



Série : D

Code matière : 009

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 03 heures 15 minutes

Coefficient : 4



NB : - Les deux exercices et le problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

Exercice 01: (05pts)

Soit le polynôme P de variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^3 - (x + 6i)z^2 + (-x + 19i)z + 18 - 6i \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

- 1- a) Déterminer x pour que $2i$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$. (0,5pt)
- b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$. (1pt)
- 2- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3 + 3i$.
 - a) Placer les points A , B et C dans le plan complexe. (0,25pt)
 - b) On pose $z' = \frac{z - z_B}{z - z_C}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$. (0,75pt)
- 3- Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et laisse invariant le point C .
 - a) Déterminer l'expression complexe de S . (0,5pt)
 - b) En déduire ses éléments caractéristiques. (0,75pt)
- 4- a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|(1 + i)z - 6i| = 2\sqrt{2}$. (0,75pt)
- b) Donner les éléments géométriques de la courbe (Γ') image de (Γ) par S . (0,5pt)

Exercice 02: (05pts)

Un carton contient 9 manuels de mathématiques indiscernables au toucher : 5 livres d'algèbre et 4 livres de géométrie.

L'épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois manuels du carton.

I- On effectue une épreuve :

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
 - A : « Obtenir trois livres d'algèbre ». (0,75pt)
 - B : « Obtenir au moins un livre de géométrie ». (0,75pt)
- 2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de livres d'algèbre obtenus.
 - a) Donner l'univers image de X . (0,5pt)
 - b) Déterminer la loi de probabilité de X . (1pt)
 - c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X . (1pt)

II- On remet le carton dans la condition initiale.

On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante la même épreuve.

On appelle « succès » l'obtention de trois livres de géométrie lors d'une épreuve.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès. (1pt)

NB : On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME

(10pts)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6 - 4e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 - x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$, sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité: 1cm.

1- a) Montrer que f est continue en 0.

(0,5pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{x}{2}}}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(0,5 + 0,5pt)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(0,5pt)

d) Que peut-on conclure pour f et pour $(\mathcal{C})$?

(0,5pt)

2- Etudier la variation de f .

(1,5pts)

3- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]4,3 ; 4,4[$.

(0,5pt)

4- a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = e$.

(0,5pt)

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 6$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

(0,5pt)

c) Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

(0,5pt)

d) Tracer $(\mathcal{C})$, (T) et (D) dans un même repère en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse 0.

(1,5pts)

5- Calculer, en fonction de β et en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe $(x'ox)$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \beta$. En déduire l'expression de $\mathcal{A}$ sans $\ln \beta$.

(1pt)

6- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$U_n = \int_{-(n+1)}^{-n} [f(x) - (6 - x)] dx \quad \text{où } f(x) = -x + 6 - 4e^{\frac{x}{2}}.$$

a) Exprimer U_n en fonction de n .

(0,75pt)

b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(0,75pt)
