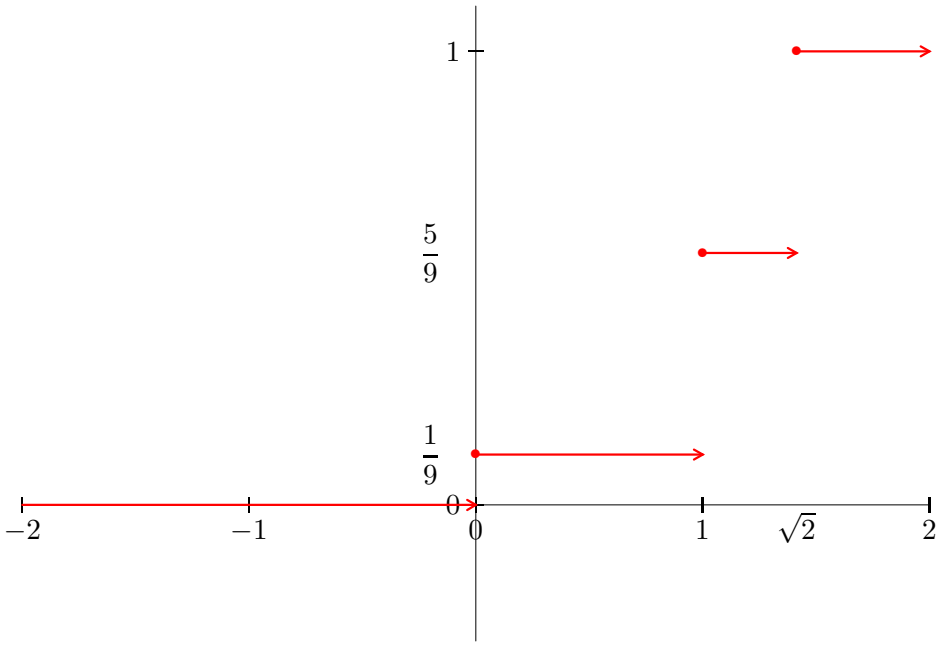
$$\begin{aligned}
p(X=0) &= p\Big((x,y)=(1,1)\Big) = \frac{4}{12}\frac{4}{12} = \frac{1}{9}\\
p(X=1) &= p\Big((x,y)=(1,\mathrm{e})\Big) + p\Big((x,y)=(\mathrm{e},1)\Big)\\
&\quad + p\Big((x,y)=(1,\frac{1}{\mathrm{e}})\Big) + p\Big((x,y)=(\frac{1}{\mathrm{e}},1)\Big)\\
&= \frac{2}{12}\times\frac{4}{12} + \frac{2}{12}\times\frac{4}{12} + \frac{4}{12}\times\frac{6}{12} + \frac{4}{12}\times\frac{6}{12} = \frac{4}{9}\\
p(X=\sqrt{2}) &= p\Big((x,y)=(\mathrm{e},\mathrm{e})\Big) + p\Big((x,y)=(\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}})\Big)\\
&\quad + p\Big((x,y)=(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e})\Big) + p\Big((x,y)=(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})\Big)\\
&= \frac{2}{12}\times\frac{2}{12} + \frac{2}{12}\times\frac{6}{12} + \frac{2}{12}\times\frac{6}{12} + \frac{6}{12}\times\frac{6}{12} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

En résumé :

$$p(X=0)=\frac{1}{9},\ p(X=1)=\frac{4}{9},\ p(X=\sqrt{2})=\frac{4}{9}$$

b. La fonction de répartition de X est définie par : $F(x) = p(X) < x$. Donc

- Si $x \le 0,\ F(x) = p(X < x) = 0$.
- Si $0 < x \le 1,\ F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = \frac{1}{9}$.
- Si $1 < x \le \sqrt{2},\ F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.
- Si $\sqrt{2} < x,\ F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = \sqrt{2}) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$.



EXERCICE 3. L'équation caractéristique associée à (E) est

$$(E_c) : r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad (r+1)^2 = 0.$$

1. Elle a une racine double égale à -1. Par conséquent la solution générale de (E) est :

$$f(x) = (ax + b)\ \mathrm{e}^{-x};\ a \text{ et } b \text{ réels arbitraires.}$$

2. Pour que la fonction $h : x \mapsto ax + b$ soit solution de (E') il faut et il suffit que

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = x + 3 \quad (1)$$

Or $h'(x) = a$ et $h''(x) = 0$. Donc l'équation devient : $2a + (ax + b) = x + 3$ c'est à dire $(a-1)x + 2a + b = 0$ ou $\left\{ \begin{array}{rcl} a - 1 & = & 0 \\ 2a + b & = & 0 \end{array} \right.$. Donc $a = 1$ et $b = -2$. Finalement

$$h(x) = x - 2$$

3. Soit g une solution de (E') c'est à dire une fonction telle que :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3 \quad (2)$$

En faisant la différneece membre à membre de (2) et (1) on trouve :

$$g''(x) - h''(x) + 2g'(x) - 2h'(x) + g(x) - h(x) = 0$$
$$\text{c'est à dire} \quad (g-h)''(x) + 2(g-h)'(x) + (g-h)(x) = 0 \quad (3)$$

Ce qui montre que la fonction $g - h$ est solution de (E).

Réciproquement $g - h$ est solution de (E) est équivalent à (3) soit à :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = h''(x) + 2h'(x) + h(x) \quad (4)$$

Or d'après (1) le second membre de cette relation vaut $x + 3$. donc (4) est équivalent à

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x + 3$$

Autrement dit g est solution de (E').

4. La fonction k est continue sur son ensemble de définition D_k qui est égal à $\mathbb{R}$; de plus

$$\lim_{x\mapsto-\infty} k(x) = -\infty;\ \lim_{x\mapsto+\infty} k(x) = 0$$
$$\text{et } \forall x \in D_k,\ k'(x) = -(x+1)\ \mathrm{e}^{-x}.$$

k' s'annule au point -1 et est > 0 si et seulement si $x+1<0$ c'est à dire $x<-1$.

Pour que le point $I(0,2)$ soit un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$ il suffit que k soit deux fois dérivable et qu'au point 0, k'' "s'annule en changeant de signe".

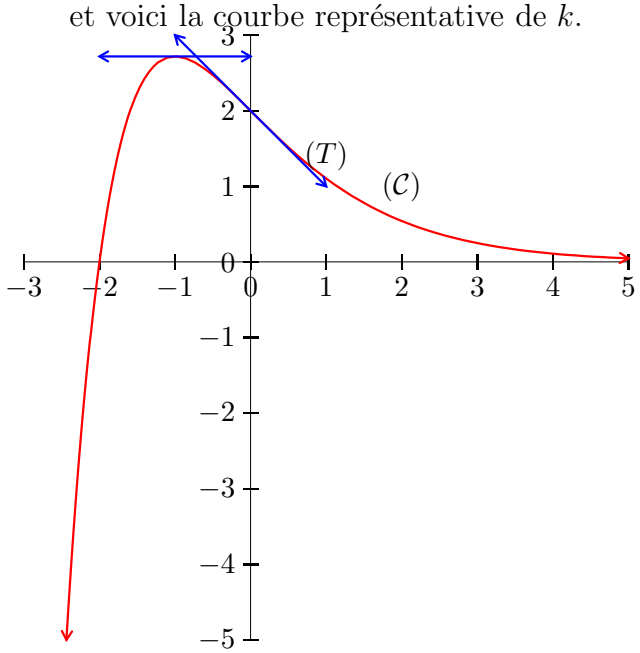
Cela est bien le cas puisque $k''(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}$ s'annule au point 0, est > 0 "après 0" et négatif "avant 0".

Voici le tableau de variations de k.

T.V de $x \to k(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
k'		$+$	0	$-$	
k	$-\infty$	↗	e	↘	0

et voici la courbe représentative de k.



EXERCICE 4.

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $D_f =]-1,\ +\infty[$ et

$$\lim_{x\mapsto-1} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \forall x \in D_f,\ f'(x) = 2\frac{1}{1+x}.$$

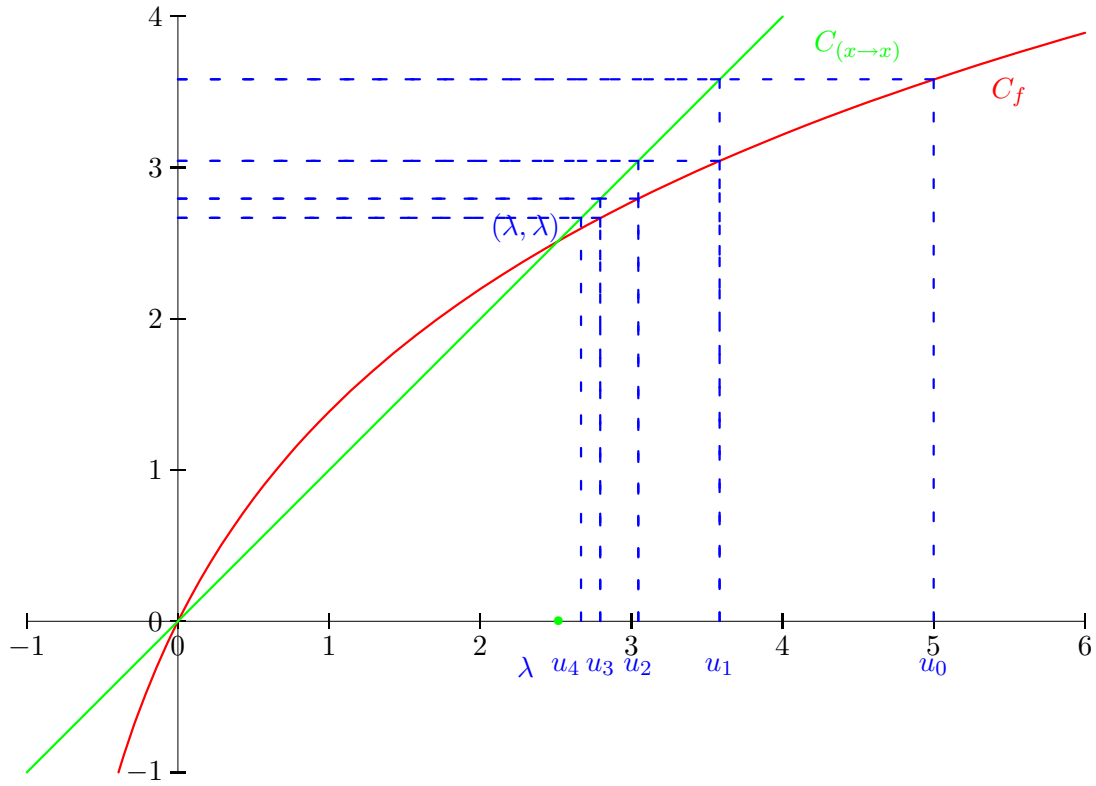
La dérivée est donc strictement positive dans D_f.

Voici le tableau de variation de f.

T.V de $x \to f(x) = 2\ln(1+x)$

x	-1		$+\infty$
f'	$\|$	$+$	
f	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

et voici la courbe C_f ainsi que les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.



b. La fonction ℓ est continue et dérivable sur D_f et

$$\lim_{x\mapsto -1} f(x) = -\infty;\ \forall x \in D_f,\ \ell'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, nous sommes en présence d'une indétermination de la forme " $+\infty - \infty$", mais on peut écrire : $\ell(x) = x\Big(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\Big)$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ a pour limite 0 ; donc le facteur $\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1$ a pour limite -1. Par conséquent $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ell(x) = -\infty$.

Voici le tableau de variation de ℓ.

T.V de $x \to \ell(x) = f(x) - x; \alpha = \ell(2) = 2\ln 3 - 2 \sim 2,2$

x	2	λ	$+\infty$
ℓ'		$-$	
ℓ	α	0	$-\infty$

La fonction ℓ étant continue et strictement décroissante dans $I = [2, +\infty[$, réalise une bijection de I dans $\ell(I) = J =]-\infty,\ \alpha[$; et puisque le réel 0 appartient à J, il a dans l'intervalle I un seul antécédent par ℓ, autrement dit, l'équation $\ell(x) = 0$ a dans I une solution unique λ.

Ce λ est alors l'unique élément de I tel que $f(\lambda) = \lambda$.

2. a. Voir graphique.

b. La fonction f étant continue et strictement croissante dans $I = [2, +\infty[$, réalise une bijection de I dans $f(I) = [f(2),\ +\infty[$; et puisque $f(2) = 2\ln 3 \sim 2,19$ est > 2, $f(I)$ est contenu dans I.

Démontrons maintenant par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ avec P_n : "$U_n \geq 2$"

✉ Initialisation : $U_0 = 5$, donnée de l'énoncé. Donc $U_0 \geq 2$ et P_0 est vrai.

✉ Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang n, en particulier P_n vrai (c'est à dire $U_n \geq 2$ ou $U_n \in I$) et montrons que P_{n+1} est vrai.

$$\left.\begin{array}{ll} U_n \in I & \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ f(I) \subset I & \\ U_{n+1} = f(U_n) & \end{array}\right\} \Rightarrow U_{n+1} = f(U_n) \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2$$

c. $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = \dfrac{2}{1+x}$; donc $\forall x \in]2, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion $\forall x \in]2, +\infty[, |f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les réels U_n et λ appartiennent à $[2, +\infty[$, intervalle dans lequel $|f'| \leq \dfrac{2}{3}$, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis au couple (U_n, λ) :

$$|f(U_n) - f(\lambda)| \ \leq \frac{2}{3}\,|U_n - \lambda|\,;$$

c'est à dire , puisque $f(\lambda) = \lambda$

$$|U_{n+1} - \lambda| \ \leq \frac{2}{3}\,|U_n - \lambda|\,;$$

Posons $\left|U_n - \lambda\right| = \delta_n$; la relation précédente devient alors $0 < \delta_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}\,\delta_n \quad (1)$.

Si au lieu de "$\leq$" on avait "$=$", la suite δ_n serait une suite géométrique et on pourrait immédiatement écrire $\delta_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \delta_0$. C'est pourquoi d'aucuns disent d'une suite vérifiant (1) qu'elle est sous-géométrique

Utilisons la même méthode : donnons à n toutes les valeurs entières possibles entre 0 et p, p entier ≥ 0 ; multiplions ensuite membre à membre (Nous sommes en droit de le faire par ce que nous manipulons des nombres positifs). Il vient :

$$\delta_0\ \delta_1 \dots \delta_p\ \delta_{p+1} \leq \frac{2}{3}\ \delta_0\ \frac{2}{3}\ \delta_1 \dots \frac{2}{3}\ \delta_p$$

et en simplifiant[2] par $\delta_0\ \delta_1 \dots \delta_p$: $0 < \delta_{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \delta_0$ c'est à dire (tout en remplaçant p par n)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \left|U_{n+1} - \lambda\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left|U_0 - \lambda\right| \quad (2)$$

$\ell(2) \sim 2,2$ est positif, $\ell(3) \sim -2,2$ est négatif, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, λ est compris entre 2 et 3.

Puisque $U_0 = 5$, on en déduit que $|U_0 - \lambda| \leq 3$ et la relation (2) entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \left|U_{n+1} - \lambda\right| \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

Cette dernière relation s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \delta_{n+1} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

En remarquant que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0$, on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \delta_{n+1} = 0$, soit $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \delta_n = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left|U_n - \lambda\right| = 0$, enfin $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n - \lambda$

e. La relation $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|U_{n+1} - \lambda\right| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ s'écrit aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|U_n - \lambda\right| \leq= 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Donc pour qu'un entier n vérifie $\left|U_n - \lambda\right| \leq \frac{1}{10^2}$, il suffit que $2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{10^2}$.

Cette relation est équivalente à : $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \ln\frac{1}{200}$ c'est à dire $(n-1)\ln\frac{2}{3} \leq -\ln 200$ ou $n - 1 \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2}$, finalement $n \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1$.

Le plus petit entier vérifiant cette relation est $p = E\left(\frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1\right) + 1 = 15$

2. En toute rigueur, avant de simplifier, il faut s'assurer qu'aucun des δ_p n'est nul. En fait, on peut montrer que c'est le cas ici. Dans le cas général, si un des δ_p est nul, la suite est stationnaire donc convergente.

Corrigé de l'Epreuve E_1 du Baccalauréat 2010

Certains résultats sont donnés à titre indicatif il revient aux correcteurs d'entrer dans les détails lors des concertations afin de mieux apprécier les démonstrations des élèves.

Exercice 1 :

On considère le tableau ci-dessus indiquant les résultats d'une étude sur le nombre d'années x en exercice des ouvriers d'une entreprise et de leur salaire y en milliers de francs.

Notons x_i les modalités de x et n_i l'effectif de x_i, avec $1 \leq i \leq 6$.

Et notons y_j les modalités de y et n_j l'effectif de y_j, avec $1 \leq j \leq 4$. Soit N l'effectif total.

x / Y	2	6	10	14	18	22	n_j
75	a	5	0	0	0	0	a+5
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	b+5
n_i	a+2	13	10	11	b+17	5	N= a+b+58

1) Déterminons a et b pour que $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$.

On sait que $\bar{x} = \frac{\sum_1^6 n_i x_i}{N}$ et $\bar{y} = \frac{\sum_1^4 n_j y_j}{N}$

Alors $\bar{x} = \frac{2(a+2)+(6\times13)+(10\times10)+(14\times11)+18(b+17)+(22\times5)}{a+b+58}$ et $\bar{y} = \frac{75(a+5)+(10\times125)+(38\times175)+225(b+5)}{a+b+58}$

Or $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$

D'où $\frac{2(a+2)+(6\times13)+(10\times10)+(14\times11)+18(b+17)+(22\times5)}{a+b+58} = \frac{596}{59}$ et

$\frac{75(a+5)+(10\times125)+(38\times175)+225(b+5)}{a+b+58} = \frac{8450}{59}$.

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 239a - 233b = 4900 \\ 161a - 193b = 2580 \end{cases}$$

D'où a =40 et b=20.

2) On suppose que a =40 et b=20 dans la suite. Et en associant à chaque valeur x_i la moyenne m_i de la série conditionnelle $(y/x=x_i)$; on a obtenu le tableau suivant :

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

a) Calculons le coefficient de corrélation linéaire

Déterminons d'abord les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{m}$, les variances V_x et V_y, les écarts-types σ_x et σ_y, la covariance de x et y. Notons que la série statistique double (x,m) est injective.

Ainsi on a $\bar{x} = \frac{\sum_1^6 x_i}{N}$, $\bar{m} = \frac{\sum_1^6 m_i}{N}$, $V_x = \frac{\sum_1^6 x_i^2}{N} - \bar{x}^2$, $V_m = \frac{\sum_1^6 m_i^2}{N} - \bar{m}^2$, $\sigma_x = \sqrt{V_x}$, $\sigma_m = \sqrt{V_m}$ et $\text{cov}(x,m) = \frac{\sum_1^6 x_i m_i}{N} - \bar{x}\bar{m}$

D'où $\bar{x} = 12$, $\bar{m} = 156$, $V_x \approx 46.66$, $V_m \approx 1933.33$, $\sigma_x \approx 6.83$, $\sigma_m \approx 43.96$ et $\text{cov}(x,m) \approx 267.33$.

Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire r.

On sait que $r = \frac{\text{cov}(x,m)}{\sigma_x \sigma_m}$ d'où $r \approx 0.89$.

Puisque r est proche de 1, il y a alors une forte corrélation entre x et m.

b) La droite de régression de m en x, notée $D_{m/x}$, a pour équation $m = a x + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x,m)}{V_x}$ et $b = \bar{m} - a\bar{x}$.

D'où $D_{m/x}$: $m = 5{,}73\, x + 87{,}25$.

c) Si x=30 alors m≈259.128, d'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est sensiblement égal à 259130F.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\text{cm}$.

1)

a) Résolvons dans C l'équation $z^3 - 1 = 0$.

On sait que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

alors $z^3 - 1 = 0$ si et seulement si $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

D'où l'équation admet trois solutions données sous formes algébriques $z_1 = 1,\ z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, d'où l'ensemble des solutions S est :

$$S = \left\{1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Donnons les formes trigonométriques de ces solutions :

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0, z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \text{ et } z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

b) Résolvons l'équation $z^3 = 8$ sachant que $2^3 = 8$.

$z^3 = 8$ est équivalente à $\left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1$ ce qui implique d'après 1)a) que

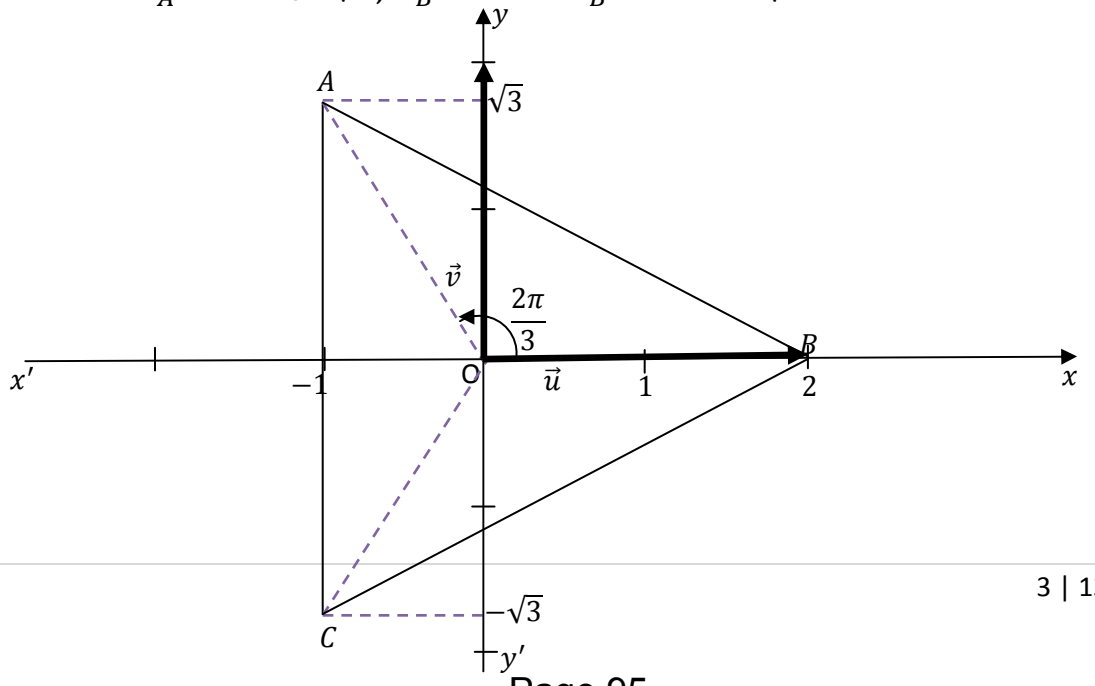
$$\frac{z}{2} = 1 \text{ ou } \frac{z}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{z}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

D'où $z = 2$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$ ou $z = -1 + i\sqrt{3}$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$ est

$$S_1 = \{2\ ;\ -1 - i\sqrt{3}\ ;\ -1 + i\sqrt{3}\}.$$

2)

a) Plaçons les points dans le repère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3},\ z_B = 2\ et\ \ z_B = -1 - i\sqrt{3}$



b) Calculons le modulons et un argument de $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$.

$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, d'où $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=1\right|$ et arg $(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B})=-\frac{\pi}{3}$.

c) $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$ et arg $(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B})=-\frac{\pi}{3}$ impliquent que AB=CB et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=-\frac{\pi}{3}$, d'où le triangle ABC est équilatéral.

2)

a) Soit f la transformation qui associe à tout point M(z) le point M'(z') tel que $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

Soit Ω (z_0) tel que f(Ω)= Ω, alors $z_0=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_0$ ce qui implique que $z_0=0$.

D'où f admet comme point invariant O.

Ainsi puisque $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ alors $z'-z_0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_0)$ ce qui implique que pour tout point z différent de z_0 on a $\frac{z'-z_0}{z-z_0}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

D'où $\left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right|=1$ et arg $(\frac{z'-z_0}{z-z_0})=C$.

Ceci est équivalent à : $\begin{cases} OM'=OM \\ (OM,OM')=\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Donc M' est l'image de M par une rotation. La rotation a pour centre O et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit A' est l'image de A par f alors $z_{A'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

D'où $z_{A'}=z_C$ ou $A'=C$.

De même $f(C)=B$.

c) $f(A)=C$ et $f(C)=B$ on en déduit donc que l'image de la droite (AC) est la droite (BC) car l'image d'une droite par une rotation est une droite et que B et C appartiennent à la droite image.

Exercice 3 :

On dispose d'un tiroir qui contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges, soit au total vingt chaussures. Toutes les paires sont de modèles différents.

1) On tire 2 chaussures au hasard.

Soit Ω l'univers alors card (Ω)=C_{20}^2=190.

a) Soit l'événement A : « tirer deux chaussures de la même couleur », alors l'événement A est « tirer deux chaussures noires ou deux chaussures vertes ou deux chaussures rouges »

D'où p (A)= $\frac{C_{10}^2+C_6^2+C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{66}{190} \approx 0{,}35.$

b) Soit l'événement B : « tirer un pied droit et un pied gauche »

Puisque dans le tiroir il y a dix pieds gauches et dix pieds droits alors

p (B)= $\frac{C_{10}^1 \times C_{10}^1}{C_{20}^2} = \frac{100}{190} \approx 0{,}52.$

c) Soit l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle ».

Puisque toutes les paires sont de modèles différents alors il y a dix modèles. On choisit un modèle parmi les dix et prend les deux chaussures du modèle.

Donc p (C)= $\frac{C_{10}^1 \times C_2^2}{C_{20}^2} = \frac{1}{19} \approx 0{,}05.$

2) Le tiroir ne contient maintenant qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On effectue un tirage successif et sans remise d'une chaussure du tiroir jusqu'à ce qu'il soit vide.

Soit la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Puisque X est le rang d'apparition de la deuxième chaussure noire alors une ***première chaussure noire est déjà apparue*** donc la deuxième noire peut sortir au deuxième tirage ou au 3ème tirage ou au 4ème et il ne peut pas y avoir plus de quatre tirage car il n'y a que deux paires dans le tiroir.

D'où X prend les valeurs 2, 3 ou 4.

Soit Ω l'univers alors card (Ω)=4!

b) (X=2) c'est obtenir dans cet ordre noire, noire, rouge, rouge.

Alors p (X=2)=$\frac{2\times1\times2\times1}{24}=\frac{1}{6}$.

(X=3) c'est obtenir dans cet ordre noire, rouge, noire, rouge ou rouge, noire, noire, rouge

Alors p (X=3) $=\frac{2(2\times2\times1\times1)}{24}=\frac{1}{3}$.

(X=4) c'est obtenir dans cet ordre noire, rouge, rouge, noire ou rouge, noire, rouge, noire ou rouge, rouge, noire, noire

Alors p (X=4)= $\frac{2(2\times2\times1\times1)+(2\times1\times2\times1)}{24}=\frac{1}{2}$.

c) Soit E(x) l'espérance mathématiques de X, alors

$E(x)=\sum_1^3 a_i p(X=a_i)=(2\times\frac{1}{6})+\left(3\times\frac{1}{3}\right)+\left(4\times\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{3}$

Sa V(X) variance est :

$$V(X)=\sum_1^3 {a_i}^2 p(X=a_i)-(E(x))^2=\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(9\times\frac{1}{3}\right)+\left(16\times\frac{1}{2}\right)-\frac{10^2}{3}$$

$$=\frac{5}{9}\approx 0{,}55$$

Son écart type σ_X est $\sqrt{V(X)}$, alors

$$\sigma_X =\approx 0{,}74$$

Problème :

Partie A :

1) Etudions sur IR le signe de $4e^{2x}-5e^x+1$.

Posons Y=e^x, considérons alors $4y^2-5y+1$.

Le trinôme $4y^2-5y+1=0$ admet deux racines $y_1=\frac{1}{4}$ et $y_2=1$, d'où

$4y^2-5y+1=4\left(y-\frac{1}{4}\right)(y-1)$ ou encore

$4e^{2x}-5e^x+1=4\left(e^x-\frac{1}{4}\right)(e^x-1)$ avec $x_1=-2ln2\ et\ x_2=0$ ses racines.

Son tableau de signe est :

x	-∞	$-2ln2$	0	+∞
$e^x - \frac{1}{4}$	-	0	+	+
$e^x - 1$		-	0	+
$4e^{2x} - 5e^x + 1$	+	0	-	0 +

D'où $4e^{2x} - 5e^x + 1 \geq 0 \; si \; x \in]-\infty ; -2ln2] \cup [0; +\infty[$ et

$4e^{2x} - 5e^x + 1 < 0 \; si \; x \in]-2ln2 ; 0[$.

2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = lnx - 2\sqrt{x} + 2$.

a)

- Domaine de définition de φ

φ est définie si et seulement si $x > 0$ d'où le domaine de définition D_φ de φ est : $D_\varphi =]0 ; +\infty[$

- Limites de φ aux bornes de D_φ

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty \; et \; \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

b) Etudions les variations de φ

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$, pour tout $x > 0$.

D'où $\varphi'(x) = 0 \; si \; x = 1$,

$\varphi'(x) > 0 \; si \; x \in]0 ; 1[$ et

$\varphi'(x) < 0 \; si \; x \in]1 ; +\infty[$

Dressons le tableau de variations de φ

x	0	1	+∞
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ	-∞ ↗	0	↘ -∞

c) D'après le tableau de variations $\varphi(x)$ admet un maximum en 1 est sa valeur maximale est 0.

D'où pour tout $x \in D_\varphi, \varphi(x) \leq 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{e^x}{2e^x - 1} & si\ x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}lnx & si\ x > 0 \end{cases}$$

($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1)

a) Déterminons D_f le domaine de définition de f.

- Sur $]-\infty; 0]$ $f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1}$ est définie si et seulement si

$2e^x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -ln2$.

Donc sur $]-\infty; 0]$ f est définie si $x \in]-\infty; -ln2[\cup]-ln2\ ; 0]$. (1)

- Sur $]0; +\infty]$ $f(x) = 1 - x + \sqrt{x}lnx$ est partout définie (2)

(1) et (2) impliquent que $D_f =]-\infty; -ln2[\cup]-ln2\ ; +\infty[$.

b) Calculons les limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-ln2^-} f(x) = \lim_{x\to-ln2} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-ln2^+} f(x) = \lim_{x\to-ln2} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x + \sqrt{x}lnx = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

Branches infinies :

- $\lim_{x\to-ln2} f(x) = \lim_{x\to-ln2} x + \frac{e^x}{2e^x-1} = \infty$ alors la droite d'équation $x = -ln2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ calculons alors $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \frac{e^x}{2e^x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\frac{e^x}{2e^x-1}}{x} = 1 \qquad (3)$$

Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{e^x}{2e^x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2e^x-1} = 0 \qquad (4)$$

Conclusion : (3) et (4) impliquent que la droite ($\mathscr{D}_1$) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

- De même on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, calculons alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x+\sqrt{x}lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -1 \qquad (5)$$

Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x) + x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{x}lnx = +\infty \qquad (6)$$

Conclusion : (5) et (6) impliquent que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique la droite ($\mathscr{D}_2$) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

c) Position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à ($\mathscr{D}_1$) au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$: $f(x) - x > 0$ si $\frac{e^x}{2e^x-1} > 0$ c'est-à-dire $x \in]-ln2\,;0]$

Et $f(x) - x < 0$ si $x \in]-\infty\,;-ln2[$.

D'où la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ($\mathscr{D}_1$) au voisinage de $-\infty$.

2)

a) Etudions la continuité de f en 0.

On a d'une part $f(0) = 1$, d' autre part $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x + \frac{e^x}{2e^x-1} = 1$

et $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1 - x + 2\sqrt{x}ln\sqrt{x} = 1$

d'où $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$. Donc f est continue en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+\frac{e^x}{2e^x-1}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(2e^x-1)+e^x-(2e^x-1)}{x(2e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(2e^x-1)-e^x+1}{x(2e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}1-\frac{e^x-1}{x(2e^x-1)}=\lim_{x\to 0^-}1-\frac{\frac{e^x-1}{x}}{2e^x-1}=0$$

D'où f est dérivable à gauche de 0 et son nombre dérivé à gauche de 0, $f'_g(0)$, est $f'_g(0)=0$. La courbe représentative de f, ($\mathscr{C}_f$),admet une tangente horizontale à gauche du point d'abscisse 0.

-De même

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x+\sqrt{x}lnx-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+\sqrt{x}lnx}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}-1+\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite de 0. La courbe représentative de f,

($\mathscr{C}_f$),admet une tangente verticale à droite du point d'abscisse 0.

3) Calculons la dérivée de

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4e^{2x}-5e^x+1}{(2e^x-1)^2} & si\ x\in\ ]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\ ;0]\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(lnx-2\sqrt{x}+2\right) & si\ x\in\ ]0;+\infty[\end{cases}$$

<u>Signe de la dérivée</u> :

Sur $]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\ ;0]$, $f'(x)$ a le même signe que $4e^{2x}-5e^x+1$

Et sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $lnx-2\sqrt{x}+2$

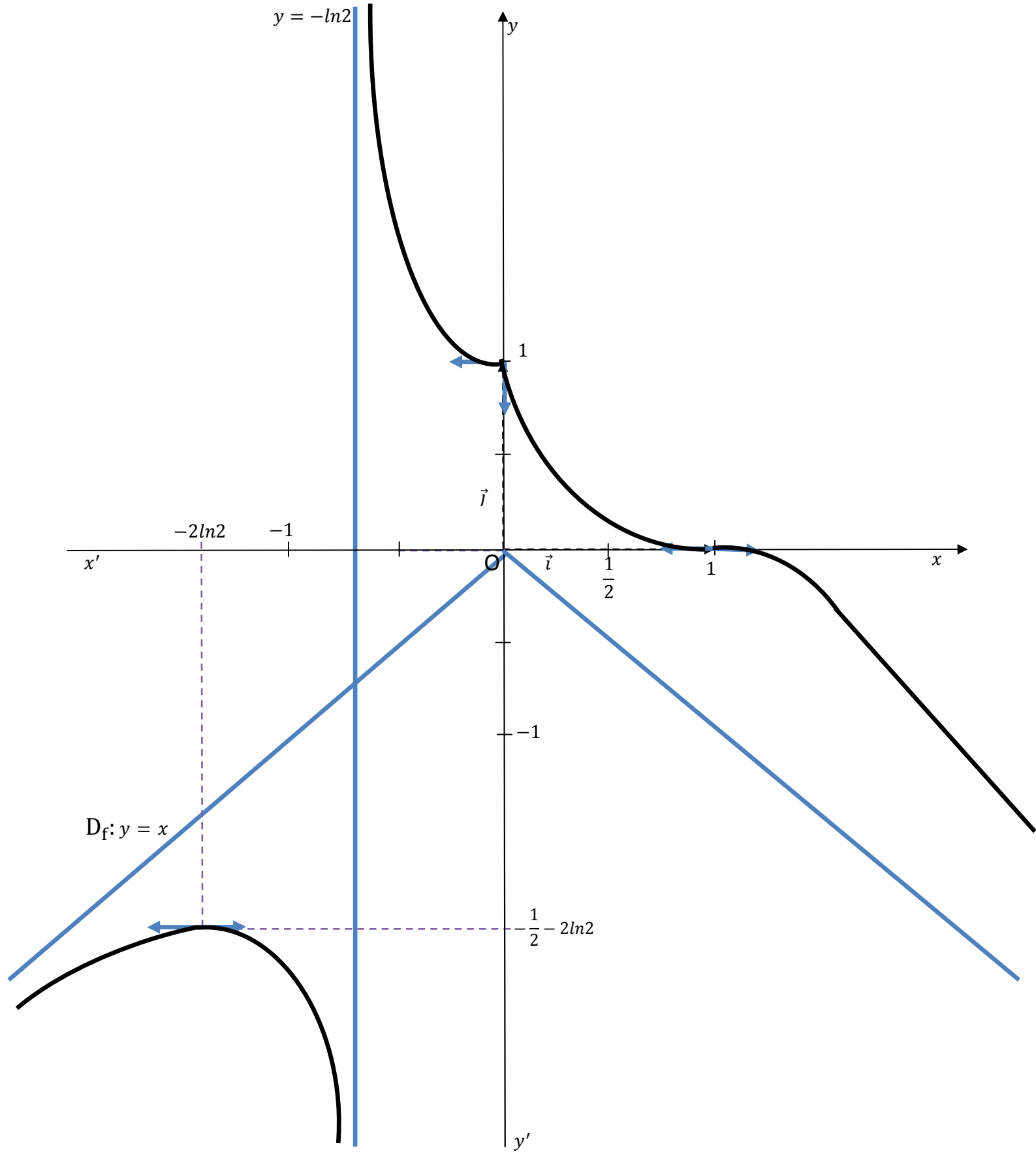
Donc d'après la partie A, $f'(x)\leq 0$ $[-2ln2;-ln2[\cup]-ln2\ ;+\infty[$ et

$f'(x)\geq 0$ sur $]-\infty\ ;-2ln2]$

<u>Tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$		$-2ln2$		$-ln2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0 | -∞	$-$	
f	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}-2ln2$	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	1	↘	$-\infty$

4) Construction de la courbe, des asymptotes et des tangentes


$y = -ln2$
y
1
$\vec{\imath}$
$-2ln2$
-1
x'
O
$\vec{\imath}$
$\frac{1}{2}$
1
x
-1
$D_f: y = x$
$-\frac{1}{2} - 2ln2$
y'

5) Calculons l'aire A, en cm², du domaine du plan délimité par la droite d'équation $y = x$, la courbe et les droites d'équations $x = -ln8$ et $x = -\ln 4$.

$$\mathrm{A} = \int_{-ln8}^{-ln4} \left(x - x - \frac{e^x}{2e^x - 1}\right) dx \times 4cm^2$$

$$\mathrm{A} = \left[-\frac{1}{2} ln|2e^x - 1|\right]_{-ln8}^{-ln4} \times 4cm^2$$

$$\mathrm{A} = 2\ln\frac{3}{2}\mathrm{cm}^2$$

FIN.

Epreuve du 1er groupe

C O R R I G E

EXERCICE N°1

I. 1°) Z est écrit sous forme algébrique, x est sa partie réelle et y sa partie imaginaire (ou iy). Nota bene : deux réponses correctes au moins pour avoir 0,25 pt

2) Son module est $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) cos $\alpha = \frac{Re(Z)}{|Z|}$ sin $\alpha = \frac{Im(Z)}{|Z|}$.

4) Soit O(0), $Z' - Z_0 = e^{i\theta}\left(Z - Z_0\right)$

$$\boxed{Z' = Ze^{i\theta}}$$

II.

(E) : $\frac{1}{2}\, z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$

1) $\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4$.

$\Delta' = (2i)^2$.

$Z_1 = \frac{-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{\frac{1}{2}}$ et $Z_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{\frac{1}{2}}$.

On obtient : $\boxed{Z_1 = -4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}}$ et $\boxed{Z_2 = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}}$.

2) $a = -4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$, $b = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

On a : $OA = |a| = 8$, $OB = |b| = 8$ et $AB = |8\mathrm{i}| = 8$. Donc OAB est un triangle équilatéral.

3) $Z_D = Z_C\, e^{i\frac{\pi}{3}} = (\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3} + \mathrm{i})$.

$$Z_D = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(\sqrt{3} - \mathrm{i})(\sqrt{3} + \mathrm{i}).$$

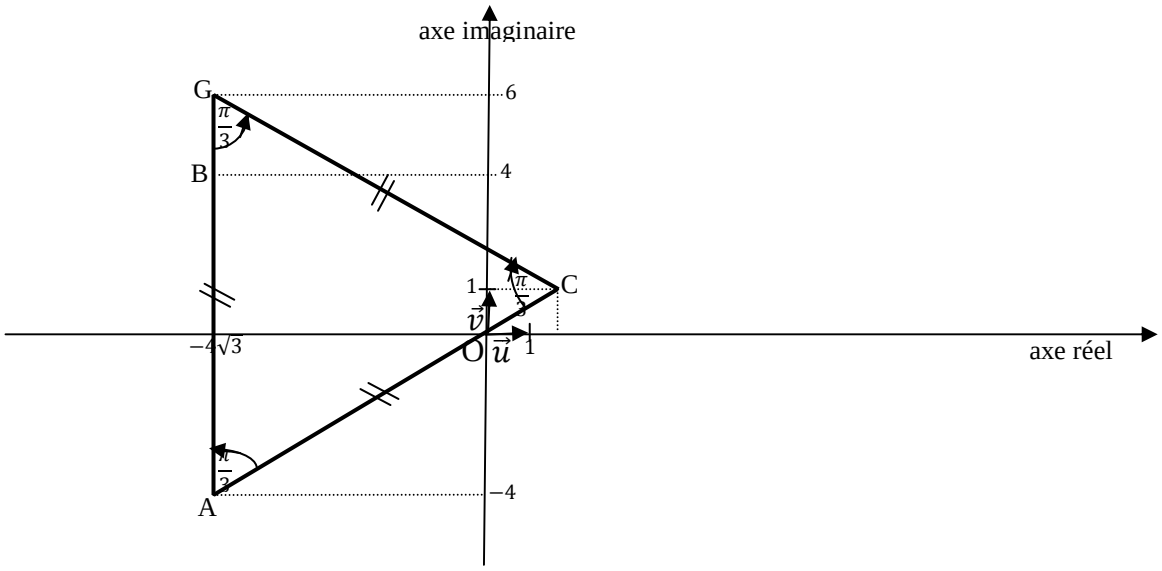
$$\boxed{Z_D = 2i}$$

4) G = barycentre du système {(O, 1), (D, -1), (B, -1)}.

a) $g = \frac{1.z_O - 1z_D - z_B}{-1} = Z_D + Z_B$.

$\boxed{g = -4\sqrt{3} + 6i}$.

b) Plaçons les points A, B, C et G dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.



…/… 2

5) On vérifie que :
$\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\begin{cases} |c-g| = |a-g| \\ \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$;
D'où $\begin{cases} \mathrm{GA} = \mathrm{GC} \\ (\overrightarrow{\mathrm{GA}}, \overrightarrow{\mathrm{GC}}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$
Donc GAC est un triangle équilatéral direct.

EXERCICE N°2

I) $p(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$ $p\ (A\ /\ B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\ B}$
$p(A) = p\left(A \cap \overline{B}\right) + p(A \cap B)$, car $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et $A \cap \overline{B}$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles.

II) 1) $p(D_1) = 1$
$p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$ $p(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$.
2) $p(D_{n+1}) = p_{n+1}$

$p(D_{n+1}) = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$ or $p(D_{n+1}) = p_{n+1}$
Donc $p_{n+1} = p(D_n)p(D_{n+1}/D_n) + p(\overline{D}_n)p(D_{n+1}/\overline{D}_n)$.

D'où $p_{n+1} = \frac{2}{9}p_n + (1-p_n)\frac{5}{6}$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{-11}{18}\,p_n + \frac{5}{6}}$$

3) $U_n = 6\,p_n - \frac{90}{29}$ $n \in IN^*$
a) $U_n = 6\,p_n - \frac{90}{29} = 6(p_n - \frac{15}{29})$
Donc $U_{n+1} = 6(p_{n+1} - \frac{15}{29})$
En remplaçant p_{n+1} par son expression on a:
$U_{n+1} = 6(\frac{-11}{18}\,p_n + \frac{5}{6} - \frac{15}{29})$
$U_{n+1} = 6(\frac{-11}{18}\,p_n + \frac{55}{6\times29})$
$U_{n+1} = 6 \times \frac{-11}{18}(\,p_n - \frac{55}{11} \times \frac{18}{6\times29})$.
$$U_{n+1} = \frac{-11}{18}(6\,p_n - \frac{90}{29})$$

Donc $\boxed{q = \frac{-11}{18}}$

b) $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ $U_1 = 6\,p_1 - \frac{90}{29}$ $U_1 = 6 - \frac{90}{29}$
$\boxed{U_1 = \frac{84}{29}}$

…/… 3

D'où

$$\boxed{U_n = \frac{84}{29} \times \left(\frac{-11}{18}\right)^{n-1}, n \in N^*}$$

$$P_n = \frac{1}{6}\left(U_n + \frac{90}{29}\right)$$

$$\boxed{P_n = \frac{1}{6}\left[\frac{84}{29} \times \left(\frac{-11}{18}\right)^{n-1} + \frac{90}{29}\right]}$$

c) Soit q_{20} la probabilité que la ville soit sans délestage le 20eme jour.
$q_{20} = 1 - p_{20}$ 0

$\boxed{q_{20} \cong 6{,}483}$ à 10^{-3}. Prés par défaut.

PROBLEME

I. $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$..

Soit D_f le domaine de définition de la fonction f,

$D_f = \mathbb{R}$ car $3x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $x \mapsto (x-1)^3$ est dérivable sur IR comme puissance d'une fonction dérivable sur IR.
D'où par produit $x \mapsto 3(x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 + 1$ dérivable sur IR et $3x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel ; par quotient $x \mapsto f(x)$ dérivable sur IR.
Calculons f'(x)

$$f'(x) = 3\frac{3(x-1)^2\left(3x^2+1\right) - (x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2\left[\frac{3\left(3x^2+1\right) - (x-1)6x}{(3x^2+1)^2}\right].$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2\left[\frac{9x^2+3-6x^2+6x}{(3x^2+1)^2}\right].$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)	+		0	+	0	+	
f	$-\infty$	↗	-6	↗	0	↗	$+\infty$

3) f continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection continue de IR sur $f(IR) = IR$ et $1 \in f(IR)$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation f(x) = 1 admet une solution unique $\alpha \in IR$

Montrons $3 < \alpha < 4$.

La restriction de f à [3 ; 4] est une bijection continue et $f(3) < 1 < f(4)$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha \in]3, 4[$.

II $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$.

1) a) g(x) existe si et seulement $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3ln^2|x| + 1 \neq 0 \end{cases}$

or $3ln^2|x| + 1 \neq 0$ pour tout réel $x \neq 0$.

D'où $\boxed{Dg = \mathbb{R}^*}$

b)

$g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3[(\ln|x|)^2+1]}$.

$g(x) = f(ln|x|)$ en posant $h(x) = ln|x|$

On a $\boxed{g(x) = (foh)(x),\ x \neq 0}$

c) $Dg = \mathbb{R}^*$

Soit $x \in Dg$ donc $-x \in Dg$ (car $\mathbb{R}^*$ stable par passage à l'opposé)

$g(-x) = f(h(-x))$ or h paire $\Rightarrow h(-x) = (x)$

d'où $\boxed{g(-x) = g(x),\ x \neq 0}$

II 1) c) Aussi g est paire sur Dg.

d) $D_E =]0, +\infty[$

$x > 0$ donc $h(x) = lnx$ or $k(x) = f(h(x))$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Par composée $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Par composée $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) = +\infty}$

Etude des branches infinies en $+\infty$

$K(x) = \frac{3(\ln x-1)^3}{3\ln^2 x+1}$.

$$\frac{k(x)}{x} = \frac{3(\ln^3 x - 3\ln x^2 + 3\ln x - 1)}{x(3\ln^2 x + 1)}$$

Pour $x > 0$ $\frac{k(x)}{x} = \frac{3\ln x}{x} \frac{[1-\frac{3}{\ln x}+\frac{3}{\ln x^2}-\frac{1}{\ln x^3}]}{[3+\frac{1}{\ln^2 x}]}$

…/… 5

$\lim_{x \to +\infty} k(x) = 0$ donc ($\mathscr{C}_k$) admet en k une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

2) a) on a $k(x) = (f\ o\ h)\ (x)$

En utilisant la forme de la dérivation d'une forme composée on obtient :

k'(x) = h'(x) x f'(h(x)) ;

k'(x) = $\frac{1}{x}$ f'(h(x)).

k'(x) garde un signe positif sur]0, + ∞[mais k'(x) s'annule en x vérifiant lnx-1 = 0 ou lnx+1 = 0

x = e ou x = $\frac{1}{e}$

x		0		$\frac{1}{e}$		e		-∞
k'(x)		+		0	+	0	+	
k		||		-6		0		+∞
		-∞						

$k\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3(-1-1)^3}{3+1} = -6$

b) $k(x) = 0 \Leftrightarrow 3(ln\ x - 1)^3 = 0$

$lnx = 1$

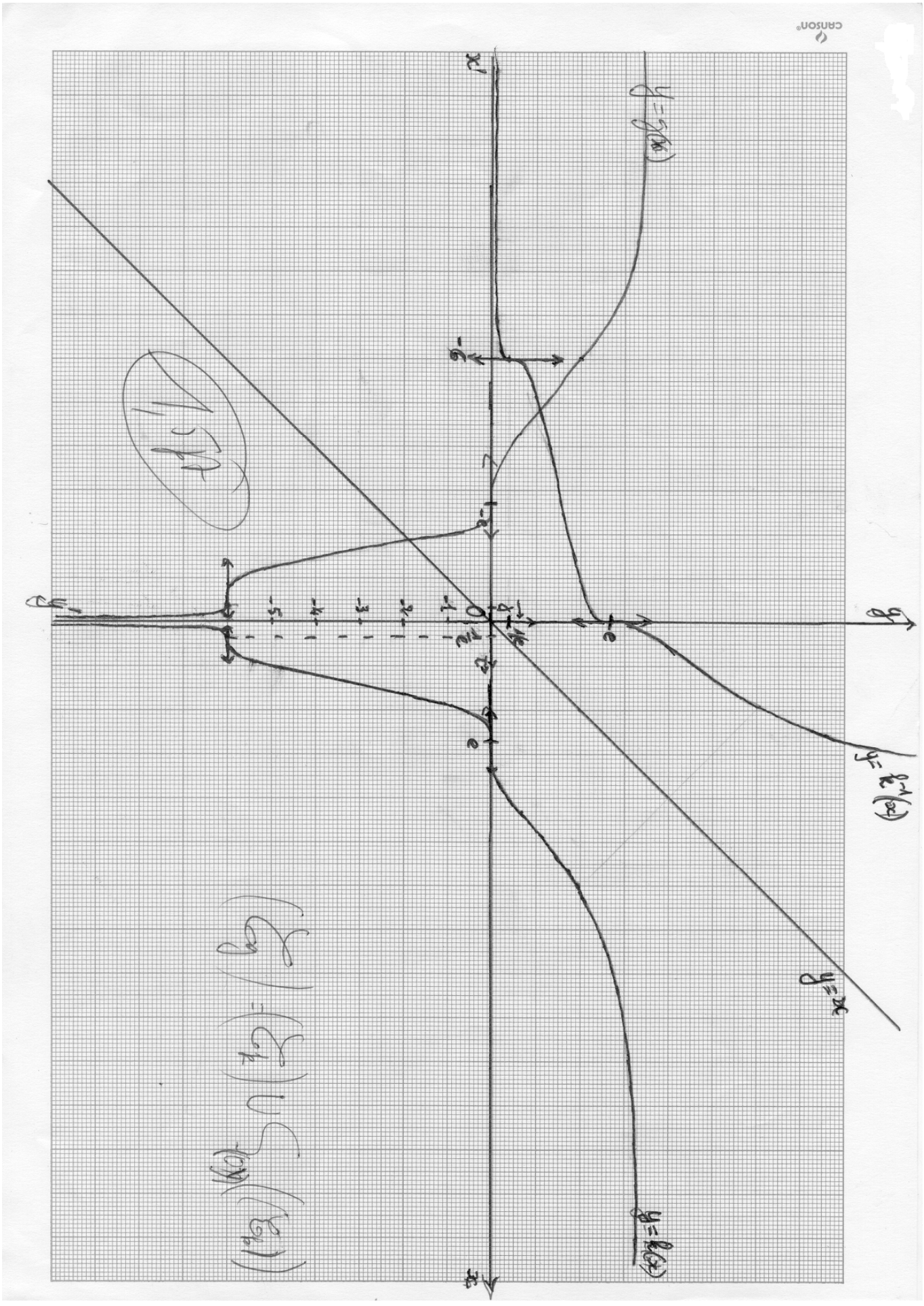
x = e

($\mathcal{C}_k$) coupe l'axe des abscisses en A (e, 0)

Si x ∈]0, e[, k(x) < 0
Si x ∈]e,+∞[, k(x) > 0
Si x = e, k(x) = 0

3) a) k est continue et strictement croissante sur]0, +∞ [par composée de deux fonctions continue et strictement croissante.
D'où k réalise une bijection de]0, +∞ [sur IR.
D'où k(]0 ; +∞[) =IR
Donc $J = IR$.

…/… 6


x'
x
y
y=g(x)
y=x
y=h(x)
y=h⁻¹(x)
e
-e
-1
-2
-3
-4
-5
1
2
e
-e

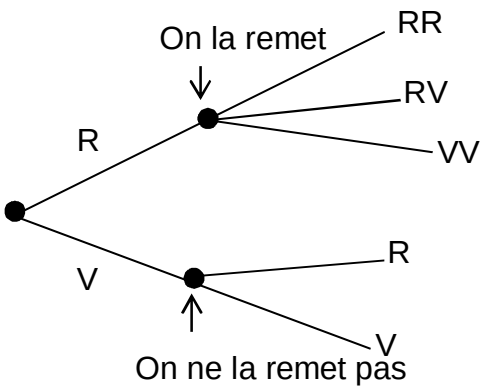
Epreuve du 1er groupe

C O R R I G E

EXERCICE 1

Urne | 3V 4R

On tire au hasard une boule.



R_1 : La boule tirée au premier tirage est rouge
R_2 : Les boules tirées au deuxième tirage sont rouges
V_2 : Les boules tirées au deuxième tirage sont vertes
R_2 : La boule tirée au deuxième tirage est rouge

1) $P(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{}{}$ **(0,25 point)**

$P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{}{}}{\frac{}{}} = \frac{}{}$ **(0,25 point)**

$P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{}{} = \frac{}{}$ **(0,25 point)**

$P(R_2/\bar{R_1}) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(0,5 point)**

2) a) Ne pas avoir de boule rouge au deuxième tirage signifie avoir exactement une boule verte ou exactement deux boules vertes.
Soit A cet événement.

$P(A) = \frac{}{} \times \frac{P(R_1 \cap V_2)}{P(R_1 \cap R_2)} + \frac{}{} \times \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{}{}}{} \times \frac{}{} + \frac{}{} \times \frac{}{} = \frac{}{} + \frac{}{} = \frac{}{}$ **(0,5 point)**

b) Soit B l'événement avoir deux boules rouges au deuxième tirage

$P(B) = \frac{}{} \times \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{}{} \times \frac{}{} = \frac{}{}$ **(0,5 point)**

3) Soit X correspondant au nombre de boules rouges tirées au deuxième tirage.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

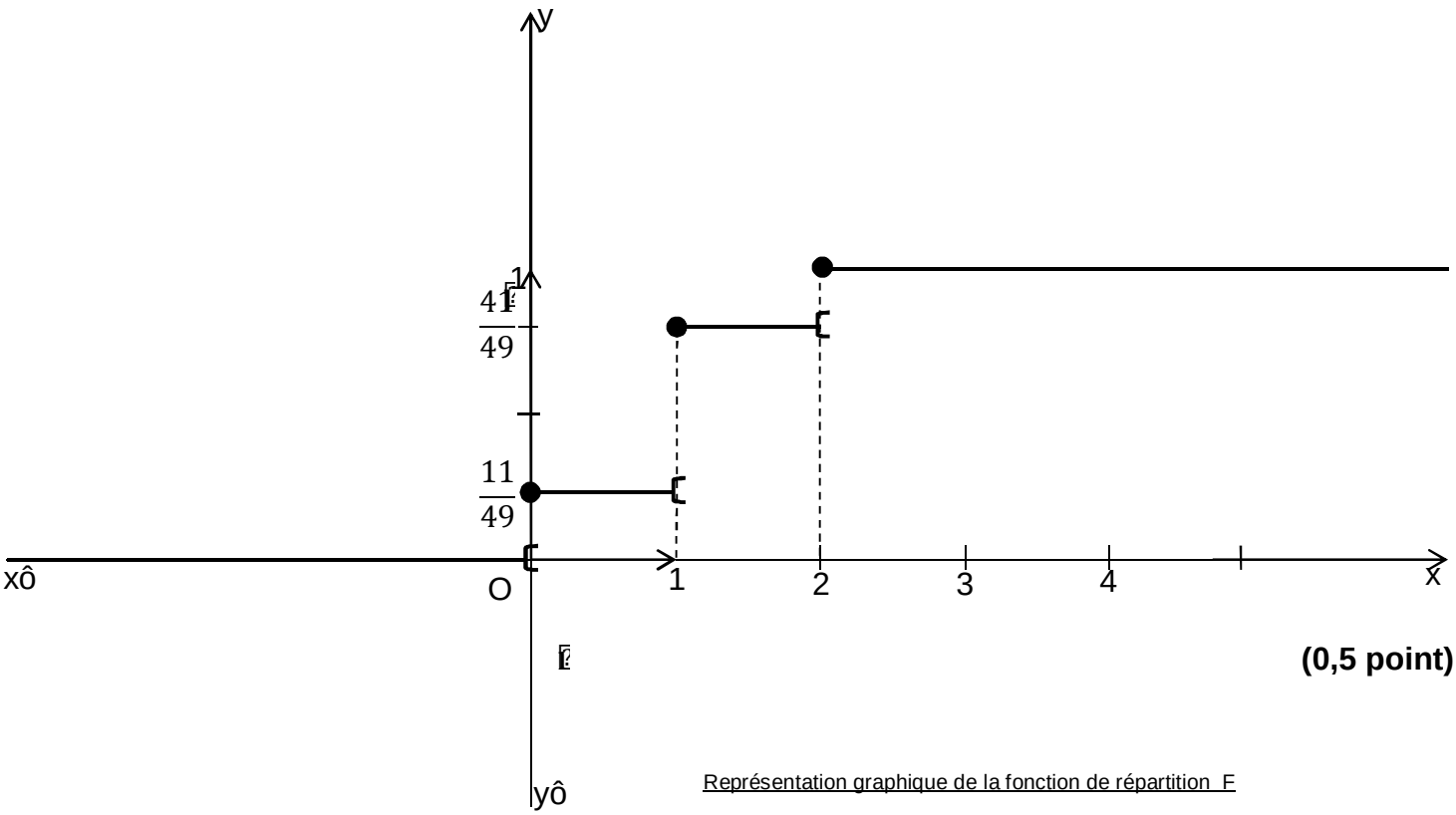
Loi de probabilité de X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{49}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{8}{49}$

(0,5 point)

4) Soit F la fonction de répartition de X.

- Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(\phi) = 0$
- Si $x \in [0; 1[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{11}{49} \simeq 0{,}22$
- Si $x \in [1, ; 2[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{41}{49} \simeq 0{,}81$
- Si $x \geq 2$ alors $F(x) = P(\Omega) = 1$. **(0,5 point)**



(0,5 point)

Représentation graphique de la fonction de répartition F

EXERCICE 2

A) $f(x) = 1 - x^2 - 2x$

1) $f(1) = 0$ **(0,25 point)**
2) $D_f =]0 ; +\infty[$

é /é 3

Limites

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ **(0,25 point + 0,25 point)**

Continuité et dérivabilité de g

$x \mapsto 1 - x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, +\infty[$
$x \mapsto -\ln x$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$
[illegible] $x \mapsto 1 - x^2 - \ln x$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ **(0,5 point)**

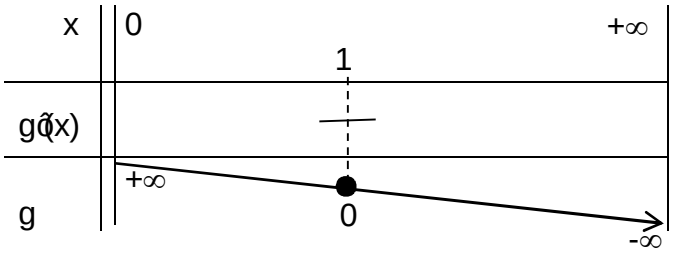
Dérivée de g

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 1}{x}$

Signe de $g'(x)$ et sera de variation de g.

$g'(x)$ a le même signe que $-2x^2 - 1$ sur $]0, +\infty[$
Or $-2x^2 - 1 < 0$ pour tout réel x
Donc $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$
$\Rightarrow$ g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. **(0,5 point)**

Tableau de variation de g



(0,5 point)

3) D'après le tableau de variations de g et la question 1)
Sur $]0, +\infty[$ $g(x) > 0$
et sur $]1, +\infty[$ $g(x) < 0$ **(0,5 point)**

B) $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

1) f est définie si et seulement si $x > 0$
$D_f =]0 ; +\infty[$ **(0,25 point)**

Limites :

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **(0,25 point + 0,25 point)**

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f).

Continuité et dérivabilité de f

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (1)
De même $x \mapsto 2 - x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. **(0,5 point)**

Dérivée de f :

$f'(x) = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x - x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. **(0,5 point)**

Signe de f'(x) et sens de variations de f :

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \frac{x - x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ a le même signe que g.
Sur $]0 ; 1[$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]0 ; 1[$ **(0,25 point)**

Sur $]1 ; +\infty[$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$. **(0,25 point)**
$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0 \Rightarrow f'$ s'annule en 1.

Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$f(1) = 2 \times 1 + \frac{\ln 1}{1} = 1$

(0,5 point)

3) a) Démontrons que la droite (Δ) d'équation y = - x + 2 est une asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \mapsto +\infty} \left[2 - x + \frac{\ln x}{x} + x - 2 \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow (\Delta) : y = -x + 2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **(0,25 point)**
b) Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

- $f(x) - y = \frac{\ln x}{x} > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc sur $]1 ; +\infty[$ $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ).
- $f(x) - y = \frac{\ln x}{x} < 0$ si et seulement si $x \in]0, 1[$ donc sur $]0, 1[$ $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (Δ)
- $f(x) - y = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc $(\mathcal{C}f)$ et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

(0,25 point)

4) Soit A $(x_0 ; y_0)$ le point où la tangente est parallèle à (Δ).

Alors on a $f'(x_0) = -1 \Rightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{x_0^2} = -1$ avec $x_0 > 0$

Donc $x_0^2 - 2x_0 + 1 = -x_0^2$, $x_0 > 0$

$\Rightarrow 1 - x_0^2 - 2x_0 + 1 = -x_0^2$, $x_0 > 0$

$\Rightarrow 2x_0 = 1$, $x_0 > 0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 > 0$

Donc $x_0 = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ **A $\left(\frac{1}{2}; 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$** **(0,5 point)**

5) Courbe (C_f) voir papier millimétré.

EXERCICE 3

P complexe muni (O; $\vec{u}, \vec{v}$)

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4z = 0$ (E)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 est solution imaginaire pure si et seulement si :
$$-iz_0^3 + 2z_0^2 + 2iz_0^2 + 2iz_0 - 4z_0 - 4i = 0$$
$$(-iz_0^2 + 2z_0^2 + 2iz_0 - 4)z_0 + 2iz_0 - 4i = 0$$

C'est-à-dire $\begin{cases} 2iz_0 - 4i = 0 \\ -iz_0^2 + 2z_0^2 + 2iz_0 - 4 = 0 \end{cases}$ C'est-à-dire $\begin{cases} 2i(z_0 - 2) = 0 \\ -iz_0^2 + 2z_0^2 + 2iz_0 - 4 = 0 \end{cases}$

C'est-à-dire $z_0 = 0$ ou $z_0 = 2$
$-iz_0^2 + 2z_0^2 + 2iz_0 - 4 = 0$ (E)

Si $z_0 = 0$ alors (E) devient $-4 = 0$ ce qui est impossible.
Si $z_0 = 2$ alors (E) devient $-8 + 8 + 4 - 4 = 0$ ce qui est vrai
Donc $z_0 = 2i$ est la solution imaginaire pure.

Ainsi on a

$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$	$z - 2i$
$-(z^3 - 2iz^2)$	$z^2 - 2iz + 2$
$-2iz^2 + 2(1+2i)z - 4i$	
$-(-2iz^2 + 4iz)$	
$2z - 4i$	
$-(2z - 4i)$	
0	

Donc l'équation devient (E) devient :
$$(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$
$$(z - 2i) = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$z - 2i = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2i}$

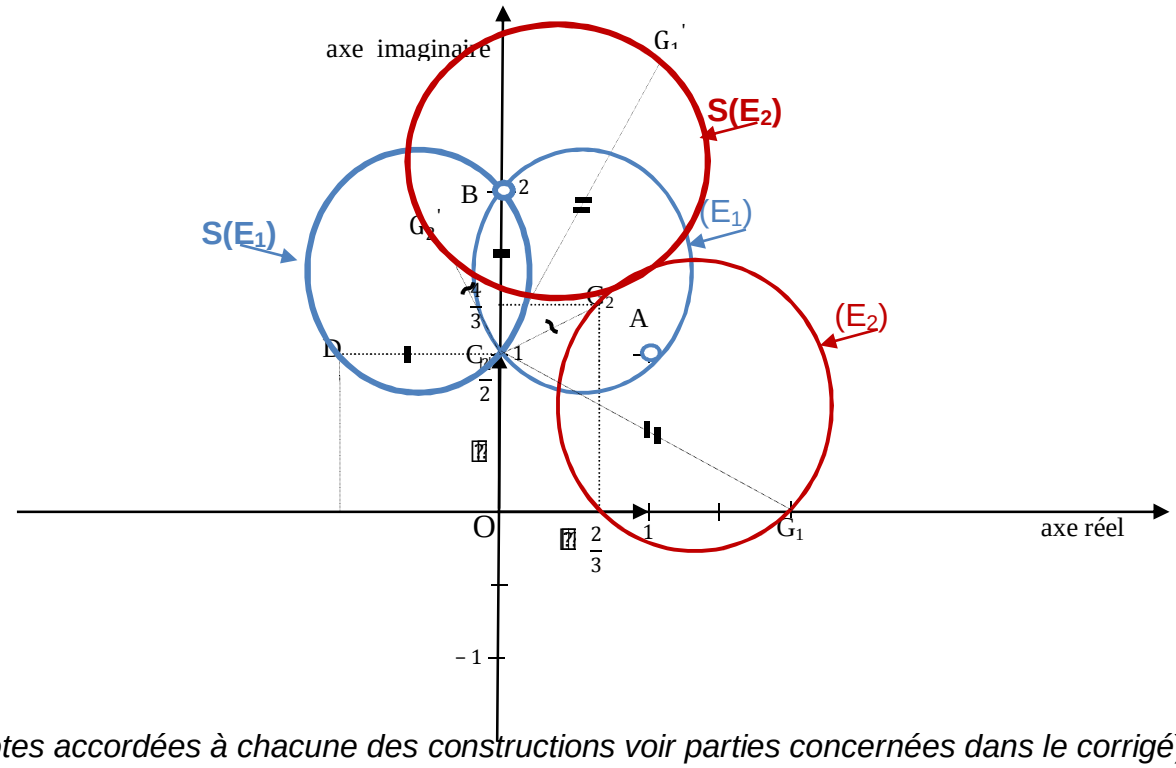
$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$z^2 = 1 - 2 = i^2$$

$\boxed{z_1 = 1 - i}$ ou $\boxed{z_2 = 1 + i}$

$\boxed{S = \{2i;\ 1 - i;\ 1 + i\}}$ **(0,75 point)**

2) Soient $\Omega(1+i)$, $G_1(2)$ et G_2

Plaçons les points A, B et C dans le repère suivant : **(0,25 point)**



(*Notes accordées à chacune des constructions voir parties concernées dans le corrigé*).

3) Soit $z \neq 1+i$

$z \mapsto z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$

a) ● Interprétation graphique $|z'|$

Soit M le point d'affixe z avec $z \neq 1+i$ $(z \neq 2i)$

$|z'| = \left|\dfrac{z-2i}{z-1-i}\right| = \dfrac{|z-2i|}{|z-1-i|} = \dfrac{|z-z_B|}{|z-z_\Omega|} = \dfrac{BM}{\Omega M} = \dfrac{BM}{AM}$, $M \neq A$

$|z'| = \dfrac{BM}{AM}$, $M \neq A$ **(0,5 point)**

● Interprétation graphique de arg (z')

$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-2i}{z-1-i}\right) = \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_\Omega}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$ $M \neq A$

$\arg(z') = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$ $M \neq A$ **(0,5 point)**

b) $E_1 = \{M(z) \in P / z' \text{ imaginaire pur}\}$

M d'affixe z tel que z' imaginaire pur

z' imaginaire pur $\Rightarrow \arg z' = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ $M \neq A$

$\Rightarrow$ M décrit le cercle de diamètre [AB] privé du point A

(E_1) est le cercle de diamètre [AB] privé du point A **(0,5 point)**

(Construction voir page 7) **(0,25 point)**

.../... 8

c) $E_2 = \{M,\ M(z) \in P\ /\ |z| = 2\}$

$|z| = 2$ si et seulement si $\frac{BM}{AM} = 2$ avec $M \neq A$

C'est-à-dire $BM^2 - 4AM^2 = 0$, $M \neq A$

Or $BM^2 - 4AM^2 = 0$, $M \neq A$

Est équivalent à $(\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{AM})(\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AM}) = 0$ avec $M \neq A$

Soit G_1 barycentre $\{(B,1) ; (A,2)\}$ G_2 barycentre $\{(B,1) ; (A,2)\}$

$(\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{AM})(\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AM}) = 0$ d'où $\overrightarrow{MG_1}.3\overrightarrow{MG_2} = 0$

Donc $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$

D'où M décrit le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

(E_2) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$. **(0,5 point)**

(Construction voir page 7) **(0,25 point)**

4) S : similitude directe de centre C transformant A en B.

a) $\frac{CB}{CA} = \frac{CB}{CA} = 1$ donc CA = CB (1)

$\arg\left(\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ (2)

(1) et (2) donnent $\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C. **(0,5 point)**

b) $\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Donc S est la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$ **(0,5 point)**

c) $S(E_1)$?

On sait que S(A) = B

Soit D = S(B)

D'où $S(E_1)$ est le cercle de diamètre [BD] privé du point B. **(0,5 point)**

(Construction voir page 7) **(0,5 point)**

$S(E_2)$? $S(G_1) = G_1^{Nj}$ donc $\begin{cases} CG1 = CG_1^{Nj} \\ (\overrightarrow{CG_1}, \overrightarrow{CG_1^{Nj}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$S(G_2) = G_2^{Nj}$ donc $\begin{cases} CG2 = CG_2^{Nj} \\ (\overrightarrow{CG_2}, \overrightarrow{CG_2^{Nj}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

D'où $S(E_2)$ est le cercle de diamètre $[G_1^{Nj}G_2^{Nj}]$ **(0,5 point)**

(Construction voir page 7). **(0,5 point)**

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle: $f'' + 2f' + f = 0$ (E)

On pose $k(x) = e^{-x} h(x)$, pour tout reel x.

1) Démontrons que k est solution de (E) si et seulement si $h'(x) = 0$ pour tout réel x

- Supposons que k est solution de (E)
  Alors k''(x) + 2 k'(x) + k = 0 (α)
  or k'(x) = e^{-x} (h'(x) − h(x)) et k''(x) = e^{-x} (−h'(x) + h(x) + h''(x) − h'(x))
  = e^{-x} (h''(x) − 2h'(x) + h(x))
  Donc (α) devient e^{-x}(h''(x) − 2h'(x) +h(x) + 2h'(x) − 2h(x) + h(x)) = 0

Donc e^{-x} (h''(x) = 0
Donc h''(x) = 0
Conclusion : si k est solution de (E) alors h''(x) = 0 **(0,25 point)**

- Inversement supposons que h''(x) = 0 démontrons que k est solution de (E)
  $f'(x) = \alpha e^{\beta x} f'(x) - \alpha\beta f(x)$
  Donc $f''(x) = \alpha e^{\beta x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x))$
  $= \alpha e^{\beta x}(-2f'(x) + f(x)$ donc $f''(x) = 0$
  Donc $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = \alpha e^{\beta x}(-2f'(x) + f(x) + 2f'(x) - 2f(x) + f(x))$
  $= \alpha e^{\beta x}(0f'(x) + 0f(x)) = 0$
  Donc $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ donc f est solution de (E).
  Conclusion : si $f''(x) = 0$ alors f est solution de (E) **(0,25 point)**

2) Résolvons l'équation h''(x) = 0
   $f''(x) = 0$ si et seulement si $f'(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = ax + b$, a et b appartenant à IR. **(0,25 point)**
3) Donc la solution générale f de (E) est :
   f(x) = β e^{-x} (ax + b), avec a, b et β des réels. **(01 point)**

4) Soit F une primitive de f
   On a $F(x) = -\beta(a(x + 1) + b)e^{-x} + \alpha$ (en intégrant par parties ou en utilisant la relation (E)) **(01 point)**

Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. Corrigé de l'épreuve n° 13 G 26 A 01. Année 2013

Exercice 1 :

1. (a) $r = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, $r = -0,973$. Il y a une forte corrélation.

   (b) La droite de régression de Y en X est :
   $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$
   $y = -0,874x + 4,12$

   (c) Si $x = 6$ alors $y = -1,124$.
   Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6ième mois de pluie le degré de salinité ne peut être négatif.

2. Soit $Z = \ln(Y - 1)$

   (a)

x_i	0	1	2	3	4
z_i	1,182	0,875	0,010	-1,83	-4,61

   (b) $r = \dfrac{cov(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z}$, $r = -0,944$.

   (c) – La droite de régression de Z en X est :
   $z = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(X,Z)}{V(X)}$ et $b = \overline{Z} - a\overline{X}$
   $z = -1,428x + 1,982$
   – On a $z = \ln(y - 1)$ et $z = -1,428x + 1,982$ d'où
   $\ln(y - 1) = -1,428x + 1,982$
   $y - 1 = e^{-1,428x+1,982}$
   Ainsi $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$.

   (d) Si $x = 6$ alors $y = 1,001$. Le degré de salinité estimé au 6ième est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur. Donc l'équation $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$ nous permet de faire cette estimation.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
$S = S(O, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. $z' - z_O = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ or $z_O = 0$ donc
   $z' = i\frac{\sqrt{2}}{2} z$.

2. (a) $z_1 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_0 = i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $z_2 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
   $z_3 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_2 = -i\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

   (b) $z_n = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_{n-1}, n \geq 1$.

   (c) On voit que, d'après (b), $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomètrique de premier terme $z_0 = 1 + i$ et de raison $q = i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
   d'où $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n z_0$
   Ce qui donne $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n (1+i), n \geq 0$.

   (d) $a_n = |z_n|, a_n = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$
   $a_{n+1} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$
   $a_{n+1} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \frac{\sqrt{2}}{2}$
   ainsi $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n, n \geq 0$.
   D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomètrique de premier terme $a_0 = \sqrt{2}$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   (e) (a_n) converge vers zéro car sa raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est dans $]0; 1[$.

Problème :

PARTIE A.

1. Soit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{x}{x}]$ or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$
   donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=1-1=0$
   En conclusion $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=0.$
2. $k:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$
   $x\mapsto x(1-\ln x)$

   (a) $x\mapsto \ln x$ continue sur $]0;+\infty[$
   et $x\mapsto 1$ continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $]0;+\infty[$,
   d'où $x\mapsto(1-\ln x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ par somme.
   or $x\mapsto x$ est continue sur $]0;+\infty[$ d'où par produit $x\mapsto x(1-\ln x)$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   (b) $K:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$
   $x\mapsto\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x$
   $x\mapsto\dfrac{3}{4}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elles est dérivable sur $]0;+\infty[$
   et $x\mapsto\dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit,
   donc K est dérivable sur $]0;+\infty[$ par somme.
   Calcul de $K^{'}(x)$:
   $K^{'}(x)=(\dfrac{3}{4}x^2)^{'}-\dfrac{1}{2}(x^2\ln x)^{'}=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}(2x\ln x+x^2(\dfrac{1}{x}))$
   $=\dfrac{3}{2}x-x\ln x-\dfrac{1}{2}x=x-\ln x$
   d'où $K^{'}(x)=k(x)$.

PARTIE B.

$$Soit f(x)=\begin{cases} e^x-x-1, & \text{si } x\leq 0 \\ x\ln x, & si\ \ x>0 \end{cases} \qquad (1)$$

1. si $x \leq 0$ alors $e^x - x - 1$ existe et si $x > 0$ alors $x \ln x$ existe d'où
   $f(x)$ existe ssi $x \in]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$
   $D_f =]-\infty; +\infty[$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} x \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

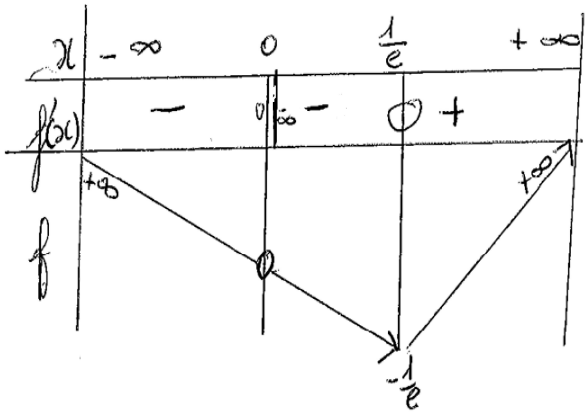
2. (a) f est définie en 0 car dans $[0; +\infty[$ $f(x) = e^x - x - 1$ et $x \mapsto e^x - x - 1$ est définie en 0 et prend la valeur 0 on a alors $f(0) = 0$.
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0,$
   d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$
   Ainsi f est continue en 0.

   (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - x - 1}{x} = 0$ d'après la partie A.
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
   Donc f n'est pas dérivable en 0 car ne l'étant pas en 0 à droite.
   Interprétation graphique : La courbe représentative de f, $(\mathcal{C}_f)$, admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x = 0$ à gauche et une demi-tangente d'équation $y = 0$ à droite.

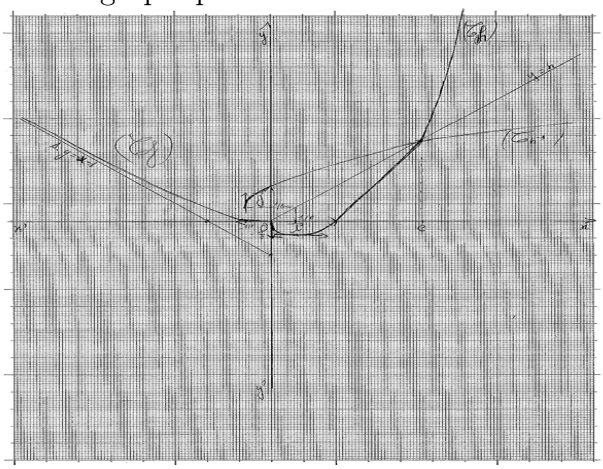
3. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; 0[$,
   $x \mapsto x \ln x$ continue sur $]0; +\infty[$ par produit
   et f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; 0[$,
   $x \mapsto x \ln x$ dérivable sur $]0; +\infty[$ par produit
   donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Pour $x < 0$, $f'(x) = e^x - 1$ or si $x < 0$ alors $e^x < 1$
   d'où $f'(x) < 0$ pour $x < 0$.
   Pour $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$ or $\ln x + 1 \geq 0$ si $x \in [\dfrac{1}{e}; +\infty[$ et $\ln x + 1 \leq 0$ si $x \in]0; \dfrac{1}{e}]$
   d'où $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [\dfrac{1}{e}; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]0; \dfrac{1}{e}]$.

5. Dressons son tableau de variations.



6. $f(x) - (-x-1) = e^x$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
donc $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$ or
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction $(y'0y)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$



9. Soit h la restriction de f à $[\dfrac{1}{e}; +\infty[$.

(a) Dressons le tableau de variations de h.
□Tableaudevariation1E3.jpg
h est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{e};+\infty[$, donc elle est bijective. Elle réalise une bijection de $[\frac{1}{e};+\infty[$ vers $J=[-\frac{1}{e};+\infty[$ d'après le tableau de variations de f.

(b) Pour la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1}, bijection réciproque de h, voir figure.

10. (a) Ce domaine est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ et $h(x) \leq y \leq x$. On a donc :
$\mathcal{A}_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x-h(x))dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x-x\ln x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} k(x)dx$
d'après la PARTIE A.
$\mathcal{A}_1 = [K(x)]_{\frac{1}{e}}^{e} = (K(e)-K(\frac{1}{e}))\times 4cm^2$
$\mathcal{A}_1 = (e^2-\frac{5}{e^2})cm^2$

(b) Ce domaine est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du domaine d'aire $\mathcal{A}_1$ de la question 10)a) d'où $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 = (e^2-\frac{5}{e^2})cm^2$.

Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. **Corrigé de l'épreuve n° 14 G 26 A 01**. Année 2014

Exercice I :

A) 1. Soit z un nombre complexe non nul donné.
- L'écriture algébrique de z est de la forme : $z = a + ib$, avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire,
- L'écriture exponentielle de z est de la forme : $z = re^{i\theta}$, avec r son module et θ un de ses arguments,
- L'écriture trigonométrique de z est de la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec r son module et θ un de ses arguments,

2. Soient $K(z_0), M(z)$ et $M'(z')$ et soit r la rotation de centre $K(z_0)$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ (\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta \ \ [2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} |z' - z_0| = |z - z_0| \\ \arg\frac{z'-z_0}{z-z_0} \equiv \theta \ \ [2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

D'où

$$z' = e^{i\theta}z + z_0(1 - e^{i\theta})$$

B) Soit $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Ecriture trigonométrique de z_0.
On a $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$,
soit θ un argument de z_0 alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne $\theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$

2. Calculons z_0^4.

$$z_0^4 = [2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})]^4 = 16(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}) = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

D'où

$$z_0^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

3. Résolvons l'équation

$$z^4 = 1$$

$z^4 = 1$ implique $|z|^4 = 1$ et $4\arg z = 0[2\pi]$ ce qui donne

$$|z| = 1 \text{ et } \arg z = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions S de l'équation $z^4 = 1$ est

$$S = \{-1; 1; i; -i\}$$

.

4. Déduisons-en les solutions de l'équation (E) :$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.
$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ est équivalent à

$$\frac{z^4}{-8 + i8\sqrt{3}} = 1$$

ce qui est équivalent, d'après B)2), à

$$(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}})^4 = 1$$

Ce qui donne d'après B)3) les solutions suivantes :

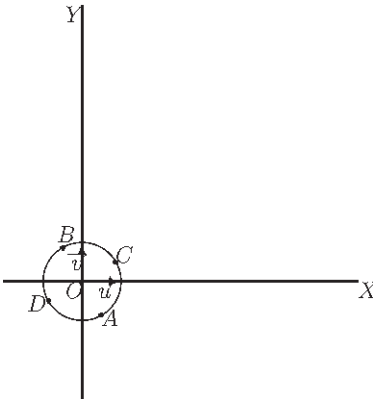
– Sous forme algébrique :

$$z_0 = 1 - i\sqrt{3},\ z_1 = -1 + i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + i,\ z_3 = -\sqrt{3} - i$$

– Sous forme trigonométrique :

$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$, $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$, $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ et

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

5. 

6. Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
D'après A)2) si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par r alors

$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}}$$

7. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = z_0, z_B = z_1, z_C = z_2$ et $z_D = z_3$.
Vérifions que $r(A) = C$.

$$z_A e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_C$$

d'où $r(A) = C$.
Vérifions que $r(C) = B$.

$$z_C e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$$

d'où $r(C) = B$.
Vérifions que $r(B) = D$.

$$z_B e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$$

d'où $r(B) = D$.

8. $r(A) = C$ implique $|z_A| = |z_C|$,
   $r(C) = B$ implique $|z_C| = |z_B|$,
   $r(B) = D$ implique $|z_B| = |z_D|$
   D'où
   $$|z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2$$
   Ce qui est équivalent à
   $$OA = OB = OC = OD = 2.$$
   D'où A, B, C et D sont sur le même cercle (C) de centre O et de rayon 2.

Exercice II :

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher : $R_1, R_2, \mathbf{R_2}, R_{\not 2}, V_1, \mathbf{V_1}, V_2, J_2$. R représente la couleur rouge, V la couleur verte, J la couleur jaune, 1 et 2 les numéros des couleurs.

A) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de cet espace probabilisé.
A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

B) On choisit successivement et sans remise 2 cubes de la boîte.

1. Soient les événements A : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et
   B : "Obtenir au plus un cube portant le numéro 2"

   a) $p(A) = \frac{A_4^1 \times A_4^1 + A_3^1 \times A_5^1 + A_1^1 \times A_7^1}{A_8^2} = \frac{19}{28}$

   b) $p(\overline{B}) = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5}{14}$ d'où $p(B) = \frac{9}{14}$

   c) Calculons $p(A \cap B)$ et comparons-le avec $p(A) \times p(B)$
   $A \cap B$, l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes avec au plus un portant le numéro 2".
   Les différentes possibilités sont :
   $(R_1, V_1), (R_1, \mathbf{V_1}), (V_1, R_1), (\mathbf{V_1}, R_1)$,
   $(R_2, V_1), (V_1, R_2), (R_2, \mathbf{V_1}), (\mathbf{V_1}, R_2)$,
   $(\mathbf{R_2}, V_1), (V_1, \mathbf{R_2}), (\mathbf{R_2}, \mathbf{V_1}), (\mathbf{V_1}, \mathbf{R_2})$,
   $(R_{\not 2}, V_1), (V_1, R_{\not 2}), (R_{\not 2}, \mathbf{V_1}), (\mathbf{V_1}, R_{\not 2})$,

$(R_1, J_2), (J_2, R_1),$
$(V_1, J_2), (J_2, V_1), (V_\mathbf{1}, J_2), (J_2, V_\mathbf{1}),$
$(R_1, V_2), (V_2, R_1),$
Donc $p(A \cap B) = \frac{3}{7}$
Ou encore $p(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times A_2^2 + C_3^1 \times C_2^1 \times A_2^2 + A_2^2 + C_2^1 \times A_2^2 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{3}{7}$
Or $p(A) \times p(B) = \frac{9}{14} \times \frac{19}{28}$ qui est différent de $\frac{3}{7}$.
d'où A et B ne sont pas indépendants.

2. Les valeurs prises par X :
   $X = \{0, 1, 2\}$

   a) La loi de probabilité de X :

$X = a_i$	0	1	2
$p(X = a_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

   b) Espérance mathématique $E(X)$ de X :
   $E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j p(X = x_j),$
   $E(X) = \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{14} = 1$

   c) Variance $V(X)$ de X :
   $V(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 (pX = x_j) - (E(X))^2,$
   $v(X) = \frac{4}{7} + 4 \times \frac{3}{14} - 1 = \frac{3}{7}$

C) Tirage simultané de 3 cubes de la boîte :

a) $p(C) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_5^1}{C_8^5} = \frac{2}{7}$

b) $p_n = p(D_n) = 1 - (\frac{5}{7})^n$

c) $(p_n)_n$ est strictement croissante et $\lim\limits_{+\infty} p_n = 1$

Problème :

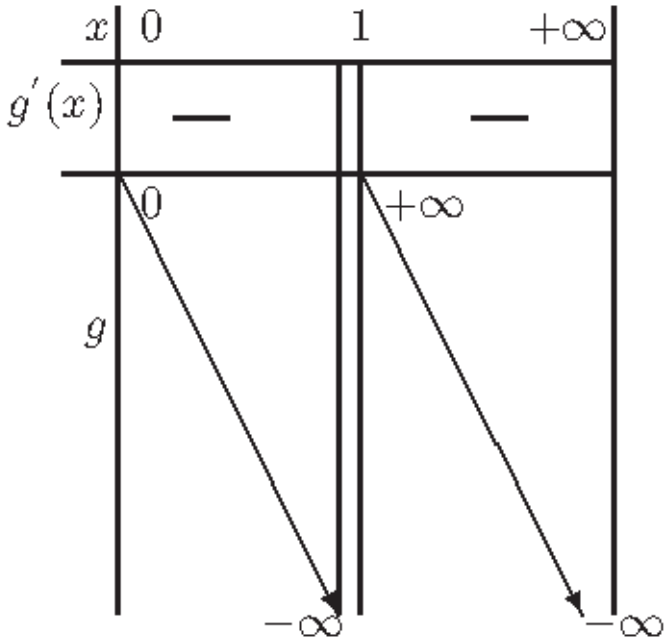
1. **a)** $g(x)$ existe si $x \neq 1$ avec $x > 0$
   $D_g =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$; $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ -\infty}} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} - \ln|x-1| = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-(x-1)\ln(1-x)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-(x-1)\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

2. $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ et $x \mapsto \ln|x-1|$ sont dérivables pour tout $x \neq 1$ d'où g est dérivable sur D_g et
$g'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{x}{(x-1)^2}$
Sur D_g, $g'(x) < 0$.
Tableau de variations de g :



3. Sur $]1;+\infty[$, g est dérivable et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$.
Or $0 \in \mathbb{R}$ il existe donc $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Montrons que $4 < \alpha < 5$.
$g(4) \simeq 0,23$ et $g(5) \simeq -0,14$
$g(4) \times g(5) < 0$ donc $4 < \alpha < 5$.
4. Sur $]1;\alpha[$ $g(x) > 0$ et sur $]\alpha;+\infty[$ $g(x) < 0$

PARTIE B.

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|x-1|}{x}, & si \;\; x > 0 \\ \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}, & \text{si} \;\; x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

1. **a)** $x \mapsto \dfrac{\ln|x-1|}{x}$ est définie si $x \neq 0$ et $x \neq 1$,
d'où elle est définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
$x \mapsto \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$,
d'où elle est définie sur $]-\infty;0]$.
Donc $D_f =]-\infty;0]\cup]0;1[\cup]1;+\infty[= \mathbb{R}\setminus\{1\}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x-1|}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{x} = -\infty$

b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = -1$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$
on a aussi $f(0) = \dfrac{-6e^0}{e^0+3e^0+2} = -1$.
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0)$
Donc f est continue en 0.

b) On admet que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Et on a $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}+1}{x}$
$= \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x(e^{2x}+3e^x+2)} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x}}{e^{2x}+3e^x+2}$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x} = 2e^{2\times 0}-3e^0 = -1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\dfrac{1}{6}$.

$f'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'_g(0) = -\dfrac{1}{6}$, $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

3. **a)** $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\alpha}$ or $g(\alpha) = 0$ nous donne $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} = \ln(\alpha-1)$

d'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

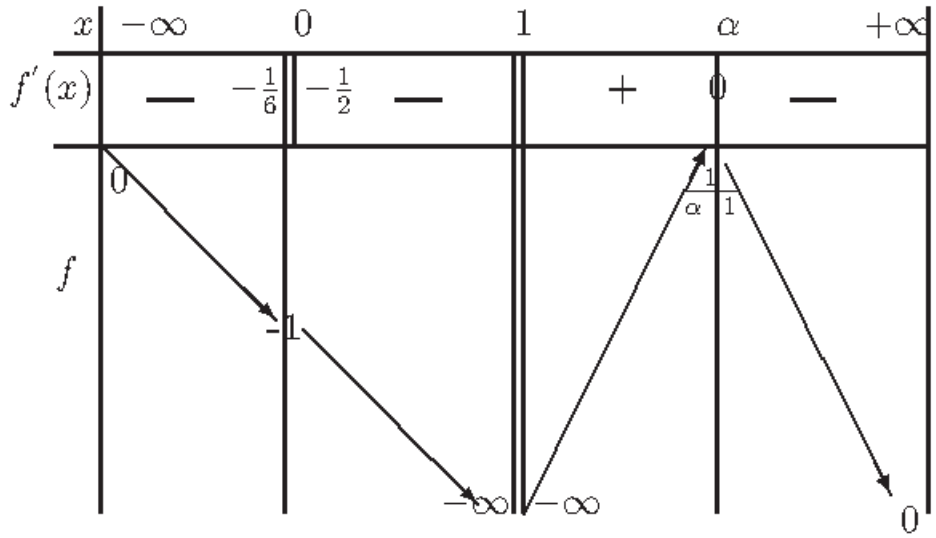
b) Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x-1}x - \ln|x-1|}{x^2} = \dfrac{\dfrac{x}{x-1} - \ln|x-1|}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Sur $]-\infty;0[$, $f'(x) = \dfrac{-6e^x(3e^{2x}+6e^x+2)}{(e^{2x}+3e^x+2)^2}$

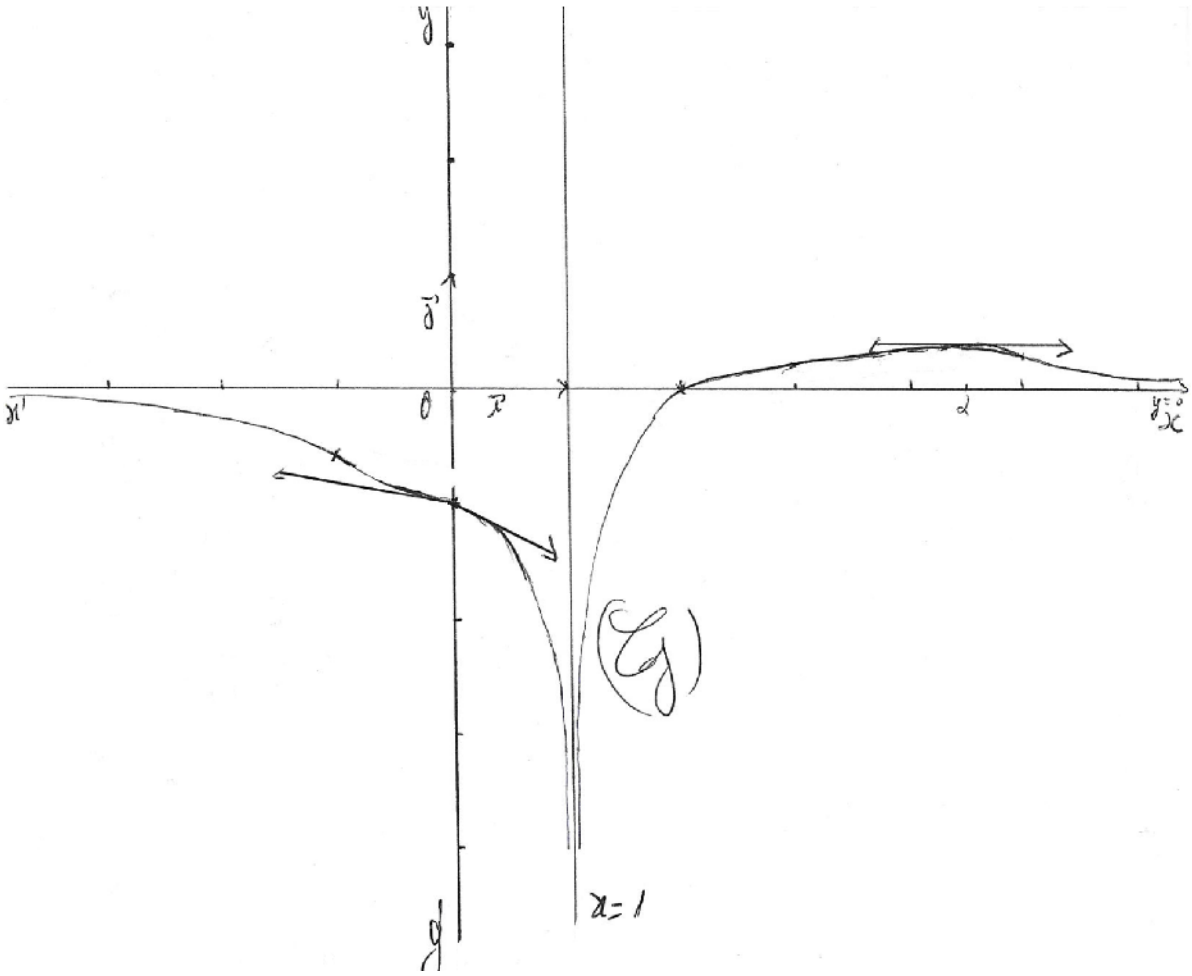
Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, a le même signe que $g(x)$,

Sur $]-\infty;0[$, $f'(x) < 0$.

Dressons le tableau de variations de la fonction f.



4. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.



5. **a)** $\dfrac{-6x}{x^2+3x+2} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x+1}$ nous donne $a = -12$ et $b = 6$, d'où
$\dfrac{-6x}{x^2+3x+2} = \dfrac{-12}{x+2} + \dfrac{6}{x+1}$.

b) D'après a) $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \dfrac{-12}{e^x+2} + \dfrac{6}{e^x+1}$
$= \dfrac{-12}{e^x(1+2e^{-x})} + \dfrac{6}{e^x(1+e^{-x})}$
D'où $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe, les droites d'équations $x = -ln2$ et $x = 0$.

$\mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^{0} -f(x)dx \times u.a = \int_{-\ln 2}^{0} -\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx \times u.a$
$= \int_{-\ln 2}^{0} \dfrac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}} - \dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}} = [-6\ln(1+2e^{-x}) + 6\ln(1+e^{-x})]_{-\ln 2}^{0} \times$
$4cm^2$
d'où $\mathcal{A} = 24\ln\frac{10}{9}cm^2$

Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. **Corrigé de l'épreuve n° 15 G 26 02**. Année 2015

Exercice I (3,5pts)

1. L'évènement contraire de "A sachant B" est $\overline{A}$ sachant B. **(0,5pt)**

2. Soient E et F deux évèments indépendants d'un même univers, on a $\mathrm{p}(E \cup F) = \mathrm{p}(E) \times \mathrm{p}(\overline{F}) + \mathrm{p}(F)$. **(0,5pt)**

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramétres n et p où $n = 4$ et $p \in]0,1[$. Si $\mathrm{p}(X = 1) = 8\mathrm{p}(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$. **(0,75pt)**

4. Interprétations géométriques :

   a) $AM = 1$ **(0,25pt)**

   b) $AM = BM$ **(0,5pt)**

   c) $OM' = AB$ **(0,5pt)**

   d) $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A})\ [2\pi]$. **(0,5pt)**

Exercice II (5pts)

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i,\ z \in \mathbb{C}$.

   a)

   $$p(2+i) = (2+i)^3 + 3(2+i)^2 - 3(2+i) - 5 - 20i = 5 - 5 + 24i - 24i = 0.$$

   D'où $2 + i$ est une racine de $p(z)$. **(0,25pt)**

b) $p(2+i) = 0$ donc $p(z) = (z-2-i)q(z)$ avec $q(z) = z^2+(5+i)z+6+7i$.
$p(z) = 0$ si et seulement si $z-2-i = 0$ ou $z^2+(5+i)z+6+7i = 0$.
On pose $z^2 + (5 + i)z + 6 + 7i = 0$.

$$\Delta = 18i.$$

Les racines de Δ sont $3(1 - i)$ et $-3(1 - i)$. D'où on a :

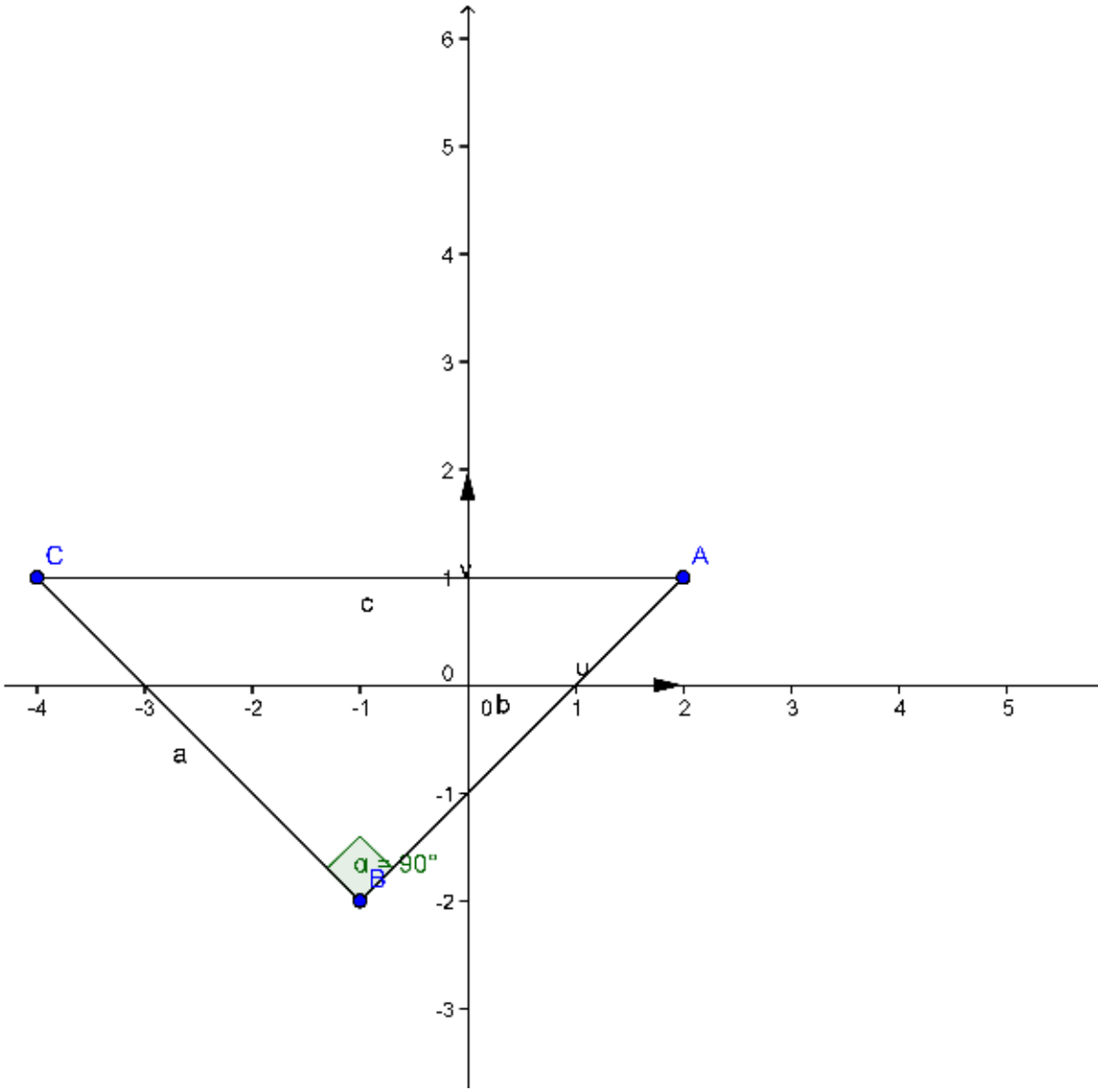
$$z_1 = -4 + i \text{ et } z_2 = -1 - 2i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $p(z) = 0$ est :

$$S = \{2 + i, -4 + i, -1 - 2i\} \textbf{ (1pt)}$$

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient $A(2 + i), B(-1 - 2i)$ et $C(-4 + i)$.

a) Plaçons les points A, B et C. **(0,25pt)**



$AB = 3\sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{2}$. **(0,25+ 0,25pt)**

b) On a

$$\arg(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}) = \arg(\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}) = \arg(z_{\overrightarrow{BC}}) - \arg(z_{\overrightarrow{BA}})$$
$$= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BA}) \ [2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [2\pi]\ \textbf{(0,25pt)}$$

c)

$$\arg(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}) = \arg(\frac{-1+i}{1+i}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\ \textbf{(0,25pt)}$$

d) D'après a) et c) ABC est un triangle rectangle isocéle en B. **(0,25pt)**

3. **a)** $r : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = az + b$.

$$\begin{cases} r(B) = B \\ r(A) = C \end{cases} \tag{1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} az_B + b = z_B \\ az_A + b = z_C. \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{D'où } a = \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = i \text{ et}$$

$$b = z_B(1-a) = (-1-2i)(1-i) = -3-i.$$

Donc l'application f associée à r est définie par

$$f(z) = iz - 3 - i.\ \textbf{(0,5pt)}$$

b) Les éléments caractéristiques de r sont :

- Le centre B d'affixe $-1-2i$.
- L'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. **(0,25pt)**

4. $T : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Si T est une homothétie de rapport 2 alors $i\alpha^2 = 2$.

$$i\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = -2i \Leftrightarrow \alpha = (1-i)^2.$$

$$\text{D'où } \alpha = 1-i \text{ ou } \alpha = -1+i.\ \textbf{(0,5pt)}$$

b) Si $|\alpha| = 2$ et $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$ alors $\alpha = 1-i$. D'où

$$z' = 2z + 1 - i.$$

Donc T est une homothétie de centre Ω d'affixe $-1+i$ et de rapport $k = 2$. **(0,25pt)**

5. $g = roT$ avec $\alpha = 1 - i$.

a) Soit t l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à T. On a

$$h(z) = fot(z) = f(2z + 1 - i) = i(2z + 1 - i) - 3 - i, \text{ d'où}$$
$$h(z) = 2iz - 2. \textbf{ (0,25pt)}$$

b) g est une similitude directe de :
- centre Ω_0 d'affixe $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$,
- rapport $k = 2$,
- angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$g = S(\Omega_0(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i), 2, \frac{\pi}{2}). \textbf{ (0,5pt)}$$

Exercice III (2,5pts)

1. Le coefficient de corrélation linéaire r est défini par $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.
   D'où $r \approx 0,69$. **(01pt)**
2. **a)** La droite de regression de Y en X, $(D_{Y/X})$, a pour équation

$$y = 92,59x - 4,35. \quad \textbf{(01pt)}$$

b) Il faut investir $3,29$ milliards de FCFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards. **(0,5pt)**

Exercice IV (9pts)

A) 1. Soit $I(\alpha) = \int_0^\alpha e^t(t+2)dt$
En intégrant par parties $\int_0^\alpha e^t(t+2)dt$, on obtient :

$$I(\alpha) = e^\alpha(\alpha + 1) - 1. \quad \textbf{(0,5pt)}$$

D'où $I(x) = e^x(x+1) - 1$. **(0,25pt)**

2. k étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, soit h telle que $h(x) = k(x)e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) Si h vérifie la condition $h'(x) + h(x) = x + 2$ alors on a :
$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x + 2$, d'où

$$k'(x) = (x + 2)e^{x}. \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

b) Déduisons-en h. Puisque $k'(x) = (x + 2)e^{x}$.
D'après 1) I est une primitive de k', donc
$k(x) = e^{x}(x + 1) - 1 + c$, avec c une constante.
Or $h(0) = 2$ nous donne $k(0) = 2$ donc $c = 2$. Ainsi

$$k(x) = e^{x}(x + 1) + 1. \qquad \textbf{(0,25pt)}$$

D'où

$$h(x) = x + 1 + e^{-x}. \qquad \textbf{(0,25pt)}$$

B) I) 1. Etude les variations de la fonction g, définie par
$g(x) = x + 1 + e^{-x}$, sur $\mathbb{R}$.
Domaine de définition de g :
g étant définie partout dans $\mathbb{R}$, d'où $D_g = \mathbb{R}$.
Continuité et dérivabilité :

- La fonction $x \mapsto x + 1$ est une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

- La fonction $x \mapsto -x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de même que la fonction $x \mapsto e^{x}$. Par composée, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,

- Par somme g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

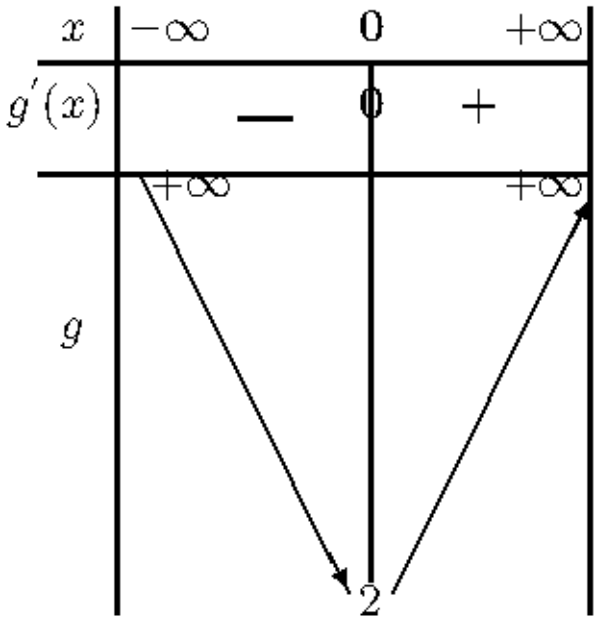
Calcul de $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{e^{x} - 1}{e^{x}}$$

D'où $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $g'(x) < 0$ pour tout $x < 0$.
Tableau de variations de g :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x(1 + \tfrac{1}{x} - \tfrac{e^{-x}}{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + e^{-x} = +\infty.$$



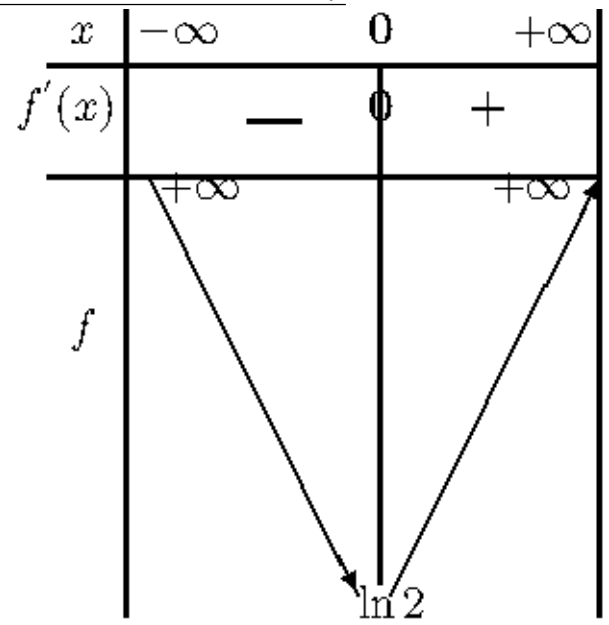
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 2$ d'après le tableau de variations de g, ce qui implique g est strictement positif.

II) $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.

1. Les variations de la fonction f :

   - $D_f = \mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$
   - f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée.
   - Dérivée :
     $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}}$
   - Sens de variations de f :
     $f'(x)$ a le même signe que $1 - e^{-x}$.
     $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 0$,
     $f'(x) < 0$ si $x < 0$.

– Tableau de variations de f :



2. $M\binom{x}{\ln x}$, $N\binom{x}{\ln(x+1+e^{-x})}$.

a) $\overline{MN} = \ln(x+1+e^{-x}) - \ln x$.
D'une part, la fonction ln étant croissante et
$x+1+e^{-x} > x$, d'où $\ln(x+1+e^{-x}) > \ln(x)$, donc

$$\overline{MN} > 0 \quad (1).$$

D'autre part, $\overline{MN} = \ln(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x})$.
Or si $x > 0$ alors $e^{-x} < 1$, d'où $x+1+e^{-x} < x+2$, ainsi
$\ln(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x}) < \ln(\dfrac{x+2}{x})$, donc

$$\overline{MN} < \ln(\frac{x+2}{x}) \quad (2).$$

(1) et (2) donnent :

$$0 < \overline{MN} < \ln(\frac{x+2}{x}).$$

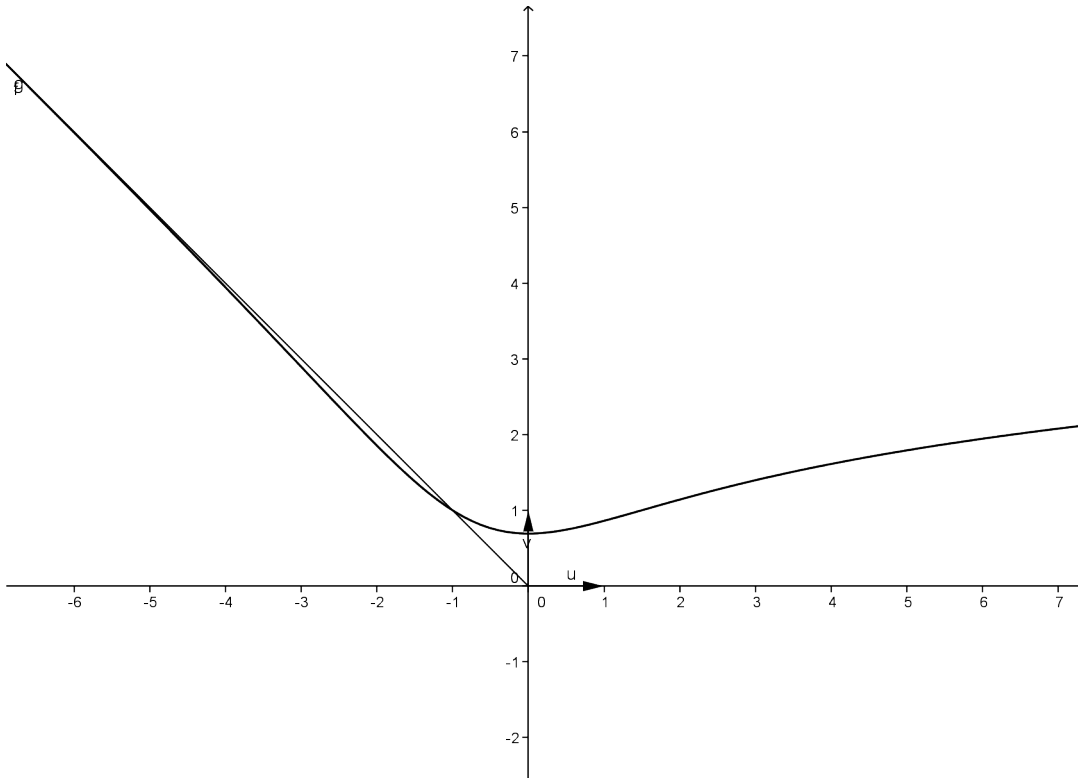
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{x+2}{x}) = 0$,
donc $0 < \lim\limits_{x\to+\infty} \overline{MN} < 0$, d'où d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to+\infty} \overline{MN} = 0.$$

3. **a)** Démontrons que $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
On sait que $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x}) = \ln(\dfrac{(x+1)e^x + 1}{e^x})$.
Cherchons le signe de $m(x) = (x+1)e^x + 1$.
On a $m'(x) = (x+2)e^x$, et elle s'annule en -2.
m étant décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$ alors m admet un un minimum en -2 et $m(-2) = \dfrac{e^2-1}{e^2}$.
Donc pour tout x, $m(x) > 0$. Ainsi donc

$$f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1).$$

b) D'après a) $f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1)$. Or
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) + x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln((x+1)e^x + 1) = 0$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ), d'équation $y = -x$ au voisinage de $-\infty$.
Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) :
Cherchons le signe de $\ln((x+1)e^x + 1)$.
$\ln((x+1)e^x + 1) \geq 0$ si $(x+1) \geq 0$.
Alors $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (Δ) au voisinage de $-\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.
Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie de direction l'axe (Ox).


g
7
6
5
4
3
2
1
v
0
u
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2

MATHEMATIQUES

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. a. Soit α une solution réelle de (E) alors α vérifie $\alpha^3 - 13\alpha^2 + 59\alpha - 87 = 0$.
Une solution évidente est 3.

D'où $\boxed{\alpha = 3.}$

1. b. $(z - 3)(z^2 - 10z + 29) = 0$.
D'où $z = 3$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$.
Après calculs $z = 3$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i$.
L'ensemble des solutions est : $S = \{3 ; 5 - 2i ; 5 + 2i\}$.

2. a. $\dfrac{b-a}{c-a} = -i$.

$$\begin{cases} \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

ABC est rectangle et isocèle en A et direct.

2. b. $\boxed{\text{Arg } Z \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi].}$

Z réel non nul sssi arg $Z \equiv 0\ (\pi)$.
$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0\ (\pi)$.
M décrit la droite (AB) privée de A et de B.

3. a. Soit M'(Z') l'image de M(Z) par la rotation r de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Donc $Z' - Z_i = e^{-\frac{\pi}{2}}(Z - Z_i)$.

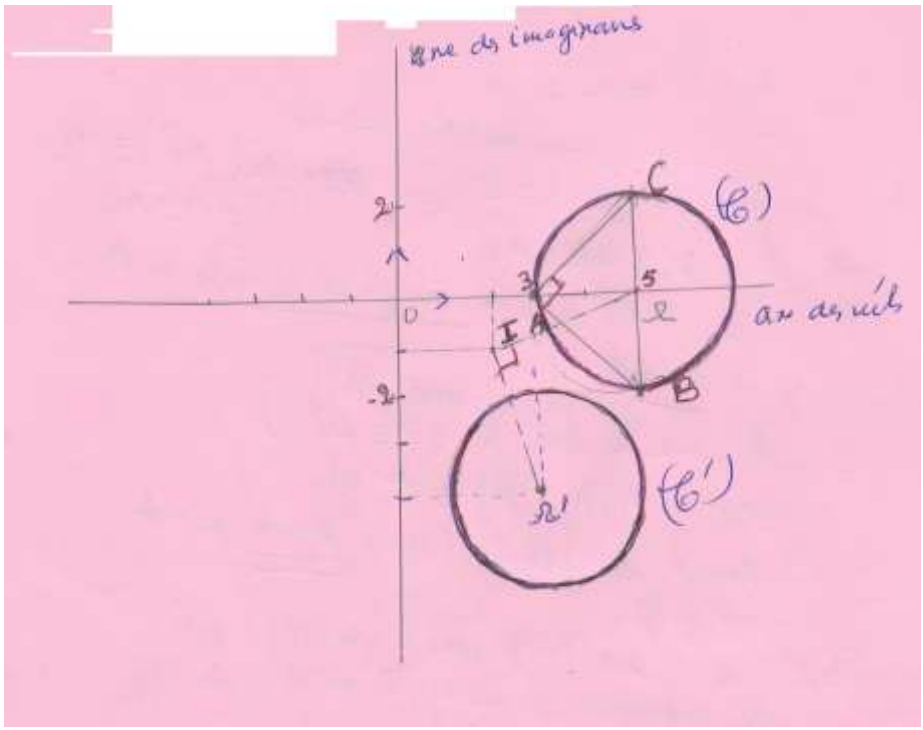
On obtient $\boxed{Z' = -iZ + 3 + i.}$

3. b. Soit Ω centre du cercle circonscrit à ABC.
Ω est le milieu de [BC].
On a $Z_\Omega = \frac{Z_B + Z_C}{2}$ ce qui donne $\boxed{Z_\Omega = 5.}$

Soit $r(\Omega) = \Omega'$, $Z_{\Omega'} = -iZ_\Omega + 3 + i$. D'où $\boxed{Z_{\Omega'} = 3 - 4i.}$
Donc (C') est le cercle de centre Ω' et de même rayon que (C).

…/… 2

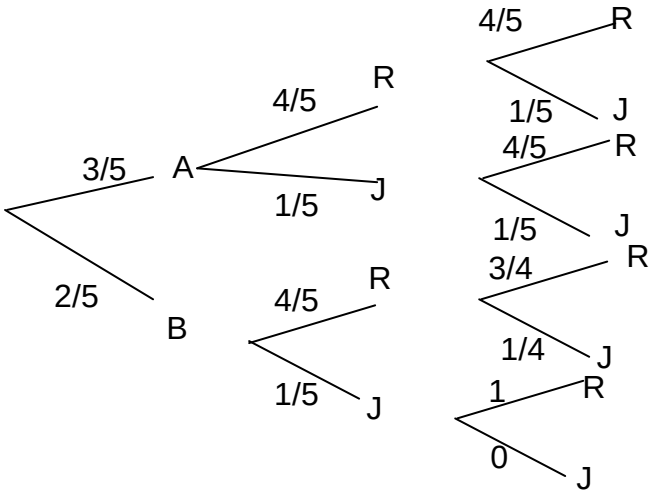
Figure :



EXERCICE 2

1. $p(A)=\frac{C_4^2}{C_5^2}$ $\boxed{p(A)=\frac{3}{5}.}$

$p(B)=\frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_5^2}$ $\boxed{p(B)=\frac{2}{5}.}$



$p(C)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}.$ $\boxed{p(C)=\frac{17}{25}.}$

$p(D)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}.$ $\boxed{p(D)=\frac{3}{5}.}$

$p(E)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times 1.$ $\boxed{p(E)=\frac{2}{5}.}$

$p(F)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times 1.$ $\boxed{p(F)=\frac{4}{25}.}$

.../... 3

2. a. $X(\Omega) = \{(R,R),(R,J),(J,R),(J,J)\}$.
Les différentes valeurs prises par X sont 0 ; 1000 et 2000.

a	0	1000	2000
P(X= a)	$\frac{3}{125}$	$\frac{44}{125}$	$\frac{78}{125}$

b. **Fonction de répartition**

- si $x < 0$, $F(x) = 0$.
- si $0 \leq x < 1000$, $F(x) = \frac{3}{125}$.
- si $1000 \leq x < 2000$, on a $F(x) = \frac{3}{125} + \frac{44}{125}$.

D'où si $1000 \leq x < 2000$, $\boxed{F(x) = \frac{47}{125}.}$

- si $x \geq 2000$ $F(x) = \frac{3}{5} + \frac{44}{125} + \frac{78}{125} = 1$.

3. $\boxed{p(G) = \left(\frac{78}{125}\right)^{50}}$ $\boxed{p(H) = \left(\frac{3}{125}\right)^{50}}$ $\boxed{p(I) = \left(\frac{44}{125}\right)^{50} + C_{50}^{25}\left(\frac{3}{125}\right)^{25}\left(\frac{78}{125}\right)^{25}.}$

PROBLEME

PARTIE A

1. a. $g(x)$ existe si et seulement si:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases}$ ce que donne $x \rangle -1$.

$\boxed{D_g =]-1, +\infty[.}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{-2(x+1)\ln(x+1)+x}{(x+1)}$,

$\boxed{\lim\limits_{x \mapsto -1^+} g(x) = -\infty}$ par quotient.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = -\infty$ car $\begin{cases} -2\ln(x+1) \to -\infty \text{ par composée puis produit} \\ \dfrac{x}{x+1} \to 1 \end{cases}$,

1. b. $g'(x) = \dfrac{-2}{x+1} + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)'$ $\boxed{g'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}.}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'(x)	|| +	ϕ	-

Tableau de Variation

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'(x)	|| +	0	-
g	$-\infty$	2ln2-1	$-\infty$

2. a. $g(0) = 0$.

La restriction de g à $]-1\ ;\ -\frac{1}{2}[$ est strictement croissante et continue et prend ses valeurs dans]-∞, 2ln 2-1[qui contient 0 donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]-1\ ;\ -\frac{1}{2}[$ une solution unique α.

Idem sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet un solution unique 0 .

$]-0{,}72\ ;\ -0{,}71[\subset]-1\ ;\ -\frac{1}{2}[$ et $g(-0{,}72) \times g(-0{,}71) < 0$ donc $\alpha \in]-0{,}72\ ;\ -0{,}71[$.

2. b. 0 étant l'autre zéro de g :

x	-1		α		0		+∞
g(x)	‖	-	0	+	0	-	

PARTIE B

1. a. **Domaine de définition de f.**

f(x) existe si et seulement si :

- $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1) \neq 0, \end{cases}$
- ou $x \in]-\infty, -1]$,
- ou $x = 0$.

d'où $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ou $x \in]-\infty, -1]$ ou $x = 0$

.

$D_f = (]-1, +\infty[\setminus \{0\}) \cup]-\infty, -1] \cup \{0\}$.

$\boxed{D_f = IR.}$

Limites aux bornes du domaine de définition de f.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2}{x+1} \times \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$.

1.b. Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) e^{-x-1} = +\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$

Donc $(\boldsymbol{C}_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+1} \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty.}$

Donc $(\boldsymbol{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

2. a. $f(-1) = 0$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = 0$ par quotient et $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = f(-1) = 0$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = f(-1) = 0.}$

Donc f est continue en -1.

…/… 5

On a $f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} x \times \frac{x}{\ln(x+1)} = 0$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = f(0).}$

Donc f est continue en 0.

2. b. Dérivabilité de f en -1.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1} \frac{(x+1)}{(x+1)} e^{-x-1} = 1.$

f dérivable en -1 à gauche et $\boxed{f'_g(-1) = 1.}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{x^2}{(x+1)\ln(x+1)} = -\infty.$

Donc f non dérivable en -1 car non dérivable en -1 à droite.

Interprétation au point d'abscisse -1.
Au point d'abscisse -1, $(\boldsymbol{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale et une demi- tangente de pente 1 à gauche.

Dérivabilité de f en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1.$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
Interprétation au point d'abscisse 0.
$(\boldsymbol{C}_f)$ admet à l'origine une tangente de coefficient directeur 1.

3. a. Pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on a:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{2x\ln(x+1) - \frac{x^2}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{-x(-2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1})}{(\ln(x+1))^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x\, g(x)}{(\ln(x+1))^2}.}$$

Pour $x < -1$, $f'(x) = -xe^{-x-1}$.

3. b.

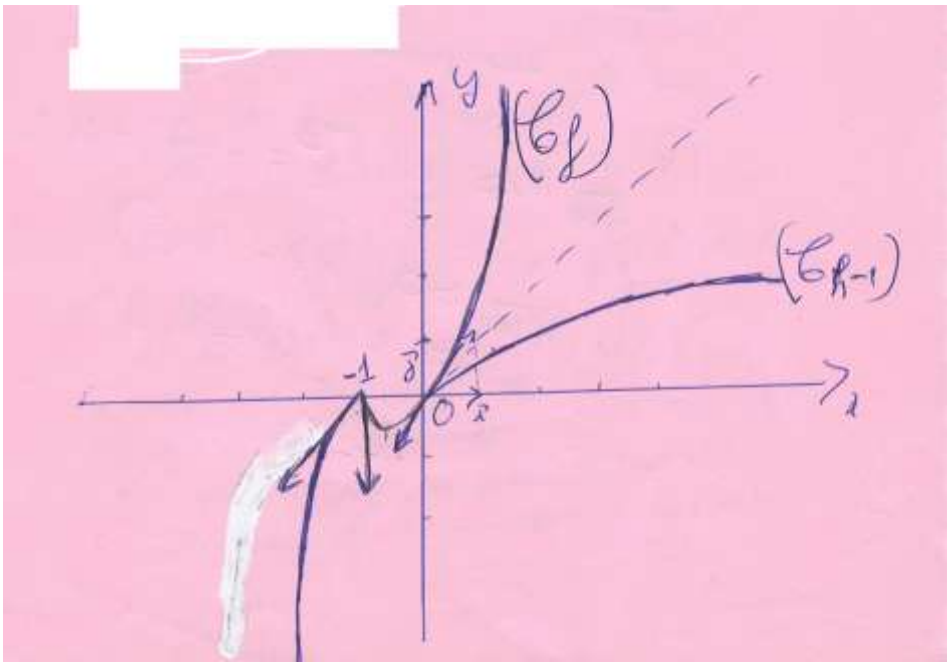
x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-\infty$	$-$	0	$+$		
f	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

4. a. h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[= J$.

4. b. h^{-1} a le même sens de variation que h, elle est strictement croissante sur J.

…/… 6

4. c. Figure :



PARTIE C

1. a. Posons $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x+1}$

Avec $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \ln(x+1)$.

Sur $]0,+\infty[$ on a $m(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$. (R)

1. b. On a $m(x) = (u(x)v(x))'$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $H'(x) = m(x)$ avec $m(x) = (u(x)v(x))'$.

D'où on a: $H(x) = u(x)v(x) + c = -\frac{\ln(x+1)}{x} + c$.

On a sur $]0,+\infty[$, $\frac{1}{f(x)} = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

Or d'après (R): $\frac{\ln(x+1)}{x^2} = m(x) + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1} = m(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Soit G une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)}dx = \left[G(x)\right]_1^2 = \left[H(x)+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}+c+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 = -\frac{3\ln 3}{2} + 3\ln 2.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)}dx = 3\left(\ln 2 - \ln\sqrt{3}\right) = 3\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

CORRIGE

EXERCICE 1

1) a) $si\ x < -1$ alors $F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0.$

$si\ x \geq 3$ alors $F(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1.$

b) Soit U l'ensemble des valeurs possibles de X

$U = \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$

si $-1 \leq x < 0$; $F(x) = p(X = -1) = \frac{1}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{p(X = -1) = \frac{1}{9}}$.

si $0 \leq x < 1$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) = \frac{3}{9}$.

$\Longrightarrow \frac{1}{9} + p(X = 0) = \frac{3}{9} \Longrightarrow p(X = 0) = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{p(X = 0) = \frac{2}{9}}$

si $1 \leq x < 2$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{6}{9}$

$\Longrightarrow \frac{3}{9} + p(X = 1) = \frac{6}{9} \Longrightarrow p(X = 1) = \frac{6}{9} - \frac{3}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{p(X = 1) = \frac{3}{9}}$

si $2 \leq x < 3$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{8}{9}$

$\Longrightarrow \frac{6}{9} + P(x = 2) = \frac{8}{9} \Longrightarrow P(x = 2) = \frac{8}{9} - \frac{6}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{P(x = 2) = \frac{2}{9}}$.

si $x \geq 3$, $F(x) = p(X - 1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$

$\Longrightarrow \frac{8}{9} + p(X = 3 = 1 \Longrightarrow p(X = 3) = 1 - \frac{8}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{p(X = 3) = \frac{1}{9}}$.

x	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

c) $p(X \leq 0) = p(X = -1) + p(X = 0) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

$p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$.

d) $E(X) = -1\,p(X = -1) + 0\,p(X = 0) + 1\,p(X = 1) + 2\,p(X = 2) + 3\,p(X = 3)$

$E(X) = -(1 \times \frac{1}{9}) + (0 \times \frac{2}{9}) + (1 \times \frac{3}{9}) + (2 \times \frac{2}{9}) + (3 \times \frac{1}{9}) = -\frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9}$

$\boldsymbol{E(X) = 1}$.

e) $\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$; $v(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$v(X) = [(-1)^2\,p(X = -1) + 0^2\,p(X = 0) + 1^2\,p(X = 1) + 2^2 p(X = 2) + 3^2 p(X = 3)] - 1$

$= [(1 \times \frac{1}{9}) + (0 \times \frac{2}{9}) + (1 \times \frac{3}{9}) + (4 \times \frac{2}{9}) + (9 \times \frac{1}{9})] - 1 = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{9} - 1.$

$v(X) = \frac{21}{9} - 1.$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) a)

U_1 \ U_2	-2	-1	0
1	-1	0	1
2	0	1	2
3	1	2	3

b) Soit V l'ensemble des valeurs possibles de Y.

$V = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$p(Y = -1) = \frac{1}{9}$; $p(Y = 0) = \frac{2}{9}$; $p(Y = 1) = \frac{3}{9}$; $p(Y = 2) = \frac{2}{9}$; $p(Y = 3) = \frac{1}{9}$.

x	-1	0	1	2	3
$P(Y=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y et X ont la même loi de probabilité.

EXERCICE 2

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2=\frac{2}{4}+i-\frac{2}{4}=i\cdot$

$z^2-i=0\Leftrightarrow z^2=i\Leftrightarrow z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2$

$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ ou $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right\}$

2) a) α est une solution de l'équation $p(z)=0\Leftrightarrow p(\alpha)=0$.

$\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-i\alpha-i=0\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2+i(-\alpha-1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha^3+\alpha^2+0$ ①

$-\alpha-1=0$ ②

②$\Leftrightarrow \alpha=-1\,;(-1)^3+(-1)^2=-1+1=0.$

donc $\alpha=-1$.

b) Comme -1 est une racine de p, donc il existe un polynôme g tel que $p(z)=(z+1)g(z)$.

	1	1	$-i$	$-i$
-1		-1	0	i
	1	0	$-i$	0

$g(z)=z^2-i$.

Les solutions de l'équation $p(z)=0$ sont : -1 et les racines de g.

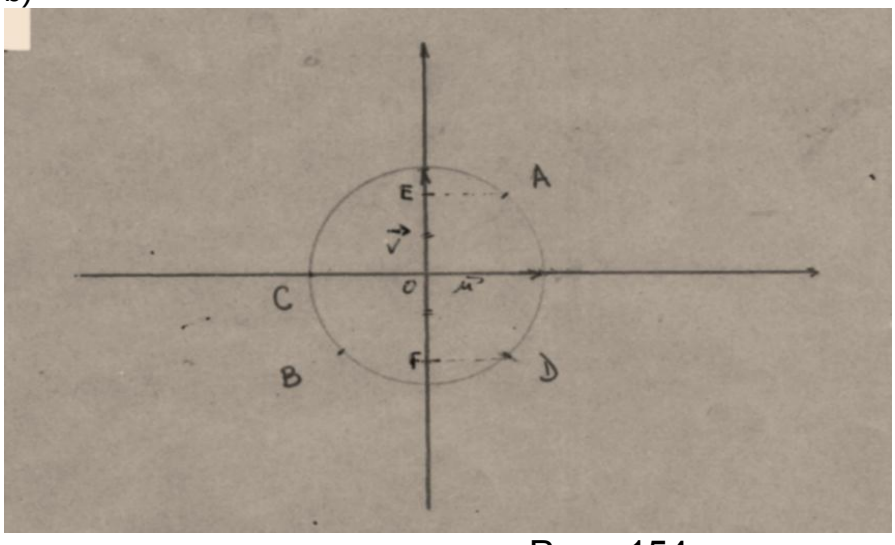
$g(z)=0\Leftrightarrow z^2-i=0\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ ou $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$S=\left\{-1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

3) a) $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=e^{i\frac{\pi}{4}}.$

$z_B=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=e^{i\frac{5\pi}{4}}.$

b)



4) a) $z_D = \bar{z}_A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

b) $z_D - z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \frac{\sqrt{2}+2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

$z_A - z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

$$\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i}{\frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i} = \frac{\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\left[(\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2}\right]^2}{(\sqrt{2}+2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{2}+2)^2 - 2(\sqrt{2}+2)\, i\sqrt{2} - 2}{2+4\sqrt{2}+4+2}$$

$$= \frac{2+4\sqrt{2}+4-4\, i - 4\, i\sqrt{2}-2}{8+4\sqrt{2}} = \frac{4+4\sqrt{2} - (4+4\sqrt{2})\, i}{8+4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\right| \Longrightarrow \frac{|z_D - z_C|}{|z_A - z_C|} = 1 \Longrightarrow \frac{CD}{CA} = 1 \Longrightarrow CD = CA$$

$\Rightarrow ACD$ est isocèle de sommet principal C.

5) a) Soit P le plan

$$S : P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z')$$
$$z' = az + b$$

$$S(E) = A \Leftrightarrow z_A = a\, z_E + b \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = a \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + b$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i + 2\, b$$
$$S(F) = B \Leftrightarrow z_B = a\, z_F + b$$

F est le symétrique de E par rapport $O \Leftrightarrow \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF} \Leftrightarrow Z_O - Z_E = Z_F - Z_O$

$\Leftrightarrow -Z_E = Z_F \Leftrightarrow Z_F = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, i.$

$Z_B = a\, Z_F + b \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -a \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + b$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\,(1+i) = -a\sqrt{2}\, i + 2b$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i + 2b & ① \\ -\sqrt{2}\,(1+i) = -a\sqrt{2}\, i + 2\, b & ② \end{cases}$$

$$0 = 4b$$
$$b = 0$$

① $\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i \Leftrightarrow 1 + i = a\, i \Leftrightarrow a = \frac{1+i}{i}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{i} + 1 \Leftrightarrow a = 1 - i$

$a = 1 - i$ et $b = 0$.

D'où $z' = (1 - i)z$.

1 – i ≠1, donc S est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-a} = 0 = Z_0 \implies \Omega = O$.
$k = |a| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$\theta = \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\ ;\ \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

S est la similitude de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b) ($\mathscr{C}$') est le cercle de centre $S(E)$ et de rayon $1 \times \sqrt{2}$.
$S(E) = A$; $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
(C') est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

PROBLEME

PARTIE A

1) L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 4r + 4 = 0$.
$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Leftrightarrow r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2$.
$h(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2) a) $\varphi(x) = ax + b$; $\varphi'(x) = a$; $\varphi''(x) = 0$.
φ est solution de $(F) \Leftrightarrow \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x) = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 4a + 4ax + 4b = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ 4a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$a = -1$ et $b = 1$.

b) f est solution de $(F) \Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f''(x) - \varphi''(x) + 4f'(x) - 4\varphi'(x) + 4f(x) - 4\varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
$(f-\varphi)''(x) + 4(f-\varphi)'(x) + 4(f-\varphi)(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow f - \varphi$ est solution de (E).

c) f est solution de $(F) \Leftrightarrow f - \varphi$ est solution de (E).

$\Leftrightarrow (f-\varphi)(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) - \varphi(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} + \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (F) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

d) $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1$

f(0) = 2 $\Leftrightarrow (\lambda(0) + \mu)\, e^{-2(0)} - 0 + 1 = 2 \Leftrightarrow \mu + 1 = 2 \Leftrightarrow \mu = 1$
$f'(x) = \lambda e^{-2x} - 2(\lambda x + \mu)e^{-2x} - 1$
$f'(0) = -2 \Leftrightarrow \lambda - 2\mu - 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda - 2(1) - 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda - 3 = -2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
$\lambda = 1$ et $\mu = 1$; d'où $f(x) = (x+1)e^{-2x} - x + 1$.

PARTIE B

1) a) Soit x ∈ [0, +∞[.
f'(x) = $e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} - 1 = -e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} - 1$
f''(x)= $2\, e^{-2x} - 2[e^{-2x} - 2x\, e^{-2x}] = 2\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} + 4x\, e^{-2x} = 4x\, e^{-2x}$.

b) $\forall x \in [0, +\infty[$, $f''(x) = 4x\, e^{-2x}$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de x, donc $f''(x) \geq 0$.

$f'(0) = -2$;

$f'(x) = -e^{-2x} - \frac{2x}{e2x} - 1$; $\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$

x	0		+∞
f''(x)	0	+	
f'	-2	↗	-1

c) $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \in [-2, -1[\Rightarrow f'(x) < 0$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x\to-1^-} \frac{x+1}{x} = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to-1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

$\forall x < -1$, $f'(x) = \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{(x-x-1)x}{x^2(x+1)} = \frac{x-x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)}$.

$\forall x < -1$, $x(x+1) > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

x	-∞		-1
f'(x)		-	
f	0	↘	-∞

3) $f(0) = 2$; $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x\left(e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = 0$; $\lim_{x\leftarrow+\infty} \frac{1}{x} = 0$

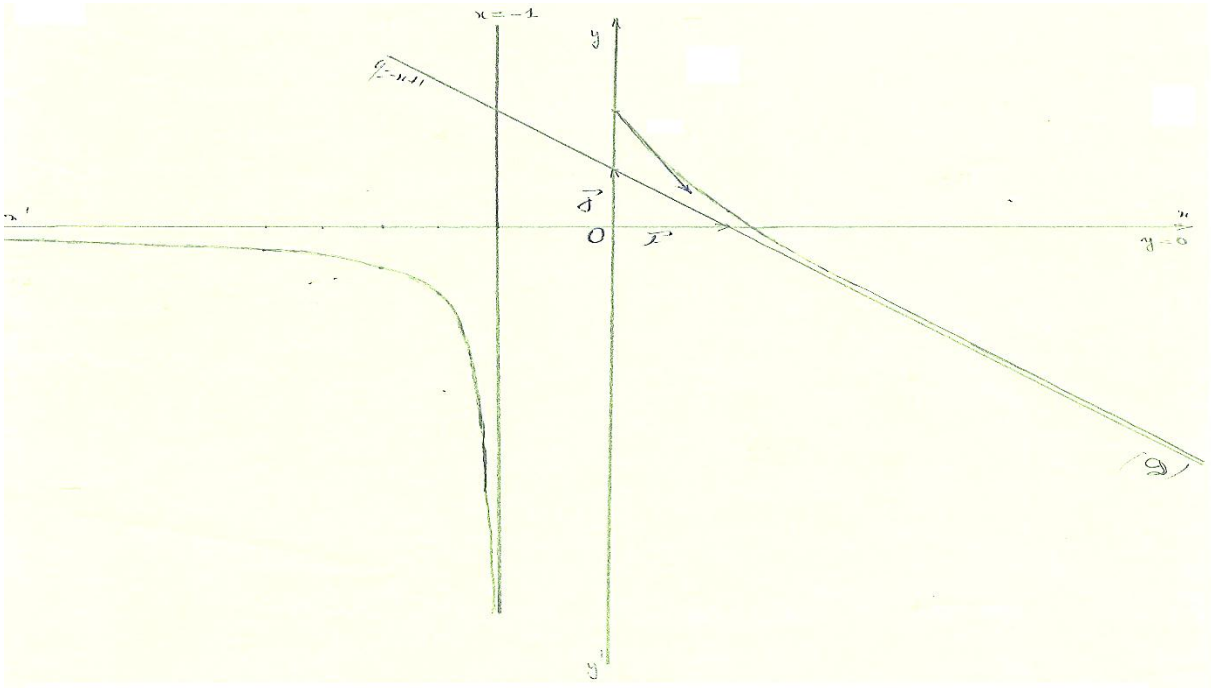
$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} - 1 + \frac{1}{x} = -1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	-2	$-$	
f	0	↘	‖	↘	2	↘	
		$-\infty$	‖	$+\infty$		$-\infty$	

4) $f(\,]-\infty,-1[\,) =]-\infty,0[$, donc $\forall x \in]-\infty,-1[, f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.
f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, donc f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f(\,[0,+\infty[\,) =]-\infty,2]$. Or $0 \in]-\infty,2]$, donc il existe un unique $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
En conséquence l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
$f(1) = e^{-2} + e^{-2} - 1 + 1 = 2\,e^{-2}$; $f(2) = 2\,e^{-4} + e^{-4} - 2 + 1 = 3\,e^{-4} - 1$.
$f(1) > 0, f(2) < 0$; $f(1)\,f(2) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2 \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq 2$.

5) $\forall x \geq 0, f(x) = x\,e^{-2x} + e^{-2x} - x + 1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-2x} + e^{-2x} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}_f$) en $+\infty$.
f(x) – (–x +1) = x e^{-2x} + e^{-2x} = e^{-2x} (x + 1)
$\forall$ x ≥ 0, e^{-2x} > 0 et x + 1 > 0, donc
$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) - (x + 1) > 0 \Rightarrow$ ($\mathscr{C}_f$) est au-dessus de (D).

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à ($\mathscr{C}_f$) en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à ($\mathscr{C}_f$).



$f'(0) = -2$; $f(1) = e^{-2} + e^{-2} = 2\,e^{-2} \simeq 0{,}27$; $f(-2) = -ln\,2 \simeq -0{,}69$
$f(-1{,}5) = -ln\,3 \simeq -1{,}1$; $f(-3) = \ln\frac{2}{3} \simeq -0{,}41$.

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

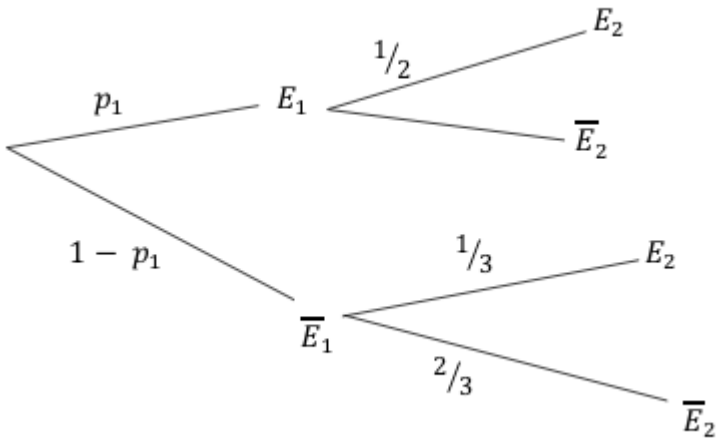
n° 1-19 G 26 A - 20
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5
Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S
C O R R I G É

Exercice 1 (04, 5 points).

1. $p_1 = \dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{3}$. **0, 5 pt**

2. On donne l'arbre de choix pour déterminer les probabilités conditionnelles.



a. $p(E_2/E_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(E_2/\overline{E}_1) = \dfrac{1}{3}$. **(0, 25 + 0, 25)pt**

b. $p(E_2) = p(E_2/E_1) \times p(E_1) + p(E_2/\overline{E}_1) \times p(\overline{E}_1) = \dfrac{4}{9}$. **0, 5 pt**

3.

$$E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n),$$

d'après l'axiome des probabilités totales. D'où

$$p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$$

car $E_{n+1} \cap E_n$ et $E_{n+1} \cap \overline{E}_n$ sont des événements incompatibles.
Donc

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}/E_n) \times p_n + p(E_{N+1}/\overline{E}_n) \times p(\overline{E}_n).$$

Ce qui donne

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3} \times (1 - p_n).$$

D'où $p_{n+1} = \dfrac{1}{6}\, p_n + \dfrac{1}{3}$. **0, 75 pt**

4. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}\, p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}\, p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right).$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n.$$

0, 5 pt

D'où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $u_1 = \frac{4}{15}$. **(0, 25 + 0, 25 pt)**

b. $u_n = u_1(\frac{1}{6})^{n-1}$, d'où $u_n = \frac{4}{15}(\frac{1}{6})^{n-1}$ et $p_n = \frac{4}{15}(\frac{1}{6})^{n-1} + \frac{2}{5}$ pour $n \geq 1$. **(0, 5 + 0, 5) pt**

c. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{5}$ car $q = \frac{1}{6} < 1$. **0, 25 pt**

Exercice 2 (05, 5 points).

Partie A

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1. Déterminons le polynôme Q tel que, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

En faisant la division euclidienne de $f(z)$ par $z^3 - 1$ ou trouve que $Q(z) = z^2 + 2z + 2$. **0, 5 pt**

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.

$f(z) = 0$ si, et seulement si $(z^3 - 1)(z^2 + 2z + 2) = 0$.

$$z^3 - 1 = 0 \ \text{ ou } \ z^2 + 2z + 2 = 0.$$

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \ \text{ ou } \ z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Ce qui donne $z = 1$ ou $z = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -1 - i$ ou $z = -1 + i$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est :

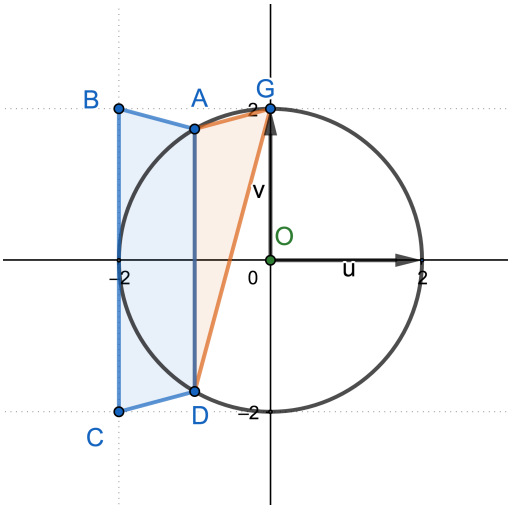
$$S = \Big\{1; -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; -1 - i; -1 + i\Big\}.$$

0, 5 pt

3. a. Ecriture des solutions de (E) sous forme trigonométrique :

On pose :
- $z_0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ car $\arg(1) = 0\,[2\pi]$.
- $z_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $|z_1| = 1$ et $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
  d'où $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$,
- $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \overline{z}_1$, $|z_2| = 1$ et $\arg z_2 = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
  d'où $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}$,
- $z_3 = -1 + i$, $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg z_3 = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
  d'où $z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}$,
- $z_4 = -1 - i = \overline{z}_3$, $|z_4| = \sqrt{2}$ et $\arg z_4 = -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
  d'où $z_4 = \cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4}$. **0, 5 pt**

b. Plaçons les points G, A, D, B et C d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



0, 5 pt

Partie B

1. La nature du quadrilatère ABCD :

$z_{\overrightarrow{BC}} = -2i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -i$ d'où $z_{\overrightarrow{BC}} = 2z_{\overrightarrow{AD}}$ ce qui implique que (BC) et (AD) sont parallèles.

$z_{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ non réel donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Or (BC) et (AD) parallèles, et puis $AB = CD$ donc $ABCD$ est un trapèze isocèle. **0, 5 pt**

2. r étant une rotation de centre Ω qui transforme A en D. On a : $r(\Omega) = \Omega$ et $r(A) = D$.

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à r, alors
$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

$r(\Omega) = \Omega$ équivaut à $f(z_\Omega) = z_\Omega$ et $r(A) = D$ équivaut à $f(z_A) = z_D$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_D = az_A + b \end{cases}$$

$$a = \frac{z_D - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$b = z_\Omega - az_\Omega = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui donne

$$f(z) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

0, 5 pt

3. Nature du triangle ΩAD :

On sait que $r(A) = D$ donc $\Omega A = \Omega D = 3$, or $AD = |z_D - z_A| = \sqrt{3}$,

d'où le triangle ΩAD est isocèle en Ω. **0, 5 pt**

4. Soit S le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD.

Puisque le triangle ΩAD est isocèle en Ω donc S appartient à la médiatrice du

segment $[AD]$ qui est l'axe réel, ce qui implique que

z_S l'affixe de S est réelle et $SA = SD$.

On pose $z_S = x$ $(x \in \mathbb{R})$, puisque S est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD on a aussi : $|z_S - z_\Omega| = |z_S - z_D|$,

ce qui implique $|x-1| = |x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}|$ d'où

$$(x-1)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

ou

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

Ce qui donne $x = 0$.

Donc S est confondu avec O l'origine du repère d'affixe 0. **0, 5 pt**

5. $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$, où z_A est l'affixe du point A.

On sait que $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d'où

$$u_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

u_n est réel si, et seulement si $\sin \frac{2\pi}{3} n = 0$, ce qui implique :

$$\frac{2\pi}{3} n = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}^*$$

ou

$$n = \frac{3}{2} k, \; k \in \mathbb{Z}, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

En prenant $k = 2$, alors 3 est la valeur minimale de n pour que u_n soit un réel. **1 pt**

6. La forme algébrique de u^{2019} :

$$u_{2019} = e^{i\frac{4038\pi}{3}} = e^{i1346\pi}$$

d'où

$$u_{2019} = 1.$$

0, 5 pt

PROBLEME (10 points).

Partie A

Soit g la fonction numérique définie pour tout réel x par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{x}{2}} = +\infty$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. **0, 25 pt**

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X = 0$ ce qui implique après un changement de variable que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. **0, 5 pt**

2.

$$\begin{cases} x \to e^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \to xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } g : x \to -1 + xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{cases}$$

$$g'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+2)$$

$g'(x)$ a le même signe que $x+2$:

sur $]-\infty;-2[$ $g'(x) < 0$; sur $]-2;+\infty[$ $g'(x) > 0$ et $g'(x) = 0$ si $x = -2$. **0,5 pt**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	↘	$-1-\frac{2}{e}$	↗	$+\infty$

0,5 pt

3. g est continue et strictement croissante sur $]-2;+\infty[$, donc g est une bijection de $]-2;+\infty[$ sur $g(]-2;+\infty[) =]-1-\frac{2}{e};+\infty[$.

Or $0 \in]-1-\frac{2}{e};+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-2;+\infty[$.

$g(0.70) \simeq -0.007$ et $g(0.71) \simeq 0.012$, d'où $g(0.7) \times g(0.71) < 0$ donc $\alpha \in]0.70;0.71[$. **0,75 pt**

Sur $]-\infty;\alpha[$ $g(x) < 0$; sur $[\alpha;+\infty[$ $g(x) \geq 0$. **0,5 pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}}$.

a.

$$\begin{cases} x \to e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \to x - 2 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \to (2x-4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } f : x \to -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{cases}$$

$f'(x) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + \frac{1}{2}(2x-4)) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + x - 2) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$,

d'où $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x. **0,5 pt**

b. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$; $f'(x) \geq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$. **0,5 pt**

c. On sait que, d'après 3) **Partie A**, $g(\alpha) = 0$ ce qui est équivalent à $\alpha e^{\frac{\alpha}{2}} = 1$ ou encore

$e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in]0.70; 0.71[$.

d'où $f(\alpha) = -\alpha + 2 + (2\alpha - 4)\dfrac{1}{\alpha}$.

Donc $f(\alpha) = 4 - \alpha - \dfrac{4}{\alpha}$. **0,5 pt**

2. $0.70 \leq \alpha \leq 0.71$ ce qui implique $4 - \frac{4}{0.70} - 0.71 \leq 4 - \frac{4}{\alpha} - \alpha \leq 4 - \frac{4}{0.71} - 0.70$, d'où

$$-2.4 \leq f(\alpha) \leq -2.3,$$

0,5 pt

3. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)(1-2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$, **0,5 pt**

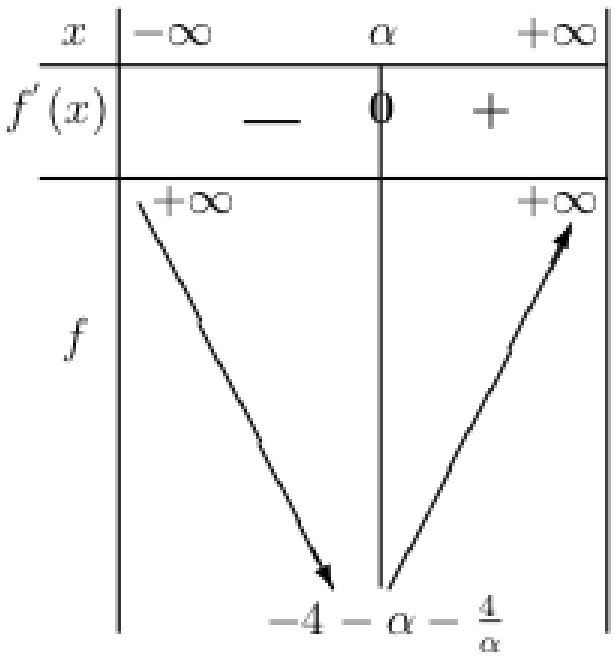
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\frac{2}{x})(1-2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$. **0,25 pt**

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)(1-2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$, **0,25 pt**

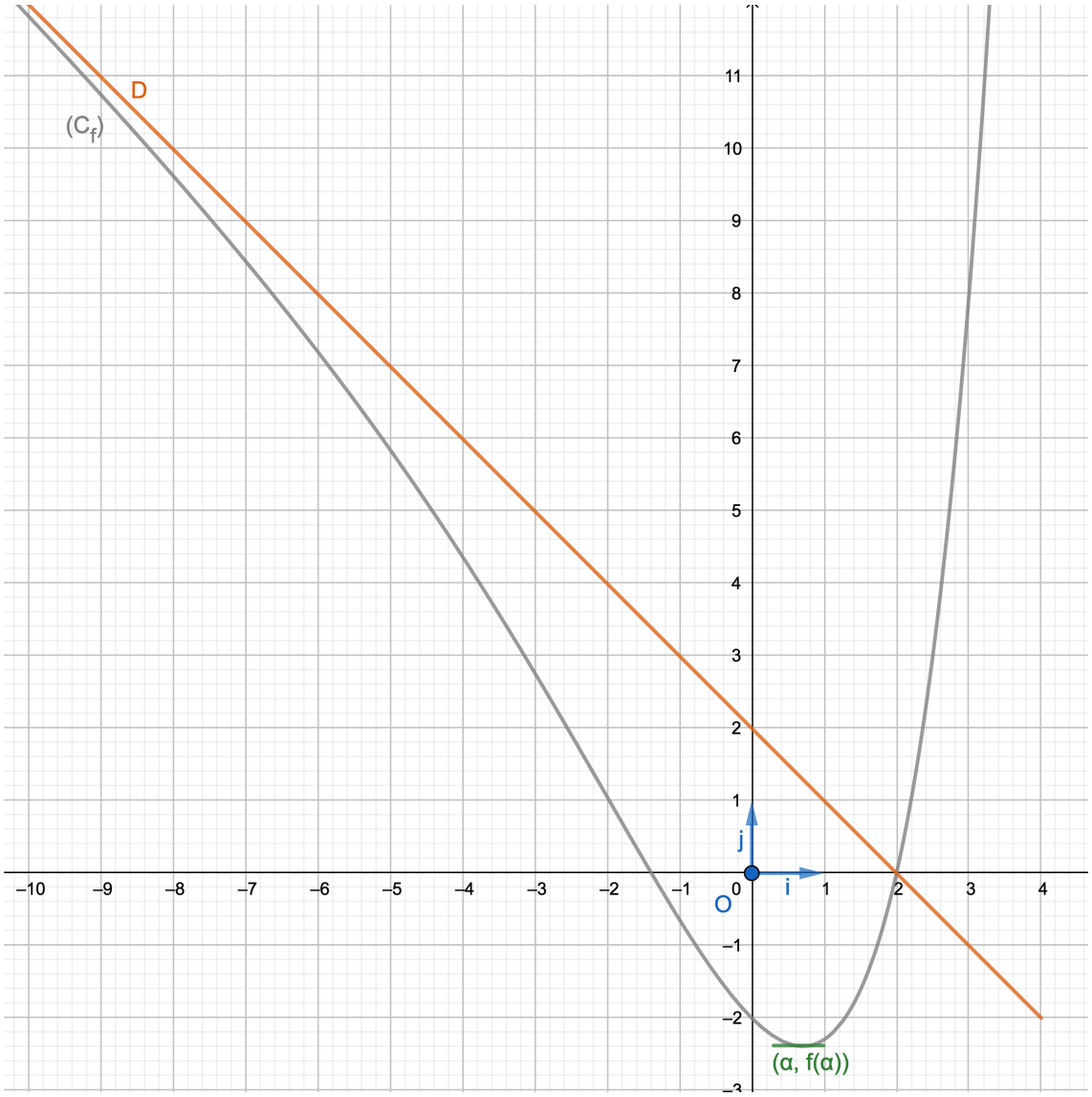
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (-x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} = 0$,

donc $(D) : y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathbf{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$. **0,5 pt**

5. **0,5 pt**



6. **1, 5 pt**



7. $I(x) = \int_0^x (2t-4)e^{\frac{t}{2}}dt = \left[(4t-16)e^{\frac{t}{2}}\right]_0^x$ d'où

$$I(x) = (4x-16)e^{\frac{x}{2}} + 16.$$

0, 75 pt

8. $A = \int_\lambda^0 (-x+2+x-2-(2x-4)e^{\frac{t}{2}})dx \times u.a = \int_0^\lambda (2x-4)e^{\frac{x}{2}}dx \times 4cm^2 = \left[(4\lambda-16)e^{\frac{\lambda}{2}}+16\right] \times 4cm^2$,

$$A = \left[(16\lambda-64)e^{\frac{\lambda}{2}}+64\right] cm^2.$$

0, 25 pt

$$\lim_{\lambda\to-\infty} A = \lim_{\lambda\to-\infty}\left[(16\lambda-64)e^{\frac{\lambda}{2}}+64\right] cm^2 = 64cm^2.$$

0, 5 pt

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 9

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

1^{er} **groupe**

C O R R I G É D E L ' É P R E U V E

Exercice 1 (07 points).
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Complétons ces propriétés sur les modules et arguments de nombres complexes ci-après :

a. $|z^n| = |z|^n$; **b.** Si z' non nul, alors $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$; **(0,25 + 0,25) pt**

c. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$, n un entier naturel ; **0,25 pt**

d. Si z' non nul, alors $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$. **0,25 pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Nous avons les interprétations géométriques suivantes :

a. $|z_B - z_A| = AB$; **b.** $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$. **(0,25 + 0,25) pt**

3. Formule de Moivre : Pour tout entier relatif n et tout réel θ on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. **0,5 pt**

Partie B

s est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. Soit $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de s.

Calculons a^3 et a^2.

On sait que $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où

$a^3 = e^{i\pi} = -1$, **0,25 pt**

et $a^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**

Ainsi $z' = -z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**

Déterminons l'ensemble des points invariants de s.

Soit $\Omega(z_0)$ tel que $s(\Omega) = \Omega$, on a $z_0 = -z_0 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $z_0 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

s admet un unique point invariant le point Ω d'affixe $z_0 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **0,25 pt**

On a $z' - z_0 = -z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = -z - \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = -(z - z_0)$.

Ce qui donne, pour tout $z \neq z_0$, $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = -1$,

ceci implique, pour tout $z \neq z_0$, que $|z' - z_0| = |z - z_0|$ et $\arg(\frac{z' - z_0}{z - z_0}) = \pi\ [2\pi]$. **0,5 pt**

D'où pour tout point $M(z)$ distinct de Ω, d'image par s le point $M'(z')$, on a :
$\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \pi\ [2\pi]$.
Donc s est une symétrie centrale de centre Ω. **0, 5 pt**

2. Déterminons les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation.

On sait que s est une translation si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = 1$. **0, 25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = 1$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = 0\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{2k\pi}{3},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 1$, $a_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Ou encore $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $a_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0, 75 pt**

b. s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

On sait que s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}} z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -i$. **0, 25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = i^3$ ou encore $a^3 - i^3 = 0$. Ce qui donne $(a - i)(a^2 + ai - 1) = 0$.
On trouve $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0, 75 pt**
Autre méthode :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}} z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **0, 25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = \dfrac{3\pi}{2}\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ sont :
$a_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $a_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $a_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Ou $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0, 75 pt**

c. s est une homothétie de rapport -8.

On sait que s est une homothétie de rapport -8 si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0, 25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = (-2)^3$.
Ce qui donne $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = 0$.
On trouve $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0, 75 pt**
Autre méthode :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0, 25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = -8$.
On a $|a|^3 = 8$ ce qui donne $|a| = 2$.
Et $3(\arg(a)) = \pi\,[2\pi]$ ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a_1 = 2e^{i\pi}$ et $a_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
Ou $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0, 75 pt**

Exercice 2 (03 points).

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.
Considérons l'ensemble $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \times \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ qui modélise les différents résultats de l'expérience aléatoire.

a. Les valeurs possibles de S sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. **0,5pt**

Nous notons l'ensemble des résultats possibles, l'univers Ω.
Ω est représenté dans le tableau ci-dessous :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi, nous avons le cardinal de Ω qui est égal au nombre de couples.

$card(\Omega) = 36$. **0,25pt**

b. Déterminons la probabilité d'obtenir une somme égale à 9.

Soit A l'événement "obtenir une somme égale à 9". On a d'après le tableau ci-dessus l'événement A est la réunion des événements élémentaires $\{(3,6)\},\ \{(4,5)\},\ \{(5,4)\},\ \{(6,3)\}$.

$$A = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\}.$$

Il faut noter ici que tous les couples ou événements élémentaires sont équiprobables.
D'où $p(A) = 4 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$. **0,25pt**

2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

a. Soit B l'événement "afficher un score de 8" et C l'événement "afficher un score de 7".

$$B = \{(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2)\},$$

et

$$C = \{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\}.$$

D'où $p(B) = 5 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36}$ et $p(C) = 6 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Soit D l'événement "Marame et Birane affichent chacun un même score de 9, 7 ou 8".
Le résultat obtenu par Marame n'influence pas celui obtenu par Birane, et vice versa. Donc
$p(D) = p(A) \times p(A) + p(B) \times p(B) + p(C) \times p(C) = \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{36}{36^2} = \dfrac{77}{36^2}$. **0,75pt**

b. Soit E l'événement "ils affichent le même score".
Alors $p(E) = p(S=2) \times p(S=2) + p(S=3) \times p(S=3) + ... + p(S=12) \times p(S=12)$.
Ce qui donne
$p(E) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{2}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{4}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{5}{36} + \dfrac{6}{36} \times \dfrac{6}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{5}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{4}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{2}{36} + \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{36^2} + \dfrac{4}{36^2} + \dfrac{9}{36^2} + \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{36}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{9}{36^2} + \dfrac{1}{36^2}$.

D'où $p(E) = \dfrac{146}{36^2} = \dfrac{73}{648}$. **0, 5pt**

c. Celui qui affiche le plus grand score gagne.
Calculons la probabilité pour que Marame gagne.
Soit F l'événement "Marame gagne".
$p(F) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{35}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{33}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{30}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{26}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{21}{36} + \dfrac{6}{36} \times \dfrac{15}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{10}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{6}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{1}{36}$.
Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0, 75pt**

Autre méthode :
Soit F l'événement "Marame gagne", G l'événement "Birane gagne" et E l'événement "ils affichent le même score".
On a $p(F) + p(G) + p(E) = 1$. Or $p(F) = p(G)$, ce qui implique $p(F) = \dfrac{1 - p(E)}{2} = \dfrac{1 - \dfrac{73}{648}}{2}$.
Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0, 75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction f définie par
$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} & si \ \ x \leq 0 \\ \\ x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \ \ x > 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablissons que f est définie sur $\mathbb{R}$.
— La fonction $x \longmapsto x + 1$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par composée si $e^x \neq -2$, ce qui est toujours vrai.
D'où $x \longmapsto x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par somme, si $x \leq 0$.

— La fonction $x \longmapsto x + 2$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie par produit puis par composée si $x > -1$, donc elle est définie si $x > 0$.
D'où $x \longmapsto x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie si $x > 0$.
Par conséquent f est définie sur $\mathbb{R}$. **0, 5 pt**

2. a. Etudions la continuité de f en 0.
— $f(0) = 0 + 1 + \dfrac{3e^0}{e^0 + 2} = 2$,
— $\lim\limits_{x \to 0, \ x<0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} = 2$, **0, 25 pt**
— $\lim\limits_{x \to 0, \ x>0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 2$. **0, 25 pt**
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$, d'où f est continue en 0. **0, 25 pt**

b. Pour $x < 0$, montrons que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$.

$\dfrac{f(x)-2}{x-0} = \dfrac{x+1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}-2}{x} = \dfrac{x-1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}}{x} = \dfrac{x+\dfrac{2e^x-2}{e^x+2}}{x} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x(e^x+2)}$, d'où le résultat. **0, 5 pt**

Déduisons-en $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-2}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)} = 1 + 2 \times \dfrac{1}{3}$

D'où $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{5}{3}$. **0, 25 pt**

c. Concluons sur la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et comparons la avec le résultat précédent.

$\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{x+2+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} 1 + \dfrac{1}{x+1} \times \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 2.$

$\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, donc f n'est pas dérivable en 0. **0, 25 pt**

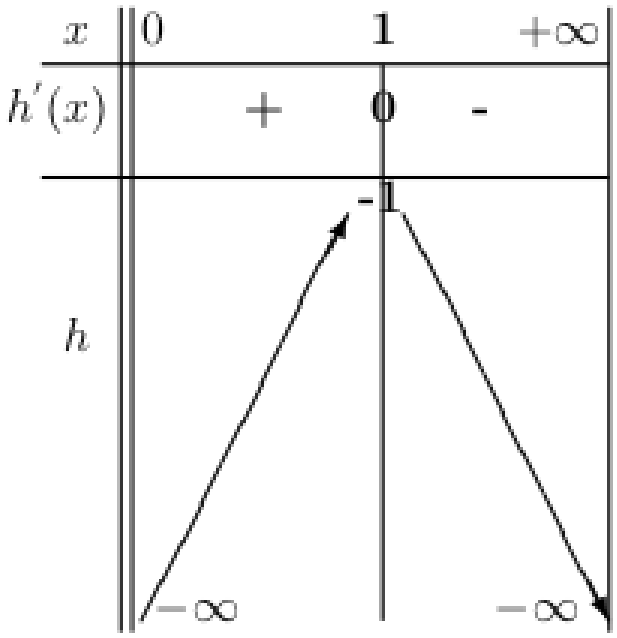
La courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une demi-tangente de pente $\dfrac{5}{3}$ en 0 à gauche et une demi-tangente de pente 2 en 0 à droite. **0, 25 pt**

3. a. En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrons que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$.

h est définie si $x > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) - x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{\ln x}{x} - 1) = -\infty$

$h'(x) = \dfrac{1-x}{x}$, $h'(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ et $h'(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$



0, 25pt

D'après le tableau de variations de h, pour tout $x > 0$, $h(x) \leq -1$. Ce qui implique que $h(x) < 0$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat. **0, 25pt**

Déduisons en que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.

$\ln(x) < x$ pour $x > 0$, ceci implique que pour $x > 0$, $\ln(x+1) < x+1$.

Or si $x > 0$ alors $x + 1 > 1$, ce qui donne $(x+1)^2 > x+1$.

Par conséquent, $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0, 5pt**

b. Calculons $f'(x)$ pour $x > 0$

Pour $x > 0$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$, ou encore

$f'(x) = \dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ **0, 5pt**

Déterminons le signe de $f'(x)$ pour $x > 0$.

D'après **3.a.** $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$, ce qui implique que

$(x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$, pour $x > 0$.

D'où $1 + (x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$ pour $x > 0$.

Par conséquent $\dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} > 0$ pour $x > 0$, car $(x+1)^2 > 0$ pour tout x.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. **0, 5 pt**

c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour $x < 0$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{3e^x(e^x+2) - 3e^{2x}}{(e^x+2)^2}$ pour $x < 0$, ou encore

$f'(x) = 1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2}$, pour $x < 0$. **0, 5 pt**

Signe de $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour tout x, $\dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$. D'où $1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$ par somme, pour tout x.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x < 0$. **0, 25 pt**

4. a. Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2}$.

On sait que, d'une part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+2} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2} = -\infty$. **0, 25 pt**

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Posons $X = x + 1$. Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.

Or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$. **0, 25 pt**

b. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x}{e^x+2}=0$, d'après ce qui précède. **0, 25 pt**

Interprétation graphique du résultat :

La droite (D_1) d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **0, 25 pt**

c. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$, d'après ce qui précède. **0, 25 pt**

Interprétation graphique du résultat :

La droite (D_2) d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0, 25 pt**

d. Etude du signe de $f(x)-(x+1)$ pour $x<0$.

Pour $x<0$, $f(x)-(x+1)=\dfrac{3e^x}{e^x+2}$. Or $e^x>0$ pour tout x, d'où $\dfrac{3e^x}{e^x+2}>0$ pour tout x, précisément pour tout $x<0$. Donc $f(x)-(x+1)>0$ pour $x<0$. **0, 25 pt**

Montrons que $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$.

Pour $x>0$, $f(x)-(x+2)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

On sait que $\ln y>0$ pour tout $y>1$. Or pour $x>0$, $\ x+1>1$ donc $\ln(x+1)>0$ pour $x>0$.

D'où $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>0$ pour $x>0$ ou encore $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$. **0, 25 pt**

Interprétation graphique des résultats :

- $f(x)-(x+1)>0$ pour $x<0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite (D_1) au voisinage de $-\infty$.
- $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite (D_2) au voisinage de $+\infty$.

0, 25 pt

5. Soit $\mathbb{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ **au point** $A(x_0,\ y_0)$, parallèle à l'asymptote pour $x>0$.

Alors $\mathbb{T}$ a une équation de la forme $y=x-x_0+y_0$.

$A\in\mathbb{T}\cap\mathcal{C}_f$, d'où les coordonnées de A vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x_0)=1 \\ y_0=x_0+2+\dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \quad \text{avec } x_0>0. \end{cases}$$

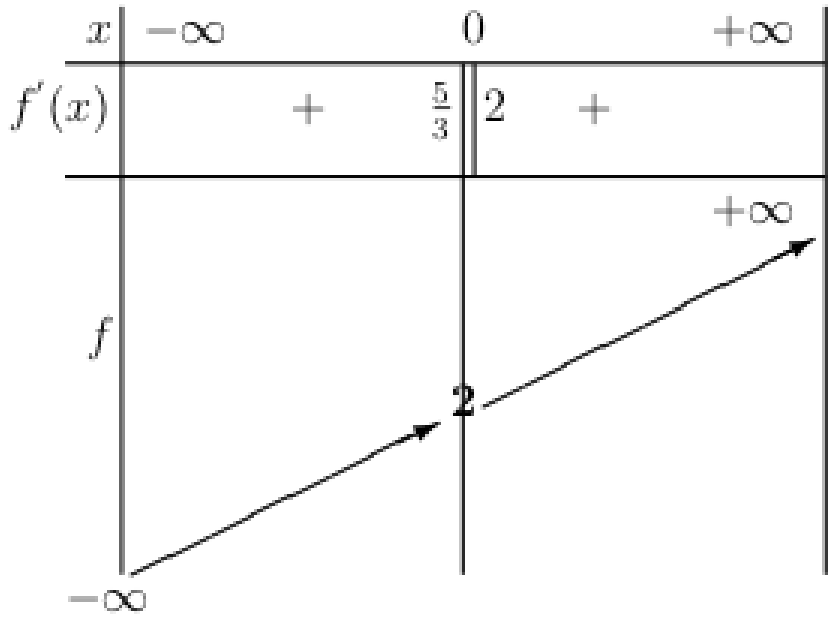
Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{1+(x_0+1)^2-\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2}=1 \\ y_0=x_0+2+\dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \quad \text{avec } x_0>0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x_0=e-1 \\ y_0=e+1+\dfrac{1}{e} \end{cases}$$ D'où A a pour coordonnées $(e-1, e+1+\dfrac{1}{e})$. **0, 25 pt**

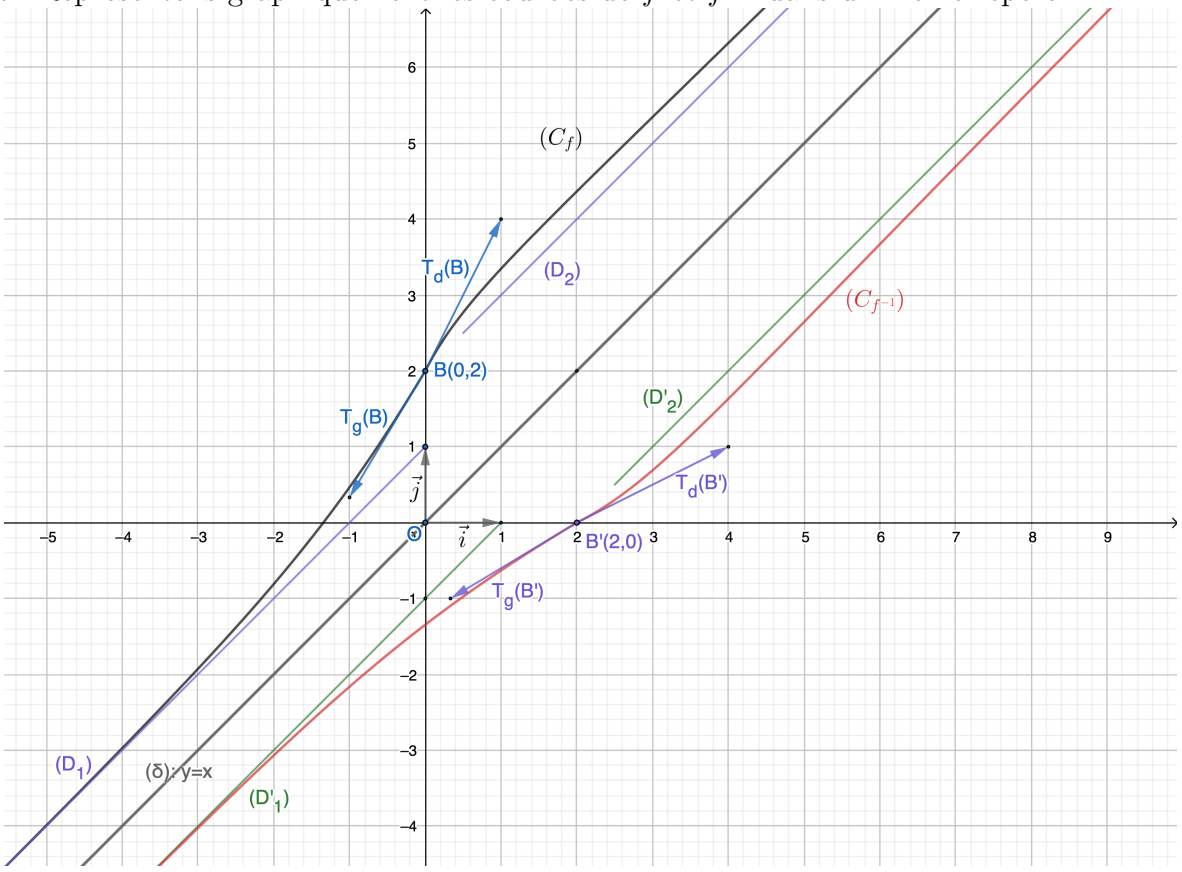
6. Dressons d'abord le tableau de variations de f.



0, 25pt

Etablissons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = \mathbb{R}$. **0, 25 pt**

7. Représentons graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère.



1 pt

8. Calcul de $\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx$.

$\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx = \int_{-\ln 3}^{0} \dfrac{3e^x}{e^x+2}dx = 3\left[\ln(e^x+2)\right]_{-\ln 3}^{0} = 6\ln 3 - 3\ln 7.$ **0, 5 pt**

9. Interprétation du résultat précédent en terme d'aire.

$\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x)-(x+1)\Big)dx \times u.a = (6\ln 3 - 3\ln 7)cm^2$ est l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D_1), les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$. **0, 25 pt**

OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
Site web : officedubac.sn

Durée: 4 heures
Séries :S2-S2A-S4-S5-coef 5

Epreuve du 1er groupe

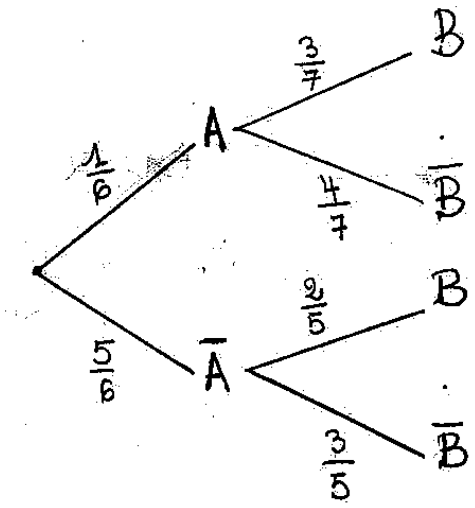
MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. Du 12.08.1988).

CORRIGE

EXERCICE 1

1)



2) $p(A) = \frac{1}{6}$; $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3) Soit Ω l'univers

$B \subset \Omega \implies b = \cap\ \Omega$; $A \cup \bar{A} = \Omega$; $B = B \cap (A \cup \bar{A})$

$\implies B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$; $(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = B \cap A \cap \bar{A} = B \cap \phi = \phi$

$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A)\,p(B/A) + p(\bar{A})\,p(B/\bar{A})$

$p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{14} + \frac{1}{3} = \frac{17}{42}$

4) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\,p(B/A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{7}}{\frac{17}{42}}$

$p(A\ /\ B) = \frac{\frac{3}{42}}{\frac{17}{42}} = \frac{3}{17}$

5) a) On a une suite d'épreuves de Bernoulli. L'expérience est répétée 5 fois et n'a que 2 issues : le succès ou l'échec.
Le succès (S) : « obtenir une boule blanche »
L'échec (E) : « obtenir une boule non blanche »

$p(S) = p = p(B) = p\ \frac{17}{42}$; $p(E) = 1 - p$

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\forall\, k \in \mathcal{U}\,,\ p\,(X = k) = C_5^k\, p^k\,(1-p)^{5-k} = C_5^k \left(\frac{17}{42}\right)^k \left(1 - \frac{17}{42}\right)^{5-k}$

$p(X = k\,) = C_5^k \left(\frac{17}{42}\right)^k \left(\frac{25}{42}\right)^{5-k}$; $k \in \mathcal{U}$

b) $E\,(X) = n\,p = 5 \times \frac{17}{42} = \frac{85}{42}$; $V\,(X) = n\,p\,(1-p) = 5 \times \frac{17}{42} \times \frac{25}{42} = \frac{2125}{1764}$

6) Soit C l'évènement « obtenir au moins une boule blanche ».
Alors $\bar{C}$ est l'évènement « obtenir n boules non blanches ».

$p(\bar{C}) = (1-p)^n = \left(\frac{25}{42}\right)^n$; $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \left(\frac{25}{42}\right)^n$

$p(C) > 0{,}99 \iff 1 - \left(\frac{25}{42}\right)^n > 0{,}99 \iff 1 - 0{,}99 > \left(\frac{25}{42}\right)^n$

$\iff 0{,}01 > \left(\frac{25}{42}\right)^n \iff \ln(0{,}01) > \ln\left(\frac{25}{42}\right)^n$

$\iff \ln(0{,}01) > n\ln\left(\frac{25}{42}\right) \iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{25}{42}\right)} < n$

$\iff n > 8{,}876\ldots$ $or\ n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 9$.

La valeur minimale de n est $n_0 = 9$.

EXERCICE 2

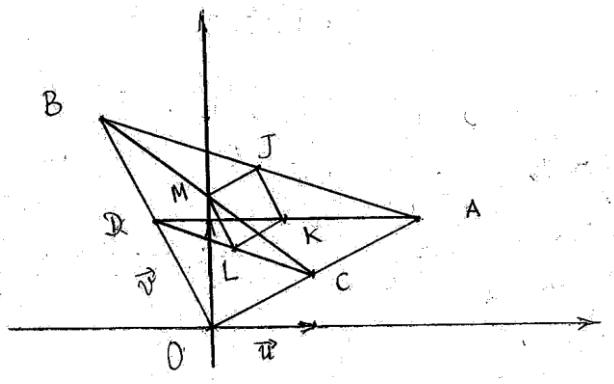
1) a) $a(1+i) = 1+3i \implies a = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$i\,a^2 = i\,(2+i)^2 = i\,(3+4\,i) = -4+3i$

b) $a^2 - (1+3i)\,a - 4 + 3i = (2+i)^2 - (1+3i)(2+i) - 4 + 3i$
$= 3 + 4i + 1 - 7i - 4 + 3i = 0$, donc a est solution de l'équation.

$(i\,a)^2 - (1+3i)(i\,a) - 4 + 3i = -a^2 - i(1+3i)a - 4 + 3i$
$= -3 - 4i + i(1 - 7\,i) - 4 + 3i$
$= -3 - 4i + i + 7 - 4 + 3i = 0$, donc $i\,a$ est une solution de l'équation.

2) a)



b) $i\,a = i\,(2+i) = -1+2i$ et $b = -1+2i$, donc $b = i\,a$.

$OA = |a|$; $OB = |b| = |i\,a| = |i|\,|a| = 1|a| = |a|$

$OA = |a|\ et\ OB = |a|$; donc $OA = OB$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{i\,a}{a}\right) = arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$OA = OB\ et\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc OAB est un triangle rectangle isocèle de sommet principal O

3) a) OCD est isocèle et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow OC=OD \; et \; \left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow |c|=|d| \; et \arg\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{|d|}{|c|}=1 \; et \; \arg\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right|=1 \; et \; arg\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d}{c}=e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{d}{c}=i$

$\Rightarrow d=i\,c \Rightarrow d=i\left(1+\frac{1}{2}\,i\right) \Rightarrow d=-\frac{1}{2}+i$

b) J milieu de $[AB] \Rightarrow z_J=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(2+i-1+2i)=\frac{1}{2}(1+3i)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,i$

K milieu de $[DA] \Rightarrow z_K=\frac{1}{2}(a+d)=\frac{1}{2}\left(2+i-\frac{1}{2}+i\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2i\right)=\frac{3}{4}+i$

L milieu de $[CD] \Rightarrow z_L=\frac{1}{2}(c+d)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\,i-\frac{1}{2}+i\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,i\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\,i$

M milieu de $[BC] \Rightarrow z_M=\frac{1}{2}(b+c)=\frac{1}{2}\left(-1+2i+1+\frac{1}{2}\,i\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\,i\right)=\frac{5}{4}\,i.$

$$\left.\begin{array}{l} z_J-z_K=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,i-\frac{3}{4}-i=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,i \\ z_M-z_L=\frac{5}{4}\,i-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\,i=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,i \end{array}\right\} \Rightarrow z_J-z_K=z_M-z_L$$

$\Rightarrow \overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{LM}$; $KJ=|z_J-z_K|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{16}}$

$KJ=\frac{\sqrt{5}}{4}$; $KL=|z_L-z_K|=\left|\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i-\frac{3}{4}-i\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$

$KL=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$; $KJ=\frac{\sqrt{5}}{4} \; et \; KL=\frac{\sqrt{5}}{4}$; donc $KJ=KL$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right)=arg\left(\frac{z_L-z_K}{z_J-z_K}\right)=\arg\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i}\right)=\arg\left(\frac{-2-i}{-1+2i}\right)=\arg\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right)=\arg\left[\frac{i\,(1-2i)}{1-2i}\right]=\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\;[2\bar{u}]$

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{LM} \\ KJ=KL \\ \left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\;[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow JKLM \text{ est un carré.}$$

PROBLEME

PARTIE A

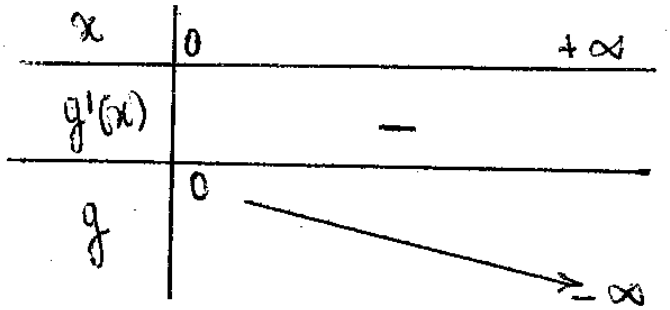
1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0)=0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

g est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall\, x \in [0,+\infty[\;, g'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}$

$g'(x)=-\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\right]$; $\forall\, x \in [0,+\infty[\;, \frac{1}{(1+x)^2}>0$ et $\frac{1}{1+x}>0$,

donc $g'(x)<0$. Par conséquent g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$



b) $g(0) = 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) \in]-\infty,0[\implies g(x) < 0$

2) a) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ e^x + 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ e^x \neq -1 \end{cases}$; $x \geq 0 \implies x > -1$

$\forall x < 0$; $e^x \neq -1$ car $e^x > 0$ et $-1 < 0$.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \geq 0$ ou $x < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $Df = \mathbb{R}$

Supposons que $x < 0$

Alors $f(x) = x + \frac{2e^x}{e^x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Supposons que $x \geq 0$

Alors $f(x) = e^{-x}[1 + ln(1+x)] = e^{-x} + e^{-x}\ln(1+x)$

$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{e^x} = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{e^x}$

$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{1+x}\left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \cdot$ Posons $t = 1 + x$

$x \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad t \longrightarrow +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $f(0) = e^{-0}[1 + ln(1+0)] = 1\,xx\,1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-x}[1 + ln(1+x)] = e^{-0}[1 + ln(1+0)] = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(x + \frac{2e^x}{e^x+1}\right) = 0 + \frac{2e^0}{e^0+1} = \frac{2}{1+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 \implies \lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

c) $\forall x \in]0,+\infty[$; $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-x}[1+ln(1+x)]-1}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-x}[1+ln(1+x)-e^x]}{x} = e^{-x}\left[\frac{ln(1+x)+1-e^x}{x}\right]$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} + \frac{1-e^x}{x}\right] = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$

d) $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1\,(1-1) = 0$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d\,(0) = 0$

$\forall x \in]-\infty,0[$; $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+\frac{2e^x}{e^x+1}-1}{x} = \frac{x(e^x+1)+2e^x-e^x-1}{x(e^x+1)}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x(e^x+1)+e^x-1}{x(e^x+1)} = 1 + \frac{e^x-1}{x(e^x+1)} = 1 + \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^0+1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + 1 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g\,(0) = \frac{3}{2}$

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en $0 \cdot$

(Cf) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale à droite et une demi-tangente oblique de coefficient directeur $\frac{3}{2}$ à gauche.

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ ·

$\forall\, x \in\,]-\infty,0[,\ f'(x) = 1 + 2\left[\frac{e^x(e^x+1)- e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}\right]$

$f'(x) = 1 + 2\ \left[\frac{e^x\,(e^x+1- e^x)}{(e^x+1)^2}\right] = 1 + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

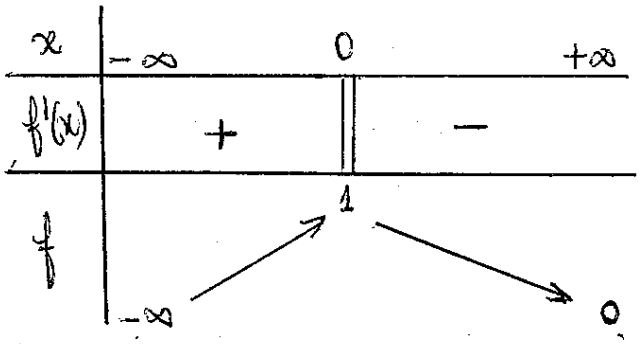
$\forall\, x \in\,]0,+\infty[, f'(x) = -e^{-x}\,[1 + ln(1+x)] + e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$f'(x) = e^{-x}\left[-1 - ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right] = e^{-x}\,g(x)$

4) $\forall\, x \in\,]-\infty,0[, f'(x) > 0,$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$

$\forall\, x \in\,]0,+\infty[, e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Or $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$



5) $f([0,+\infty[) = \,]0,1]$

$\forall\, x \in\, [0,+\infty[, f(x) \in\,]0,1] \implies f(x) \neq 0$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$, donc f est une bijection de $]-\infty,0[$ sur $f(]-\infty,0[) = \,]-\infty,1[$

Or $0 \in\,]-\infty,1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in\,]-\infty,0[$ ·

$f(-0,7) = -0,7 + \frac{2e^{-0,7}}{e^{-0,7}+1} \simeq -0,04$

$f(-0,6) = -0,6 + \frac{2e^{-0,6}}{e^{-0,6}+1} \simeq 0,11$

$f(-0,7)\ x\ f(-0,6) < 0 \implies -0,7 < \alpha < -0,6$

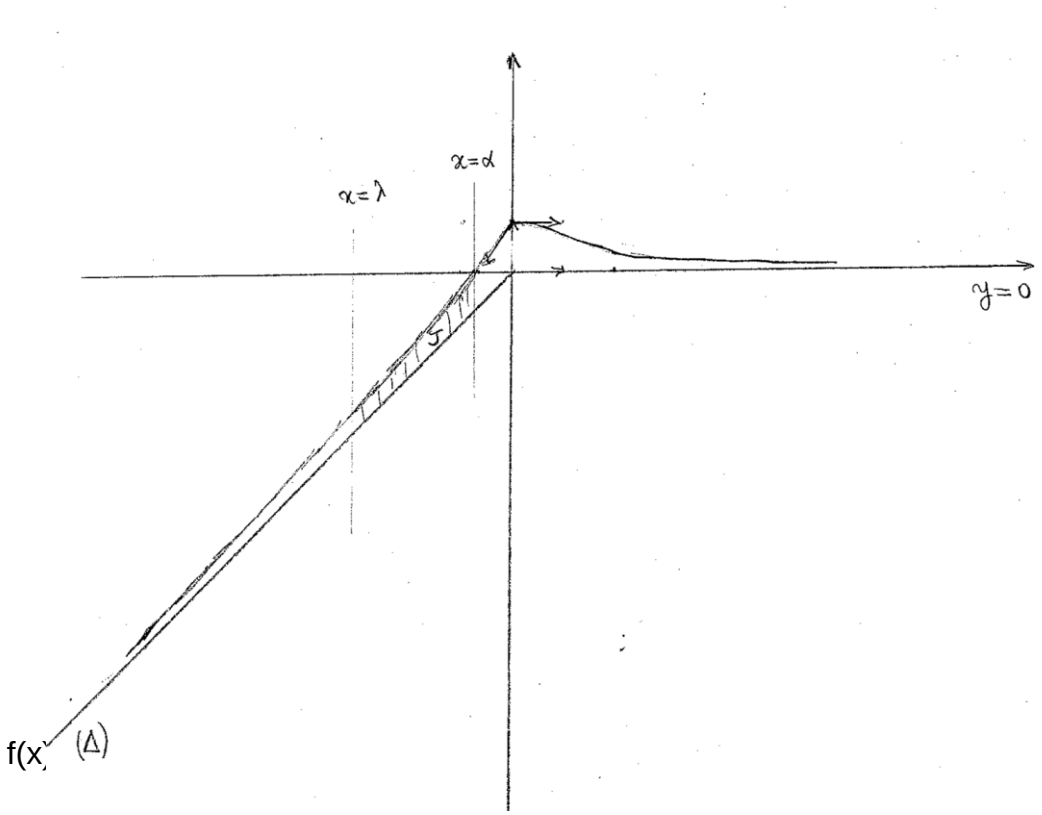
6) $\forall\, x \in\,]-\infty,0[,\ f(x) = x + \frac{2e^x}{e^x+1}$ · Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = 0,$ donc la droite (Δ) d'Equation $y = x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(Cf)\ en + \infty$ ·

7) $\forall\, x \in\,]-\infty,0[, f(x) - x = \frac{2e^x}{e^x+1}$; $2\,e^x > 0,\ e^x + 1 > 0$

$\forall\, x \in\,]-\infty,0[, f(x) - x > 0, donc\ (Cf)$ donc (Cf) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty,0[$

8)



$f(2) = e^{-2}(1 + ln\,3) \simeq 0{,}3.$

PARTIE B

1) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^\alpha [f(x) - x]\,dx = \int_\lambda^\alpha \left(x + \frac{2e^x}{e^x+1} - x\right) dx = \int_\lambda^\alpha \frac{2e^x}{e^x+1} dx = 2\int_\lambda^\alpha \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx$

$= 2\int_\lambda^\alpha \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2\int_\lambda^\alpha [ln|e^x+1|]'\,dx = 2\int_\lambda^\alpha [ln(e^x+1)]'\,dx$

car $|e^x + 1| = e^x + 1 \quad (e^x + 1 > 0)$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2\,[ln(e^x+1)]_\lambda^\alpha = 2\left[ln(e^\alpha+1) - ln\left(e^\lambda+1\right)\right]$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\lambda+1}\right) u.a$ (unité d'aire)

2) $\mathcal{A}(\lambda) = 2\ ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\lambda+1}\right)$; $\lim_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = 0$, donc $\lim_{\lambda\to-\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 2\,ln(e^\alpha+1)$

CORRIGÉ MATHEMATIQUES SUJET 1

EXERCICE 1 : (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrons que $a^2=-2\sqrt{3}-2i$.

$a^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-2\sqrt{3}-2i\sqrt{1}$.

D'où $a^2=-2\sqrt{3}-2i$. **0,5 pt**

Déduisons-en le module de a.

$$|a^2|=4\Longrightarrow|a|^2=4\Longrightarrow|a|=2.$$ **0,5 pt**

2. Ecrivons a^2 sous forme trigonométrique**.**

$a^2=-2\sqrt{3}-2i=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$$a^2=4(\cos\tfrac{7\pi}{6}+i\sin\tfrac{7\pi}{6}).$$ **0,5 pt**

Vérifions qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

$\arg(a^2)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow 2\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{12}[\pi]$ ou $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Prenant $k=1$, $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}$. **0,5 pt**

3. Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$a=2\left[\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right]=2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)\right]=-2\cos\frac{7\pi}{12}-2i\sin\frac{7\pi}{12}$ et

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Ce qui implique que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **(0,25+0,25) pt**

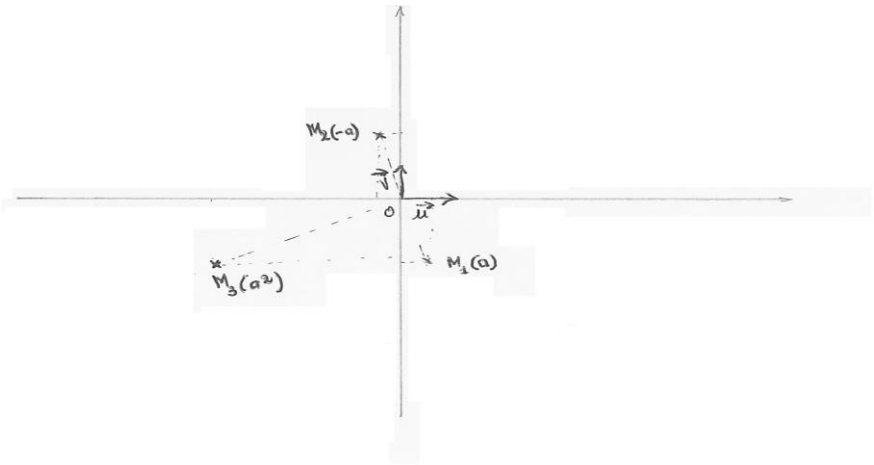
Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{6\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **(0,25+0,25) pt**

4. Représentons sur le même graphique les points images de $a,-a\ et\ a^2$.



1 pt

EXERCICE 2 : (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c. Puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) avec $b = 6$ ».
   Justifions que $p(A) = \frac{5}{216}$.
   Si -1 est solution de (E) avec $b = 6$ alors a et c vérifient la relation $a + c = 6$. D'où $A = \{(1,6,5);\ (2,6,4); (3,6,3); (5,6,1); (4,6,2)\}$.
   Ce qui donne $p(A) = 5 \times \frac{1}{6^3} = \frac{5}{6^3} = \frac{5}{216}$. **0,5 pt**
2. La probabilité de l'événement :
   - ✓ $\boldsymbol{B}$: " $\boldsymbol{-2}$ **est solution de** $\boldsymbol{(E)}$ **et** $\boldsymbol{c = 4}$ " est $p(B) = \frac{1}{108}$.
     Justification : Si -2 est solution de (E) et $c = 4$ alors a et b vérifient la relation $4a - 2b + 4 = 0$. Ce qui implique que $b = 2a + 2$. D'où $B = \{(1,4,4);\ (2,6,4)\}$.
     Ce qui donne $p(B) = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$. **0,5 pt**
   - ✓ $\boldsymbol{C}$: " **la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1**" est $p(C) = \frac{1}{72}$.
     Justification : Si la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1 alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}$.
     D'où $C = \{(1,2,1);\ (2,4,2);\ (3,6,3)\}$.
     Ce qui donne $p(C) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
   - ✓ $\boldsymbol{D}$: " **Les deux solutions sont confondues avec** $\boldsymbol{b = 4}$ " est $p(D) = \frac{1}{72}$.
     Justification : Si les deux solutions sont confondues avec $b = 4$ alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b^2 = 4ac \\ b = 4 \end{cases}$.
     Ce qui implique que a et c vérifient la relation $a \times c = 4$.
     D'où $D = \{(1,4,4);\ (2,4,2);\ (4,4,1)\}$.
     Ce qui donne $p(D) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.
   a) Soit F l'événement : " l'événement A se réalise une seule fois au 3ème essai".
      Montrons que $p(F) = \frac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.
      Désignons par S « l'événement A se réalise » et par E « l'événement A ne se réalise pas».
      D'où F est le $10 - uplets$ défini comme suit : $F = (E, E, S, E, E, E, E, E, E, E)$. Donc
      $p(F) = C_1^1 \times \frac{5}{216} \times \left(\frac{211}{216}\right)^9$. **0,5 pt**
   b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.
      b-1) La loi de probabilité de Y:
      $$Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
      $$p(Y = k) = C_{10}^k \times \left(\frac{5}{216}\right)^k \times \left(\frac{211}{216}\right)^{10-k}.$$ **0,5 pt**

Ici Y suit une loi binomiale $B(n, p)$ de probabilité p ; $n = 10$.

b-2) Le nombre espéré de réalisations de$A$ est : $E(Y) = n \times p(A) = 10 \times \frac{5}{216} = \frac{25}{108}$. **0,5 pt**

b-3) La variance de Y est : $V(Y) = n \times p(A)(1 - p(A)) = 10 \times \frac{5}{216} \times \frac{211}{216} = \frac{10550}{(216)^2}$. **0,5 pt**

PROBLEME : (12 pts)

A.

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 0 < x < 1 \ \ ou\ x \geq 1 \Leftrightarrow x \in\ ]0, +\infty[$

   $Df =\ ]0, +\infty[$. **0,5 pt**

2. $f(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 + x - x\ln x = 1 + 1 - 1\ln 1 = 2$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$; d'où f est continue en 1. **0,5 pt**

3. supposons que $0 < x < 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+x-x\ln x-2}{x-1} = \frac{x-1-x\ln x}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$ or $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, d'où

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - 1(1) = 1 - 1 = 0.$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$. **0,25 pt**

Supposons que $x > 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-2}{x-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$.

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$. D'où $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{\sqrt{1}\left(\sqrt{1}+1\right)} = -\frac{1}{2}$;

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$. **0,25 pt**

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$; donc f n'est pas dérivable en 1. **0,25 pt**

$f'_g(1) = 0$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente horizontale à gauche. **0,25 pt**

$f'_d(1) = -\frac{1}{2}$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente oblique de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ à droite. **0,25 pt**

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x = 1 + 0 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **0,25 pt**

5. $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$; donc f admet un prolongement par continuité à droite en 0.

$\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$ **0,5 pt**

6. Supposons que $0 < x < 1$.

$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1+x-x\ln x-1}{x} = \frac{x-x\ln x}{x} = \frac{x(1-\ln x)}{x} = 1 - \ln x.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = +\infty$; donc h n'est pas dérivable à droite en 0. **0,25 pt**

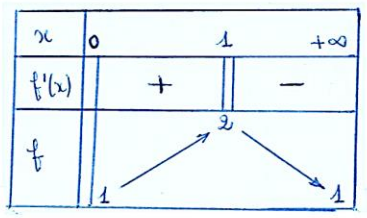
La courbe de h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale à droite. **0,25 pt**

7. $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = 1 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$. **0,5 pt**

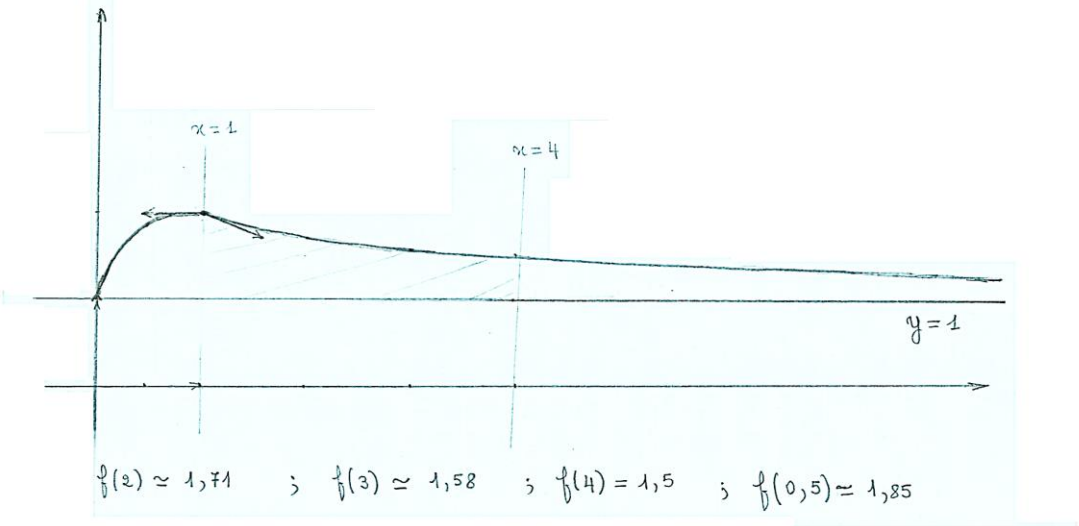
$\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **0,5 pt**

$\forall x \in]0,1[$, $\ln x < 0 \implies -\ln x > 0 \implies f'(x) > 0$.

$\forall x \in]1,+\infty[$, $x\sqrt{x} > 0 \implies f'(x) < 0$. **1 pt**



f) a)



1 pt

b. $A = \int_1^4 [f(x) - 1]\,dx \times \mathcal{U}.a$, avec $\mathcal{U}.a =$ unité d'aire.

On a : $\int_1^4 [f(x) - 1]\,dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2.$

Or $1\ \mathcal{U}.a = 2\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$.

Donc $A = 2 \times 4\text{ cm}^2 = 8\text{ cm}^2$. **1 pt**

B. 1. $g = f$ sur $[1, +\infty[$.

a. $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow k(x) = 0$, avec $k(x) = g(x) - x$.

k est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$\forall\, x \in]1, +\infty[, k'(x) = g'(x) - 1 = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1.$ **0,25 pt**

$\forall\, x \in]1, +\infty[, k'(x) < 0,$ donc k est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. **0,25 pt**

Donc k est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $k([1, +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} k(x),\ k(1)\right] =]-\infty, 1]$. **0,25 pt**

Or $0 \in]-\infty, 1]$, donc l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. En conséquence l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. **0,25 pt**

$k(1) = 1$; $k(2) = g(2) - 2 = f(2) - 2 \simeq 1{,}71 - 2 \simeq -0{,}29$.

$k(1) \times k(2) < 0 \implies 1 < \alpha < 2$.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$k(x)$	1					0,32	0,19	0,06	-0,05	-0.37	-0,29

$k(1{,}5) = f(1{,}5) - 1{,}5 \simeq 0{,}32$; $k(1{,}6) = f(1{,}6) - 1{,}6 \simeq 0{,}19$;

$k(1{,}7) = f(1{,}7) - 1{,}7 \simeq 0{,}06$; $k(1{,}8) = f(1{,}8) - 1{,}8 \simeq -0{,}05$.

$k(1{,}7) \times k(1{,}8) < 0 \implies 1{,}7 < \alpha < 1{,}8$. **0,25 pt**

b. $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \implies |g'(x)| = \left|-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$

$x \in [1, +\infty[\implies x \geq 1 \implies \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \implies \sqrt{x} \geq 1 \implies x\sqrt{x} \geq x$

$\implies x\sqrt{x} \geq 1 \implies 2x\sqrt{x} \geq 2 \implies \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

$\implies |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5 pt**

c. g est dérivable sur $[1, +\infty[$

$\forall\, t \in [1, +\infty[,\ |g'(t)| \leq \frac{1}{2}$. Or $\alpha \in [1, +\infty[$; donc $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Rightarrow |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$. **0,25 pt**

2. a. $w_0 = 2$. Or $2 \geq 1$; donc $w_0 \geq 1$.

Supposons que $w_n \geq 1, n \geq 0$ et montrons que $w_{n+1} \geq 1$.

$w_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{w_n}} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{w_n}} > 1 \Rightarrow w_{n+1} > 1 \Rightarrow w_{n+1} \geq 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 1$. **0,75 pt**

b. $\forall x \in [1,+\infty[$, $|g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

Or d'après la question précédente, $w_n \geq 1$. Ce qui implique que $w_n \in [1,+\infty[$.

$w_n \in [1,+\infty[\Rightarrow |g(w_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|w_n-\alpha| \Rightarrow |w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|w_n-\alpha|$. **0,25 pt**

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |w_0-\alpha| = |w_0-\alpha|$. Or $|w_0-\alpha| \leq |w_0-\alpha|$, donc $|w_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |w_0-\alpha|$.

Supposons que $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|, n \geq 0$ et montrons que $|w_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0-\alpha|$.

$|w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|w_n-\alpha|$. Or $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$, donc $|w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$

$\Rightarrow |w_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0-\alpha|$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$. **0,75 pt**

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} |w_n-\alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} w_n = \alpha$. **0,25 pt**

Epreuve du 1er groupe

Grille de correction des copies des élèves

Pour la correction des copies, il faudra tenir compte, pour chaque réponse à une question de l'épreuve de :

- ✓ ***La justesse du raisonnement pour 50% de la note. Si le raisonnement est acceptable mais insuffisant, on donne 25% de la note.***
- ✓ ***L'exactitude des résultats attendus et qui sont en adéquation avec le raisonnement pour 50% de la note.***

CORRIGE

EXERCICE 1

1) Le nombre rationnel strictement positif a et l'entier naturel n sont des données inutiles. Pour le calcul de limite, on a **d'après les limites usuelles** :
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$ **(0,75+0,75 pt)**
2) Une primitive de la fonction :

a) $(\boldsymbol{exp\circ f})\boldsymbol{f'}$.
On sait que la dérivée de la composée $exp\circ f$ est la fonction $(exp\circ f)f'$. Donc une primitive de la fonction $x\mapsto (exp\circ f(x))f'(x)$ est la fonction $x\mapsto exp\circ f(x)+c$, avec c une constante. **(0,75 pt)**

b) $\frac{\boldsymbol{f'}}{\boldsymbol{f}}$.
On sait que si f est non nulle alors la dérivée de la composée $\ln(|f|)$ est la fonction $\frac{f'}{f}$.
Donc une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{f'(x)}{f(x)}$ si f est non nulle, est la fonction $x\mapsto \ln(|f(x)|+k$ avec $f(x)\neq 0$ et k une constante. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2

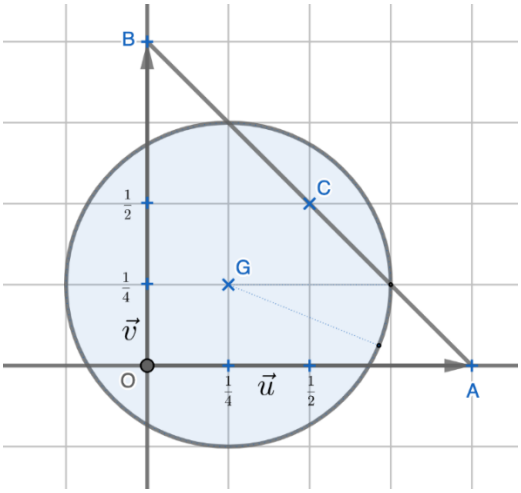
1) $p(1)=2(1)^3-3(1+i)(1)^2+4i(1)+1-i.$
   $P(1)=2-3-3i+4i+1-i=0$, donc 1 est une racine de P. **(0,25 pt)**
   $P(i)=2i^3-3(1+i)i^2+4i(i)+1-i=-2i+3(1+i)-4+1-i$
   $P(i)=-2i+3+3i-4+1-i=0,$ donc i est une racine de P. **(0,25 pt)**
2) *L'élève pourra déterminer $g(z)$ par division euclidienne, par la méthode d'identification des coefficients ou par la méthode de Hörner.*
   Utilisons dans ce tableau deux fois la méthode de Hörner

	2	$-3-3i$	$4i$	$1-i$
1		2	$-1-3i$	$-1+i$
	2	$-1-3i$	$-1+i$	0
i		$2i$	$-i+1$	
	2	$-1-i$	0	

   D'où $g(z)=2z-1-i$ et $P(z)=(z-1)(z-i)(2z-1-i).$ **(0,5 pt)**
3) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$ sont $1, i$ et la racine de g.
   $g(z)=0\Leftrightarrow 2z-1-i=0\Leftrightarrow 2z=1+i\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$
   $S=\left\{1,i,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}.$ **(0,5 pt)**

…/… 2

4) a)



b) *L'élève pourra démontrer que C est le milieu de $[AB]$ en utilisant les affixes respectives des points A, B et C ou en utilisant leurs coordonnées respectives.*

En utilisant les affixes respectives des points A, B et C on a $\frac{z_A+z_B}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = z_C$ donc C est le milieu de $[AB]$. **(0,25 pt)**

Démontrons que C appartient à l'ensemble (E).

On a $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CO}\| = \|2\overrightarrow{CO}\| = 2|z_C| = \sqrt{2}$. Ce qui implique que $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CO}\| \leq 2$.

D'où C appartient à l'ensemble (E). **(0,25 pt)**

c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1)\ ;\ (B,1)\ ;\ (O,2)\}$.

On a : $z_G = \frac{z_A+z_B+2z_O}{1+1+2} = \frac{1+i}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. **(0,25 pt)**

Voir figure pour le placement du point G dans le repère. **(0,25 pt)**

5) Comme G est le barycentre de $\{(A,1)\ ;\ (B,1)\ ;\ (O,2)\}$, donc pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO} = (1+1+2)\overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MG}.$$

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO}\| \leq 2 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| \leq 2 \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\| \leq 2 \Leftrightarrow MG \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ appartient au disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. D'où (E) est le disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

Pour la construction de (E) voir figure. **(0,25 pt)**

6) Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de $[AB]$, d'affixe $z_C = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **(0,25 pt)**

Les élèves pourront donner d'autres réponses possibles. A savoir :

- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de [AB], d'affixe $z_C = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et $z_B = 1$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.

…/… 3

✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$ et $z_B = i$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.

EXERCICE 3

1) Déterminons U_1 et U_2

$U_1 = \frac{1}{U_0} + \frac{3}{4}\,U_0 = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}\,(6) = \frac{1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{27}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$. **(0,25 pt)**

$U_2 = \frac{1}{U_1} + \frac{3}{4}\,U_1 = \frac{1}{\frac{14}{3}} + \frac{3}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{3}{14} + \frac{7}{2} = \frac{3}{14} + \frac{49}{14} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}$. **(0,25 pt)**

2) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geq \sqrt{3}$.

- Vérifions que $U_0 \geq \sqrt{3}$.

On a $U_0 = 6$. Or $6 \geq \sqrt{3}$, donc $U_0 \geq \sqrt{3}$.

- Démontrons que si $U_n \geq \sqrt{3}$ alors $U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

Supposons que $U_n \geq \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}\,U_n - \sqrt{3} = \frac{4+3\,U_n^2 - 4\sqrt{3}\,U_n}{4\,U_n}$.

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3\,U_n^2 - 4\sqrt{3}\,U_n + 4}{4\,U_n} = \frac{\left(\sqrt{3}\,U_n - 2\right)^2}{4\,U_n}$.

Or $U_n \geq \sqrt{3}$ implique que $\left(\sqrt{3}\,U_n - 2\right)^2 \geq 0$ et $U_n > 0$.

Ce qui donne $\frac{\left(\sqrt{3}\,U_n - 2\right)^2}{4\,U_n} \geq 0 \implies U_{n+1} - \sqrt{3} \geq 0 \implies U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$. **(01 pt)**

3) a) f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Par conséquent f est dérivable sur $]0, +\infty[$. **(0,25 pt)**

$\forall\, x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{4} = \frac{-4+3x^2}{4\,x^2} = \frac{3\,x^2 - 4}{4\,x^2}$.

$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{3}\,x+2\right)\left(\sqrt{3}\,x-2\right)}{4\,x^2}$. **(0,25 pt)**

$\forall x \in]0, +\infty[, \sqrt{3}x + 2 > 0$ et $4\,x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{3}x - 2$.

$\sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$

(0,25 pt)

f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. **(0,25 pt)**

b) Déduisons-en par récurrence que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- Vérifions que $U_1 < U_0$.

$U_0 = 6\ et\ U_1 = \frac{14}{3}$. Or $\frac{14}{3} < 6$, donc $U_1 < U_0$.

- Supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$.

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$. Or $\sqrt{3} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, donc $U_n > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\implies U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$. De même $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

…/… 4

On a $U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$. f étant strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc si $U_{n+1} < U_n$ alors $f(U_{n+1}) < f(U_n)$ ·
Or $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $f(U_n) = U_{n+1}$, donc $U_{n+2} < U_{n+1}$.

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$. D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**

4) D'après la question 2), $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq \sqrt{3}$. Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{3}$ · Or $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. **(0,5 pt)**
Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq \sqrt{3} \Rightarrow \ell \geq \sqrt{3} \Rightarrow \ell \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ ·

Or f est continue sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc f est continue en ℓ ·
Par hypothèse, $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = f(U_n)$. On a aussi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et f est continue en ℓ, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{3}{4}x = x \Leftrightarrow \frac{4+3x^2}{4x} = x.$$
$$\Leftrightarrow 4 + 3x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 4 = 4x^2 - 3x^2 \Leftrightarrow 4 = x^2.$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Or $x > 0$; donc $x = 2$. D'où $\ell = 2$. **(0,5 pt)**

PROBLEME

PATIE A

1) Résolvons l'équation différentielle (E') : $\frac{1}{2}y' + y = 0$.

$$(E'): \frac{1}{2}y' = -y \Leftrightarrow y' = -2y \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{-2x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \cdot$$

D'où l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions y définies par :
$y(x) = \lambda e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,25 pt)**

2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\, e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
Déterminons a et b pour que h soit une solution de (E).
On a $h'(x) = ae^{-2x} - 2ax\, e^{-2x}$; $\frac{1}{2}h'(x) = \frac{1}{2}ae^{-2x} - axe^{-2x}$ ·

$$\frac{1}{2}h'(x) + h(x) = \frac{1}{2}ae^{-2x} - ax\, e^{-2x} + axe^{-2x} + b = \frac{1}{2}ae^{-2x} + b.$$

h est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$ ·

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$

$a = 6$ et $b = 2$. **(0,5 pt)**

3) a) g est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}g'(x) + g(x) = 3\, e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Or $\frac{1}{2}h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Donc
g est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}g'(x) + g(x) = \frac{1}{2}h'(x) + h(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}h'(x) + g(x) - h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(g-h)'(x) + (g-h)(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

b) Déduisons-en l'ensemble des solutions de (E).
Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
g est solution de $(E) \Leftrightarrow g - h$ est solution de $(E') \Leftrightarrow g(x) - h(x) = \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

…/… 5

$\Leftrightarrow g(x) = h(x) + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = 6xe^{-2x} + 2 + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme
$g: x \mapsto (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

4) Déterminons la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O.
k est solution de $(E) \Leftrightarrow k(x) = (6x + \lambda)\, e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, la courbe représentative (C_k) de k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O équivaut à $O(0,0) \in (C_k)$
$\Leftrightarrow k(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.
D'où $k(x) = (6x - 2)e^{-2x} + 2$. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x-2)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifions que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \le 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.
D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **(0,5 pt)**

2) Etudions les limites aux bornes de D_f et interprétons graphiquement, si possible, les résultats obtenus.
$\lim\limits_{x \to -\infty} 6x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 6x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$
D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x-2)e^{-2x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x-2)e^{-x} + 2 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. **(0,25 pt)**

x		0		1		$+\infty$
$1-x$		+		0		-

$\lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |1-x| = 0^+$; $\lim\limits_{x \to 1} \ln|1-x| = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} x + \ln|1-x| = -\infty$

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 1^-} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$ **(0,25 pt)**

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 1^+} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 1 - x = 0^- \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f). **(0,25 pt)**

Etudions la limite de f en $+\infty$.
Supposons que $x > 1$.
Alors $1 - x < 0$ et $|1-x| = x - 1$.

$$f(x) = \frac{x + \ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$$

…/… 6

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x}=-1.$$

Posons $t=x-1$. $\quad x\to+\infty \iff t\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-1.$$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **(0,25 pt)**

3) Déterminons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat.

Supposons que $x<0$.

Alors $\frac{f(x)}{x}=\frac{(6x-2)e^{-2x}+2}{x}=\left(\frac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}+\frac{2}{x}$.

On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x}=6$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$ **(0,25 pt)**

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$. **(0,25 pt)**

4) Etudions la continuité de f en 0.

On a $f(0)=[6(0)-2]e^{-2(0)}+2=-2+2=0$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(6x-2)e^{-2x}+2=[6(0)-2]e^{-2(0)}+2=0.$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}=\frac{0+\ln|1-0|}{1-0}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\lim_{x\cdots\to\cdots0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to0} f(x)=0.$$

Or $f(0)=0$, donc

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$; $d'où\ f$ est continue en 0. **(0,5 pt)**

5) Etudions la dérivabilité de f en 0.

Supposons que $x<0$.

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(6x-2)e^{-2x}+2}{x}=6e^{-2x}+\frac{-2e^{-2x}+2}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=6e^{-2x}-2\left(\frac{e^{-2x}-1}{x}\right)=6e^{-2x}+4\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$

On a d'une part, $\lim_{x\to0^-}6e^{-2x}=6$.

D'autre part, posons $t=-2x$.

$x\to0^-\Leftrightarrow t\longrightarrow0^+$

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}=1$; $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=6+4(1)$. Ce qui implique que

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=10$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=10$. **(0,25 pt)**

Supposons que $0<x<1$

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+\ln(1-x)}{1-x}}{x}=\frac{x+\ln(1-x)}{x(1-x)}=\frac{x}{x(1-x)}+\frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}\times\frac{\ln(1-x)}{-x}$

D'une part, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}=1$.

D'autre part, posons $t=-x$.

$$x\to0^+\Leftrightarrow t\longrightarrow0^-.$$

…/… 7

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{-x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

D'où $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1-1\times 1=1-1=0.$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$. **(0,25 pt)**

Comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons géométriquement les résultats obtenus.

(C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente horizontale à droite. **(0,5 pt)**

6) Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]-\infty,0[$.

On a $\forall\, x\in\,]-\infty,0[, f(x)=(6x-2)\,e^{-2x}+2$

$f'(x)=6\,e^{-2x}-2\,(6\,x-2)\,e^{-2x}=[6-2(6x-2)]\,e^{-2x}=(-12x+10)\,e^{-2x}$

$f'(x)=2\,(-6x+5)\,e^{-2x}$.

$\forall\, x\in\,]-\infty,0[, -6x+5>0$ et $e^{-2x}>0$, donc $f'(x)>0$. **(0,25 pt)**

Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]0,+\infty[\backslash\{1\}$.

On a $\forall\, x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}, f(x)=\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

$f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)(1-x)-(-1)\,(x+\ln|1-x|)}{(1-x)^2}$.

$f'(x)=\frac{1-x-1+x+\ln|1-x|}{(1-x)^2}=\frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

$\forall\, x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}, (1-x)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\ln|1-x|$.

$\ln|1-x|>0\Leftrightarrow|1-x|>1\Leftrightarrow 1-x<-1$ ou $1-x>1$.

$\Leftrightarrow -x<-2$ ou $-x>0\Leftrightarrow x>2$ ou $x<0$.

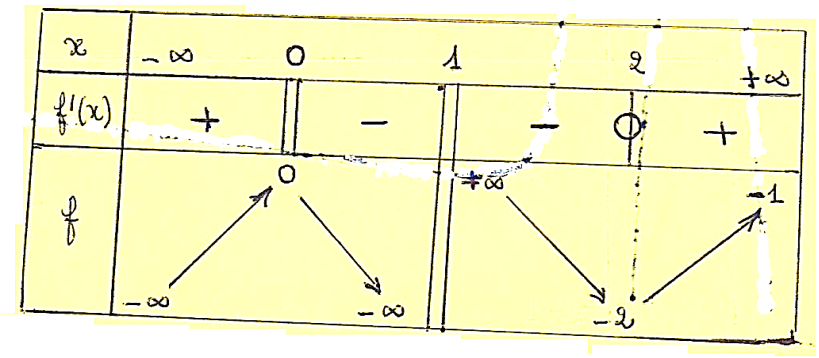
$x<0$ est impossible car $x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in\,]2,+\infty[$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\,]0,1[\cup\,]1,2[$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$. **(0,5 pt)**

7) Dressons le tableau de variations de f



$f(2)=\frac{2+\ln|1-2|}{1-2}$

$f(2)=-2.$

(0,5 pt)

8) Montrons sur l'intervalle $]1\,,2[$ que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que

$$1,2<\alpha<1,3.$$

On a f est continue et strictement décroissante sur $]1,2[$, donc Montrer sur l'intervalle $]1\,,2[$ que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que

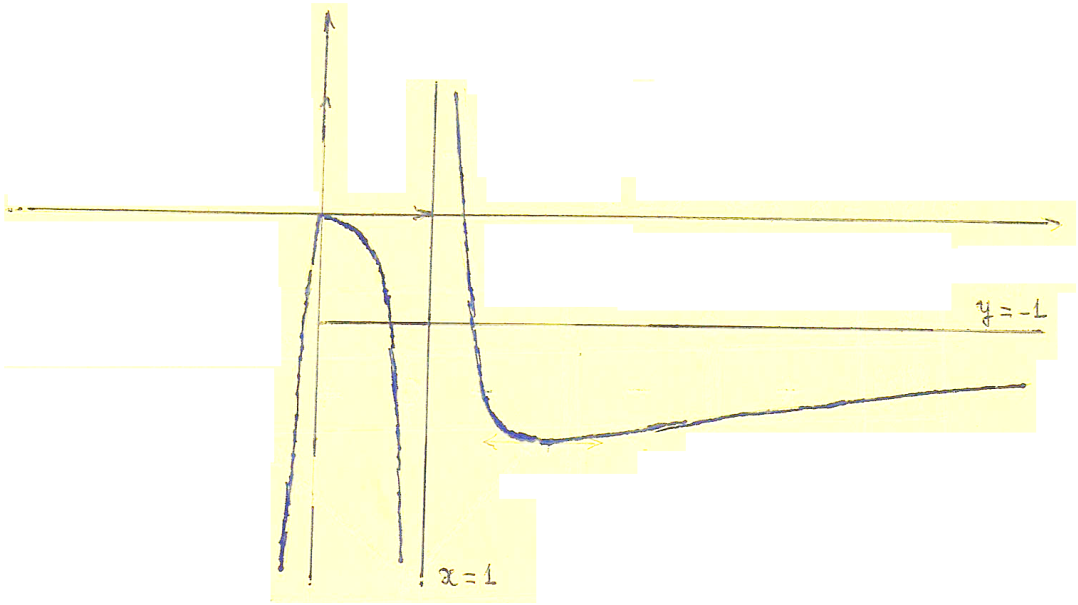
$1,2<\alpha<1,3.$ est une bijection de $]1,2[$ sur $f(]1,2[)=\,]-2,+\infty[$. Or $0\in\,]-2,+\infty[$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

$1,2\in\,]1,2[$ et $1,3\in\,]1,2[$. De plus $f(1,2)\simeq 2$ et $f(1,3)\simeq -0,3$

D'où $f(1,2)\times f(1,3)<0\Longrightarrow 1,2<\alpha<1,3.$ **(0,5 pt)**

9) Construisons (C_f) et ses asymptotes.

$f(3)\simeq -1,85$; $f(4)\simeq -1,7$; $f(1,5)\simeq -1,5$ et $f(0,5)\simeq -0,39.$



(0,75 pt)

10) Calculons en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x = 2, x = 3$, $y = -1$ et la courbe (C_f) de f.

On a $A(E) = \int_2^3 [-1 - f(x)]\,dx \times u.a$, ($u.a$=unité d'aire).

$\forall\, x \in [2,3]$, on a :

$$-1 - f(x) = -1 - \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = \frac{-1 + x - x - \ln(x-1)}{1-x}$$

$$-1 - f(x) = \frac{-1 - \ln(x-1)}{1-x} = \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

$$= [\ln(x-1)]' + \frac{1}{x-1}\ln(x-1) = [\ln[x-1]]' + [\ln(x-1)]'\ln(x-1).$$

D'où $-1 - f(x) = [\ln(x-1)]' + \left[\frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]' = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]'$.

Ce qui implique que $A(E) = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]_2^3 \times u.a = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times u.a$.

On sait que $1\ u.a = 2\ cm \times 2\ cm = 4\ cm^2$; $A(E) = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times 4\ cm^2$

$A(E) = (4\ln 2 + 2\ln^2 2)\ cm^2$ d'où $A(E) \simeq 3{,}73\ cm^2$ **(0,5 pt)**

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

n° 2024GS26NA0132
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5
Coef 5
Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S
C O R R I G É

Exercice 1 (05 points).

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3i, z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.

a. Déterminons le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

On a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{1 + 2i + 2}{-3i + 2} = \dfrac{3 + 2i}{-3i + 2} = \dfrac{i(-3i + 2)}{-3i + 2} = i.$ **0, 25 pt**

Le module de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$:

$\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1.$ **0, 25 pt**

Un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$:

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}.$ **0, 25 pt**

Commentaire *: si le candidat*
- *calcule directement le module du numérateur et celui du dénominateur, puis fait leur rapport pour trouver le module du quotient,*
- *ensuite, détermine un argument du numérateur et un du dénominateur, puis calcule la différence entre les deux pour donner un argument du quotient*

alors vous lui donnez **0, 75 *point***.

b. Déduis-on en **la nature du triangle** ABC.

$\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1 \Longrightarrow \dfrac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = 1 \Longrightarrow \dfrac{BC}{AB} = 1 \Longrightarrow BC = AB,$

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi].$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $BC = AB$, donc le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet principal B. **0, 75 pt**

c. Déterminons l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré.

Comme le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en B, pour que $BADC$ soit un carré, il suffit que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow z_A - z_B = z_D - z_C \Longleftrightarrow 2 - 3i = z_D - 1 - 2i \Longleftrightarrow z_D = 2 - 3i + 1 + 2i.$

D'où $z_D = 3 - i$. **0,5 pt**

d. Montrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$BADC$ est un carré, donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle circonscrit au carré

$BADC$. Son centre est le milieu J de $[AC]$ et son rayon est $r = \frac{1}{2}AC$.

$z_J = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(-3i + 1 + 2i) = \frac{1}{2}(1 - i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

$r = \frac{1}{2}|z_C - z_A| = \frac{1}{2}|1 + 2i + 3i| = \frac{1}{2}|1 + 5i| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 5^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$. **0,75 pt**

Commentaire *: si le candidat démontre que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle par les angles opposés alors vous lui donnez* **0,75 *point***.

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$$

a. Montrons que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 2 - i$.
On sait que $z' = x' + iy'$ et que $x' = x - y + 2$, $y' = x + y - 1$.
Ainsi, on a :

$$z' = x' + iy' = x - y + 2 + i(x + y - 1) = x - y + 2 + ix + iy - i = x + iy + ix - y + 2 - i$$
$$= x + iy + i(x + iy) + 2 - i = (x + iy)(1 + i) + 2 - i = z(1 + i) + 2 - i.$$

D'où $z' = (1 + i)z + 2 - i$. **0,5 pt**

b. Nature et éléments caractéristiques de S

On sait que $z' = (1 + i)z + 2 - i$. Ainsi, z' s'écrit sous la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 + i$, et $b = 2 - i$.

On a $a \neq 1$, donc S est une similitude plane directe de centre $\Omega(z_\Omega)$, de rapport k et d'angle θ, avec

$$z_\Omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{2 - i}{1 - 1 - i} = \frac{2 - i}{-i} = 1 + 2i = z_C,$$
$$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2},$$
$$\theta = \arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

S est la similitude de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. **0,75 pt**

Commentaire *: si le candidat*
— cherche le point invariant $\Omega(z_\Omega)$ de l'application qui à $M(z) \mapsto M'(z')$,
— puis, pour tout $M \neq \Omega$, s'il détermine le rapport $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$,
— ensuite, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$,

alors il a répondu à la question. Vous lui donnez **0, 75 *point*.**

c. Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x+y+1=0$.
On considère l'expression analytique de S :

$$\begin{cases} x' = x-y+2 \quad (\mathbf{E_1}) \\ y' = x+y-1 \quad (\mathbf{E_2}). \end{cases}$$

Exprimons x et y en fonction de x' et y'.

$(\mathbf{E_1})+(\mathbf{E_2}) \Longrightarrow x'+y' = 2x+1 \Longrightarrow x'+y'-1 = 2x \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(x'+y'-1)$.

$(\mathbf{E_1})-(\mathbf{E_2}) \Longrightarrow x'-y' = -2y+3 \Longrightarrow x'-y'-3 = -2y \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}(x'-y'-3)$.

(D) étant la droite d'équation $x+y+1=0$.

$x+y+1=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x'+y'-1)-\frac{1}{2}(x'-y'-3)+1=0 \Longleftrightarrow x'+y'-1-(x'-y'-3)+2=0$

$\Longleftrightarrow x'+y'-1-x'+y'+3+2=0 \Longleftrightarrow 2y'+4=0 \Longleftrightarrow y'+2=0 \Longleftrightarrow y'=-2$.

Soit (D') l'image de (D) par S.

(D') est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan, d'équation $y=-2$.

(D') est donc la droite d'équation $y=-2$. **0, 5 pt**

Commentaire *: si le candidat*
- *choisit deux points distincts de la droite (D), puis détermine leurs images respectives par S*
- *ensuite, utilise les propriétés relatives à l'image d'une droite par une rotation et une homothétie (ou par une similitude plane directe), pour déterminer l'équation de (D') à l'aide des images de points obtenues, alors vous lui donnez* **0, 5 *point*.**

d. Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z+2-i|=2$.

$$\text{On sait que } (1+i)z+2-i = (1+i)\Big(z+\frac{2-i}{1+i}\Big) = (1+i)\Big(z+\frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Big)$$
$$= (1+i)\Big(z+\frac{2-2i-i-1}{2}\Big) = (1+i)\Big(z+\frac{1-3i}{2}\Big)$$
$$= (1+i)\Big(z+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\Big) = (1+i)\Big(z-\big(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\big)\Big) \quad (\mathbf{R})$$

Soit K le point d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

D'après $(\mathbf{R})$, $(1+i)z+2-i = (1+i)\Big(z-z_K\Big)$.
D'où $\Big|(1+i)z+2-i\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|(1+i)\Big(z-z_K\Big)\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|1+i\Big|\Big|\Big(z-z_K\Big)\Big| = 2$

$\Longleftrightarrow \sqrt{2}\Big|z-z_K\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|z-z_K\Big| = \sqrt{2} \Longleftrightarrow KM = \sqrt{2} \Longleftrightarrow M$ appartient au cercle

de centre K et de rayon $\sqrt{2}$. **0, 5 pt**

Commentaire *: si le candidat*

— *détermine l'écriture algébrique du nombre complexe* $(1+i)z+2-i$
— *puis, calcule son module et pose que c'est égal à* 2,
— *ensuite, identifie que l'équation obtenue est celle d'un cercle dont il détermine le centre et le rayon, alors vous lui donnez* $\mathbf{0,5}$ ***point***.

Exercice 2 (05 points).
Dans cet exercice, les outils mathématiques au programme de Terminale $S2$ utilisés par l'élève sont les "**Probabilités**". L'expérience aléatoire consiste à contrôler les articles produits par les usines avant leur mise en vente.

Considérons les événements suivants :

U_1 : les articles proviennent de l'unité U_1 ;

U_2 : les articles proviennent de l'unité U_2 ;

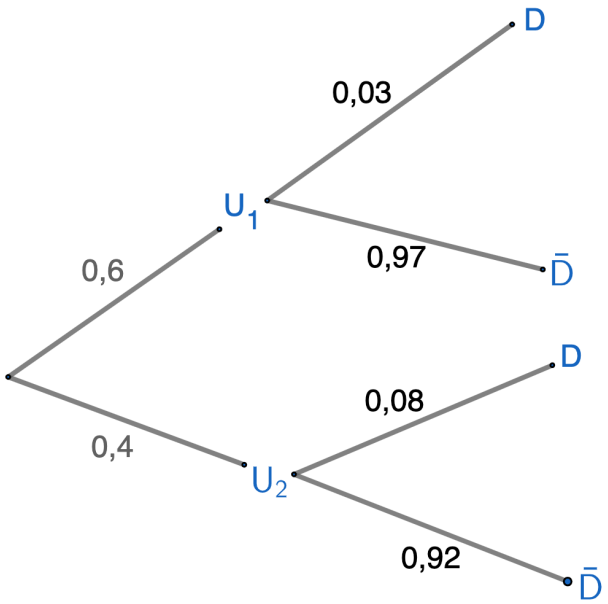
D : les articles présentent un défaut de fabrication ou les articles sont défectueux ;

$\overline{D}$: les articles ne présentant pas un défaut de fabrication ou les articles ne sont pas défectueux.

V : un article est vendu après contrôle ;

$\overline{V}$: un article n'est pas vendu après contrôle.

1. Pour démontrer que 5% des articles produits présentent un défaut de fabrication, il suffit de démontrer que $p(D) = 0,05$. Ainsi,
— premièrement, donnons cet arbre pondéré qui illustre la situation des articles qui présentent un défaut de fabrication :



On peut en déduire que $p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2)$.

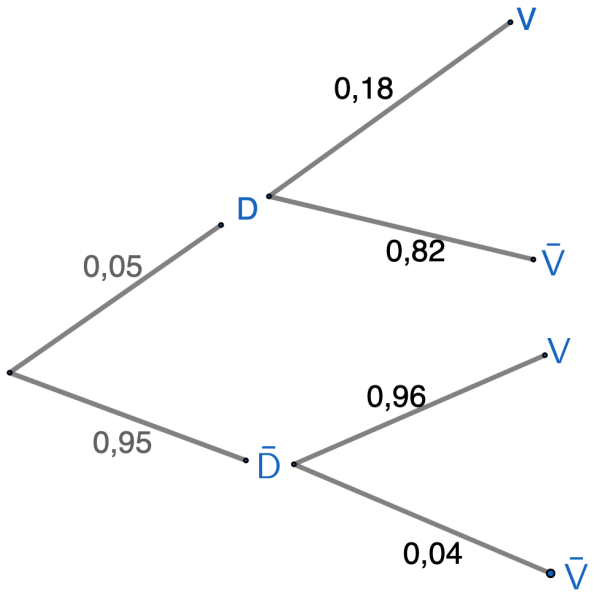
— deuxièmement, déterminons $p(D)$.
On calcule d'abord $p(D \cap U_1)$.

$p(D \cap U_1) = p(D/U_1) \times p(U_1) = 0,03 \times 0,6 = 0,018$.
Puis, on calcule : $p(D \cap U_2) = p(D/U_2) \times p(U_2) = 0,08 \times 0,4 = 0,032$.
Ce qui implique que $p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2) = 0,018 + 0,032 = 0,05$.
Ce qui implique que 5% des articles produits présentent un défaut de fabrication. **2 pts**

Commentaire *: Les* **2 points** *seront distribués comme suit : si le candidat*
— *écrit correctement les formules des probabilités qu'il utilise dans cette situation.* **0,5 *pt*.**
— *calcule correctement la probabilité conditionnelle d'un événement.* **1 *pt*.**
— *utilise la formule des probabilités totales pour obtenir les résultats attendus.* **0,5 *pt*.**

.

2. a. On donne cet arbre pondéré qui illustre la situation qu'un article pris au hasard ait la chance d'être vendu après contrôle.



b. Soit $p(V)$ la probabilité qu'un article pris au hasard soit mis en vente après contrôle.

On a $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \overline{D})$.

On sait que $p(V \cap D) = p(V/D) \times p(D) = 0,18 \times 0,05 = 0,009$

et $p(V \cap \overline{D}) = p(V/\overline{D}) \times p(\overline{D}) = 0,96 \times 0,95 = 0,912$.

D'où $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \overline{D}) = 0,009 + 0,912 = 0,921$.
Donc la chance qu'un article fabriqué pris au hasard soit mis en vente après contrôle est de $0,921$. **2 pts**

Commentaire *: Les* **2 points** *seront distribués comme suit : si le candidat*
— *écrit correctement les formules des probabilités qu'il utilise dans cette situation.* **0,5 *pt*.**
— *calcule correctement la probabilité conditionnelle d'un événement.* **1 *pt*.**
— *utilise la formule des probabilités totales pour obtenir les résultats attendus.* **0,5 *pt*.**

.

3. On sait que $p(V \cap D) = 0,009$. C'est à dire 0, 9% des articles vendus sont défectueux. Or

$0,9\% < 1\%$, donc ce contrôle permet à l'entreprise de réaliser son souhait. **1 pt**

Commentaire *: si le candidat interprète correctement les résultats obtenus en indiquant ce que l'entreprise pourrait prendre comme décision, alors vous lui donnez* **1 *pt*.**

PROBLEME (10 points).

Commentaire *: dans les deux parties qui suivent, le correcteur doit tenir compte de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats dans l'appréciation des copies des élèves.*

Partie A

1. Pour tout $x < 0$, on pose : $u(x) = x + 1 - e^{-x}$.

Étudions le signe de $1 - e^{-x}$ pour $x < 0$.

$x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \Longrightarrow e^{-x} > 1 \Longrightarrow 1 - e^{-x} < 0,$ **0,25 pt**

Déduisons-en que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$.

On sait que $\left.\begin{array}{c} x < 0 \\ 1 - e^{-x} < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x + 1 - e^{-x} < 0 \Longrightarrow u(x) < 0.$ **0,25 pt**

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $v(x) = x - 1 - \ln x$.

a. Dressons le tableau de variations de v.

Limites aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} v(x) = +\infty$.

$v(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$.

Continuité de v :

La fonction qui à $x \mapsto x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ car étant une fonction polynôme, donc elle continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

La fonction qui à $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$,

Par somme, la fonction v est continue sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité de v :

La fonction qui à $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car étant une fonction polynôme, donc elle dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

La fonction qui à $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,

v est dérivable sur $]0,+\infty[$ par somme et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ v'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ v'(x)$ est du signe de $x-1$.

Tableau de signe de $x-1$:

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0,5 pt

$v'(x) > 0 \iff x \in\ ]1,+\infty[,$

$v'(x) < 0 \iff x \in]0,\ 1[,$
$v'(x) = 0 \iff x = 1.$

v est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[,\ \ v(1) = 0.$

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
v	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0,5pt

b. D'après le tableau de variations, v admet un minimum en 1 sur $]0,+\infty[$ et ce minimum est 0. Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ v(x) \geq 0.$ **0,5 pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a. $f(x)$ existe $\iff x \leq 0$ ou $x > 0 \iff x \in \mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$. **0,5 pt**

b. Étudions les **limites de** f **en** $-\infty$ **et en** $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. **0,25 pt**

Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x = x^2\Big(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}\Big)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\dfrac{\ln x}{x} = 1$,
par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. **0,25 pt**

c. Supposons que $x \leq 0$. Alors $f(x) = xe^x - x - 1 = -x - 1 + xe^x$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. **0,25 pt**

Position relative de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$:

$\forall x \in]-\infty,\ 0[,\ \ f(x) + x + 1 = xe^x$. Or $x < 0$ et $e^x > 0$, donc $f(x) + x + 1 < 0$, d'où $(\mathcal{C}_f)$

est en dessous de $(\mathcal{D})$. **0,25 pt**

d. Etudions la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

$\forall x \in]0,\ +\infty[,\ \ f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = x\Big(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}\Big)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$. **0,5 pt**

2. a. Etudions la continuité de f en 0 :

D'une part, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} -x - 1 + xe^x = -1$,

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -1$.

On a en plus $f(0) = 0e^0 - 0 - 1 = -1$.

On obtient le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0. **0,5 pt**

b. Etudions la dérivabilité de f en 0 :

Supposons que $x < 0$. Alors on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{xe^x - x - 1 + 1}{x} = \dfrac{x(e^x - 1)}{x} = e^x - 1$. D'où, $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} e^x - 1 = 0$.

Supposons que $x > 0$. Alors on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x^2 - 1 - 2x\ln x + 1}{x} = \dfrac{x(x - 2\ln x)}{x} = x - 2\ln x$.

D'où, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} x - 2\ln x$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2\ln x = -\infty$. Donc

f n'est pas dérivable à droite en 0, d'où f n'est pas dérivable 0. **0,5 pt**

$(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente verticale à droite. **0, 5 pt**

3. a. Etudions la dérivabilité de f sur $]-\infty,\ 0[$

On sait que $\begin{cases} x \mapsto e^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto xe^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit}, \\ x \mapsto -x-1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \end{cases}$

D'où $f : x \mapsto xe^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme.

Donc, $f : x \mapsto xe^x - x - 1$ est dérivable pour tout $x < 0$.

Déduisons-en le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,\ 0[$

On a $f'(x) = e^x + xe^x - 1 = e^x(1 + x - \frac{1}{e^x}) = e^x(1 + x - e^{-x}) = u(x)e^x$, **0,5 pt**

Sur $]-\infty, 0[$, $u(x) < 0$ et $e^x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty,\ 0[$. **0,25 pt**

b. Etudions la dérivabilité de f sur $]0,\ +\infty[$

On sait que $\begin{cases} x \mapsto x^2 - 1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto 2x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,\ +\infty[, \\ x \mapsto 2x \ln x \text{ est dérivable sur }]0,\ +\infty[\text{ par produit}, \end{cases}$

D'où $f : x \mapsto x^2 - 1 - 2x \ln x$ est dérivable sur $]0,\ +\infty[$ par somme.

Donc, $f : x \mapsto x^2 - 1 - 2x \ln x$ est dérivable pour tout $x > 0$.

On a $f'(x) = 2x - 2(\ln x + x \times \frac{1}{x}) = 2x - 2(\ln x + 1) = 2(x - \ln x - 1) = 2v(x)$. **0,5 pt**

Déduisons-en le signe de $f'(x)$ sur $]0,\ +\infty[$:

Sur $]0\ \ +\infty[$, $v(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $]0\ \ +\infty[$. **0,25 pt**

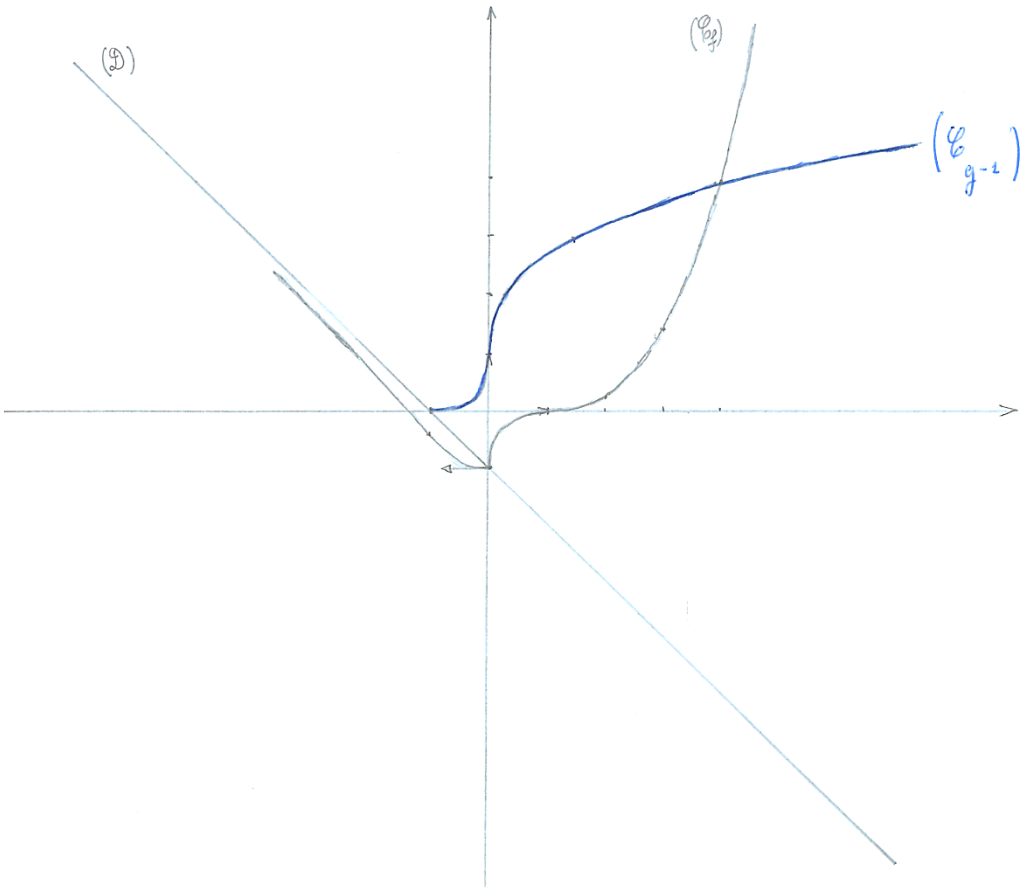
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow v(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

c. Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\|\|$	↗	0	↗	$+\infty$
			$\|\|$		-1		

0, 5 pt

4. Traçons la (D) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
$f(-1) \simeq -0,4$; $f(2) \simeq 3 - 4\ln 2$; $f(3) \simeq 8 - 6\ln 3$; $f(4) \simeq 3,9$.



0, 25 + 0, 5 pt

5. a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

g est continue et strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$ donc g est une bijection de $]0,\ +\infty[$ sur $g(]0,\ +\infty[) =]-1,\ +\infty[$. Par conséquent, g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur $]-1,\ +\infty[$. $D_{g^{-1}} =]-1,\ +\infty[$.

g est strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$, donc g^{-1} est strictement croissante sur $]-1,\ +\infty[$. **$0,25 + 0,25 + 0,25$ pt**

b. Voir figure. **$0,25$ pt**

6. a. Soit λ un réel strictement positif,
$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} [-x - 1 - f(x)]\, dx \times u.a = \int_{\lambda}^{0} -xe^x dx \times u.a = -\int_{\lambda}^{0} xe^x dx \times u.a,$

Posons $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $v'(x) = 1$. Choisissons $u(x) = e^x$

$$\int_{\lambda}^{0} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0} v('x)u(x)dx.$$

$$\Longrightarrow \int_{\lambda}^{0} xe^x dx = [xe^x]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0} e^x dx = \lambda e^{\lambda} - (1 - e^{\lambda}).$$

$$\Longrightarrow \int_{\lambda}^{0} xe^x dx = -\lambda e^{\lambda} - 1 + e^{\lambda}.$$

$A(\lambda) = (\lambda e^{\lambda} + 1 - e^{\lambda}) \times 1cm^2$. **$0,5$ pt**

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \lambda e^{\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\lambda} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} A(\lambda) = 1cm^2$ **$0,25$ pt**

Epreuves

2ième

Groupe

M.MENDES

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE I (04 Points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, l'urne U_2 contient 6 boules rouges et 5 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2.
On tire ensuite une boule de U_2.
On note R_1 l'événement : « on a tiré une boule rouge de U_1 » ; R_2 l'événement « on a tiré une boule rouge de U_2 ».
a) Déterminer p (R_1) et p (R_2 / R_1).
b) En déduire la probabilité d'avoir tiré une boule rouge de U_1 et une boule rouge de U_2.
c) Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge et une boule blanche.

EXERCICE 2 (05 Points)

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$U_o = 1$; $U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n - 1$ et $V_n = U_n + 3$

1/ Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2/ Calculer V_n en fonction n.

3/ a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n.

b) En déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + ... + U_n$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n'$

EXCERCICE 3 (05 Points)

1/ Déterminer les fonctions définies sur IR, solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y'' - 2y' + y = 0$
2/ On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' - 2y' + y = 2x + 3$

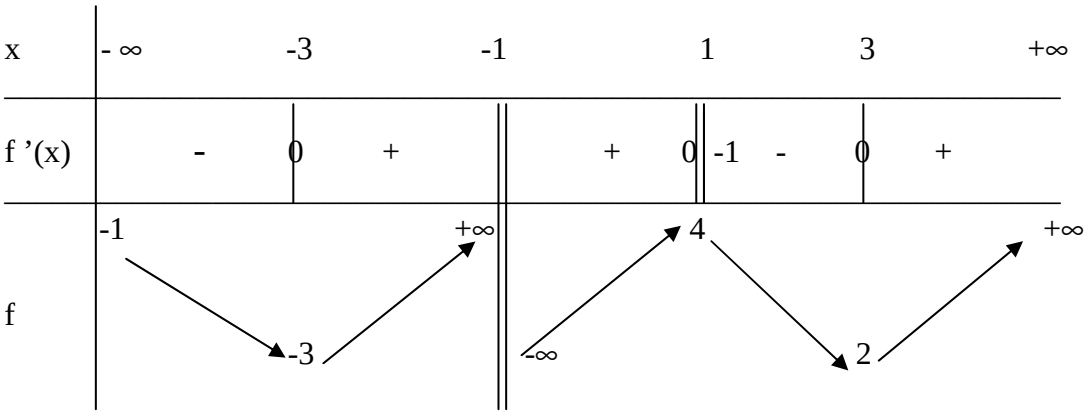
a) Vérifier que la fonction p définie sur IR par : $p(x) = 2x+7$ est solution de (E_2)
b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si et seulement si g - p est solution de (E_1)

.../2

c) Déduire de 1) et 2b) les solutions de (E_2)
d) Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie g (0)=1 et g' (0) = 2

EXERCICE 4 **(06 Points)**

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = -1$



La courbe $(\mathcal{C})$ de f coupe l'axe des abscisses en A(-2,0) et B ($\frac{-1}{2}$,0) et l'axe des ordonnées au point C (0,2)
La droite (D) d'équation y = x-3 est asymptote oblique en + ∞ et est en dessous de $(\mathcal{C})$ sur [0, + ∞ [

1/ a) Donner l'ensemble de définition de f.
b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f.
2/ Donner en justifiant toutes les asymptotes de la courbe.
3/ Donner l'équation de chacune des demi tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
4/ Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1cm.
On mettra en évidence toutes les informations contenues dans le tableau de variations.
5) a) La restriction g de f à l'intervalle [3, + ∞ [est-elle bijective ? Justifier la réponse.
b) g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Justifier la réponse ?
6) En utilisant la représentation graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation f(x) =m admet exactement quatre solutions distinctes réelles.

B A R E M E

EXERCICE 1 **(04 points)**
a) : 01 + 01 point
b) : 0,5 point
c) : 01,5 point

EXERCICE 2 **(05 points)**
1) : 01 point
2) : 01 point
3) a) : 01 point
b) : 01 point
c) : 0,5 + 0,5 point

EXERCICE 3 **(05 points)**
1) : 01 point
2) a) : 01 point
b) : 01 point
c) : 01 point
d) : 01 point

EXERCICE 4 **(06 points)**
1) a) : 0,5 point
b) : 0,5 point
2) : 01 point
3) : 01 point
4) : 01,5 point
5) a) : 0,5 point
b) : 0,5 point
6) : 0,5 point

08 G 26 B 01
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (03 points)

1) Trouver les réels a et b tels que : pour tout x appartenant à]0 ; 1 [U] 1 ; +∞[,

$\frac{1}{x\,(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$. **(01 pt)**

2) Par intégration par parties, Calculer J = $\int_2^3 \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$. **(02 pts)**

EXERCICE 2 (05,25 points)

Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 4 = 0$

1) Soient α et β les solutions de cette équation avec Im (α) > 0.

a) Donner la forme algébrique de α et de β. **(01 pt)**

b) Mettre α et β sous forme trigonométrique et placer leurs images dans le plan complexe. **(01,75 pt)**

2) Déterminer $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$ en fonction de β. Qu'en déduire pour α^3 et β^3 ? **(01 + 0,5 pt)**

3) Mettre β^{24} sous forme algébrique. **(01 pt)**

EXERCICE 3 (05,75 points)

1) Soit (E) l'équation différentielle y' + 2y = 0 où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Résoudre l'équation (E). **(01 pt)**

b) Déterminer la solution f de (E) telle que f(0) = 1. **(01 pt)**

2) Calculer $\int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx$. **(01 pt)**

3) Soit (U_n) la suite définie par : pour tout n entier naturel, $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\,e^{-2n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de U_0, U_1 et U_2. **(0,75 pt)**

b) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. **(01 pt)**

c) Déterminer la valeur exacte de la somme : $U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_9$. **(01 pt)**

Epreuve du 2ème groupe

EXERCICE 4 **(04 points)**

Dans une mare vivent des grenouilles. Les 30 % sont des rainettes et le reste des grenouilles vertes. 10 % des rainettes et 20 % des grenouilles vertes sont malades.
On prélève au hasard une grenouille de la mare.
On considère les événements suivants :

A : « la grenouille prélevée est une rainette malade »
B : « une rainette malade n'est pas prélevée »
C : « La grenouille prélevée n'est pas malade »
D : « Une grenouille verte non malade est prélevée »
E : « La grenouille prélevée n'est pas verte »

Calculer : p(A) ; p(B) ; p(C) ; p(D) ;et p(E). **(0,5+0,5+1+1+1= 4 points)**

EXERCICE 5 **(02 Points)**

On considère les fonctions numériques f, g et h à variables réelles, définies par :

(0,5 x 3 = 01,5pt)

$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}\ \ln \frac{x-3}{x}$ et $h(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions. **(0,5 x 3 = 01,5pt)**

2) Etudier la continuité de h. **(0,5pt)**

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 26 B 01
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE- 1 (05,5 Points)

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On lance ce dé quatre fois de suite. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de sorties du nombre 6.

a) Etudier la loi de X. (Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles) **(02 points)**

b) Etudier la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 6. **(01 point)**

2) On lance ce dé n fois de suite. Soit p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 6.

a) Montrer que $p_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. **(01point)**

b) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq \frac{1}{2}$? **(01 point)**

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. **(0,5 point)**

EXERCICE- 2 (04 Points)

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 9e \\ U_{n+1} = 3\sqrt{U_n}, \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer V_0. **(01,5 point)**

2) Calculer V_n puis U_n en fonction de n. **(02 points)**

3) Etudier la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. **(0,5 point)**

EXERCICE-3 (04 Points)

Soit un entier naturel n non nul

1) Calculer en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin nx \, dx$. **(0,5 point)**

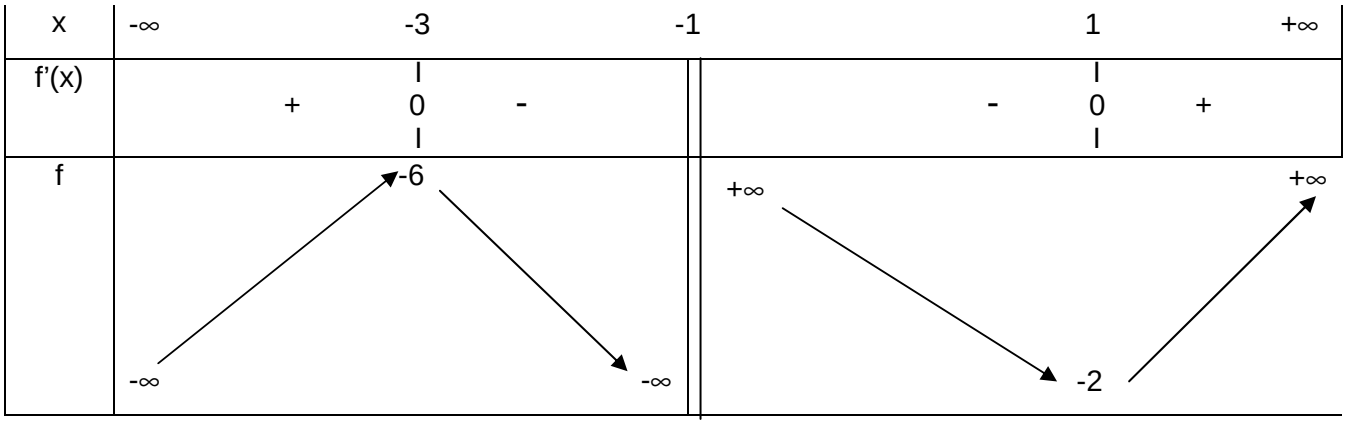
2) Linéariser l'expression $\sin^3 x \cos^3 x$. **(02 points)**

3) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\pi} 3\left[\frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 6x\right] dx$. **(01,5 point)**

…/…2

EXERCICE- 4 (06,5 Points)

Soit f une fonction dont le tableau complet des variations est le suivant.



1/ Préciser l'ensemble de définition D_f de f. **(01 point)**

2/ Déterminer les limites aux bornes de D_f. **(01 point)**

3/ Combien de fois la courbe $(\mathcal{C})$ de f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? **(01 point)**

4/ La courbe coupe-t-elle l'axe des ordonnées? Justifier la réponse. **(0,5 point)**

5/ On suppose que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

a) En utilisant des données du tableau démontrer que :

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} + \frac{2}{x+1}$. **(02 points)**

b) Montrer que le point I (-1 ; - 4) est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. **(01 point)**

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE- I (04 points)

La production en ciment d'un pays est assurée par deux usines A et B. L'usine A fournit les 70% de la production et l'usine B le reste. Les sacs produits sont soumis à un essai.

Sur 100 sacs fournis par l'usine A, 83 satisfont aux normes et sur 100 sacs fournis par l'usine B, 63 satisfont aux normes.

1) Quelle est la probabilité pour qu'un sac quelconque satisfasse aux normes. **(02 points)**
2) Soit un sac satisfaisant aux normes. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'usine B ? **(02 points)**

EXERCICE- II (06 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^4 + (1+a)z^2 + b = 0$ avec a $\in \mathbb{C}$ et b $\in \mathbb{C}$

1) On pose a = cos Θ + i sin Θ et b = 4 avec $\Theta \in [o\ ;\ \pi]$
   a) Pour quelles valeurs de Θ l'équation (E) a-t-elle ses coefficients réels ? **(02 points)**
   b) Résoudre l'équation (E) pour $\Theta = \pi$. **(02 points)**

2) Soit a = b = i.

   Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. **(02 points)**

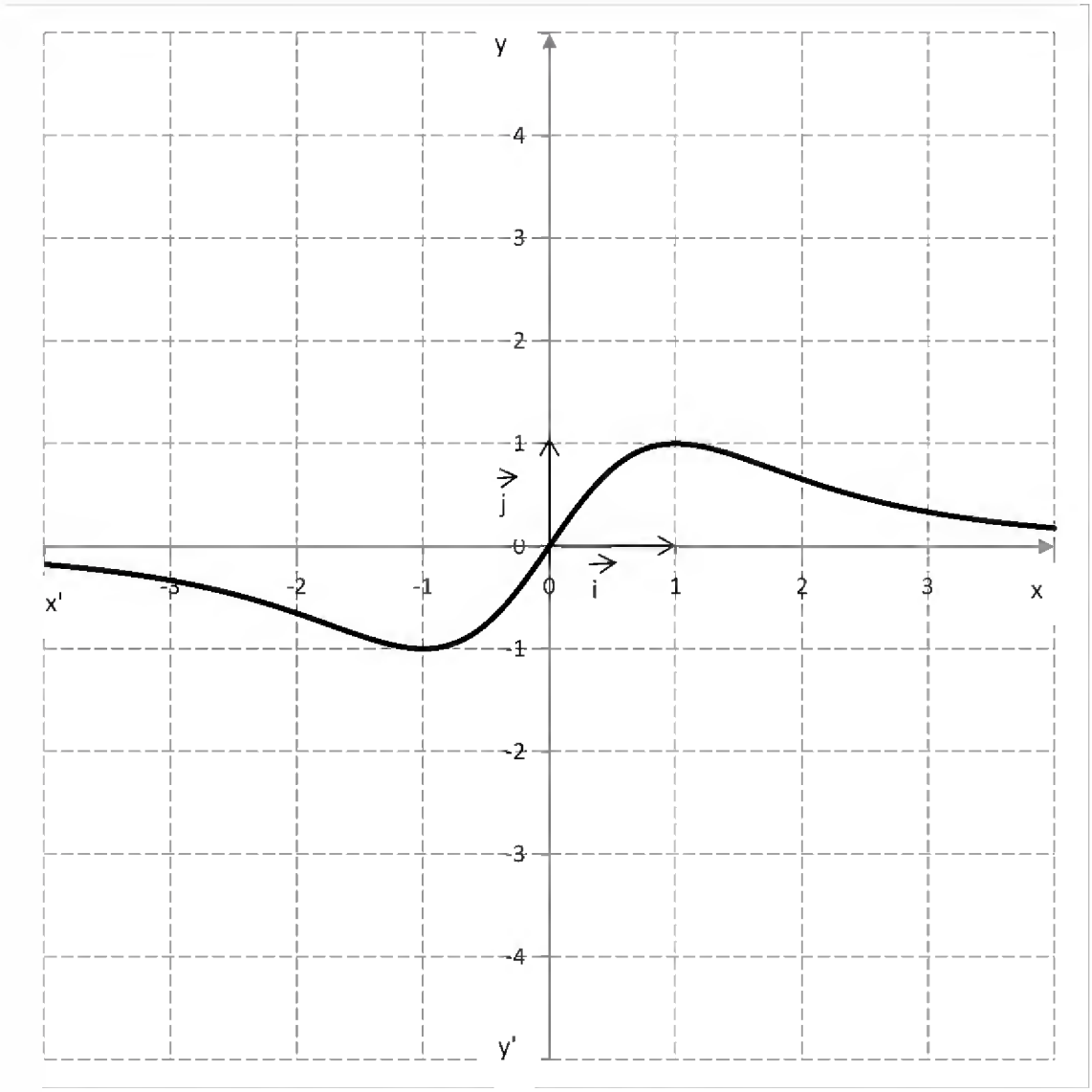
EXERCICE- III (10 points)

f est une fonction définie et dérivable sur IR. La courbe représentative de la fonction dérivée f' est donnée ci après (page 2).

1) - a) Déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x. **(01 point)**
   b) Dresser le tableau de variations de f. **(01 point)**
   c) En déduire que f admet un extrémum en x = 0. **(01 point)**

…/…2

Epreuve du 2ème Groupe



2) a) Déterminer graphiquement l'image de IR par f'. **(01 point)**

b) On suppose que f(0) = 0. Montrer que pour tout x ∈ IR, on a : $|f(x)| \leq |x|$. **(02 points)**

3) On suppose que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{ax+b}{\left(x^2+3\right)^2}$.

a) A partir des données extraites de la figure, déterminer a et b. **(02 points)**

b) Déterminer par un calcul de primitives la fonction f. **(02 points)**

11 G 26 B 01
Durée : 2 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5
Epreuve du 2ème groupe

M A T H E M A T I Q U E S

EXERCICE I (05 points)

On considère le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

1) Calculer z^2. **(01 pt)**

2) a) Ecrire z^2 sous forme trigonométrique. **(01 pt)**

b) En déduire le module et un argument de z. **(01,5 pt)**

3) Calculer z^6. **(01,5 pt)**

EXERCICE II (04 points)

1) Déterminer les nombres réels a et b

tels que pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$ et

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. **(01 pt)**

2) Calculer $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$. **(01,5 pt)**

3) En utilisant une intégration par parties calculer

$J = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$. **(01,5 pt)**

EXERCICE III (06 points)

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 1, \; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) On pose $V_n = U_n - \frac{3}{2}$.

Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_1. **(02 pts)**

2) Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n. **(01 + 01 pts)**

3) Etudier la convergence de la suite $(V_n)n \geq 1$ et en déduire celle de la suite $(U_n)n \geq 1$.

(01 + 01 pts)

.../...2

EXERCICE IV **(05 points)**

Dan un jeu, on dispose d'une urne contenant 3 boules vertes et 2 boules blanches et d'un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Une partie consiste pour un joueur à prélever au hasard une boule de l'urne ;

- Si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne la partie si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4.
- Si la boule tirée est verte, il lance le dé et gagne la partie si le numéro obtenu est pair.

On considère les événements.

B : «Le joueur tire une boule blanche».

G : «Le joueur gagne la partie».

1) Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche. **(01 pt)**
2) Montrer que la probabilité de gagner la partie est $\frac{17}{30}$. **(02 pts)**
3) Le joueur gagne la partie, quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ? **(02 pts)**

12 G 26 B 01
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

M A T H E M A T I Q U E S

EXERCICE 1 (05 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n + an + b$

1) Soit $V_n = -U + n$. Déterminer a et b pour que (V_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 point)**

2) a) Ecrire V_n et U_n en fonction de n. **(01 point)**
   b) calculer la limite de V_n. **(01 point)**

3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_n$ puis $S' = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$. **(01 +01 point)**

EXERCICE 2 (06 points)

On considère la fonction sur [0 , +∞[définie par $\begin{cases} f(x) = x\ln x - x \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0. **(0,5 + 0,5 point**

2) Dresser le tableau de variation de f. **(03 points)**

3) Tracer la courbe de f. **(02 points)**

EXERCICE 3 (05 points)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, u, v).

1) Déterminer l'expression complexe et les éléments caractéristiques de la similitude qui transforme A(1 + 2i) en B(1 + 3i) et qui laisse C(2i) invariant. **(01 + 01 point)**

2) Quelle est l'image de E (3i – 1) par cette similitude ? **(01 point)**

3) a) Donner l'expression analytique de S. **(01 point)**
   b) Quelle est l'image de la droite (D) : x + 2y + 1 = 0 par S ? **(01 point)**

EXERCICE 4 (04 points)

Dans un sac contenant 3 boules rouges, 4 boules jaunes et 2 boules vertes indiscernables au toucher, on tire simultanément trois boules de ce sac. Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les boules sont de la même couleur » B : « l'une seulement des boules est rouge »
C : « les boules sont de couleurs différentes » D : « au moins une des boules est verte ».

(04 x 01 point)

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 2

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 26 B01
2 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 2^{eme} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (05 points).

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes $z_A = -2$ et $z_B = -1 + i$.
A tout point M d'affixe z différent de -2, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz + i + 1}{z + 2}$.
Déterminer puis tracer l'ensemble E des points M tels que $|z'| = 1$. **2, 5pts**

2. Soit le polynôme P définie par $P(z) = z^3 + (-2 + i)z^2 + z - 2 + i$.
a. Vérifier que i et $-i$ sont des racines de P. **0, 5pt**
b. Factoriser $P(z)$ en polynômes du premier degré. **2pts**

Exercice 2 (05 points).

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \ln \frac{2n + 1}{2n - 1}.$$

1. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4. **1pt**

2. Calculer $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$. **1pt**

3. Etudier la convergence de la suite (U_n). **0, 5pt**

4. Soit $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
a. Montrer que $S_n = \ln(2n + 1)$. **2pts**
b. Calculer la limite de S_n en $+\infty$. **0, 5pt**

Exercice 3 (05 points).

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 0$. **1, 5pt**

2. a. Trouver la solution f de (E) telle que $f(0) = \dfrac{1}{2}$. **1, 5pt**
b. Déterminer le réel a tel que $\int_0^a f(x)dx = 2$. **2pts**

Exercice 4 (05 points).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + z & = & 16 \\ x - y + z & = & 6 \\ x - 4y + 19z & = & 153 \end{cases}$$

2pts

2. Considérons la série (X_i, Y_i) suivante :

x_i	a	4	b	8	c	12
y_i	-3	a	4	-b	7	c.

a. Exprimer $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$ en fonction des réels a, b et c. **1, 5pt**

b. Déterminer a, b et c sachant que : $\overline{X} = \frac{40}{6}$, $\overline{Y} = \frac{14}{6}$ et $cov(X, Y) = \frac{179}{18}$. **1, 5pt**

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 26 B 18
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (06 points)

Chaque bonne réponse rapporte 1,5 point et chaque mauvaise ou absence de réponse vaut 0 point. Choisir la bonne réponse.

i est un nombre complexe

1) i^{2018} est égal à :

a) $2018i$; **b)** $-i$; **c)** 1; **d)** -1.

2) $cos^3 x$ est égal à :

a) $\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$; **b)** $3\cos x$; **c)** $1 - \sin 3x$; **d)** $\cos 2x \sin x - \cos x \sin 2x$.

3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{12}$ est égal à :

a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** $12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$.

4) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ est égal à :

a) $\frac{1}{e}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** e.

EXERCICE 2 (05 points)

Une école de formation professionnelle veut organiser des circuits de sorties pédagogiques comprenant, dans un ordre donné, les 6 villes sénégalaises : Dakar, Fatick, Kédougou, Saint-Louis, Thiès et Ziguinchor.

1) Combien y a-t-il de circuits possibles ? **(01 pt)**
2) Si la première ville visitée est Saint-Louis, combien peut-on organiser de circuits ? **(01 pt)**
3) Cette école programme aussi des circuits permettant de visiter successivement 2 villes.
   a) Si les excursions sont organisées dans les 6 villes citées précédemment, quelle est la probabilité pour que Fatick ou Ziguinchor en fasse partie ? **(01,5 pt)**
   b) Si l'école décide d'organiser 56 circuits dans d'autres villes, combien de villes différentes va-t-elle faire visiter ? **(01,5 pt)**

EXERCICE 3 (04 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = e^{2-n}$.

1)
a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme. **(01 pt)**
b) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln U_n$.
Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme. **(01 pt)**

2) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n$.
   a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n. **(01 pt)**
   b) Etudier la convergence de (S_n) et de (P_n). **(01 pt)**

EXERCICE 4 (05 points)

1) En utilisant une intégration par partie calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx$. **(02 pts)**
2) Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\,dx$. **(03 pts)**

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (4 pts)

On considère la série statistique à double caractère, X et Y, donnée par le tableau ci-dessous.

Y \ X	$45 \leq x < 50$	$50 \leq x < 55$	$55 \leq x < 60$
$150 \leq y < 155$	9	1	0
$155 \leq y < 160$	18	4	1
$160 \leq y < 165$	5	12	6

1) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type δ_X de la variable X. **(1 pt)**
   b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type δ_Y de la variable Y. **(1 pt)**
2) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y. **(1,5 pt)**
   b) Un ajustement affine de la série (X, Y) est-il justifié ? **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (7 pts)

La fonction f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$

1) Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$. **(0,5 pt)**
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$. **(0,5 pt)**
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{f(x)+3}$. **(0,5 pt)**
2) Déterminer le nombre de solutions dans D_f de l'équation : $f(x) = 5$. **(0,5 pt)**
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha > 0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. **(1 pt)**
4) Dans cette question, on suppose que f est dérivable en tout point de D_f.
   a) Préciser le nombre dérivé de f en -1 en le justifiant clairement. **(0,75 pt)**
   b) Dresser le tableau de signe de f ' dérivée de f. **(0,75 pt)**
5) On suppose maintenant que le point d'abscisse -1 est un point anguleux de la courbe représentative de f à demi-tangentes non verticales et non horizontales.
   a) Préciser le signe des nombres dérivés de f à gauche et à droite en -1. **(1 pt)**
   b) Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm. **(1,5 pt)**

EXERCICE 3 (04 pts)

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 4y'' - 8y' + 13y = 0$. **(1,5 pt)**
2) Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ et admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$ en ce point. **(2,5 pts)**

EXERCICE 4 (05 pts)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2. **(1,5 pt)**
2) Montrer que $u_n = -\frac{1}{2} e^{-2n}(e^{-2} - 1)$. **(1,5 pt)**
3) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. **(1 pt)**
4) Calculer la somme : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. **(1 pt)**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 2

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

20 G 26 B 01
2 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

Epreuve du 2^{nd} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (**10 points**). Plusieurs réponses peuvent être exactes. Choisir les bonnes réponses en les justifiant. Chaque réponse juste est notée (**1 point**) et chaque réponse fausse (**0 point**).

1. Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x)}{2x^2+3} = 1$. Alors on peut conclure que :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2x^2+3$, **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(f(x) - 2x^2\Big) = 1$.

2. Soit la suite $\Big(U_n\Big)$ définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Alors on peut conclure que :

a. la suite $\Big(U_n\Big)$ converge vers 0, **b.** la suite $\Big(W_n\Big)$ définie par $W_n = U_n - 1$ est géométrique,

c. la suite $\Big(U_n\Big)$ est bornée, **d.** la suite $\Big(V_n\Big)$ définie par $V_n = \ln\Big(U_n - 1\Big)$ est arithmétique.

3. Une urne contient 6 jetons blancs et 4 jetons noirs. On tire un jeton 10 fois de suite avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus à l'issue des 10 tirages. Alors on peut conclure :

a. X est une loi binomiale de paramètre 10 et $\dfrac{2}{5}$, **b.** $P(X=0) = \dfrac{1}{2^{10}}$,

c. $P(X \leq 7) = 1 - P(X \geq 7)$, **d.** $E(X) = 4$.

4. Soit $z' = \dfrac{2z-1}{z+i}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Alors on peut conclure que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$:

a. est un cercle passant par l'origine, **b.** est une droite,

c. est une droite privée d'un point, **d.** est un cercle privée d'un point.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \Big(2\dfrac{\ln t}{t}\Big)dx$. Alors on peut conclure que :

a. pour tout $n \geq 1$, $I_n = 2n+1$, **b.** la suite $\Big(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\Big)$ a pour limite 2.

c. pour $k \geq 1$, $I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_k = k^2 + 2k$, **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(I_{n+1} - I_n\Big) = 0$.

Exercice 2 (**10 points**).

On considère une fonction numérique f d'une variable réelle x. La droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est une tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

1. a. Déterminer $f'(2)$. **1pt**

b. Calculer $f(2)$. **1,5pt**

c. Sachant que $f(x) = a\ln(\frac{x}{2}) + b$, déterminer a et b. **2pts**

2. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $g(x) = f(x^2 + 1)$.

On note (C_g) la courbe représentative de g et P un point de (C_g) d'abscisse $x = 1$.

a. Montrer que la tangente (Δ') à (C_g) au point P a pour coefficient directeur 6. **1pt**

b. Donner l'équation cartésienne de (Δ'). **1,5pts**

c. Montrer que $g(x) = 6\ln(\frac{x^2+1}{2}) + 7$. **1pt**

3. Donner les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ'). **2pts**

Epreuve du 2e groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (10 points)

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est juste. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie en la justifiant. Chaque bonne réponse rapporte (**2 points)**. Une réponse fausse ou une absence de réponse est notée **0.**

1. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ est égale à :
   a. 2 **b.** $+\infty$ **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** 0
2. Si $p(A) = \frac{7}{10}$, $P_A(E) = \frac{2}{5}$ et $p(E) = \frac{31}{100}$, alors la probabilité de A sachant E, $P_E(A)$ est égale à :
   a. $\frac{7}{25}$ **b.** $\frac{28}{31}$ **c.** $\frac{3}{25}$ **d.** $\frac{2}{5}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le complexe $(1+i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a. $n = 4k$ **b.** $n = 2 + 4k$ **c.** $n = 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$
4. Si $F : x \mapsto x(\alpha \ln x + \beta)$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto -\ln x$, alors (α, β) est égal à :
   a. $(-1, 0)$ **b.** $(0, 1)$ **c.** $(-1, 1)$ **d.** $(-1, -1)$
5. L'intégrale $\int_{-2}^{4} \frac{2x}{x^2+1} dx$ est égale à :
   a. $\ln\frac{17}{5}$ **b.** $-\ln 17 + \ln 5$ **c.** $\ln 17 + \ln 5$

Exercice 2 (10 points)

Soit f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{5}, 2\right[$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{1}{5}\right[\cup]2, +\infty[$; $f'\left(\frac{1}{5}\right) = 0$.
- $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x - 2] = 0$.
- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)-3}{x-2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-3}{x-2} = -\infty$.

1. Dresser le tableau de variations de f. **(2,5 pts)**
2. Donner les équations des asymptotes à la courbe (Cf) de f. **(2 pts)**
3. f est-elle dérivable en 0, en 2 ? Justifier les réponses. **(2 pts)**
4. Préciser les tangentes ou demi-tangentes à (Cf). **(1,5 pt)**
5. Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé d'unité graphique $1\ cm$. **(2 pts)**

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (07 points)

Une urne contient trois pièces de 5 francs, cinq pièces de 10 francs et deux pièces de 25 francs. On tire simultanément deux pièces.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
Dans chaque énoncé donner en justifiant la bonne réponse. **1point** pour chaque réponse correcte justifiée.

1. A « On tire deux pièces de 5 francs ». Alors la probabilité de l'événement A est :
   a. $P(A)=\frac{9}{15}$ b. $P(A)=\frac{3}{15}$ c. $P(A)=\frac{1}{15}$ d. $P(A)=\frac{2}{15}$.
2. B « On tire deux pièces de 10 francs ». Alors :
   a. $P(B)=\frac{7}{15}$ b. $P(B)=\frac{2}{15}$ c. $P(B)=\frac{4}{15}$ d. $P(B)=\frac{2}{9}$.
3. C « On tire une pièce de 10 francs et une pièce de 5 francs ». Alors :
   a. $P(C)=\frac{4}{15}$ b. $P(C)=\frac{5}{15}$ c. $P(C)=\frac{7}{15}$ d. $P(C)=\frac{9}{15}$.
4. G « On tire deux pièces de 25 francs ». Alors :
   a. $P(G)=\frac{12}{45}$ b. $P(G)=\frac{5}{45}$ c. $P(G)=\frac{7}{15}$ d. $P(G)=\frac{1}{45}$.
5. D « La somme des pièces tirées est 30 francs ». Alors :
   a. $P(D)=\frac{2}{15}$ b. $P(D)=\frac{3}{45}$ c. $P(D)=\frac{7}{15}$ d. $P(D)=\frac{3}{5}$.
6. E « La somme des pièces tirées est 35 francs ». Alors :
   a. $P(E)=\frac{8}{15}$ b. $P(E)=\frac{1}{15}$ c. $P(E)=\frac{2}{9}$ d. $P(E)=\frac{7}{15}$.
7. F « La somme des pièces tirées est un multiple de 10 francs ». Alors :
   a. $P(F)=\frac{4}{9}$ b. $P(F)=\frac{21}{45}$ c. $P(F)=\frac{2}{15}$ d. $P(F)=\frac{1}{15}$.

EXERCICE 2 : (03 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2-2z+4=0$ ·
On donnera les solutions sous forme algébrique, puis trigonométrique et ensuite exponentielle**.**

01+01+01 pts

EXERCIE 3 : (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2+1}, & x<1\\ \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}, & x\geq 1\end{cases}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ **0,5 pt**
   b. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ **0,5 pt**
   c. Interpréter les résultats précédents en termes d'asymptote. **01 pt**
   d. Résoudre l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$· **01 pt**
2. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, puis $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. **01 pt**
   b. Interpréter les résultats du 2.a. f est-elle dérivable en 1 ? **01 pt**
3. Calculer $f'(x)$ et donner son signe :
   a. pour $x<1$, b. pour $x>1$. **02 pts**
4. Dresser le tableau de variations de f. **01 pt**
5. Représenter (C_f) et les asymptotes dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, . **02 pts**

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (05 points)

Pour chaque item, choisir la lettre correspondant à la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. La forme trigonométrique de $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ est :
   A = $\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}$; **B** = $-\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}$; **C** = $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. **(01 pt)**
2. $(-1+i)^{11}$ est égal à : **A** = $-11+11$; **B** = $-32+32\,i$; **C** = $32+32\,i$. **(01 pt)**
3. La valeur exacte de $\int_0^1 xe^x dx$ est : **A** = e ; **B** = 1 ; **C** = 0. **(01 pt)**
4. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 0$ sont de la forme :
   A = $e^{-3x}(a\cos x + b\sin x)$; **B** = $a\,e^x + b\,e^{-3x}$; **C** = $e^x[a\cos(-3x) + b\sin(-3x)]$ où a et b sont des réels. **(01 pt)**
5. La suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = -\frac{5}{3}U_n$.
   A : converge vers 0 ; **B** : est monotone ; **C** : vérifie $U_n = \frac{(-5)^n}{3^{n-1}}$. **(01 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

Une enquête a été menée auprès de 30 ménages. Le tableau à double entrée ci-contre donne, pour chaque ménage, le nombre X d'enfants et le revenu annuel Y, en millions de francs CFA. Soit la série statistique double définie par le tableau ci-après où X et Y représentent les caractères étudiés.

y \ x	5	8	11	14
7	0	1	3	4
12	2	5	1	1
27	2	3	2	1
38	1	2	0	2

1. Donner les séries marginales associées aux caractères X et Y. **(01 pt)**
2. Déterminer les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ de ces séries marginales. **(01,5 pt)**
3. a. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de ces séries marginales. **(02 pts)**
   b. En déduire les écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des séries marginales. **(0,5 pt)**

EXERCICE 3 (05 points)

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1. Démontrer que $U_0 + U_1 = 1$. **(01 pt)**
2. a. Calculer U_1. **(01 pt)**
   b. En déduire U_0. **(0,5 pt)**
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$. **(0,5 pt)**
4. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} + U_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$. **(01 pt)**
5. Déduire des questions 3. et 4. que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$. **(0,5 pt)**
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,5 pt)**

EXERCICE 4 (05 points)

La maladie à corona virus affecte 15 % de la population d'un pays.
On met au point un test rapide pour diagnostiquer la maladie.

- Si le test est positif, la personne testée est malade dans 95 % des cas.
- Si le test est négatif, la personne testée est malade dans 2 % des cas.

On note M l'événement « être malade », T l'événement « avoir un test positif » et $p(A)$ la probabilité de l'événement A quelconque de cette expérience aléatoire.
On pose : $p(T) = \alpha$.

1. Faire un arbre pondéré qui traduit cette situation. **(01 pt)**
2. a. Donner les valeurs de $p(M)$ et $p(\bar{M})$. **(0,5 pt)**
   b. Exprimer $p(\bar{T})$ en fonction de α. **(0,5 pt)**
3. a. Montrer que $p(M) = 0{,}02 + 0{,}93\,\alpha$. **(01 pt)**
   b. En déduire la valeur exacte de α. **(01 pt)**
4. Une personne est malade. Déterminer la probabilité que son test ait été négatif. **(01 pt)**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
Email : office@ucad.edu.sn
Site web : officedubac.sn

2024GS26NB0132
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (08 points)

Une entreprise sénégalaise effectue un don d'engrais (en milliers de kilogrammes) à la culture d'arachide dans cinq régions du pays. Son intention est de tester l'efficacité de son engrais par rapport à la production (en milliers de tonnes) obtenue. Le tableau ci-dessous représente la production d'arachide (y_i) en fonction de la quantité d'engrais (x_i) utilisée.

x_i	6	8	9	10	12
y_i	10	14	15	18	20

A l'aide des informations ci-dessus et des outils mathématiques au programme :

1. la production d'arachide obtenue est-elle fortement corrolée à la quantité d'engrais utilisée? Justifier la réponse. **(05 points)**
2. donner une estimation de la production si le don d'engrais s'élève à 20 (en milliers de kilogrammes). **(03 points)**

EXERCICE 2 (06 points)

Un dé truqué à six faces numérotées de 1 à 6 est tel que les faces 1 et 6 ont la même probabilité de sortie et apparaissent deux fois plus que les autres faces. On note P_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i.

1. Montrer que $P_1 = \frac{1}{4}$. **(01 point)**
2. En déduire P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6. **(02,5 points)**
3. Soit A l'événement « obtenir un nombre pair ». Calculer la probabilité de A. **(0,5 point)**
4. On lance 10 fois de suite ce dé. Les résultats des lancers étant indépendants, déterminer la probabilité d'obtenir 6 fois un nombre pair. **(02 points)**

EXERCICE 3 (06 points)

On désigne par f une fonction non constante, positive et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} (f(x))^2 - \left(f'(x)\right)^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

1. Calculer $f(0)$. **(01 point)**

2. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$. **(02 points)**
3. On pose $k(x) = f'(x) + f(x)$ et $j(x) = f'(x) - f(x)$.
   a. Calculer $j(0)$ et $k(0)$. **(01 point)**
   b. Montrer que pour tout réel x, $k'(x) = k(x)$ et $j'(x) = -j(x)$. **(01 point)**
   c. En déduire l'expression algébrique de $k(x)$ et $j(x)$ puis montrer que $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. **(01 point)**

MEMOBACS ET RAPPELS

M.MENDES

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.

RAPPELS DE TRIGONOMETRIE

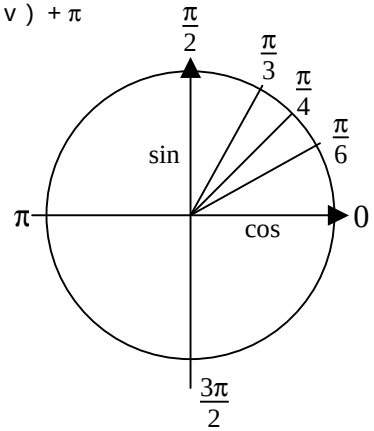
Propriétés des angles orientés

1. deux vecteurs sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0$
2. deux vecteurs sont colinéaires de sens contraire $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \pi$
3. Pour tous vecteurs non nuls, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$
4. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$: $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ $\quad (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ $\quad (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

Valeurs et formules remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×



Formules

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad \sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ $\quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

Résolution d'équations

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a\ [2\pi]$ ou $x = -a\ [2\pi]$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a\ [2\pi]$ ou $x = \pi - a\ [2\pi]$

RAPPELS DE GEOMETRIE

Centre du cercle circonscrit : intersection des médiatrices
Centre du cercle inscrit : intersection des bissectrices
Orthocentre : intersection des hauteurs
Centre de gravité : intersection des médianes

Théorème de la médiane : soit ABC un triangle quelconque, et I le milieu de [BC],

on a $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

relation d'Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

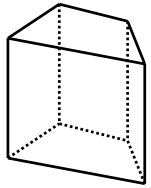
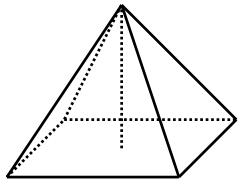
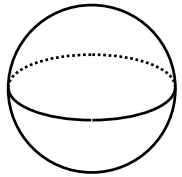
aire d'un triangle

$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

Formule des sinus

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Dans un repère orthonormal, un cercle de centre $\Omega(x_0 ; y_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

prisme droit	pyramide	sphère
		
V = Airedelabase × h	$V = \frac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Aire latérale = $4\pi R^2$

coord. d' un milieu $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ $\quad$ coord. d'un vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

distance (dans un repère orthonormé) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

DERIVEE → PRIMITIVE

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$\frac{u'^2}{u}$	$-\frac{1}{u}$
$u' e^u$	e^u
$u' f'(u)$	$f(u)$
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$n u^{n-1} u'$	u^n
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\cos(ax + b)$	$\frac{\sin(ax + b)}{a}$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{\cos(ax + b)}{a}$

COMPLEXES

Ecriture algébrique

$z = x + i\,y$ avec $\boxed{i^2 = -1}$

$x = \text{Re}(z)$ partie réelle
$y = \text{Im}(z)$ partie imaginaire

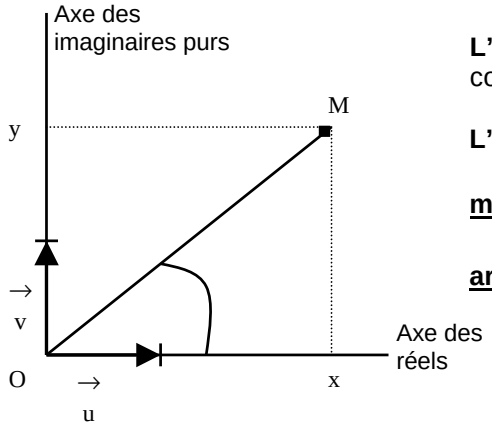
Conjugué

Le conjugué de $z = x + i\,y$ est $\overline{z} = x - i\,y$.

$\overline{\overline{z}} = z$ $\quad z \times \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|$ $\quad \text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ $\quad \text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2}$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ $\quad \overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $\quad \overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Plan complexe



L'affixe du point M(x, y) est le nombre complexe : $z = x + i\,y$.

L'image de z est M.

module $OM = |z| = x^2 + y^2$

argument $\arg(z) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$

Propriétés module et argument

$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)

$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ $\quad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$\arg(z^n) = n \times \arg(z)$ $\quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi$

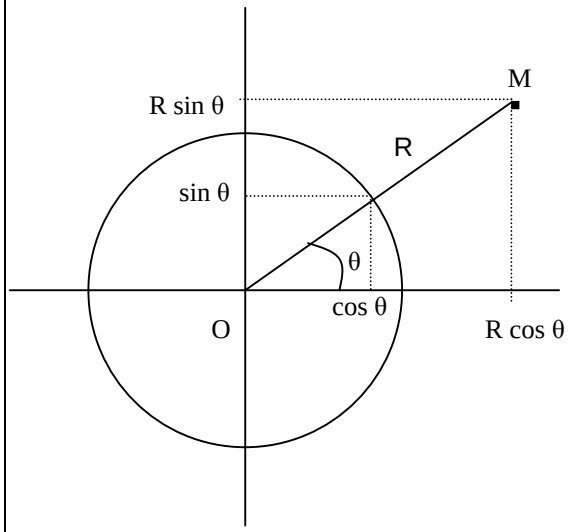
Equation du second degré

$a z^2 + b z + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{|\Delta|}}{2a}$ $\quad z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Factorisation : $a z^2 + b z + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Notations trigonométriques et exponentielles



forme algébrique
$z = x + i\,y$

module
$R = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

argument
$\text{Arg}(z) = \theta \quad [2\pi]$

$\cos\theta = \dfrac{x}{R}$ $\quad \sin\theta = \dfrac{y}{R}$

forme trigonométrique
$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

forme exponentielle
$z = R\,e^{i\theta}$

$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ $\quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

Utilisation en géométrie

affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$. $\quad$ longueur AB : $|z_B - z_A|$

milieu : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ $\quad$ barycentre (A ;a) (B ;b) : $z_G = \dfrac{a z_A + b z_B}{a + b}$

$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$

$|z - z_A| = r$ définit le cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r

Transformations

M (z) ———> M ' (z ')

- $z' = z + a$ translation de vecteur $\vec{v}(a)$.
- $z' = z \times e^{i\theta}$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
- $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$ rotation de centre Ω et d'angle θ.

LIMITES – ASYMPTOTES

Formes indéterminées

$+\infty - \infty$: factorisation du terme dominant (plus haut degré).

$\frac{\infty}{\infty}$: factorisation du terme dominant, simplification.

$\frac{0}{0}$: factorisation du terme tendant vers 0, simplification.

$0 \times \infty$: peut en général se ramener à $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Si des racines carrées interviennent, on pourra multiplier par l'expression conjuguée .

Propriétés

- $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- théorème des gendarmes
  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim g(x) = \lim h(x) = l \Rightarrow \lim f(x) = l$
- $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = l$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$

Limites usuelles

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du terme dominant.
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$

Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Asymptotes

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ asymptote verticale d'équation x=a
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ asymptote horizontale d'équation y=b
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \Rightarrow$ asymptote oblique d'équation y=ax+b

PARITE / SYMETRIE

- f est paire $\Leftrightarrow$ f est centré en 0 et f(-x)=f(x)
  la courbe est symétrique par rapport à l' axe des ordonnées
- f est impaire $\Leftrightarrow$ f est centré en 0 et f(-x)=-f(x)
  la courbe est symétrique par rapport au centre du repère
- $(x_0 ; y_0)$ est centre de symétrie $\Leftrightarrow$ $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2y_0$
- $x = x_0$ est axe de symétrie $\Leftrightarrow$ $f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$

DERIVEE

Nombre dérivé

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pour que f soit dérivable en x_0, il faut que les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 soient finis et égaux.

La tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Variations

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si f ' est nulle sur I, alors *f* est constante sur I.
- Si f ' est positive ou nulle sur I, alors *f* est croissante sur I.
- Si f ' est négative ou nulle sur I, alors *f* est décroissante sur I.

Bijection

f est dérivable est strictement croissante sur [a;b] donc f réalise une bijection de [a;b] sur $[f(a);f(b)]$ et pour tout α de $[f(a);f(b)]$ l'équation $f(x)=\alpha$ admet une solution unique dans [a;b].

Position de la courbe par rapport à la tangente

La position de (C) la courbe représentative de f par rapport à (T) la courbe représentative de g est donnée par le signe de h(x)=f(x)-g(x)
h>0 : (C) est au dessus de (G)
h<0 : (C) est au dessous (G)
h=0 : intersection des courbes (C) et (G)

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
k	0	] -∞ ; +∞ [
x	1	] -∞ ; +∞ [
x^2	$2x$	] -∞ ; +∞ [
x^3	$3x^2$	] -∞ ; +∞ [
x^n	$n\,x^{n-1}$	] -∞ ; +∞ [
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	] -∞ ; 0 [∪] 0 ; +∞ [
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	] -∞ ; 0 [∪] 0 ; +∞ [
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	] 0 ; +∞ [
$\sin(x)$	$\cos(x)$	] -∞ ; +∞ [
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	] -∞ ; +∞ [
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2$	...] -π/2; π /2 [...
ln x	$\frac{1}{x}$	] 0 ; +∞ [
e^x	e^x	] -∞ ; +∞ [

Fonction	Dérivée
λu	λu’
u + v	u’ + v’
uv	u’v + uv’
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Fonction	Dérivée
f(u(x))	u'(x) × f '(u(x))
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$
e^u	u ‘ e^u
ln u	$\frac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

LOGARITHME NEPERIEN

- ln est une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$
- ln a = ln b $\Leftrightarrow$ a = b ln a < ln b $\Leftrightarrow$ a < b
- ln (1) = 0 ln(e) = 1
- si 0 < x < 1 alors ln x < 0 si x > 1 alors ln x > 0
- (ln x) ' = 1/x
- $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n>0)$ $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x = 0$
- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$ $\ln(a^n) = n.\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- logarithme décimal $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

FONCTION EXPONENTIELLE

e =2,71828182845904523536028747135266249775724709 3….

- exp est une bijection strictement croissante de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$
- $e^0 = 1$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln x$ $x \in]-\infty ; +\infty[$ $y \in]0 ; +\infty[$
- $\ln(e^x) = x$
- $(e^x)' = e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$ $(n>0)$
- $e^{a+b} = e^a . e^b$ $e^{na} = (e^a)^n$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- fonction puissances $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

- $y' - a\,y = 0$ a pour solutions l'ensemble des fonctions définies par $f(x) = k.e^{ax}$ avec a et k des réels.

La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$ est la fonction définie par $f(x) = y_0 . e^{x-x_0}$.

- y ' = a y + b a pour solutions l' ensemble des fonctions définies par f(x) = k. $e^{ax} - \frac{b}{a}$, avec a, b, k des reels

L'équation différentielle y' = a y + b admet une solution unique sur IR vérifiant : $y_0 = f(x_0)$.

PRIMITIVES ET INTEGRALES

Primitives

On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toute fonction F définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.
Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G de la forme G = F+ k avec k $\in$ IR.
Soit une fonction ayant des primitives sur un intervalle I, soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in$ IR. Il existe une et une seule primitive F de f telle que F (x_0) = y_0.
Toute fonction dérivable sur un intervalle I a des primitives sur I.

Une fonction de la forme	a pour primitive
$u' u^n \quad n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\frac{u'}{u}$	ln lul

Intégrales

$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ est l'intégrale de f entre a et b.
où F est une primitive de f

$\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a f(x) ≥ 0 , alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbes de f et l' axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b est donnée en unité d'aire par $\int_a^b$ f (t) d t .

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes et les droites d'équations x=a et x=b est donnée en unité d'aire par $\int_a^b (g(t) - f(t))dt$.

Propriétés

- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ $\qquad$ $\int_a^b (kf)(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$
- f est paire $\Leftrightarrow$ $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- f est impaire $\Leftrightarrow$ $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
- f est périodique de période T $\Leftrightarrow$ $\int_a^{a+T} f(t)dt = 2\int_0^T f(t)dt$
- $\int_a^c f(t)dt = \int_b^c f(t)dt + \int_a^b f(t)dt$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ (linéarité)

Théorème de la moyenne

La valeur moyenne de f est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)dt$

f est dérivable sur [a;b] et pour tout x de [a;b] on a :

- m ≤ f(x) ≤ M ⇒ m(b-a) ≤ $\int_a^b f(t)dt$ ≤ M(b-a)
- |f(x)| ≤ M ⇒ $\left|\int_a^b f(t)dt\right|$ ≤ M(b-a)

Intégration par parties

$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$

Calcul de volumes

Pour un solide dont l'intersection avec le plan de cote z a pour aire S(z), le volume entre les plans de cote a et b est donné par :
$V = \int_a^b S(z)dz$

SUITES

Suites arithmétiques

- $U_{n+1} = U_n + r$
- $U_n = U_p + (n-p)r \Rightarrow U_n = U_0 + nr$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = nU_0 + \frac{n(n-1)}{2} r = n \times \frac{U_0 + U_{n-1}}{2}$

Suites géométriques

- $U_{n+1} = U_n q$
- $U_n = U_p \times q^{n-p} \Rightarrow U_n = U_0 \times q^n$
- $q \le -1 \Rightarrow (U_n)$ n'a pas de limite et diverge de U_0
  $0 \le |q| < 1 \Rightarrow (U_n)$ converge vers U_0
  $q > 1 \Rightarrow (U_n)$ tend vers $\pm\infty$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{U_0 - U_n}{1-q}$

Suites monotones, bornées, périodiques

- suite croissante $U_{n+1} \ge U_n$
- suite décroissante $U_{n+1} \le U_n$ (étudier signe de $U_{n+1} - U_n$)
- Si la fonction f est croissante sur $[a;+\infty[$, la suite définie par $U_n = f(n)$ est croissante pour $n \ge a$. Attention : la réciproque est fausse (la suite peut-être croissante alors que la fonction ne l'est pas).
- Une suite à la fois majorée et minorée est appelée suite bornée.
- (U_n) est périodique de période p lorsque $U_{n+p} = U_n$.

Limites de suites

- $\lim U_n - l = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $|U_n - l| \le V_n$ et $\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $\left.\begin{array}{l} V_n \le U_n \le W_n \\ \lim V_n = \lim W_n = l \end{array}\right| \Rightarrow \lim U_n = l$ (Théorème des gendarmes)
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $U_n \le V_n \Rightarrow l \le l'$
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $l < l' \Rightarrow U_n < V_n$
- Une suite croissante et majorée est convergente
- Une suite décroissante et minorée est convergente
- Les termes de (U_n) appartiennent à l'intervalle de la fonction f :
  $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim_{x\to l} f(x) = l' \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(U_n) = l'$

RECURRENCE

Soit une propriété P dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

- Initialisation : Si $P(n_0)$ est vraie,
- Transmission : et si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \ge n_0$,
- Conclusion : alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \ge n_0$.

BARYCENTRE

Système de points pondérés : $\{(A_1 ; a_1)\ (A_2 ; a_2) \ldots\ (A_i ; a_i)\}$

$\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ est le vecteur associé à un système de points pondérés.

- $a_1+a_2+\ldots+a_n = 0 \Rightarrow \vec{v}$ est constant, il est indépendant de M.
- $a_1+a_2+\ldots+a_n \neq 0 \Rightarrow$ il existe un point G appelé barycentre du système, et vérifiant les deux propriétés équivalentes :

$$a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+ \ldots +a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{a_1 \overrightarrow{MA_1}+ a_2 \overrightarrow{MA_2}+ \ldots + a_n \overrightarrow{MA_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

Propriétés

- On peut changer l'ordre des points pondérés.
- On peut multiplier tous les coefficients par un nombre $k \neq 0$.
- On peut remplacer une partie des points par leur barycentre partiel affecté de la somme leurs coefficients (associativité).
- Les coordonnées ou l'affixe du barycentre sont données par :
- $x_G = \frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{a_1+\ldots+a_n}$ $y_G = \frac{a_1y_1+\ldots+a_ny_n}{a_1+\ldots+a_n}$ $z_G = \frac{a_1z_1+\ldots+a_nz_n}{a_1+\ldots+a_n}$

Isobarycentre

- L'isobarycentre des points $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ est le barycentre de ces points tous affecté du même coefficient non nul.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de [AB].
- L'isobarycentre de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes).

Ensemble de points

- $MG = r$ $\Rightarrow$ dans le plan : cercle de centre G et de rayon r.
  dans l'espace : sphère de centre G et de rayon r.
- $MG_1 = MG_2$ $\Rightarrow$ dans le plan : médiatrice de $[G_1G_2]$
  dans l'espace : plan médiateur de $[G_1G_2]$
- $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$ $\Rightarrow$ plan : cercle de diamètre $[G_1G_2]$
  espace : sphère de diamètre $[G_1G_2]$

DENOMBREMENT

Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble. Soit A et B deux événements d'un univers fini Ω.
Union (ou) : $\cup$ Intersection (et) : $\cap$
Dans tous les cas, Card (A$\cup$B) = Card (A) + Card (B) – Card (A$\cap$B) .
Si A et B sont incompatibles, Card (A$\cup$B) = Card (A) + Card (B).
Si complémentaires, Card (A$\cup$B) = Card (A) + Card (B) = Card (Ω).
Pour déterminer les cardinaux de certains ensembles, on s'aide de diagrammes, tableaux ou arbres ou schémas à case.

Arrangements

tirage avec ordre et sans remise

Un arrangement est une liste ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les n éléments d'un ensemble.
(nombre de façons de ranger p éléments parmi n)

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutations

Une permutation est un arrangement des n éléments de l'ensemble.
On l'utilise par exemple pour trouver tout les anagrammes d'un mot.
$A_n^n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$ (n ! : factorielle n 0 ! = 1)

Combinaison

un tirage sans ordre et sans remise.

Une combinaison est une liste non-ordonnée de p éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble (une combinaison est une partie contenant p éléments pris parmi n éléments)).

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Propriétés des combinaisons

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (somme) $\qquad C_n^p = C_n^{n-p}$ (parité)
$C_n^0 = C_n^n = 1$ $\qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Les C_n^p sont données par le triangle de Pascal :

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	…
n=0	1								
n=1	1	1							
n=2	1	2	1						
n=3	1	3	3	1					
n=4	1	4	6	4	1				
n=5	1	5	10	10	5	1			
n=6	1	6	15	20	15	6	1		
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…									

Les coefficients des égalités remarquables sont ceux du triangle de Pascal. La formule du binôme de Newton les résume :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Pour a=b=1, on a un cas particulier et $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Introduction aux probabilités

- Les formules pour les probabilités sont similaires à celles du cardinal (incompatibilité, complémentarité…).
- Lorsque tous les éléments d'un univers ont la même probabilité, il y a équiprobabilité.

  La probabilité pour chaque élément est $\frac{1}{\text{Card }(\Omega)}$

  et pour tout événement A, on aura $p(A) = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)}$)

PROBABILITES

Probabilités conditionnelles

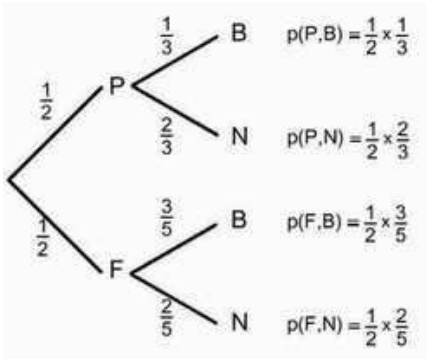
A et B sont deux événements et $p(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est déjà réalisée est définie et se note :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \Leftrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A/B) \times p(B)$$

A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
On a donc : $p(A/B) = p(A)$ et $p(B/A) = p(B)$

Arbres pondérés

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches de ce chemin.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités conduisant à cet événement.



Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une application de l'univers Ω dans ℝ.

$$X : \Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \rightarrow X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$(X = x_i)$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i.
La probabilité de l'événement $(X = x_i)$ est noté $p(X = x_i) = p_i$.

Etude d'une variable aléatoire

- On détermine la loi de probabilité de X en trouvant toutes les probabilités des événements associant une partie de l'univers aux différentes valeurs prises par la variable aléatoire.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

- L'espérance mathématique, ou moyenne de X, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

jeu : « Je lance deux pièces en l'air. Si on voit deux piles, je vous donne 3 francs, dans les autres cas, vous me donnez un franc. »
3 issues possibles : P (f ; f) = ¼ P(p ; f) = ½ P (p ; p) = ¼ rq :(p ; f) = (f ; p)
Espérance de gain : $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = ¼ \times -1 + ½ \times -1 + ¼ \times 3 = 0$
Le jeu est équitable.

- La variance de la variable aléatoire est un réel positif défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

- L'écart type de X est le nombre réel positif défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Schéma de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : le succès ou l'échec. Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

La loi binomiale permet de calculer la probabilité d'obtenir k succès.
Soit p la probabilité du succès à chaque épreuve et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des n épreuves :

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

PRODUITS SCALAIRE - VECTORIEL

Produit scalaire

- Le produit scalaire est une valeur numérique réelle. Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OH = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\quad (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ $\quad \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Norme et produit scalaire

- $\| \vec{u} \|^2 = \vec{u}^2 = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ $\quad \| \vec{u} \pm \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 \pm 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = \dfrac{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2}{2}$

Orthogonalité dans l'espace

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \| \vec{u} \pm \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2$
- Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

- L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Orientation de l'espace

Un repère est dit positif ou direct lorsque ses vecteurs unitaires respectent la règle des trois doigts de main **DROITE**.

Produit vectoriel

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est un troisième vecteur normal au plan formé par les deux autres vecteurs :

$$\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \| = OA \times OB \times \sin(\widehat{AOB})$$

$(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$ est une base directe

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ $\quad (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ $\quad \vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Colinéarité et alignement

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ A, B, C sont alignés.

Expression analytique

- Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ dans un repère orthonormal, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' \qquad \| \vec{u} \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy' \\ Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = zx' - xz' \\ Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

- La norme du produit vectoriel de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit à partir de ces vecteurs. L'aire du triangle ABC est donc égale à la moitié de cette norme.

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Représentation paramétrique d'une droite

Le système d'équations paramétriques de la droite (D) passant par le point A (x_a ;y_a ;z_a) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (a ; b ; c) détermine l'appartenance ou non d'un point de l'espace à la droite.

$$M(x;y;z) \in D \Leftrightarrow AM = t\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = at + x_a \\ y = bt + y_a \\ z = ct + z_a \end{cases}$$

Les coefficients du système sont les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.

Equation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ détermine l'appartenance ou non d'un point de l'espace au plan.

$$M(x;y;z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$
$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$ax + by + cz + d = 0$$

Les coefficients de l'équation sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Astuce : si on connaît trois points non alignés du plan (P), on pourra se servir du produit vectoriel pour trouver un vecteur normal à (P).

Représentation paramétrique d'une droite

Le système d'équations paramétriques du plan P passant par le point A (x_a ;y_a ;z_a) et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ (a;b;c) et $\vec{v}$ (a';b';c') détermine l'appartenance ou non d'un point de l'espace au plan

$$M(x;y;z) \in D \Leftrightarrow AM = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\alpha + a'\beta + x_a \\ y = a\alpha + a'\beta + y_a \\ z = a\alpha + a'\beta + z_a \end{cases}$$

Remarque : trois point A,B,C non alignés déterminent deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Pour retrouver l' équation cartésienne à partir de la représentation paramétrique , on exprime α en fonction du reste dans la première expression , on le substitue dans les deux autres expressions , dans la seconde expression , on exprime β en fonction du reste et enfin on substitue dans la dernière expression que l'on présente correctement.

Une droite est déterminée par deux points ou un point et un vecteur directeur

Un plan peut être déterminé par :

trois points non alignés ;
deux droites parallèles distinctes (non confondues) ;
une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.
deux droites sécantes ;
Un point et un vecteur normal
Un point et deux vecteurs directeurs

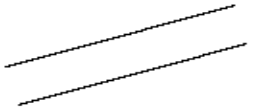
Positions relatives de deux droites de l'espace

Sécantes



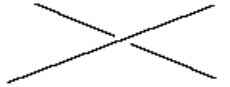
Deux droites sécantes ont un point commun. Elles sont coplanaires

Parallèles



Les vecteurs directeurs de deux droites parallèles sont colinéaires. elles sont coplanaires

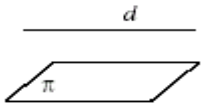
Gauches

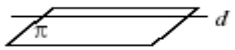


Les deux droites n'ont aucun point en commun. elles sont non coplanaires

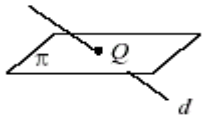
Positions relatives de droites et plans

d parallèle à P





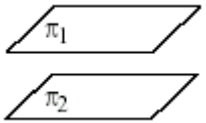
d et p sécants

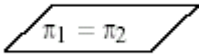


- Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Positions relatives de deux plans

P1 et P2 parallèles





P1 et P2 sécants



- Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.
- Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.
- Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

- Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.
- "Théorème du toit" :d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'. Si les plans P et P' sont sécants, alors la droite d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.

Droites orthogonales

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.
- Deux droites orthogonales et sécantes sont appelées perpendiculaires.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Droite orthogonale à un plan

- Une droite *d* est orthogonale à un plan P ⇔ *d* est orthogonale à toute droite de p.
- Si une droite *d* est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan p, alors *d* est orthogonale au plan p.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Plans orthogonaux

- Deux plans sont orthogonaux ⇔ l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre plan.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.



M.MENDES

Arrosé par l'eau de la discipline, l'arbre du travail n'est jamais stérile, il réussit toujours à donner des fruits.