RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

SESSION DE CONTRÔLE

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE :** 3h **COEFFICIENT :** 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

1) Si u et v sont deux racines cinquième de l'unité, alors u.v est aussi une racine cinquième de l'unité.

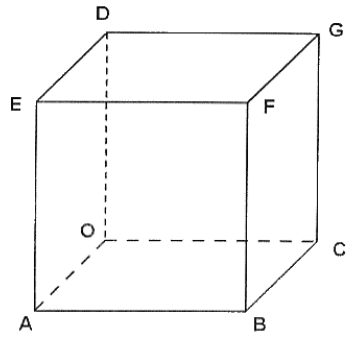
2) $1 + i\sqrt{2009}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 2010 = 0$.

3) Un argument du nombre complexe $z = -5e^{\frac{i\pi}{6}}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = 3e^{i\theta}$, où θ décrit l'intervalle $[0,\pi]$, est un demi-cercle.

Exercice 2 (6 points)

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$.



1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x + y + z - 1 = 0$.
2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).
3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$
   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon r.
   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.
4) a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.
   b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera.

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1, 1[$. Les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes à $(\mathscr{C})$. La droite (T) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

1) En utilisant le graphique déterminer f(0) et f '(0).
2) Soit g la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Déterminer g(0) et g'(0).
   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.
3) Sachant que l'expression de g est de la forme $g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)dx$.
5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.
   a) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x)dx$.
   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (5 points)

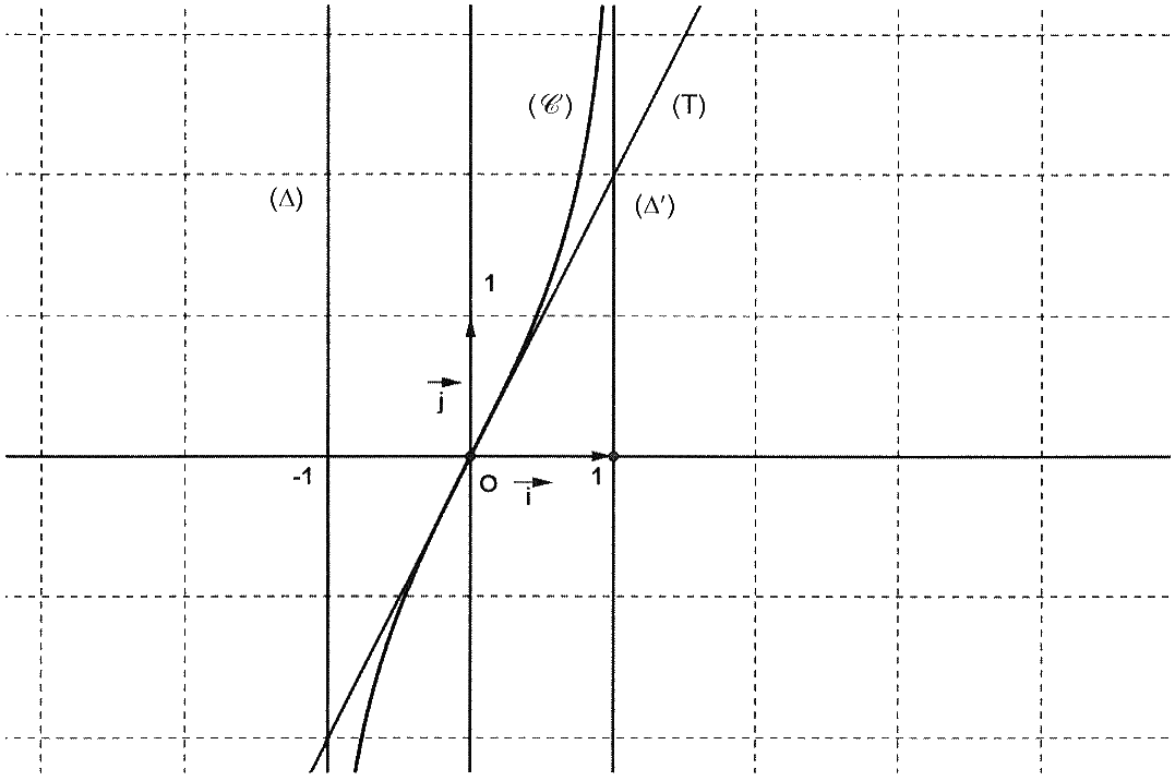
On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$; $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha) v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha) u_n + \alpha v_n$

où α est un réel donné tel que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

1) Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$.
   a) Calculer t_0 et t_1.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$.
   c) En déduire la limite de t_n.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.
   d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite ℓ.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE



CORRIGE

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** limites de fonctions (ln et exp), équations différentielles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer des limites en utilisant des limites usuelles, vérifier une équation différentielle par une fonction donnée.
- ✓ **Corrigé :**

Les choix corrects sont :

1°) Choix (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\dfrac{\ln x}{x}) = +\infty$.

2°) Choix (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}) = 2$

3°) Choix (b) : $f'(x) = ke^{kx}$, f est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ pour $k = 2$

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu : Nombres complexes**
- ✓ **Aptitudes visées:** Résoudre une équation complexe du second degré, interpréter géométriquement des affixes de points pour : déterminer la nature d'un triangle, décider de la perpendiculaire de deux droites.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°) Il s'agit d'un développement utilisant une identité remarquable :

$(5+2i)^2 = 5^2 + 2.5.(2i) + (2i)^2 = 25 + 20i - 4 = 21 + 20i$.

1°) b°) Il s'agit d'une équation complexe du second degré dont le discriminant est :

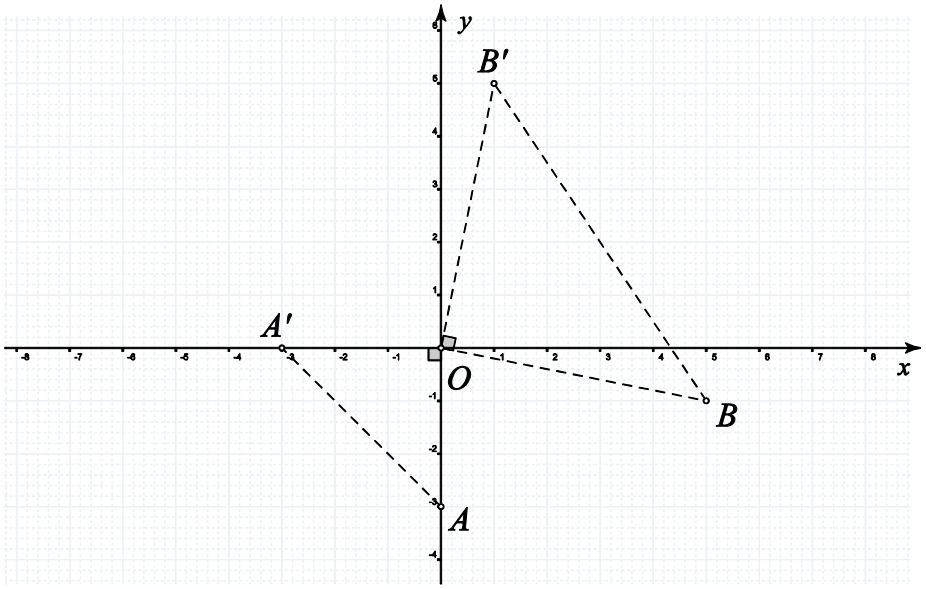
$\Delta = \left[-(5-4i)\right]^2 - 4(-3-15i) = (5-4i)^2 + 12 + 60i = 25 - 40i - 16 + 12 + 60i = 21 + 20i$

En tenant compte du résultat précédemment établi en 1°) a°) , on peut écrire : $\Delta = (5+2i)^2$

Ce qui se traduit encore par : les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta_1 = 5 + 2i$ et $\delta_2 = -5 - 2i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{(5-4i)-(5+2i)}{2} = -3i$ et $z_2 = \dfrac{(5-4i)+(5+2i)}{2} = 5 - i$.

2°) a°)



Note : On veillera à dresser un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct .

2°) b°)

- Triangle OAA' :

  Les deux points A et A' appartiennent respectivement aux axes $(O,\vec{v})$ et $(O,\vec{u})$.

  Ces axes étant perpendiculaires, le triangle OAA' est donc rectangle en O.

$OA = |-3i| = 3$ et $OA' = |-3| = 3$ alors le triangle OAA' est isocèle en O.

• Triangle OBB' :

Le rapport $\frac{z_{B'}}{z_B} = \frac{1+5i}{5-i} = ... = i$ est imaginaire pur. On en déduit que OBB' est rectangle en O.

$OB = |5-i| = \sqrt{26}$ et $OB' = |1+5i| = \sqrt{26}$ alors OBB' est isocèle de sommet principal O.

Note : Méthode alternative acceptable : Réciproque de Pythagore : $OB^2 = 26$, $OB^2 = 26$, $BB'^2 = 52$.

3°) a°)

$M \in (AB)$ signifie "$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires " signifie $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M + 3i = k\left[(5-i)-(-3i)\right]$, $k \in \mathbb{R}$ signifie $z_M + 3i = k\left[5+2i\right]$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M = 5k + (2k-3)i$, $k \in \mathbb{R}$

3°) b°) Le raisonnement est le suivant :

"(OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires" signifie "$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux" signifie

"$\frac{z_M}{(1+5i)-(-3)}$ est imaginaire pur" signifie " $\frac{5k+(2k-3)i}{4+5i}$ est imaginaire pur" signifie

"$(30k-15)-i(17k-12)$ est imaginaire pur" signifie $30k-15=0$ signifie $k = \frac{1}{2}$ signifie $z_M = \frac{5-4i}{2}$

Note : L'absence de connecteurs logiques a été sanctionnée

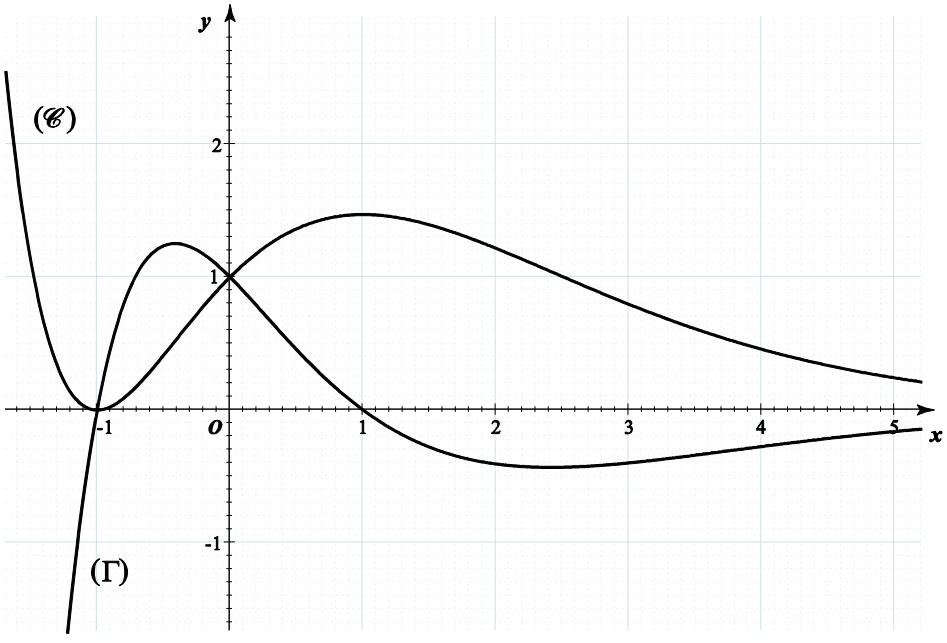
Par ailleurs, l'affixe du point milieu du segment $[AB]$ est $z_{A*B} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3i+5-i}{2} = \frac{5-4i}{2}$

Pour $z_M = \frac{5-4i}{2}$, on a : $2OM = 2\left|\frac{5-4i}{2}\right| = \sqrt{41}$ et $A'B' = |4+5i| = \sqrt{41} = 2\text{OM}$

Exercice 3 :

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions, calcul intégral, calcul d'aires, fonction réciproque et dérivabilité, théorème des valeurs intermédiaires.
- ✓ **Aptitudes visées :** Interpréter graphiquement une courbe, calculer une aire en utilisant une intégration par parties, appliquer le théorème de la réciproque et celui des valeurs intermédiaires, étudier la dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective.
- ✓ **Corrigé :**

A°) 1°)



L'idée repose sur le principe suivant :

" Le signe de la fonction dérivée d'une fonction indique les variations de la fonction ".
On constate, graphiquement, que la courbe $(\mathscr{C})$ est celle d'une fonction positive sur IR .
Si jamais $(\mathscr{C})$ représentait la fonction dérivée f', la fonction f serait alors croissante sur $\mathbb{R}$.
L'allure de la courbe (Γ) ne correspondant pas à ce profil , (Γ) ne peut donc pas représenter la fonction f .
On retient alors que $(\mathscr{C})$: Courbe représentative de f.
(Γ) : Courbe représentative de f'.

A°) 2°) $f(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)
$f(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)

A°) 3°) On a : $\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = f(0)-f(-1) = 1-0 = 1$ (ua)

B°) 1°) a°) L'intégrale se présente sous la forme : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x}\,dx$ et l'énoncé nous invite à procéder à une double intégration par parties qu'il faudra effectuer convenablement :

<u>Première intégration par parties</u> : Notons $\begin{cases} u_1(x)=(x+1)^2 \\ v_1'(x)=e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_1'(x)=2(x+1) \\ v_1(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-0}^{0} (x+1)^2 e^{-x}\,dx = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -2(x+1)e^{-x}\,dx =$

$\left[-(x+1)^2 e^{x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{x}\,dx$

Cette dernière intégrale nécessite, à son tour, une nouvelle intégration par parties

<u>Deuxième intégration par parties</u> : Notons $\begin{cases} u_2(x)=2(x+1) \\ v_2'(x)=e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_2'(x)=2 \\ v_2(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

On obtient : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[-(x+1)^2 e^{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-(x^2+4x+5)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = 2e-5$

B°) 1°) b°)

$\mathscr{A}' = \int_{-1}^{0} \left(f'(x)-f(x)\right)\,dx = \mathscr{A} - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1-(2e-5) = 6-2e$ (ua)

B°) 2°) a°) La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a :

Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$.

On retient que : Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $g'(x)<0$ et que par conséquent :

g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

g réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=g\left([1,+\infty[\right)$

g étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $J=g\left([1,+\infty[\right)$ est l'intervalle $J=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,,\,g(1)\right]$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x} = 0$.

On a : $g(1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.

En définitive : g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=\left]0,\frac{4}{e}\right]$.

Note : La stricte décroissance ainsi que la continuité de g sur $[1,+\infty[$ peuvent être justifiées graphiquement .

Note : La détermination de la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ peut être justifiée graphiquement : asymptote horizontale ….

Note : La détermination de la valeur <u>exacte</u> de $g(1)=\frac{4}{e}$ est exigée .

B°) 2°) b°) Dans $[1,+\infty[$, l'équation $g(x)=x$ est équivalente à : $g(x)-x=0$ ou encore à l'équation $\varphi(x)=0$, où φ désigne la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi : x \mapsto g(x)-x$.

Tout revient à montrer que l'équation $\varphi(x)=0$, possède , dans $[1,+\infty[$, une unique solution α vérifiant $1,41<\alpha<1,42$.

La fonction φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$\varphi'(x) = g'(x)-1=(1-x^2)e^{-x}-1$.

On retient que : Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $\varphi'(x)<0$ et que par conséquent :

φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

φ réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K=\varphi([1,+\infty[)$

φ étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $K=\varphi([1,+\infty[)$ est l'intervalle $K=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\ ,\ \varphi(1)\right]$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-1=-1$.

On a : $\varphi(1)=g(1)-1=\dfrac{4-e}{e}$.

En définitive : φ réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K=\left]-1,\dfrac{4-e}{e}\right]$.

$0\in\left]-1,\dfrac{4-e}{e}\right]$, l'équation $\varphi(x)=0$, possède, dans $[1,+\infty[$, une unique solution α .

La fonction φ est continue sur $[1,41\ ;\ 1,42]$ et vérifie $\varphi(1,41).\varphi(1,42)<0$.

On a alors , en vertu du théorème des valeurs intermédiaires , $1,41<\alpha<1,42$

Note : Concernant l'existence du réel α , un méthode alternative est acceptable (accorder 0.5) :
Justification graphique de la seule existence à l'aide de $\Delta : y=x$.

B°) 2°) c°) La fonction g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=\left]0,\dfrac{4}{e}\right]$

La fonction g possède donc une fonction réciproque g^{-1} définie de $J=\left]0\ ,\ \dfrac{4}{e}\right]$ sur $[1,+\infty[$.

De l'égalité $g(\alpha)=\alpha$, on tire : $g^{-1}(\alpha)=\alpha$.

g étant : • d'une part , dérivable sur $[1,+\infty[$ et en particulier en $\alpha=g^{-1}(\alpha)$

• d'autre part , vérifiant $g'(\alpha)=(1-\alpha)^2e^{-\alpha}\neq 0$

on en déduit que : La fonction g^{-1} est dérivable en α .

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(\alpha)\right)}=\frac{1}{g'(\alpha)}=\frac{1}{(1-\alpha)^2e^{-\alpha}}=\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}\qquad \textbf{(1)}\ .$$

D'autre part, $g(\alpha)=\alpha \iff (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=\alpha \iff e^{\alpha}=\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

En remplaçant cette dernière valeur de e^{α} dans la relation **(1)** , on obtient :

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\alpha)^2}=\frac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Exercice 4 :

- ✓ **Contenu :** Produit vectoriel, équation d'un plan de l'espace, équation d'une sphère, intersection de plan et sphère, volume d'un tétraèdre.
- ✓ **Aptitudes visées :** appliquer le produit vectoriel pour décider de l'alignement de trois points, déterminer une équation cartésienne d'un plan et celle d'une sphère, étudier la position relative d'un plan et une sphère, calculer le volume d'un tétraèdre.

✓ **Corrigé :**

1°) a°) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan $(\mathscr{P})$.

1°) b°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)=(\mathscr{P})$, d'où :

$(\mathscr{P}): x+y+z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.

L'écriture $A(1,0,0)\in(\mathscr{P})$ $\Leftrightarrow$ $1+d=0$ $\Leftrightarrow$ $d=-1$ permet alors de conclure :

$(\mathscr{P}): x+y+z-1=0$.

Note : Méthode alternative 2 acceptable : Vérifications $A\in(\mathscr{P})$, $B\in(\mathscr{P})$ et $C\in(\mathscr{P})$.

Note : Méthode alternative 3 acceptable : Coplanarité de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$ $\Leftrightarrow$ ... .

2°) a°) On a la réduction :

$(\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0 \Leftrightarrow (\mathscr{S}): (x-1)^2-1+y^2+(z-1)^2-1+1=0$

$\Leftrightarrow (\mathscr{S}): (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$

On en déduit que l'ensemble $(\mathscr{S})$ est une sphère de centre $I(1,0,1)$ et de rayon $R=1$.

Note : Méthode alternative acceptable : Formule $h=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$ ... .

2°) b°) Il suffit de montrer que les trois points A , B et C appartiennent à la sphère $(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+0^2+(0-1)^2=1$, d'où $A\in(\mathscr{S})$.

On a $(0-1)^2+0^2+(1-1)^2=1$, d'où $B\in(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+(-1)^2+(1-1)^2=1$, d'où $C\in(\mathscr{S})$.

Note : Méthode alternative acceptable :

Calcul de distances … puis le reste … : $d=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $d<r$, $H\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $AH=BH=CH$, …. .

3°) a°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ étant précédemment déterminé, on utilise la formule :

$$\mathscr{V}(IABC)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right| .$$

Le calcul $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ainsi que le calcul du produit scalaire donne $\mathscr{V}(IABC)=\frac{1}{6}$ (*uv*)

3°) b°) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\alpha-1\\0\\2-\alpha\end{pmatrix}$ et

$$\mathscr{V}(MABC)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{6}\left|(\alpha-1).1+0.1+(2-\alpha).1\right|=\frac{1}{6}$$ indépendant de α

Note : La valeur de cette constante n'est pas exigée , en effet :

Méthode alternative 2 acceptable : parallélisme donc hauteur constante donc volume constant .

Exercice 5 :

✓ **Contenu :** Série statistique double, coefficient de corrélation, droite de régression.

✓ **Aptitudes visées :** Déterminer le coefficient de corrélation d'une série statistique double, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression (de y et t),donner une estimation d'une valeur de y pour une valeur donnée de t.

✓ **Corrigé :**

1°) a°) Simple calcul, à l'aide d'une calculatrice :

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2
y* = ln *x	2,20	2,42	2,69	2,89	3,13	3,36	3,59

Note : Les calculs sont effectués à la calculatrice et les arrondis à l'ordre 10^{-2} sont exigés : Note 0 en cas de non respect de la consigne .

1°) b°)

Note : L'énoncé parle de la série (y,t) !? Ceci est en contradiction avec la notation (t,y) adoptée par le manuel/programme officiel : Il y'a risque de saisie erronée des données .

La saisie des données (t,y) dans la calculatrice, puis la consultation de la touche $\boxed{r}$ renvoie la valeur $r \simeq 0,9948$

L'énoncé , ne précisant pas l'ordre de l'arrondi concernant cette question , deux options se présentent

- Option 1 : L'arrondi , à l'ordre 10^{-3}. (Celui qui semble le plus adapté) conduit à $r \simeq 0,995$
- Option 2 : L'arrondi , à l'ordre 10^{-2}. (Celui qui s'aligne à la question précédente) conduit à $r \simeq 1$.

Les deux valeurs $r \simeq 0,995$ ou $r \simeq 1$ sont acceptées.

2°) a°) En respectant la consigne de l'énoncé indiquant l'obligation d'arrondir les résultats à l'ordre 10^{-2}, on obtient : $a \simeq 0,23$ et $b \simeq 2,20$.

L'équation de la droite de régression $(\mathscr{D})$ est alors : $(\mathscr{D}) : y = 0,23\,t + 2,20$

2°) b°) On a : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y} \Leftrightarrow x = e^{0,23t+2,20}$

L'expression de x en fonction de t est : $x = e^{0,23t+2,20}$

2°) c°) Pour $t = 10$, on a : $x = e^{0,23\times 10+2,20} = e^{4,50} \simeq 90,017131$ (Valeur fournie par la calculatrice)

En écrivant $90,017131 = 9,0017131\times 10^{1}$ et en arrondissant la mantisse à l'unité, on obtient :

une estimation de x est $x \approx 90$, mais en tenant compte de l'unité de x, la réponse finale est :

Pour $t = 10$, une estimation de x est $x \approx 90\ 000$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

SESSION PRINCIPALE

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE :** 3h **COEFFICIENT :** 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x\ln x)$ est égale à

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ est égale à

a) 2 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$.

3) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ pour

a) $k = \dfrac{1}{2}$ b) $k = 2$ c) $k = -2$.

Exercice 2 (4 points)

1) a) Vérifier que $(5 + 2i)^2 = 21 + 20i$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 - 4i)z - 3 - 15i = 0$.

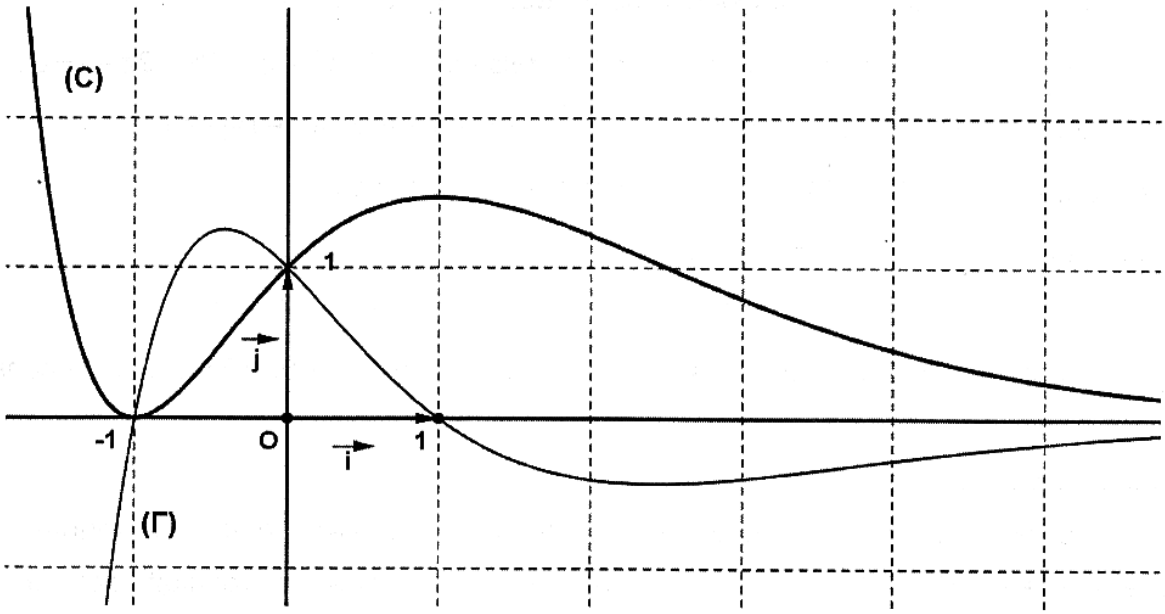
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, A′ et B′ les points d'affixes respectives $-3i$, $5 - i$, -3 et $1 + 5i$.

2) a) Placer les points A , B , A′ et B′ .
   b) Montrer que OAA′ et OBB′ sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixes z_M.
   a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k - 3)i$.
   b) Montrer que les droites (OM) et (A′B′) sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment $[AB]$.
   Vérifier que dans ce cas A′B′ = 2 OM.

Exercice 3 (6 points)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f'.
2) Déterminer f(0), f' (0), f(-1) et f' (-1).
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e - 5$.
   b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1 , +\infty [$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[1 , +\infty [$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1 , +\infty[$ une solution unique α et que $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$.
   c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 4 (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 , 0 , 0), B(0 , 0 , 1) et C (1 , -1 , 1) .

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$.

   b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points M(x , y , z) de $\mathscr{E}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

   b) Montrer que $S \cap \mathscr{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

   b) Soit α un réel et soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(\alpha, 0 , 2 - \alpha)$.

   Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Exercice 5 (3 points)

Pour étudier la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé on a mesuré, à divers instants t, le nombre x de bactéries par millilitre. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant, où t est exprimé en heures et x est exprimé en milliers.

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2

On pose $y = \ln x$ où ln désigne le logarithme népérien.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant (on donnera pour y les valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	1	2	3	4	5	6
$y = \ln x$	2,20	2,42					3,59

   b) Déterminer le coefficient de corrélation de la série (y,t).

2) a) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite D de régression de y en t. (on arrondira les coefficients à 10^{-2} près).

   b) A partir de l'équation de D, déterminer l'expression de x en fonction de t.

   c) Donner une estimation du nombre de bactéries par millilitre pour t = 10.

Section: Sciences Expérimentales *Session de contrôle 2011*

Matière : Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul, interpréter géométriquement l'argument d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

Répondre par vrai ou Faux en justifiant :

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel : **Vrai**

$\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\in\mathbb{R}$.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z-7+i=0$ sont $1+2i$ et $-1+3i$. : **Faux**

la somme des racine est $z'+z''=1+2i+-1+3i==5i\neq -\frac{b}{a}=6$.

3) Soit z et z' deux nombres complexe non nuls.

Si $\arg(z')\arg(z')\equiv-\arg(z)[2\pi]$ alors $z'=\overline{z}$: **Faux**

Si on prend $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z'=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on a alors $\arg(z')\equiv-\arg(z)[2\pi]$ mais $z'\neq z$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$ est $2^8e^{i\frac{4\pi}{3}}$: **Vrai**

$\left(\sqrt{3}+i\right)^8=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^8=2^8e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Exercice 2 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation cartésienne d'un plan, représentation paramétrique d'une droite, section d'une sphère par un plan, position relative de deux droites.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative de deux droites, déterminer la section d'une sphère par un plan.

✓ **Corrigé :**

A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3).

1) a/ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b/ On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC) donc (ABC) : $6x + 3y + 2z + d = 0$.

Or A(1,0,0) $\in$ (ABC) d'où d= -6, ainsi (ABC) : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

2) a/ Représentation paramétrique de Δ et Δ' :

♦ On a $I\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ d'où $\Delta: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$.

♦ On a $J\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ d'où $\Delta': \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \beta \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$

b/ Déduisons que $\Delta \cap \Delta' = \left\{\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)\right\}$

♦ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non colinéaires donc Δ et Δ' sont sécantes.

♦ Ω ∈ Δ ($\alpha = \frac{3}{2}$) et Ω ∈ Δ' (β = 1).

Ainsi $\Delta \cap \Delta' = \left\{\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)\right\}$.

3) a/ Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation de la sphère :

$$S : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = O\Omega^2 = \frac{7}{2}.$$

(*On peut aussi vérifier que ΩA=ΩB=ΩC=ΩO, cependant on peut remarquer que Δ est perpendiculaire au segment [AB] en son milieu donc contenu dans le plan médiateur du segment [AB] par suite ΩA = ΩB de même ΩA=ΩC*).

b / Rayon du cercle circonscrit au triangle ABC :

♦ On a S $\cap$ (ABC) = C_{ABC}.

♦ $d = d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{\left|6\times\frac{1}{2}+3\times1+2\times\frac{3}{2}-6\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{3}{7}$.

♦ Le rayon du cercle C_{ABC} est $r = \sqrt{O\Omega^2 - d^2} = \sqrt{\frac{7}{2}-\frac{9}{49}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{14}$.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

✓ **Contenu :** Fonctions numériques, limites, continuité, dérivabilité, variation, branches infinies, courbe.

✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction , identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe.

✓ **Corrigé :**

I- On pose $f(x) = e^x - x$.

x	$-\zeta$		0		$+\zeta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\zeta$	↘	1	↗	$+\zeta$

1) Variations de f :

♦ $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$.

♦ $f'(x) = 0$ signifie $e^x = 1$ signifie $x = 0$.

♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$.

2) Déduisons que pour tout x , $e^x - x$ ☮ 1

On a d'après le tableau de variation , pour tout x : $f(x)$ ☮ 1 signifie $e^x - x$ ☮ 1.

II- 1) a/ ♦ $g(1) = \dfrac{1}{2}$. ♦ $g(2) = 0$. ♦ $g(3) = \dfrac{1}{2}$.

b / ♦ $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ (la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_g.).

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ voisinage de + ⌘)

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisiange de + ⌘).

c / Tableau de signe de g'(x) :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) On pose $h(x)=e^{g(x)}$.

a) ♦ $h(1)=e^{g(1)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. ♦ $h(2)=e^{g(2)}=e^{0}=1$ ♦ $h(2)=e^{g(3)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

b/ ♦ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{g(x)}=e^{+\infty}=+\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{g(x)}=e^{+\infty}=+\infty$

c / ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}}{g(x)}\dfrac{g(x)}{x}$

♦ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}}{g(x)}=+\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$

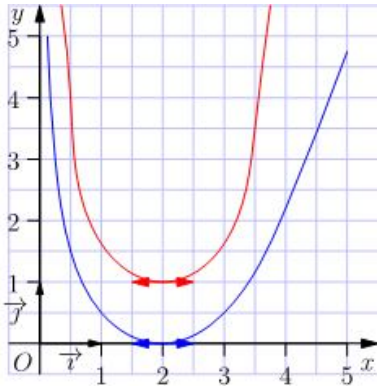
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=+\infty$.

Ainsi C_h admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

d / tableau de variation de h :

♦ h'(x) = $\left(e^{g(x)}\right)'$=g'(x) $e^{g(x)}$, ainsi le signe de h'(x) est celui de g'(x) puisque $e^{g(x)} > 0$.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



3) Soit α > 0, M(α, g(α)) et N(α, h(α)).

a / MN = $\left|h(\alpha)-g(\alpha)\right|=\left|e^{g(\alpha)}-g(\alpha)\right|=\left|f\left(g(\alpha)\right|=f\left(g(\alpha)\right)$

(car pour tout x, f(x) >0).

b / MN est minimale signifie que f(g(α)) est minimale signifie g(α)=0 signifie α = 2.

4) Courbe de C_h.

♦ C_h admet une branche parabolique suivant $(O, \vec{j})$.

La droite $x = 0$ est asymptote verticale à C_h.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

- ✓ **Contenu :** Suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Comparer des expressions numériques, encadrer une expression numérique, étudier la monotonie et la convergence d'une suite.
- ✓ **Corrigé :**

1) Soit a > 0 et x ∈ [a, a+1]

a / On a : $0 < a \leq x \leq a+1$ donc $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{a+1}$.

b / Démontrons que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$.

On a $\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ donc $\int_a^{a+1} \frac{1}{a+1} dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{a} dx$

d'où $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$. (1)

2) On pose pour n ☘ 2, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

a/ Montrons que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$

En utilisant l'inégalité (1) et en remplaçant successivement a par 1, 2 , 3 etc on

$a = 1 \qquad \frac{1}{2} \leq \ln(2) - \ln(1) \leq 1$

$a = 2 \qquad \frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$

obtient : $a = 3 \qquad \frac{1}{4} \leq \ln(4) - \ln(3) \leq \frac{1}{3}$

$\vdots$

$a = n-1 \quad \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$

En additionnant membre à membre ces inégalités on obtient après simplification :

$s_n - 1 \leq \ln(n) \leq s_n - \frac{1}{n} \leq s_n$.

b / Déduisons $\lim_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{s_n}$.

♦ On a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et Sn ☮ ln(n) donc $\lim_{n\to+\infty} s_n = +⌘$.

♦ Sn > 0 et $s_n - 1 \le \ln(n) \le s_n$ donc $\frac{s_n - 1}{s_n} \le \frac{\ln(n)}{s_n} \le 1$ d'où $1 - \frac{1}{s_n} \le \frac{\ln(n)}{s_n} \le 1$

Comme $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{s_n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{s_n} = 1$.

3) On pose pour tout n ☮ 2, $u_n = s_n - \ln(n)$.

a / Montrons que u est minorée

On ln(n) 🖫 S_n signifie S_n-ln(n) ☮ 0 donc u_n ☮ 0 donc u est minorée par 0.

b / Montrons que u est décroissante :

$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - (S_n - \ln(n)) = S_{n+1}\text{-}S_n - (\ln(n+1)\text{-}\ln(n)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$

Or on sait que d'aprés (1) que $\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}$.

d'où $\frac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \le 0$. ainsi u est décroissante.

c/ Montrons que u est convergente :

On a : $\begin{cases} u \text{ est décroissante} \\ u \text{ est minorée} \end{cases}$ donc u est convergente.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3h** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 6z - 7 + i = 0$ sont $1 + 2i$ et $-1 + 3i$.

3) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $\arg(z') \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ alors $z' = \overline{z}$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^8$ est $2^8 e^{i(\frac{4\pi}{3})}$.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1, 0 ,0), B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.
   a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.
   b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.
   a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.
   b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 3 (6 points)

I – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
   1) Dresser le tableau de variation de f.
   2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x \geq 1$.

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
   La droite d'équation x = 0 est une asymptote à la courbe C_g.
   La courbe C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer g(1), g(2) et g(3).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de g′(x).

2) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative .

a) Calculer h(1), h(2) et h(3).

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \dfrac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$, montrer que la courbe C_h admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit $\alpha > 0$.

On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α .

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle [a, a+1].

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{a+1}$.

b) Déduire que $\dfrac{1}{a+1} \le \ln(a+1) - \ln(a) \le \dfrac{1}{a}$. (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \ge 2$ par $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer, en utilisant (1), que $S_n - 1 \le \ln(n) \le S_n$.

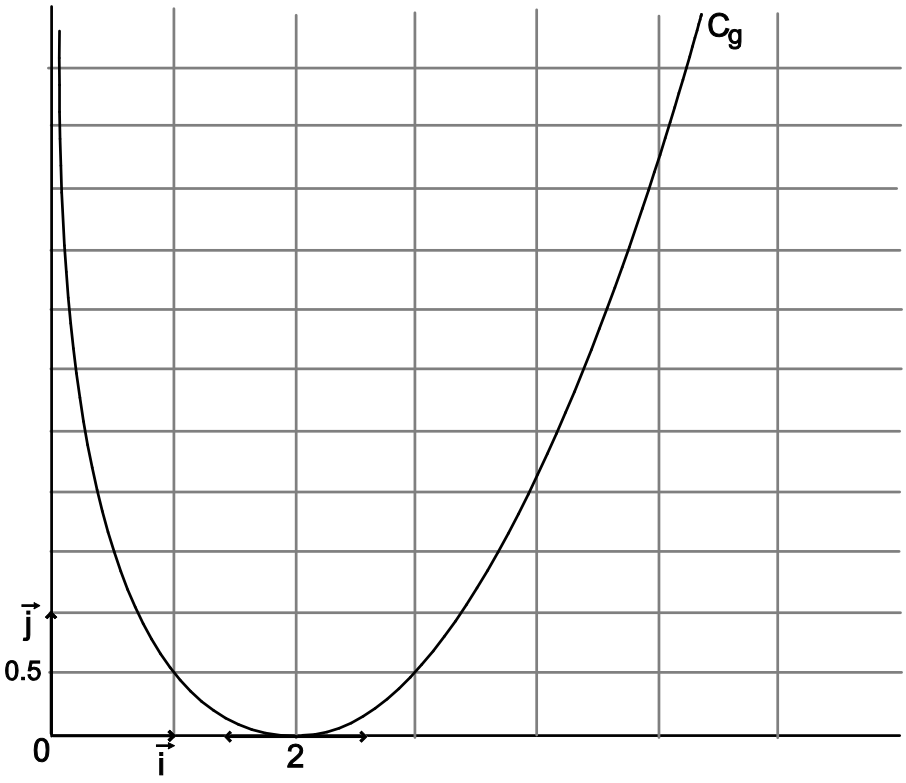
b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{S_n}$.

3) On pose, pour tout entier naturel $n \ge 2$, $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.


C_g
$\vec{j}$
0.5
0
$\vec{i}$
2

Section: Sciences Expérimentales *Session principale 2011*

Matière : Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

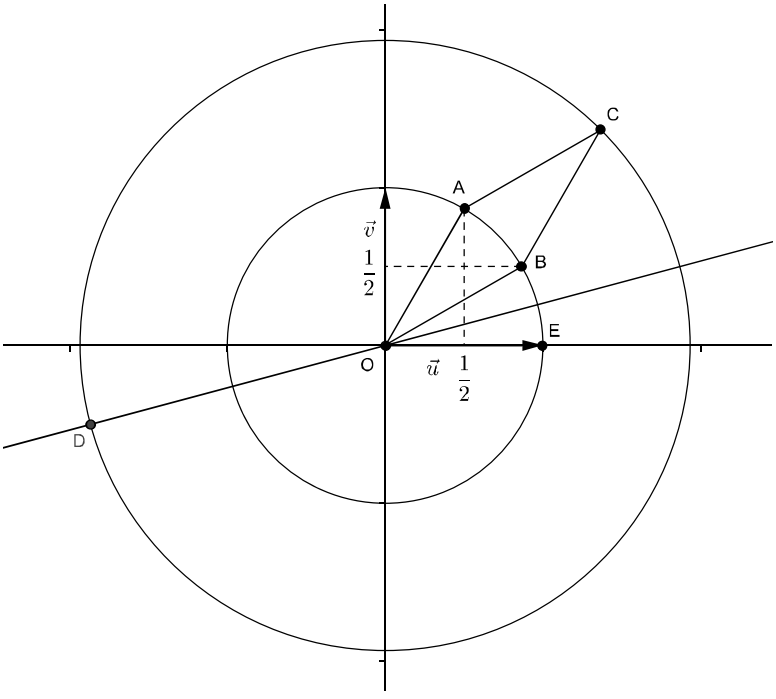
- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation d'un plan, intersection d'une sphère et un plan, intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan, déterminer l'intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Corrigé :**

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à :	c) $\overrightarrow{BA}$
2) L'intersection des plans x=1 et y=1 est la droite	c) (CG)
3) Une équation du plan (ACE) est :	b) x-y=0
4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=2$ avec le plan d'équation z=1 est :	a) un cercle

Exercice 2 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

a = $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et b = $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.



1) a / Forme exponentielle de a et de b :

a = $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et b = $e^{i\frac{\pi}{6}}$

b / Vérifions que b^2 = a.

On a $b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ = a.

2) a/ Plaçons les points A , B et C.

■ On a $|a|=|b|=1$ donc OA=OB=1

D'où A et B appartiennent au cercle trigonométrique, on construit alors le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée positive et le point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$ et d'abscisse positive. (On peut aussi utilise les angles $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)$.

■ C est le point d'affixe c = a+b signifie $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ signifie OACB est un

parallélogramme, d'où la construction.

b/ Vérifions que c = $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$c = a+b = \frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

3) (E) : $z^2 + z - c = 0$:

a/ Vérifions que b est une solution de (E) :

On a $b^2+b-c = a+b-c = 0$ alors b est une solution de (E).

b / Déterminons la deuxième solution d de (E) :

On a : b d = -c (produit des racines)

Signifie d = $-\frac{c}{b} = -\frac{\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

c/ Plaçons alors D(d) :

■ On a $|d| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = OC$ et un arg(d) est $-\frac{11\pi}{12}$, donc D est le point du cercle

du centre O et passant par C et tel que une mesure $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OD}\right)$ est $-\frac{11\pi}{6}$.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction , Déterminer le sens de variation d'une fonction , identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, exploiter ou produire un graphique pour étudier la position relative de deux courbes, calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par des courbes.
- ✓ **Corrigé :**

1) Plaçons les points de la courbe C d'abscisse e et $\sqrt{e}$

On a ln(e) = 1 et ln($\sqrt{e}$) = $\frac{1}{2}$. On place alors les points E et F de C d'ordonnées respectives 1 et $\frac{1}{2}$. (Voire figue ci-dessous).

2) $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + 1$

a/ ■ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln^2(x) - \ln(x) + 1 = (-\infty)^2 - (-\infty) + 1 = +\infty$.

■ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln^2(x) - \ln(x) + 1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(x)(\ln(x)-1)+1\right) = +\infty$.

b/ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln^2(x)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.

c / Montrons que $f'(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$.

On a $f'(x) = \left(\ln^2 x - \ln(x) + 1\right)' = 2\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$.

d/ Tableau de variation de f :

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\zeta$
f'(x)	—	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{4}$	↗ $+\zeta$

$f'(x) = 0$

signifie $\frac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$

signifie $\ln(x) = \frac{1}{2}$

signifie $x = \sqrt{e}$.

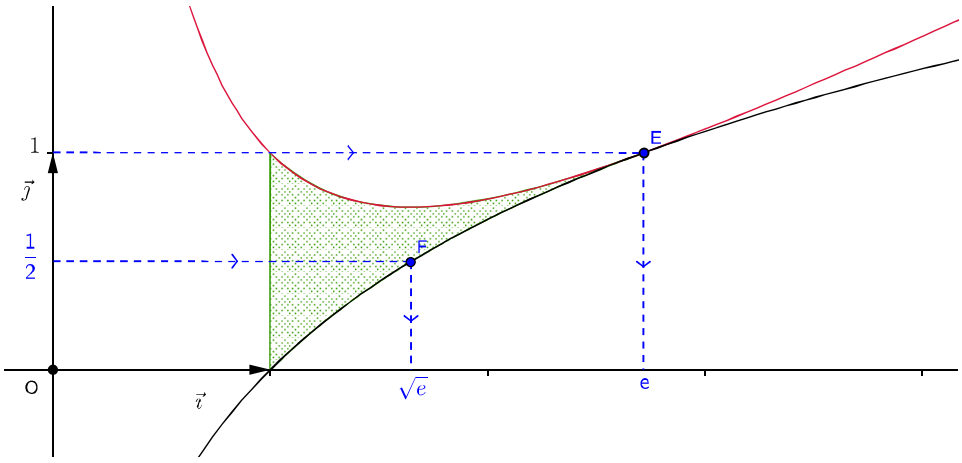
3) a / Etudions la position relative des courbes C_f et C :

On pose g(x) = f(x)-ln(x) = $\ln^2$x-ln(x)+1-ln(x) = $\ln^2$(x)-2ln(x)+1=(ln(x)-1)^2 ☹ 0

g(x)=0 signifie ln(x)=1 signifie x = e, ainsi C_f est au dessus de C et les deux courbes sont tangentes au point E.

b / Courbe de C_f :

On a la droite $(O, \vec{j})$ est une asymptote verticale à C_f.



4) a/ Montrons que $\int_1^e \ln^2(x)dx = e - 2$

On utilise une intégration par partie :

On pose : u(x) = $\ln^2$(x) → u'(x) = 2 $\frac{1}{x}$ ln(x)

v'(x) = 1 ← v(x) = x

Ainsi $\int_1^e \ln^2(x)\,dx = \left[x\ln^2(x)\right]_1^e - 2\int_1^e \ln(x)\,dx = e - 2\left[x\ln(x) - x\right]_1^e = e - 2$.

b / Calcul de A

On a C_f est au dessus de C donc :

$$A = \int_1^e (f(x) - \ln(x))dx = \int_1^e (\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1)dx = \int_1^e \ln^2(x)\,dx - 2\int_1^e \ln(x)\,dx + \int_1^e dx$$

$$= e - 2 - 2 + e - 1 = 2e - 5 \text{ (u.a).}$$

Exercice 4 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter une courbe pour déterminer ou estimer les solutions éventuelles d'une équation, résoudre des inéquations en utilisant l'inégalité des accroissements finis, étudier la convergence d'une suite du programme, déterminer une valeur approchée de la limite d'une suite convergente.
- ✓ **Corrigé :**

1) $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}$, $\Delta : y = x$

a / C_f coupe Δ eu point unique d'abscisse un réel de l'intervalle [0,1], donc l'équation $e^{-\frac{x}{4}} - x = 0$ admet dans [0,1] une solution unique α.

b / f(0.8)-0.8 = 0.0187307… > 0 et f(0.9)-0.9 = - 0.10148378 < 0 donc $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) On pose : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; n \geq 0 \end{cases}$

a / Montrons que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 1$

♦ On a $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

♦ Soit n un entier naturel, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et démontrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a $0 \leq u_n \leq 1$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ (f est décroissante sur [0,1])

d'où $e^{-\frac{1}{4}} \leq u_{n+1} \leq 1$ par suite $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

b / Montrons que pour tout réel x $\in [0,1]$, f'(x) $\leq \frac{1}{4}$:

On a f'(x) = $-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$ alors $|f'(x)| = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{4}f(x)$

d'où pour x $\in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}f(0)$ (car f est décroissante sur [0,1])

ainsi $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c / Montrons que pour tout n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

On a : ♦ f est dérivable sur [0,1]

♦ Pour tout x $\in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Donc pour deux réels a et b dans [0,1] on a : $|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{4}|b-a|$

En posant b = u_n et a = α (*ce qui est légitime puisque α et u_n sont tous deux dans [0,1]*)

on obtient $|f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

Ainsi $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

d / Démontrons que pour tout n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

♦ Vérifions pour n = 0 :

On a : $|u_0-\alpha| = |1-\alpha| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ car u_0 et α appartiennent à [0,1].

♦Soit n un entier un entier naturel, supposons que $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

On a : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ alors $\frac{1}{4}|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Or : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ d'où $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Ainsi pour tout n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e / Montrons que la suite *u* converge vers α :

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3) a/ Déterminons un entier naturel n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|u_n-\alpha| \leq 10^{-3}$

$|u_n-\alpha| \leq 10^{-3}$ dès que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3}$ signifie $\ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leq \ln\left(10^{-3}\right)$

signifie $-n\ln(4) \leq -3\ln(10)$ signifie $n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(4)}$ signifie n ≥ 4.9828…

On prend donc n = 5.

b / On a $|u_5 - \alpha| \leq 10^{-3}$ donc u_5 est une valeur approchée de α a 10^{-3} prés.

On a $u_0 = 1$

$u_1 = f(1) = 0.7788007831$

$u_2 = f(0.7788007831) = 0.8230813843\ldots$

$u_3 = f(0.8230813843) = 0.8140199977\ldots$

$u_4 = f(0.8140199977) = 0.8158661255\ldots$

$u_5 = f(0.8158661255) = 0.8154896640\ldots$

Donc une valeur approchée à 10^{-3} prés de α est 0.815.

(*une valeurs exacte de α est 0.8155534188..... et on a α - 0.815 = 0.00056..<10^{-3}*)

Pour trouver u_5 à la précision demandée, il faut calculer avec tous les chiffres de la calculatrice car on risque avec des arrondissements de ne pas obtenir la précision demandée.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

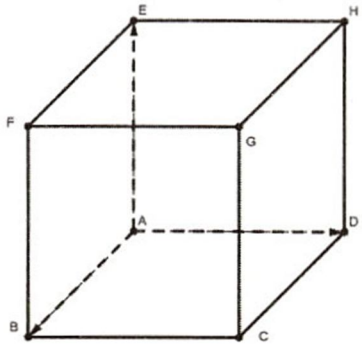
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3h** **COEFFICIENT : 3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3
La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à
a) $\overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BA}$.

2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite
a) (CH) b) (CF) c) (CG).

3) Une équation du plan (ACE) est
a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $x - y = 1$.

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est
a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
b) Vérifier que $b^2 = a$.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.
a) Placer les points A, B et C.
b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.
a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).
Montrer que $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$
c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 3/3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C de la fonction logarithme népérien («ln »).

1) Placer les points de la courbe C d'abscisses e et $\sqrt{e}$.

2) Soit f la fonction définie sur]0, + ∞[par $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$.

On note C_f sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et C.

b) Tracer C_f dans l'annexe ci-jointe.

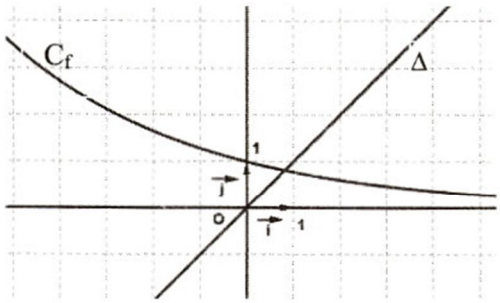
4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a) Montrer que $\int_1^e \ln^2 x \, dx = e - 2$.

b) Calculer A.

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation $e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans [0, 1] une solution unique α.

b) Vérifier que $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \; ; \; n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

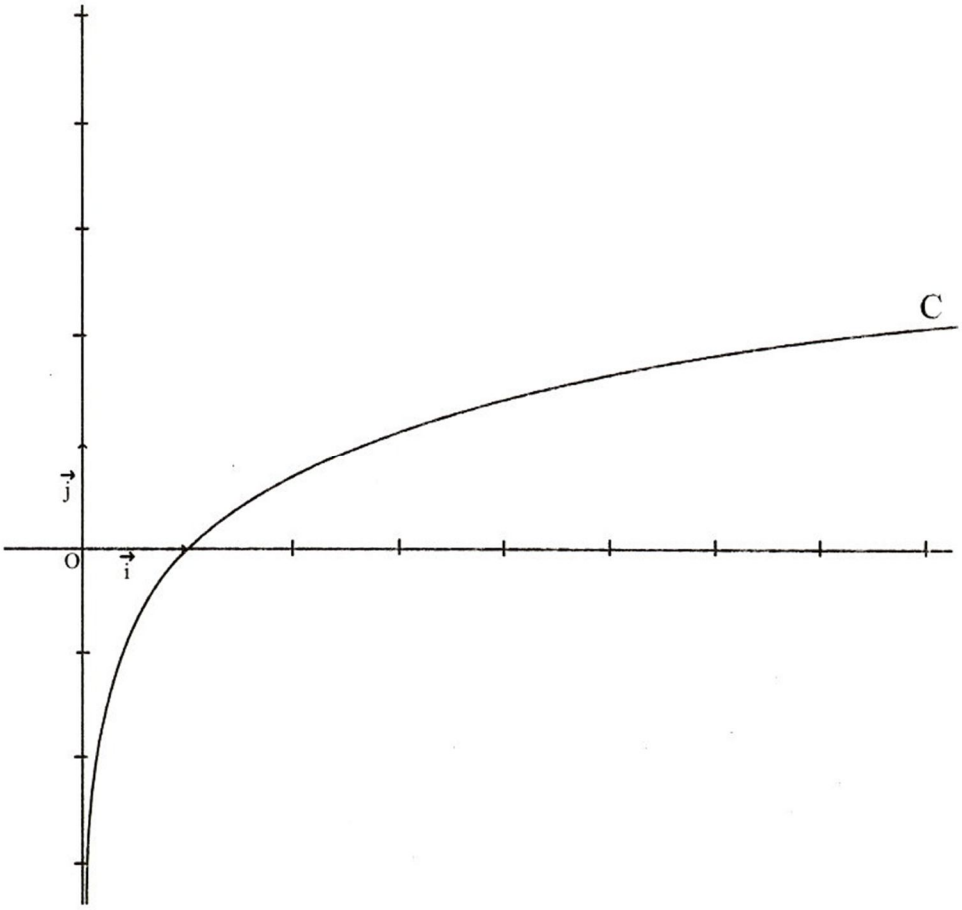
c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4} |U_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers α.

3) a) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$.

b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.


C
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$

Section: Sciences Expérimentales ***Session de contrôle 2012***

Matière : Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Vérifier une racine 5ème d'un nombre complexe non nul, interpréter géométriquement un nombre complexe (milieu d'un segment), exploiter les solutions d'une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

1) Faux : $(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}})^5 = 4\sqrt{2}e^{i\pi} = -4\sqrt{2}.$

2) Faux : $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ donc $z_B = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.$

3) Vrai : si P est le milieu de [MN] alors $z_P = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right) \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation cartésienne d'un plan, représentation paramétrique d'une droite, section d'une sphère par un plan, position relative de deux droites.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative d'une droite et un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan.
- ✓ **Corrigé :**

1) I(1,2,0) et J(0,2,2)

2) a) Soit M(x,y,z) un point de l'espace.

M∈P signifie $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ signifie $2x-4z+3=0$

Ainsi P : $2x-4z+3=0$

Autrement: comme P est le plan médiateur du segment [IJ], alors $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan P et par suite une équation de P est de la forme $-x+2z+d=0$, d est un réel.

Le milieu du segment [IJ] est un point de P alors $d=-\frac{3}{2}$ et par conséquent P : $2x-4z+3=0$

b) M(x,y,z) ∈ (OC)∩P signifie "il existe un réel α tel que $\begin{cases} x=0, y=0, z=\alpha \\ 2x-4z+3=0 \end{cases}$ signifie

$(x,y,z) = (0,0,\frac{3}{4})$ et par suite $(OC) \cap P = \{K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)\}$

3) a) (S) : $x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2 = (\frac{\sqrt{89}}{4})^2$ alors (S) est la sphère de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

b) $1^2+2^2-5=0$ alors $I \in (S)$, $2^2+2^2-\left(\frac{3}{2}\right)\times 2-5=0$ alors $J \in (S)$.

c) Si (S') est une sphère de centre $\Omega \in (OC)$ et passant par I et J alors $\Omega I = \Omega J$ d'où $\Omega \in P$, par conséquent $\Omega = K$ qui est le seul point d'intersection de P et (OC) et par suite (S')=(S).

4) L'intersection du plan P et la sphère (S) est le cercle de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

Exercice 3 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Série statistique double.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) $r \simeq -0.998$. Un justement affine est justifiée.

b) T = (-9756.68)B+(26390.938)

2) Pour A= 6.8, T= (-9756.68)(ln6.8)+(26390.938)=7688 (estimation de l'âge en années).

Une estimation de l'année de la chute est 5688 A-J

Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques, limites, continuité, dérivabilité, variation, branches infinies, courbe.
- ✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, identifier les branches infinies d'une courbe, étudier la position relative d'une courbe et son asymptote, tracer la courbe d'une fonction réciproque
- ✓ **Corrigé :**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+xe^{-x}+2e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1.$ (traçage de l'asymptote : voir graphique)

2) a) $x+2-\dfrac{xe^x+e^x}{e^x+1} = \dfrac{(e^x+1)(x+2)-xe^x-e^x}{e^x+1} = f(x).$

b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(\dfrac{xe^x+e^x}{e^x+1}\right) = 0.$ La droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.

c) le signe de $f(x)-(x+2)$ est celui de $-(x+1)$.

Sur $]-\infty,-1]$, C_f est au dessus de Δ.

Sur $[-1,+\infty[$, C_f est au dessous de Δ.

3) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+2)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}.$

4) a) $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ donc $\alpha \neq 0$.

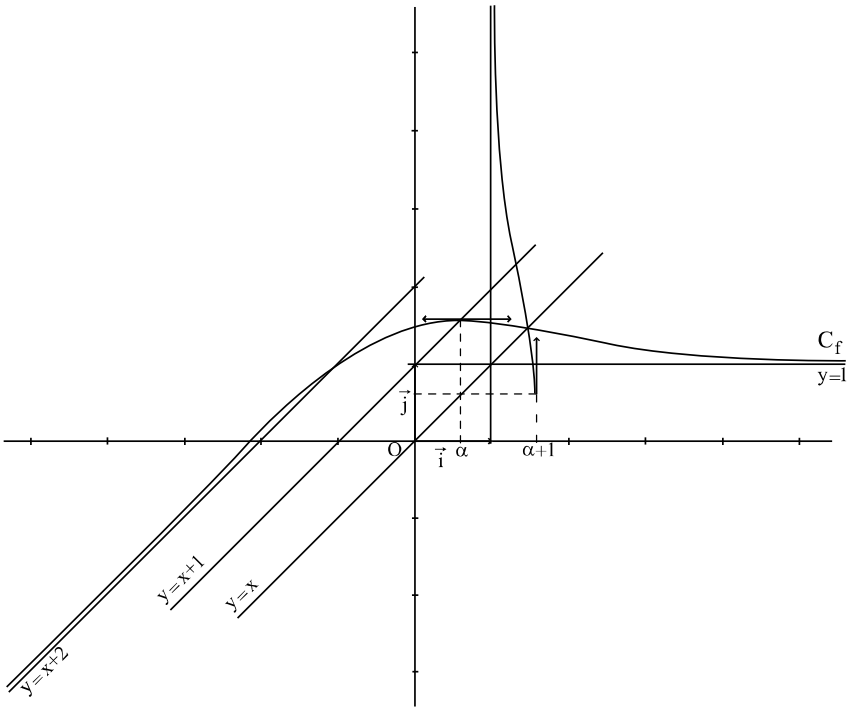
b) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1-\alpha e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$, $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}+\alpha+2}{e^{\alpha}+1} = \dfrac{\frac{1}{\alpha}+\alpha+2}{\frac{1}{\alpha}+1} = \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha+1} = \alpha+1$

c) $A\in C_f \cap \Delta'$ avec $\Delta': y = x+1$. La tangente à C_f en A est parallèle à (x'x).

5) a) h est strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur son image par h.

Comme h est continue sur $[\alpha,+\infty[$ alors $h([\alpha,+\infty[) =]1,\alpha+1]$.

b)



Exercice 5 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Calcul des volumes de solides de révolution.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer le volume d'un solide de révolution.
- ✓ **Corrigé :**

1) $v_1 = \pi\int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi\frac{a^2}{2}$

2) $v_2 = \pi\int_0^a (\sqrt{x-\sin x})^2 dx = \pi\int_0^a x dx - \pi\int_0^a \sin x dx = v_1 + \pi\left[\cos x - 1\right]_0^a$

$v_2 = v_1 + \pi(\cos x - 1)$

3) a) $v_2 - v_1 = \pi(\cos x - 1)$ et $\cos a \leq 1$ donc $v_2 \leq v_1$ pour tout $a \in]0;4\pi]$.

b) $v_2 = v_1 \Leftrightarrow \pi(\cos a - 1) = 0$ et $a \in]0;4\pi] \Leftrightarrow a = 2\pi$ ou $a = 4\pi$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3 h	COEFFICIENT : 3
SECTION : Sciences Expérimentales		SESSION DE CONTRÔLE	

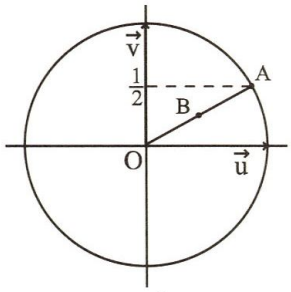
Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse .

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$ est une racine cinquième de $4\sqrt{2}$.

2) Dans la figure ci-contre , $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

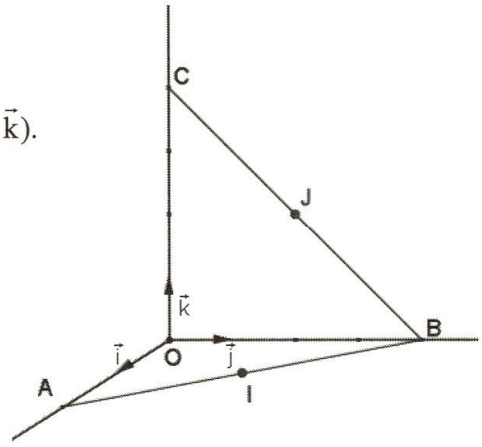


Si B est le milieu du segment $[OA]$ alors l'affixe du point B est $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Si M et N sont les points d'affixes les solutions de l'équation $4z^2-5z-(3+2i)=0$ alors l'affixe du milieu du segment $[MN]$ est un réel.

EXERCICE 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$ et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.



1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant MI = MJ.
a/ Montrer que P est le plan d'équation $2x-4z+3=0$.
b/ Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0.$$

a/ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
b/ Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.
c/ Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).

4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S.

EXERCICE 3 (3 points)

Par un prélèvement effectué sur le tronc d'un arbre mort, on peut obtenir son âge T et sa radioactivité A. Le tableau suivant résume les résultats d'une analyse faite sur les troncs de sept arbres morts.

A	14.5	13.5	12	10.8	9.9	8.9	8
T	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300

où A désigne la radioactivité exprimée en nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone et T désigne l'âge exprimé en années.

1) On pose $B=\ln A$.

Les valeurs de B arrondies à 10^{-3} prés sont données dans le tableau suivant

B	2.674	2.603	2.485	2.380	2.293	2.186	2.079
T	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300

a/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre B et T et interpréter le résultat.
b/ Donner l'équation de la droite de régression de T en B.

2) Au cours de l'année 2000, on a retrouvé des arbres abattus par la chute d'un météorite (fragment minéral provenant de l'espace). Leur radioactivité A est de 6.8 désintégrations par minute et par gramme de carbone.

Donner une estimation de l'année de la chute du météorite.

EXERCICE 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe on a représenté , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x+x+2}{e^x+1}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et tracer l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

2) a/ Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=x+2-\frac{xe^x+e^x}{e^x+1}$.

b/ En déduire que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote Δ qu'on précisera.

c/ Etudier la position relative de la courbe C_f et l'asymptote Δ puis tracer Δ.

3) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}$.

4) Soit α l'abscisse du point A de la courbe C_f où la tangente est horizontale.

a/ Vérifier que α est différent de 0.

b/ Montrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ puisque $f(\alpha)=\alpha+1$.

c/ Construire alors le point A et la tangente à la courbe C_f au point A.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.

a/ Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

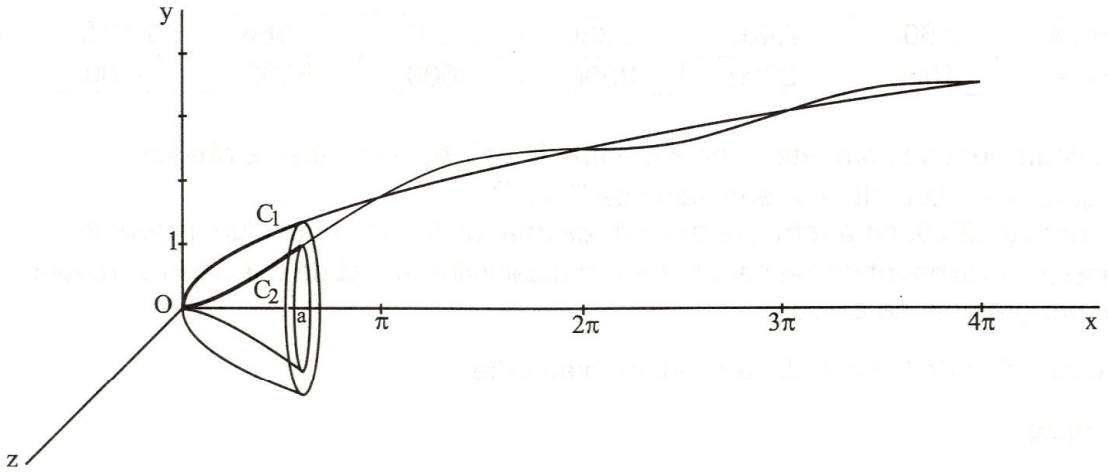
b/ Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE 5 (3 points)

Dans la figure ci-dessous on a représenté, dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $[0,4\pi]$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{x-\sin x}$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0,4\pi]$, $C_1=\{M(x,y)$ tels que $y=f(x)$ et $x\in[0,a]\}$

et $C_2=\{M(x,y)$ tels que $y=g(x)$ et $x\in[0,a]\}$.



On désigne par υ_1 le volume engendré par la rotation de C_1 autour de (Ox) et par υ_2 le volume engendré par rotation de C_2 autour de (Ox).

1) Montrer que $\upsilon_1=\dfrac{\pi}{2}a^2$.

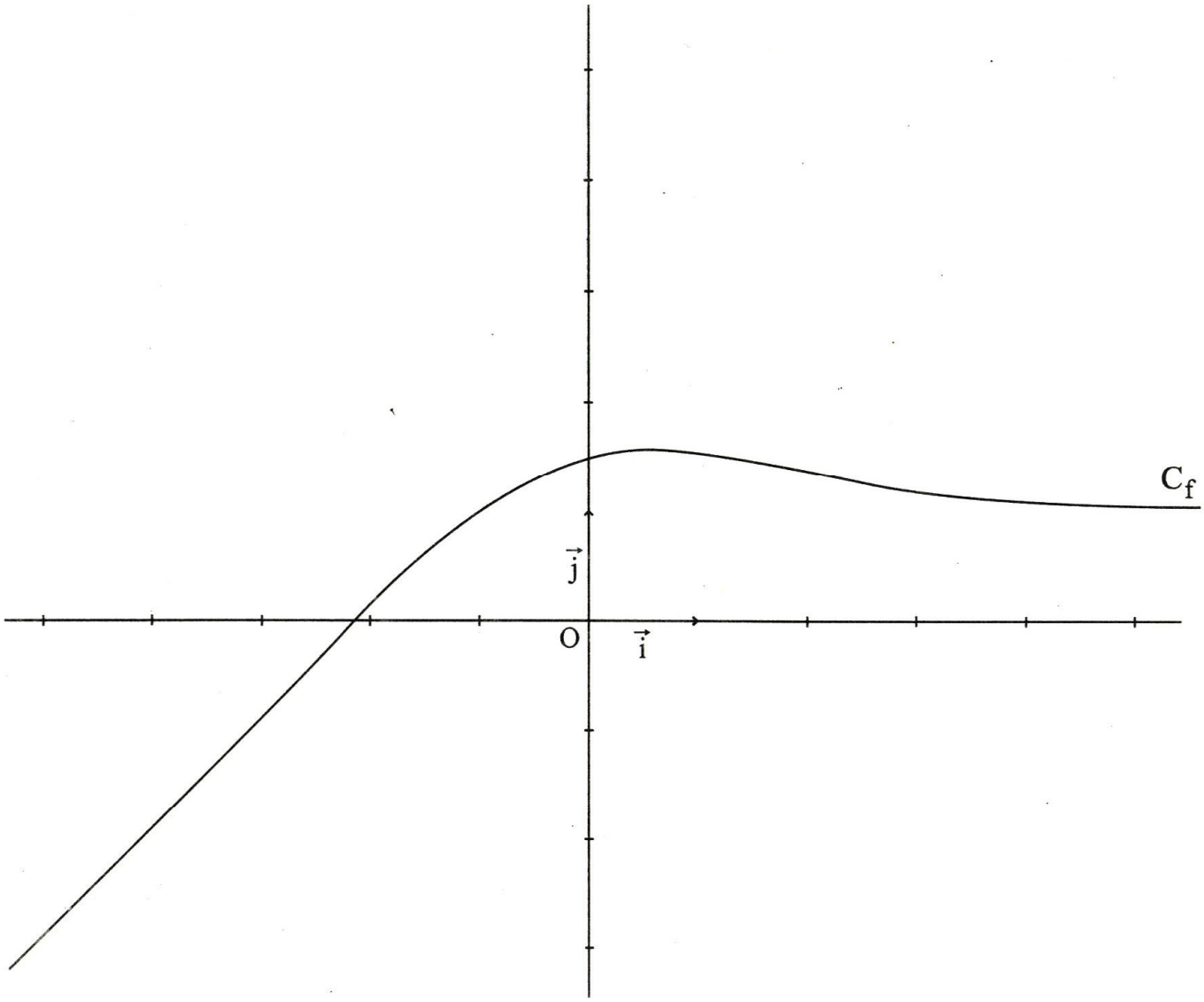
2) Montrer que $\upsilon_2=\upsilon_1+\pi(\cos a-1)$.

3) a/ Montrer que, pour tout $a\in]0,4\pi]$, $\upsilon_2\leq\upsilon_1$.

b/ Pour quelles valeurs de a, a-t-on $\upsilon_2=\upsilon_1$?

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Expérimentales

Annexe à rendre avec la copie



Section: Sciences Expérimentales ***Session principale 2012***

Matière : Mathématiques

Exercice 1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation d'un plan, intersection d'une sphère et un plan, intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan, déterminer l'intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Corrigé :**

1) b/ 2) b/ 3) c/ 4) b/

Exercice 2 (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) $a = \sqrt{3} + i$

on a $|a| = 2$.

Si θ est un argument de a alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ d'où $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et par suite $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) OA = $|a|$ = 2 signifie A ∈ $C_{(O,2)}$ et $\arg a \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OA})\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc A ∈ à la demi-droite [O,t) telle que $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ d'où A ∈ $C_{(O,2)} \cap$ [O,t) (voir figure1).

2) a) $b\bar{b} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-a}\right) = \frac{(a-1).(\bar{a}-1)}{(\bar{a}-1).(a-1)} = 1$

$b\bar{b} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 = 1 \Leftrightarrow$ OB =1 donc B appartient au cercle (ζ).

b) $\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)} = \frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1} = \frac{\frac{i}{b}-1}{\bar{a}-1} = \frac{1-b}{b(\bar{a}-1)} = \frac{1-b}{\frac{a-i}{1-\bar{a}}(\bar{a}-1)} = \frac{b-1}{a-1}$ donc $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

" $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel" signifie " $\frac{z_{\overrightarrow{IB}}}{z_{\overrightarrow{IA}}}$ est un réel" ; alors il existe un réel α tel que les $\overrightarrow{IA} = \alpha\,\overrightarrow{IB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et par suite les points A,I et B sont alignés.

c) B∈(C) ∩ (IA) (voir figure1).

3) $b = e^{i\theta} = \frac{a-1}{1-\bar{a}} = \frac{\sqrt{3}-1+i}{1-\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} + i\frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$ alors $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.

Exercice 3 (4 points)

- ✓ **Contenu :** Probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Variable aléatoire, loi de probabilité, loi binomiale, Espérance.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé, Calculer la probabilité d'un événement en utilisant la formule de BAYES, Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, Reconnaître un schéma de Bernoulli et en dégager les paramètres, Déterminer la loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli.
- ✓ **Corrigé :**

I)

1) La probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O est 0.46.

2) a) Soit P_1 la probabilité q'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$P_1 = C_4^1.(0.45)^1.(1-0.46)^3 = 0.29.$$

b) Soit P_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs

$$P_2 = p(A).p(B).p(AB).p(O).4! = 0.31 \times 0.18 \times 0.05 \times 0.46 \times 24 = 0.03$$

II)

1) $p = p(O \cap Rh\_) = p(Rh\_/O).p(O) = 0.09 \times 0.46 = 0.0414.$

2) a) X est une variable aléatoire qui suit la loi binomial de paramètres n et $p = 0.0414$.

$p(X = k) = C_n^k.(0.0414)^k \times (0.9586)^{n-k}$ $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

b) $E(X) = n \times p = n \times 0.0414$

c) $n = 5000$; $E(X) = 5000 \times 0.0414 = 207$

Donc le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 est 207.

<u>Exercice 4</u> (3 points)

- ✓ **Contenu :** Equations différentielles du type y' = ay , a ∈ - Sens de variation.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre une équation différentielle du programme. Résoudre des problèmes puisés dans des situations réelles pouvant être modélisées par une équation différentielle.
- ✓ **Corrigé :**

1) $y(t) = k.e^{-0.115t}$; $k \in IR$

2) a) $Q(0) = 1.4$ alors $k = 1.4$ d'où $Q(t) = 1.4e^{-0.115t}$, $t \geq 0$.

b) $Q'(t) = -0.161e^{-0.115t} < 0$ pour tout réel $t \geq 0$.

t	0	$+\infty$
Q'(t)	—	
Q(t)	1.4 ↘	0

c) $Q(t) = 0.7 \Leftrightarrow 1.4e^{-0.115t} = 0.7 \Leftrightarrow e^{-0.115t} = \frac{0.7}{1.4} \Leftrightarrow -0.115t = \ln(0.5) \Leftrightarrow t = 6$

3) $0.7 \leq Q(t) \leq 1.4$ signifie $0 \leq t \leq 6.027$.

<u>Exercice 5</u> (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction , Déterminer le sens de variation d'une fonction , identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, exploiter une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par des courbes.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) Signe de f(x) :

x	0	α	$+\infty$
f(x)	+	0	—

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha^2+\alpha\ln(\alpha)+\alpha}{(\alpha+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -(\alpha+1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}.\ln x + 1\right) = +\infty$, $(\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{x+1})=1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{x+1}.\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}) = 0$

3) a) $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b)

x	α	$+\infty$
g'(x	0	+
g(x)	g(α) ↗	$+\infty$

4) a) $g(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} + 1 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = 1 - \alpha$

b) voir figure 2

c) voir figure 2

5) a) $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{1} -xg(x)$

On pose $u(x) = -x \quad \rightarrow \quad u'(x) = -1$

$v'(x) = g'(x) \quad \rightarrow \quad v(x) = g(x)$

Alors $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = -[x.g(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx$

b) $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{1} |f(x) - g(x)|dx\,(u.a) = \int_{\alpha}^{1} g|(x) - f(x)|dx\,(u.a) = \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - \int_{\alpha}^{1} f(x)dx\,(u.a)$

$= \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - [-x.g(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx\ (u.a) = [x.g(x)]_{\alpha}^{1} = g(1) - \alpha g(\alpha)$

$\mathcal{A} = 1 - \alpha(1 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$

Figure 1 (exercice 2)

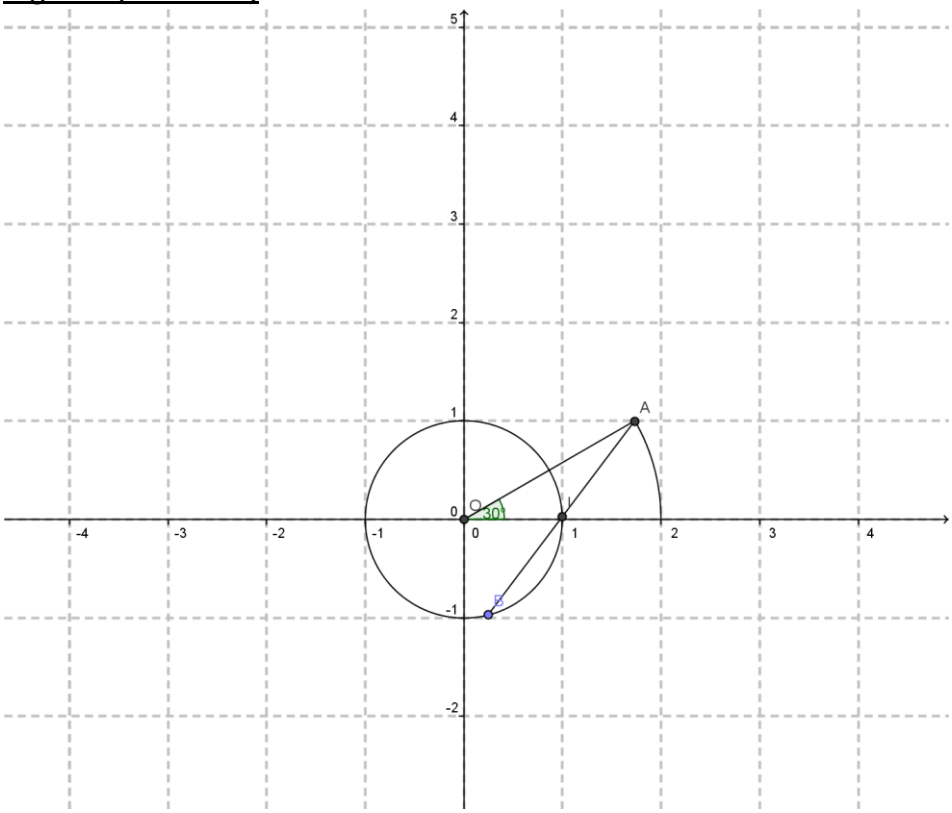
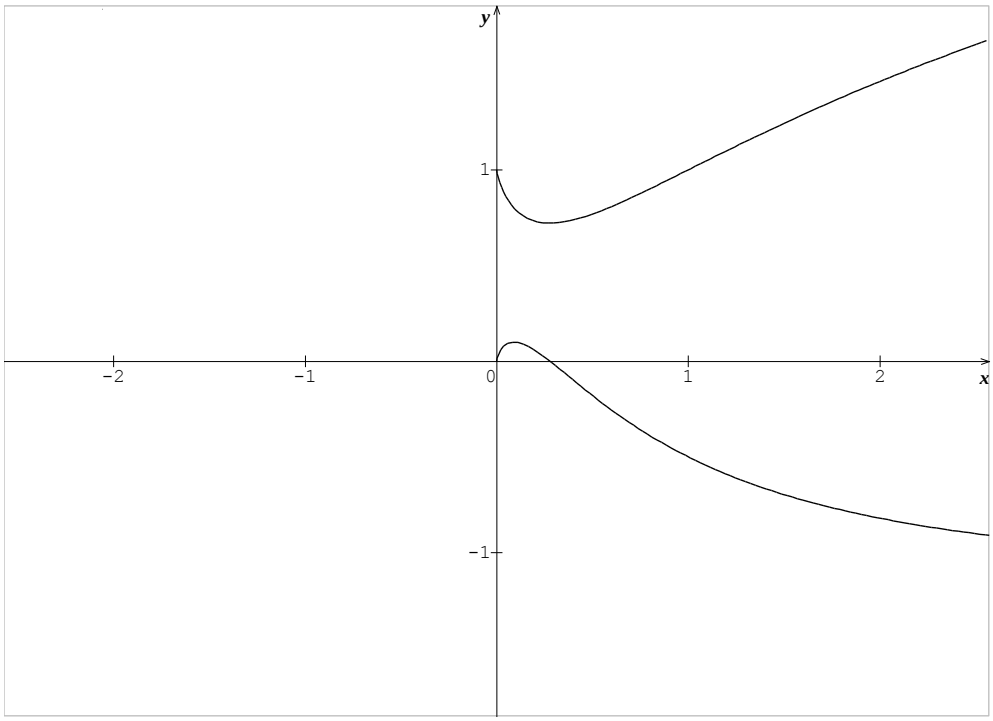


Figure 2 (exercice 5)



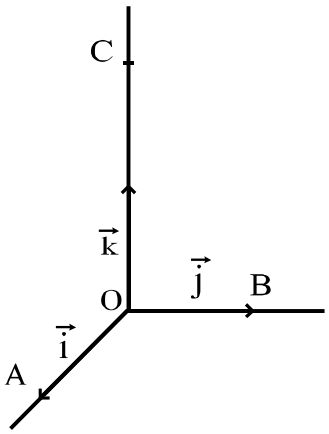
REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	**EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	**Durée : 3 h**	**COEFFICIENT : 3**
SECTION : Sciences Expérimentales		**SESSION PRINCIPALE**	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}$ est égal à
a/ $\overrightarrow{OA}$ b/ $2\overrightarrow{OA}$ c/ $-2\overrightarrow{OA}$.

2) Le réel $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AO}).\overrightarrow{AC}$ est égal à
a/ 0 b/ $\frac{1}{3}$ c/ 2 .

3) La droite (BC) est l'intersection des plans d'équations
a / $x=1$ et $2y+z-2=0$.
b / $x=0$ et $y+2z-1=0$.
c / $x=0$ et $2y+z-2=0$.

4) Une équation de la sphère de centre O et tangente au plan (ABC) est
a / $x^2+y^2+z^2=1$.
b / $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$.
c / $x^2+y^2+z^2-2x=\frac{4}{9}$.

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$.

1) a/ Donner la forme exponentielle de a.
b/ Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b=\frac{a-1}{1-\bar{a}}$.

a/ Vérifier que $b\bar{b}=1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C) .

b/ Montrer que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c/ Construire le point B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b .

Montrer que $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.

EXERCICE 3 (4 points)

Le centre National de la Transfusion sanguine a diffusé le tableau ci-contre donnant la répartition des groupes sanguins en Tunisie.

Groupe	A	B	AB	O
Pourcentage	31%	18%	5%	46%

I) 1) Quelle est la probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O ?

2) Quatre donneurs se présentent dans un centre de transfusion sanguine.

a/ Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O?

b/ Quelle est la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs?

II) Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.

En Tunisie, 9% des individus du groupe O sont de Rhésus négatif.

1) Montrer que la probabilité qu'un tunisien soit un donneur universel est 0.0414.

2) Dans un centre de transfusion sanguine, n donneurs se présentent.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi les n donneurs.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b/ Déterminer l'espérance de X en fonction de n.

c/ Déterminer le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 donneurs.

EXERCICE 4 (3 points)

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de 1.4mg d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance (en mg) présente dans le sang à l'instant t, $(t \geq 0)$.

On admet que la fonction $Q : t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + (0.115)y = 0$.

1) Résoudre l'équation (E).

2) a/ Justifier que $Q(t) = 1.4e^{-0.115t}$, $t \geq 0$.

b/ Donner le sens de variation de la fonction Q.

c/ Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $Q(t) = 0.7$; la solution sera arrondie à l'unité.

3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre 0.7mg et 1.4mg.

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de 0.7mg chaque six heures.

EXERCICE 5 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = -\frac{x^2 + x\ln x + x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b/ Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 1$

et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha) = 1-\alpha$.

b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α.

c/ Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par $\mathbf{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g , C_f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_\alpha^1 f(x)dx = -\left[xg(x)\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)dx.$$

b/ En déduire que $\mathbf{A} = \alpha^2 - \alpha + 1$.

Section : ……..…….…….. N° d'inscription : ……..…… Série : ……...

Nom et prénom : ……..……..……

Date et lieu de naissance : ……..……..……

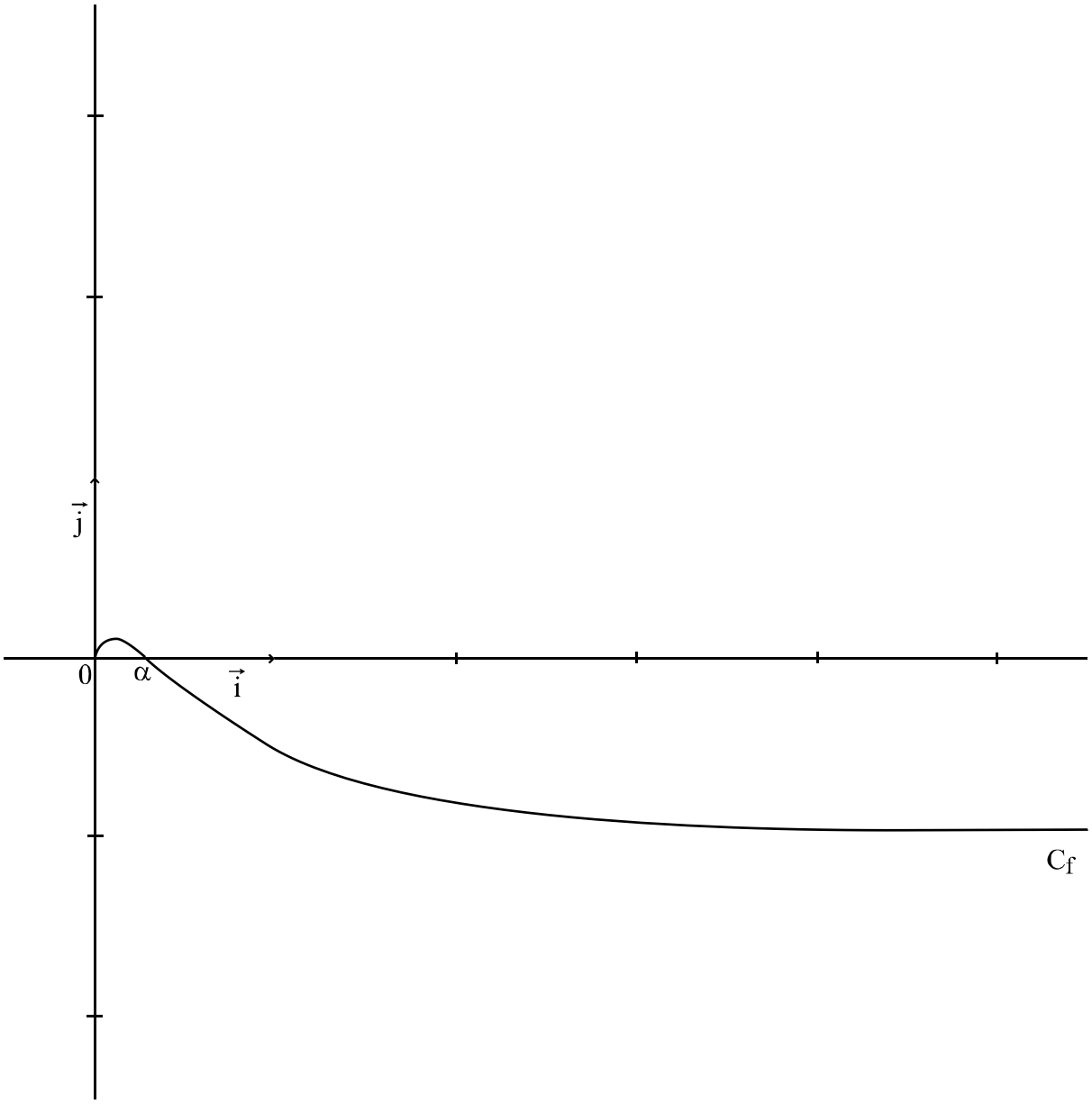
Signatures des surveillants

……

……..……

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Expérimentales

Annexe à rendre avec la copie



Section : **Sciences expérimentales** | **SESSION DE CONTRÔLE**

Corrigé

Exercice 1

1) a) $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $I\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ et $J\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est directeur de la droite (IJ) et le point I de coordonnées $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, il en résulte qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases}x=0\\y=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha\in\mathbb{R}.\\z=\alpha\end{cases}$

2) a) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\alpha\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&\alpha\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\1&\alpha\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{k}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\alpha\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\alpha\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}=\begin{vmatrix}1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\alpha\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&-1\\0&\alpha\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&-1\\1&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{k}=\alpha\vec{i}+\vec{k}.$

b) $A_{AFM}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$ et $A_{BCM}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$, il en résulte que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG}=1.$

b) (M, A, F et G sont coplanaires) $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AG}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

$\Leftrightarrow M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\Leftrightarrow$ (M et I sont confondus).

c) Pour

$\alpha\neq 0,\ V_{AFMG}=V_{BCMG}\Leftrightarrow\left|\left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}\right|=\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG}\right|\Leftrightarrow|\alpha|=1\Leftrightarrow\alpha=1 \text{ ou } \alpha=-1$

$\Leftrightarrow M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=J \text{ ou } M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right).$

Exercice 2

1) $p(A)=\frac{9}{30}=0,3.$

2) a) $p\left(\overline{B}|A\right)=0,65$ et $p\left(B|A\right)=1-p\left(\overline{B}|A\right)=0,35.$

b) $p\left(B|\overline{A}\right)=0,04$ et $p\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=1-p\left(B|\overline{A}\right)=0,96.$

c) $B=(B\cap A)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)$ donc

$$p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)=p\left(B\mid A\right)\times p(A)+p\left(B|\overline{A}\right)\times p\left(\overline{A}\right)=0{,}133.$$

3) Le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves après la fin de la session est $0{,}133\times 30=3{,}99$. Soit 4 élèves.

Exercice 3

1) a) La fonction f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], f'(x)=-\sin x.$

b) Pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], f'(x)=-\sin x\le 0$ $\left(f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\right)$. Ainsi f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=[0,1].$

2) a) La fonction f est strictement décroissante et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=-\sin x\neq 0$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que g est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,1[$.

b) Pour tout

$x\in[0,1[$ et $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{1}{\sin y}$ avec $f(y)=x\Leftrightarrow\cos y=x$

$\Leftrightarrow\cos^2 y=x^2\Leftrightarrow\sin^2 y=1-x^2\Leftrightarrow\sin y=\sqrt{1-x^2}$ car $\sin y>0$ ($y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$).

Il en résulte que pour tout $x\in[0,1[$, $g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) a) $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}g'(x)dx=g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.$

Exercice 4

1) a) Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		α	$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$

Le signe de $g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		β	$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$

b) $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ et $g(\beta)=0 \Leftrightarrow e^{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x-\ln x=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$.

c) $h(\alpha)=e^{\alpha}-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}-\ln\alpha=-g(\alpha)$.

d) La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}=f(x)$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$+\infty$ ↘	$h(\alpha)$	↗ $+\infty$	

3) a) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-e^x+\ln x=\ln x-\dfrac{1}{x}=g(x)$.

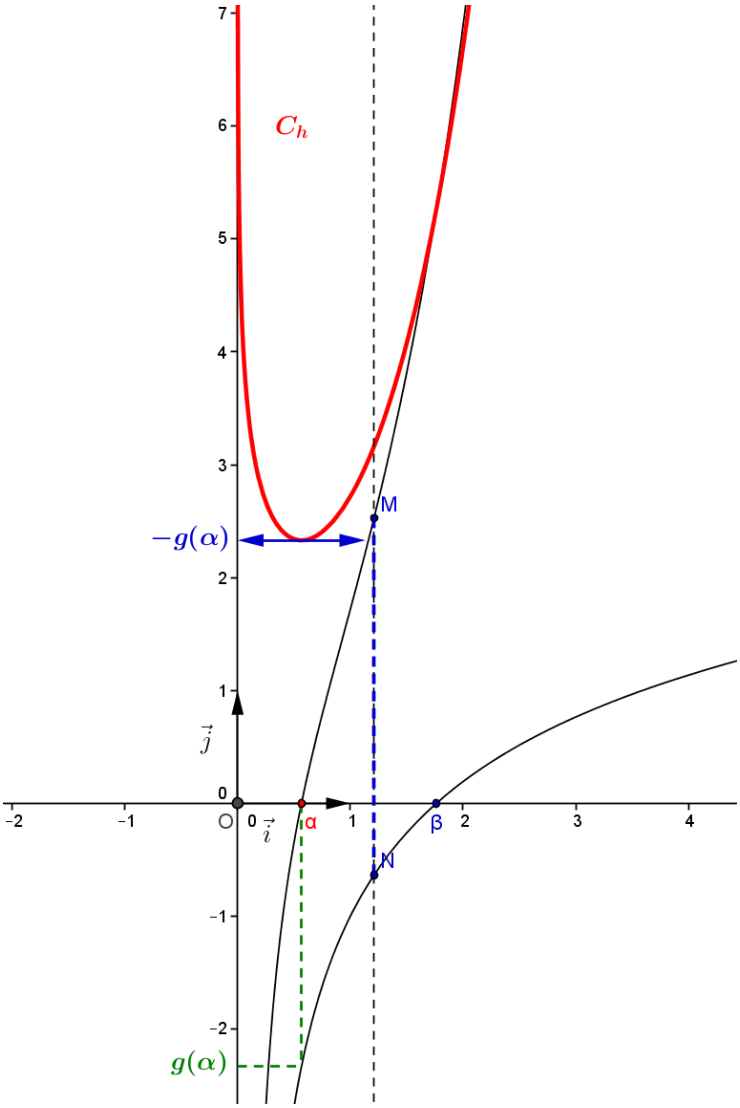
b) Le signe de $f(x)-h(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		β		$+\infty$
$f(x)-h(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Position	‖	C_f est au dessous de C_h		C_f est au dessus de C_h	

c) Voir figure.

4) Pour $a>0$, $MN=|f(a)-g(a)|=|h(a)|=h(a)$ car la fonction h est positive.

La distance MN est minimale si et seulement si $h(a)$ est minimale si et seulement si $a=\alpha$ (D'après 2)d)).


C_h
$-g(\alpha)$
M
N
α
β
$g(\alpha)$
$\vec{j}$
$\vec{i}$
O
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : **3H**
	Coefficient : **3**
Section : **Sciences expérimentales**	**SESSION DE CONTRÔLE**

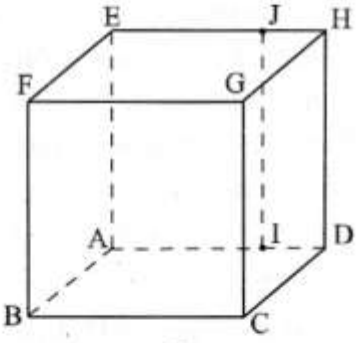
Le sujet comporte 4 pages. La page 4 / 4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$

On note $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ) de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$.

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \alpha\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M,A,F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume.

Exercice 2 (4 points)

Une enquête faite dans un établissement scolaire (E) a montré que 9 élèves sur 30 consomment des drogues. Un test de dépistage est effectué pour un élève.
On désigne par A l'événement "l'élève testé est un consommateur de drogues".

1) Déterminer p(A).

2) Une association de lutte contre les drogues a entamé une action dans cet établissement . Elle a organisé une session de traitement pour les consommateurs de drogues et une session de sensibilisation pour les non consommateurs.
L'association a constaté que :
Parmi les élèves consommateurs de drogues , 65% réussissent à arrêter toute consommation de drogues.
Parmi les élèves non consommateurs de drogues, 4% deviennent des consommateurs.
Un test de dépistage est effectué pour un élève après cette session.
Soit B l'événement " l'élève testé à la fin de la session est un consommateur de drogues".

a) Déterminer p(B/A) et $p(\overline{B}/A)$.

b) Déterminer $p(B/\overline{A})$ et $p(\overline{B}/\overline{A})$.

c) Calculer p(B).

3) Estimer le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves de l'établissement scolaire (E) après la fin de la session.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos x$.

1) a) Calculer $f'(x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f.

a) Justifier que g est dérivable sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour réel x de l'intervalle $[0,1[$, $g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(On rappelle que pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$).

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci - jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan,
C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ et $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

C_f coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha,0)$.

C_g coupe l'axe des abscisses au point $B(\beta,0)$.

1) a) Donner le signe de f(x) et celui de g(x) sur $]0,+\infty[$.

b) Justifier que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ et que $\ln\beta=\frac{1}{\beta}$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^x-\ln x$ et C_h sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=+\infty$.

c) Vérifier que $h(\alpha)=-g(\alpha)$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction h.

3) a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=g(x)$.

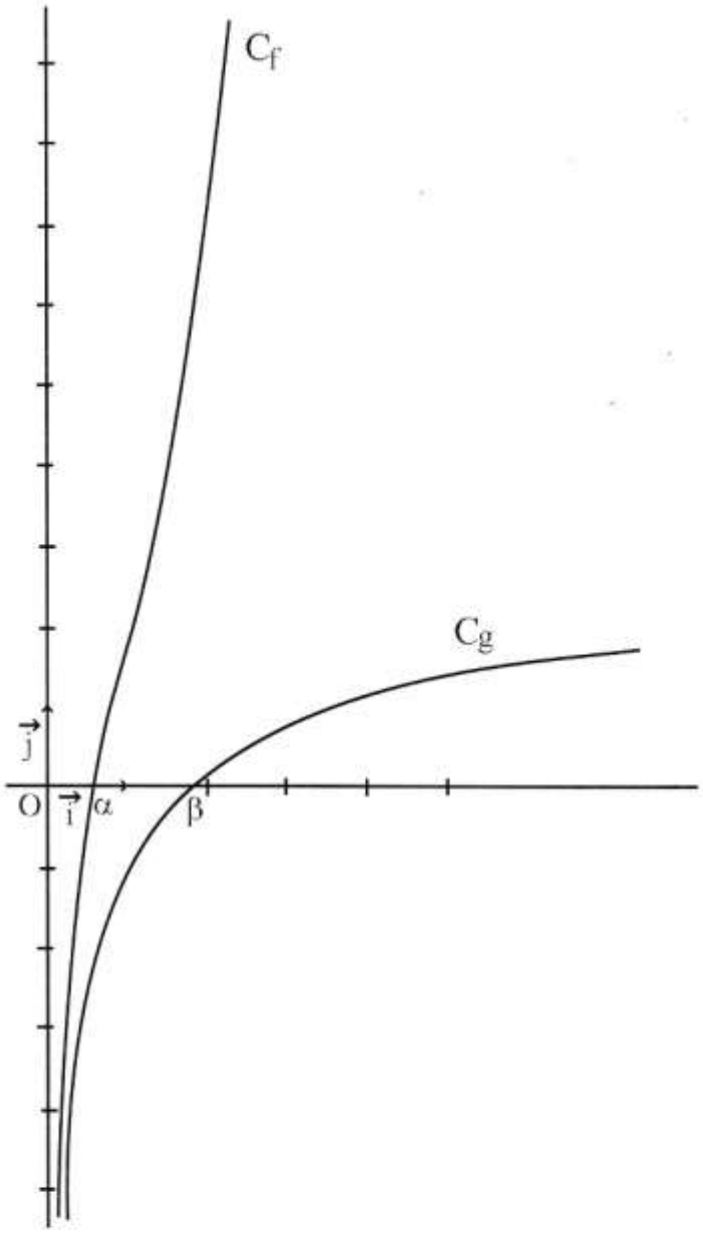
b) Etudier la position relative des courbes C_f et C_h.

c) Construire C_h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit $a>0$ .La droite Δ d'équation $x=a$ coupe les courbes C_f et C_g respectivement en M et N.

Montrer que la distance MN est minimale pour $a=\alpha$.

Annexe à rendre avec la copie



Section : **Sciences expérimentales**	**SESSION PRINCIPALE**

Corrigé

Exercice 1

1. **Faux** : car

$\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|2\overrightarrow{IC}\wedge 2\overrightarrow{ID}\right\|=4\left\|\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{ID}\right\|=4\left|IC\times ID\times\sin\left(DIC\right)\right|=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\right)=2$ par

contre $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=1$

2. **Vrai**: En effet , les vecteurs $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires donc $\left(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ}=\det\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IJ}\right)=0.$

3. **Faux** : car la sphère de diamètre [AC] est de centre I donc son rayon est égal à $\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la distance du point I au plan $z-1=0$ est égale à $IJ=1>\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'intersection de la sphère et le plan est vide.

Exercice 2

I. 1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=3x^2+6>0.$ Ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty}f,\lim_{+\infty}f\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

$0\in\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=0$. Il en résulte que l'équation $x^3+6x+2=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

2) $\begin{matrix}f(-0.4)=-0.464<0\\ f(-0.3)=0.173>0\end{matrix}$, $f(-0.4)\times f(-0.3)<0$ donc $-0.4<\alpha<-0.3$.

II. 1) a) $z^3=2\Leftrightarrow z^3=2e^{i0}\Leftrightarrow z_k=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k\in\{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sont $a_1=z_0=\sqrt[3]{2}e^{i0}=\sqrt[3]{2}$, $a_2=z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3=z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) $z^3=-4\Leftrightarrow z^3=4e^{i\pi}\Leftrightarrow z_k=\sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_2) sont $b_1=z_1=\sqrt[3]{4}e^{i\pi}=-\sqrt[3]{4}$, $b_2=z_0=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3=z_2=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{5\pi}{3}}=\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$a_1b_1 = -\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$

c) $a_2b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Ainsi $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2.$

$a_3b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{8}e^{i(-\pi)} = -\sqrt[3]{8} = -2$

2) a) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -2 - 6(a+b).$

b) On sait que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b) \Leftrightarrow (a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$, il en résulte que $(a+b)$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0.$

3) On sait que $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2$ et $a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3 = a_3^3 + b_3^3 = -2$ donc d'après 2)b)

$a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ et $a_3 + b_3$ sont des solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$, or l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est de troisième degré donc elle admet dans $\mathbb{C}$ au plus trois solutions.

On en déduit que les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ sont :

$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, $a_2 + b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 + b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) L'unique solution réelle de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, d'où $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ il en résulte que $\alpha = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}.$

Exercice 3

1) Puisque le nombre de mouches après 69 jours est 1034 et il reste le même après 75 jours, il semble alors que le nombre de mouche resterait constant (c'est-à dire 1034) après 85 jours.

2) a) $r = \dfrac{\text{cov}(T,M)}{\sigma_T\sigma_M} = -0.996.$

b) $M = aT + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(T,M)}{\sigma_T^2} = -0.155$ et $b = \overline{M} - a\overline{T} = 4.036.$ Ainsi $M = -0.155T + 4.036.$

3) a) On sait que $M = \ln\left(\dfrac{1035}{N} - 1\right) \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N} - 1 = e^M \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N} = e^M + 1 \Leftrightarrow N = \dfrac{1035}{e^M + 1}.$

b) D'après 2)b) $M = -0.155T + 4.036$ et d'après 3)a) $N = \dfrac{1035}{e^M + 1}$, il en résulte que

$N = \dfrac{1035}{e^{-0.155T+4.036}+1} = \dfrac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155T}}$. Ainsi $\alpha = e^{4.036}$ et $\beta = -0.155$.

c) En changeant T par 85, on obtient $N = \dfrac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155\times 85}} = 1034,8 \simeq 1034$ mouches, on peut donc valider la conjecture émise en 1).

Exercice 4

1) Voir figure.

2) a) $f(5) = \ln\left(5+\sqrt{25-9}\right) = \ln(9) = \ln\left(3^2\right) = 2\ln 3.$

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ} = MP \times PN = (5-3)\left(f(5)-\ln 3\right) = 2(2\ln 3 - \ln 3) = 2\ln 3.$

$A_{MPN} = \dfrac{MP \times PN}{2} = \dfrac{2\ln 3}{2} = \ln 3.$

d) $A_{MPN} \le A \le A_{MPNQ}$ donc $\ln 3 \le A \le 2\ln 3.$

3) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f\left([3,+\infty[\right) = \left[f(3), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [\ln 3, +\infty[$.

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y = x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3, 0)$, $Q'(2\ln 3, 0)$, $N'(2\ln 3, 5)$ et $P'(\ln 3, 5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle M'Q'N'P' et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \ln 3$ et $x = 2\ln 3$.

$A' = A_{M'Q'N'P'} - B$. Or $A_{M'Q'N'P'} = M'P' \times M'Q' = 5(2\ln 3 - \ln 3) = 5\ln 3$ et $B = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$, on en déduit que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx.$

6) a) Pour tout $x \in [\ln 3, +\infty[$ et $y \in [3, +\infty[$

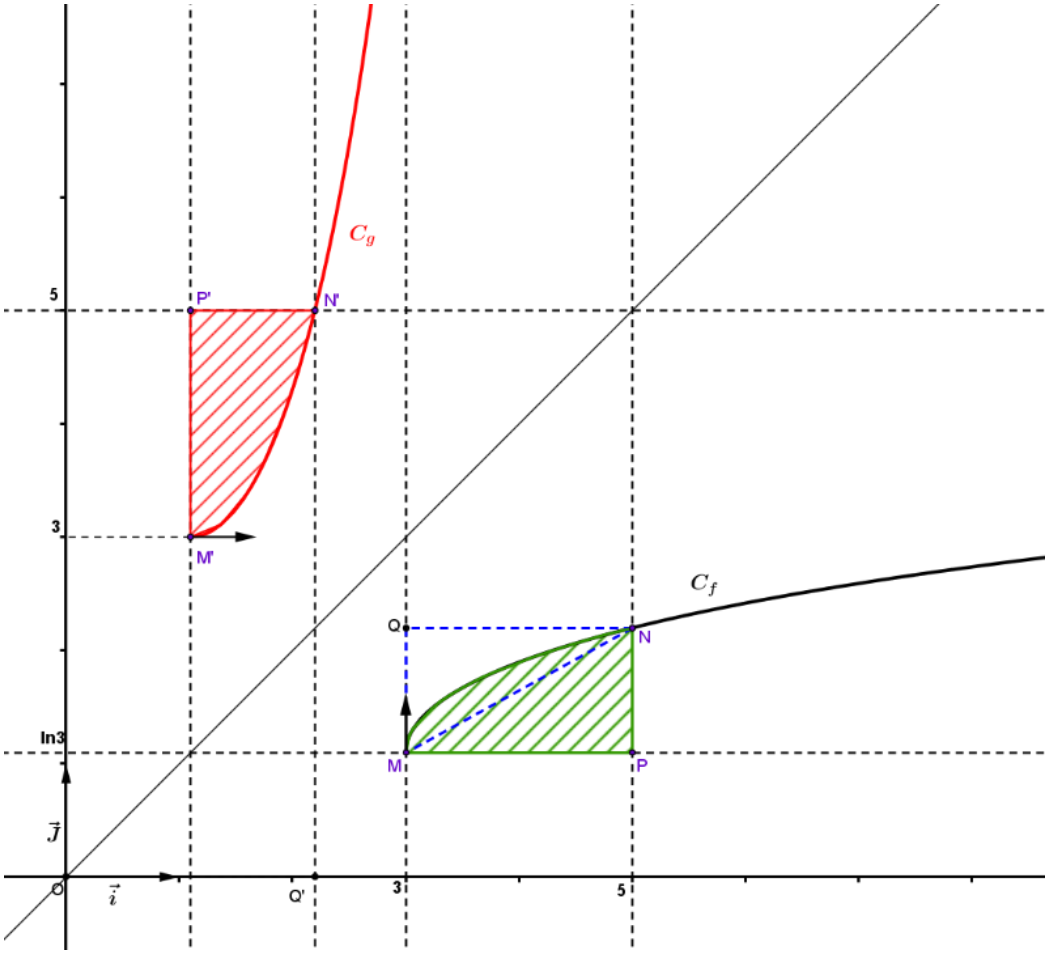
$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 9}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = (e^x - y)^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ye^x = e^{2x} + 9 \\ e^x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^{2x} + 9}{2e^x} \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2} \\ e^x \geq y \end{cases}$$. On en déduit que pour tout

$$x \in [\ln 3, +\infty[,\ g(x) = \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}.$$

b) $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - 9e^{-x}}{2}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4$ donc $A' = (5\ln 3 - 4)$u.a et puisque E et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4)$u.a.



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences expérimentales**	**SESSION PRINCIPALE**

Le sujet comporte 4 pages. La page 4 / 4 est à rendre avec la copie.

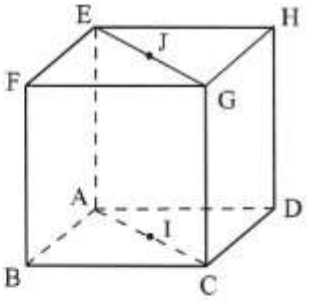
Exercice 1 (3 points)

Dans la figure ci - contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

Le point J est le milieu du segment $[EG]$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

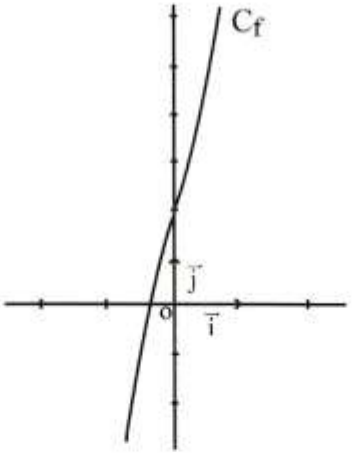
1) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.

2) $\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ} = 0$.

3) La sphère de diamètre $[AC]$ est tangente au plan d'équation $z - 1 = 0$.

Exercice 2 (6 points)

I. Dans la figure ci - contre, on a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x + 2$.



1) Justifier que l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

II. On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de α.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(E_1): z^3 = 2$ et $(E_2): z^3 = -4$.

a) Justifier que les solutions de (E_1) sont $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

b) Justifier que les solutions de (E_2) sont $b_1 = -\sqrt[3]{4}$, $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$.

c) Vérifier que $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$.

2) Soit a et b deux nombres complexes vérifiant $a^3 + b^3 = -2$ et $ab = -2$.

a) Vérifier que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$.

b) En déduire que $a+b$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

3) Déduire les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

4) Conclure.

Exercice 3 (5 points)

Une étude a été faite sur une population de 22 mouches se reproduisant assez rapidement.
Le tableau suivant donne le nombre N de mouches après un temps T exprimé en jours.

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
N	22	39	105	225	499	791	938	1005	1028	1033	1034	1034

1) Quelle conjecture peut - on émettre sur le nombre de mouches au bout de 85 jours ?

2) On pose $M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right)$.

Les valeurs de M, arrondies à 10^{-3} près, sont données dans le tableau suivant :

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
M	3.830	3.240	2.181	1.281	0.072	-1.176	-2.269	-3.512	-4.989	-6.247	-6.941	-6.941

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire entre T et M.

b) Donner une équation de la droite de regression de M en T. (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

3) a) Montrer que $N = \dfrac{1035}{1+e^{M}}$.

b) Déduire que $N = \dfrac{1035}{1+\alpha\, e^{-\beta T}}$, où α et β sont deux réels positifs que l'on déterminera.

4) En utilisant la question 3) b), valider ou réfuter la conjecture émise en 1).

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = \ln 3$. On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de E.

1) Hachurer E.

2) a) Vérifier que $f(5) = 2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5, \ln 3)$ et $(3, 2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3, +\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$.

4) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbre représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Tracer la courbe C_g.

5) Soit E' la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x = \ln 3$, $x = 2\ln 3$ et $y = 5$. On désigne par A' l'aire (en unité d'aire) de E'.

a) Hachurer E'.

b) Montrer que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^{x} + 9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$ et en déduire la valeur de A.

Session de contrôle Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-t,t\in\mathbb{R}.\\z=3\end{cases}$

b) $M(x,y,z)\in(S)\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3\\x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3\\t^2-2t+4=0\end{cases}$ or l'équation

$t^2-2t+4=0$ n'a pas de solution car $t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$ donc $\Delta\cap(S)=\varnothing$.

3) a) $B\notin\Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P.

b) $0+0+3-3=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

$3+0+0-3=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

Soit $C(1,-1,3)$ un point de Δ différent de A et $1-1+3-3=0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation $x+y+z-3=0$.

c) $d(I,P)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ donc P et S sont tangent en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D:\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1,\alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$

$H(x,y,z)\in D\cap P\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1\\z=\alpha\\x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1\\z=\alpha\\3\alpha-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\x=2\\y=0\\z=1\end{cases}$, il en résulte que $H(2,0,1)$.

Exercice 2

1) a) $\Delta=2(1-i)^2+16i=12i=6(1+i)^2$.

b) $\Delta=6(1+i)^2$, soit $\delta=\sqrt{6}(1+i)$, $z'=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{6}(1+i)}{4}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ et

$z''=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{6}(1+i)}{4}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})-i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}, \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} \right\}.$$

2) a) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z^2 - 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 2i = -2iz^2 + 2iz - 2i = -2i\left(z^2 - z + 1\right)$.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$,

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$ et l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ est une équation de second degré dans $\mathbb{C}$ donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

d) D'après 2)b) z est une solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ si et seulement si $e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ est une solution de (E) et puisque $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, on en déduit que les solutions de (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et comme $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Exercice 3

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.

La loi de X est donnée par $p(X=k) = C_{20}^{k}(0.1)^{k}(0.9)^{20-k}$, $k \in \{0,1,.....,20\}$.

$p(A) = p(X=0) = (0.9)^{20}$.

b) $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p(A) = 1 - (0.9)^{20}$.

c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est $E(X) = 20 \times 0.1 = 2$.

2) a) les valeurs prises par Y sont $\{1,21\}$.

$p(Y=1) = p(A) = (0.9)^{20}$.

$p(Y=21) = p(B) = 1-(0.9)^{20}$.

La loi de Y est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	21
$p(Y=y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1-(0.9)^{20}$

b) $E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i p(Y=y_i) = 1\times(0.9)^{20} + 21\times\left(1-(0.9)^{20}\right) = 18.56$.

Exercice 4

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{i})$ en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = -\infty.$

2) a) $\begin{cases} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x} \text{est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$, il en résulte que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-x+1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}.$

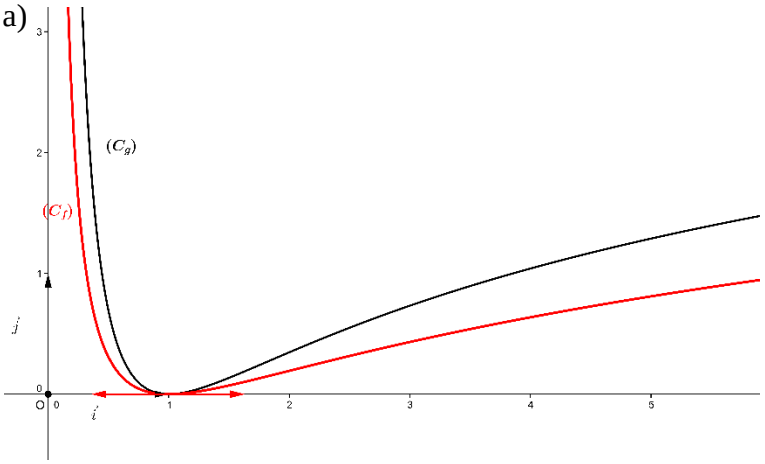
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

3) a) La fonction $g-f$ admet un minimum global sur $]0,+\infty[$ égal à 0 donc pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$. Il en résulte que (C_g) est au-dessus de (C_f).

b) $M(a,f(a))$ et $N(a,g(a))$ donc $MN^2 = (g(a)-f(a))^2$, or $a>1$ donc $0<g(a)-f(a)<1$ (d'après le tableau donné) d'où $0<(g(a)-f(a))^2<1$, il en résulte que $MN^2<1$ donc $MN<1$.

4) a)



b) pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x - \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln x - \ln x + \left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$= \ln x - \dfrac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}.$

c) $A = \int_1^e (g(x)-f(x))dx = \int_1^e \left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)dx = \left[x - \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \left(e-\dfrac{5}{2}\right)$ ua.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : Sciences expérimentales	**Session de contrôle**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$.

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).

a) Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.

b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

Exercice 2 (5 points)

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$.

1) a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

2) a) Donner l'écriture exponentielle de $1 - i$.

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :

$$2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = -2i(z^2 - z + 1).$$

c) Montrer que les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

e) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (4 points)

Lors d'une étude vétérinaire faite sur les vaches d'une région agricole, on a remarqué la présence d'une maladie M et que la probabilité qu'une vache soit atteinte par cette maladie est égale à 0,1.

Un fermier de cette région possède un troupeau de 20 vaches.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre de vaches de ce troupeau atteintes par la maladie M et on considère les deux événements suivants :

A : " Aucune vache de ce troupeau n'est atteinte par la maladie M "

B : " Au moins une vache de ce troupeau est atteinte par la maladie M ".

a) Justifier que $p(A) = (0,9)^{20}$.

b) En déduire p(B).

c) Déterminer le nombre moyen de vaches de ce troupeau qui sont atteintes par la maladie M.

2) Pour dépister la maladie M chez les 20 vaches du fermier, on procède ainsi :

On effectue d'abord une analyse sur un échantillon contenant un mélange du lait des 20 vaches. Si le résultat est positif, on effectue une analyse du lait de chaque vache.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'analyses possibles effectuées.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'espérance E(Y) de la variable Y.

Exercice 4 (6 points)

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x .$$

On désigne par C_f et C_g les courbes de f et g dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

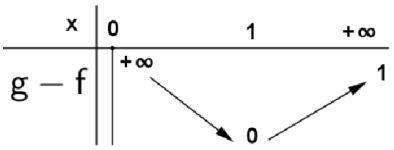
b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) On donne, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $g - f$.



a) Préciser la position relative des courbes C_f et C_g.

b) Soit a un réel de $]1,+\infty[$, M le point de la courbe C_f d'abscisse a et N le point de la courbe C_g de même abscisse a.

Justifier que $MN < 1$.

4) Dans **l'annexe** ci-jointe, on a tracé la courbe C_g.

a) Tracer la courbe C_f.

b) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations x = 1 et x = e.

Section : ……..…….. N° d'inscription : …… Série : ……...

Nom et prénom : ……..…..

Date et lieu de naissance : ……..……..…….

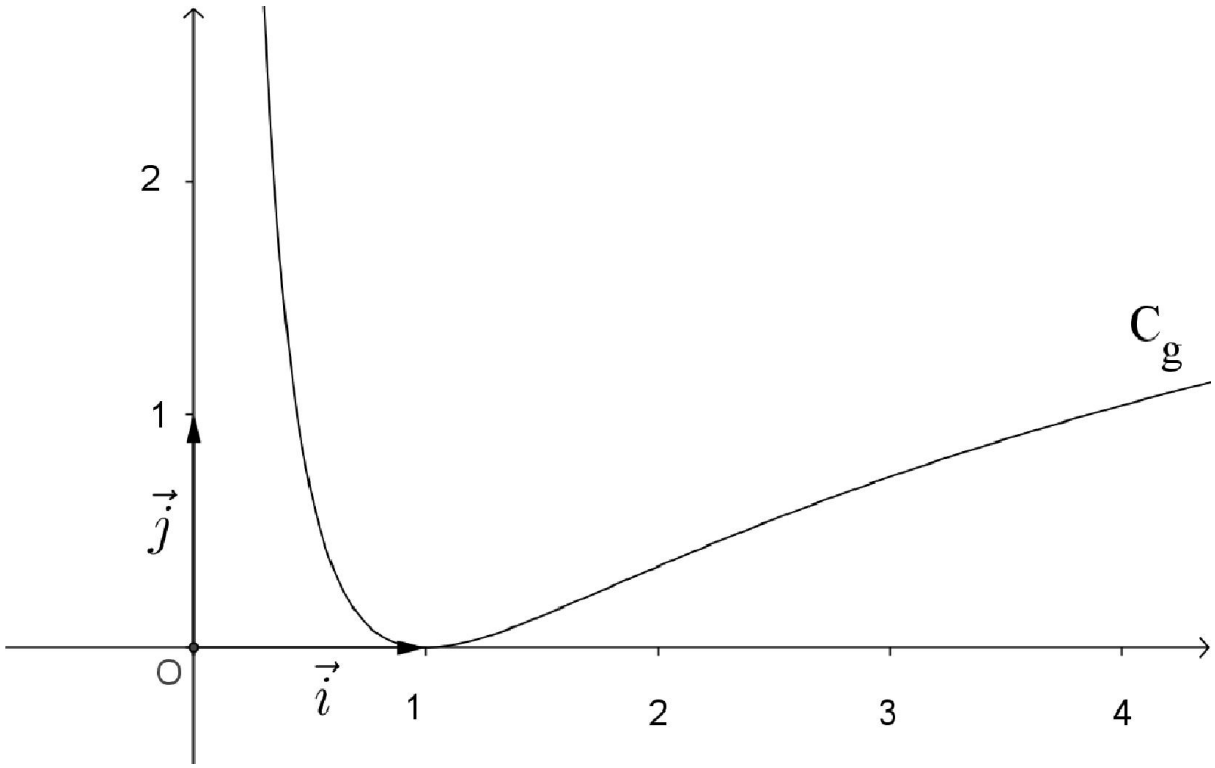
Signatures des surveillants

……

……

Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

Annexe (à rendre avec la copie)



Session principale Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x\left(1+e^{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^{-x}}{-x}\right)\dfrac{-1}{\left(1+e^{x}\right)} = -\infty.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}\left(1+e^{x}\right)-e^{-x}e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} = \dfrac{-e^{-x}-2}{\left(1+e^{x}\right)^{2}} = -\dfrac{\left(2+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}.$

b) Pour tout réel x, $f'(x) < 0.$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

3) a) $(T): y = f'(0)x + f(0) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}.$

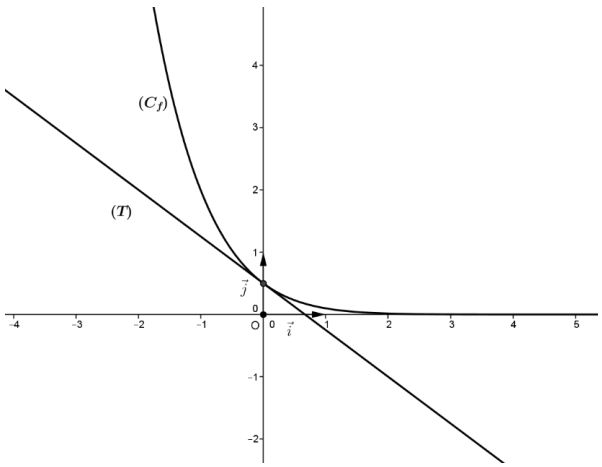
b)

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)+\dfrac{3}{4}$	$-$ 0 $+$
$f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

La fonction $x \mapsto f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 donc pour tout réel x,

$f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}.$ Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (T).

c)



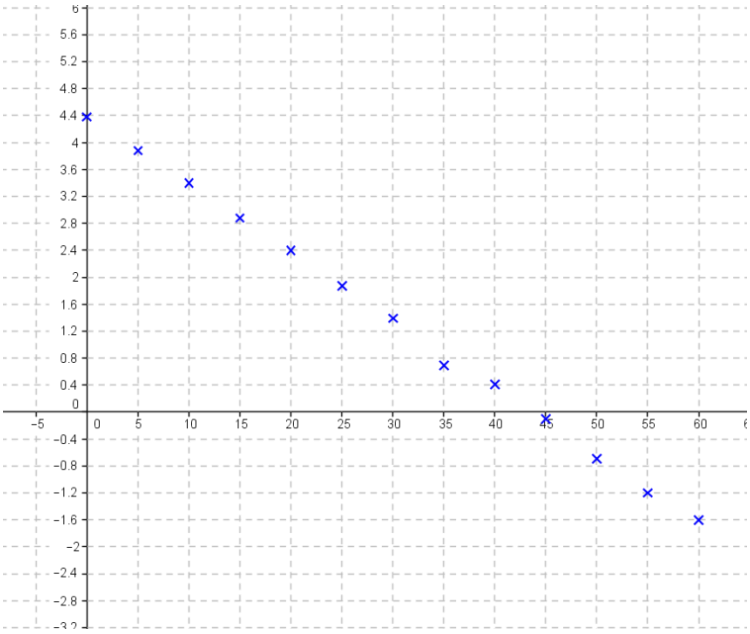
4) a) Pour tout réel x, $e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}=f(x)$.

b) $A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx=\int_0^\lambda\left(e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx=\left[-e^{-x}+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^\lambda=\left(-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2\right)ua$.

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2=1-\ln 2$.

Exercice 2

1) a)



b) $\rho_{t,\theta}=\dfrac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t\sigma_\theta}=-0,99$. Il y a une forte corrélation de plus le nuage a la forme d'une droite donc $|\rho_{t,\theta}|=0.99>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

un ajustement affine est justifié.

2) a) $(D):\theta=bt+a$ avec $b=\dfrac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t^2}=-0.1$ et $a=\bar{\theta}-b\bar{t}=4,39$.

Il en résulte que : $(D):\theta=-0.1t+4,39$.

b) $\theta=\ln(T-20)\Leftrightarrow T=20+e^{\theta}=20+e^{-0.1t+4,39}=20+80.6e^{-0.1t}$

c) Pour $t=90$, $\theta=20+80.6e^{-0.1\times 90}=20^\circ C$.

d) $T=18\Leftrightarrow 20+80.6e^{-0.1t}=18\Leftrightarrow e^{-0.1t}=\dfrac{-2}{80.6}<0$ impossible donc la température n'atteindra jamais 18°C.

Exercice 3

1) a) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

b) $d(O,P)=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$I(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ 6t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$, il en résulte que $I(1,2,1)$.

2) a) $\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0 \\ 2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0 \end{cases}$ donc $A \in S$ et $A \notin P$.

$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 0^2 - 8 = 0 \\ 2 + 4 + 0 - 6 = 0 \end{cases}$ donc $B \in S$ et $B \in P$ donc B appartient à ($\mathscr{C}$).

b) $M(x,y,z) \in Q \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow y = z.$

c) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta:\begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}$, on pose

$y = \alpha \in \mathbb{R}$, on aura $\Delta:\begin{cases} x = -3\alpha + 6 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA = CB = AB$.

$CA = CB$ donc C est un point de Q et C appartient à ($\mathscr{C}$) qui est contenu dans P donc C est un point de Δ, il en résulte qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha + 6, \alpha, \alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral , il suffit que $CA = AB \Leftrightarrow CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow$

$(4 - 3\alpha)^2 + \alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$ ou $\alpha = \frac{6}{11}$. soit $C(0,2,2)$.

Exercice 4

1) a) $z_1 + z_2 = -i\sqrt{3}$ et $z_1 \times z_2 = -2$.

b) $\begin{cases} z_1 + z_2 = -i\sqrt{3} \\ z_1 \times z_2 = -2 \end{cases}$ donc z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = 0$, il en résulte que $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = (z - z_1)(z - z_2)$ où $z \in \mathbb{C}$.

2) a) $OM_1 = |z_1| = \sqrt{2}$ et $OM_2 = |z_2| = \sqrt{2}$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) $\frac{z_1 + z_2}{2} = -i\sqrt{3} = z_H$

c) Voir figure.

3) a) $K = M * N \Leftrightarrow \frac{z + z^3}{2} = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0.$

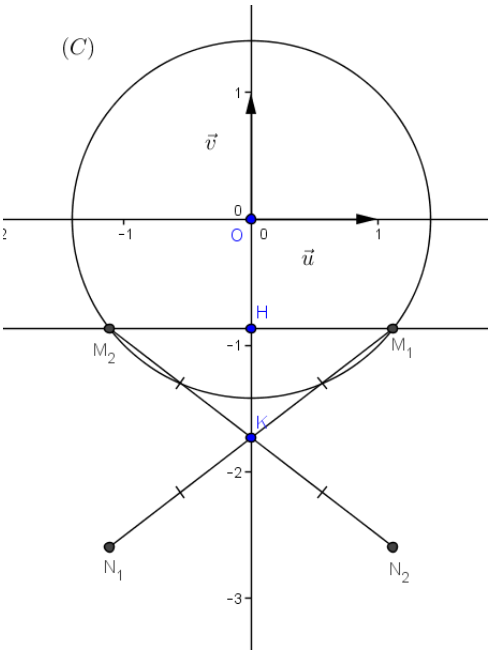
b) Il suffit de développer.

c) $z^3+z+2i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+i\sqrt{3}z-2\right)=0 \Leftrightarrow z=i\sqrt{3}$ ou $z=z_1$ ou $z=z_2$.,

$S_{\mathbb{C}}=\left\{i\sqrt{3},z_1,z_2\right\}$

d) Puisque z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $z^3+z+2i\sqrt{3}=0$ donc N_1 et N_2 sont les symétriques respectifs de M_1 et M_2 par rapport à K.

e) a est la troisième solution de l'équation $z^3+z+2i\sqrt{3}=0$ donc $a=i\sqrt{3}$.



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : Sciences expérimentales	**Session principale**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^{2}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$		−	0	+	

c) Tracer (T) et C_f.

4) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $A_\lambda=-e^{-\lambda}+\ln(1+e^{-\lambda})+1-\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

Exercice 2 (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les 5 minutes, la température T de ce liquide.

Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T (en °C)	100	68.5	50	37.8	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

On pose $\theta = \ln(T-20)$.

Les valeurs de θ, arrondies à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.88	2.40	1.87	1.39	0.69	0.41	- 0.10	- 0.69	-1.2	-1.60

1) a) Construire le nuage de points de la série (t, θ), dans le repère proposé dans l'annexe ci-jointe **(figure 1)**.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série (t, θ). Interpréter le résultat.

2) a) Donner une équation de la droite de régression de θ en t.

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-2} près).

b) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + \alpha e^{\beta t}$,

α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-1} près.

c) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.

d) La température de cette tasse de café atteindra t- elle 18°C ? Expliquer.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ et le plan P d'équation $x + 2y + z - 6 = 0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que MA = MB.

Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 4 (6 points)

1) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)**, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

3) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que :

(K est le milieu du segment [M N]) si et seulement si ($z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$).

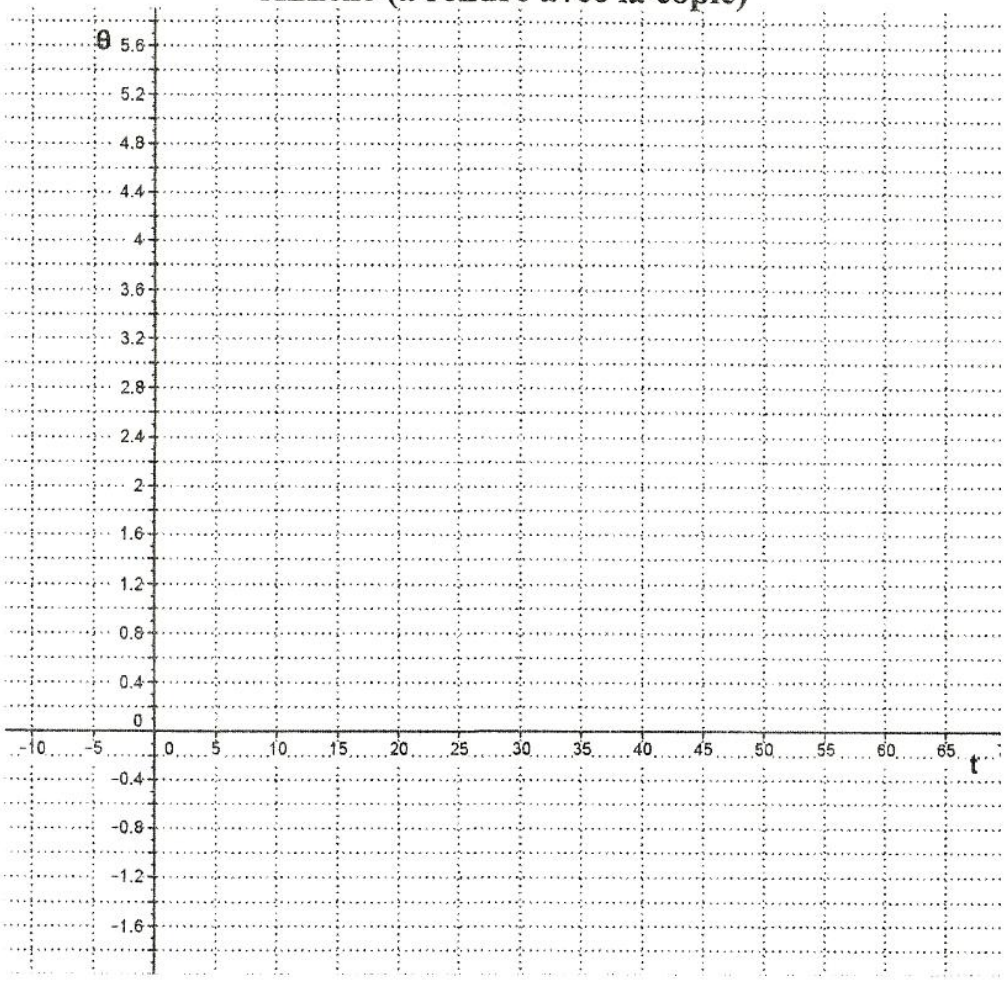
b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

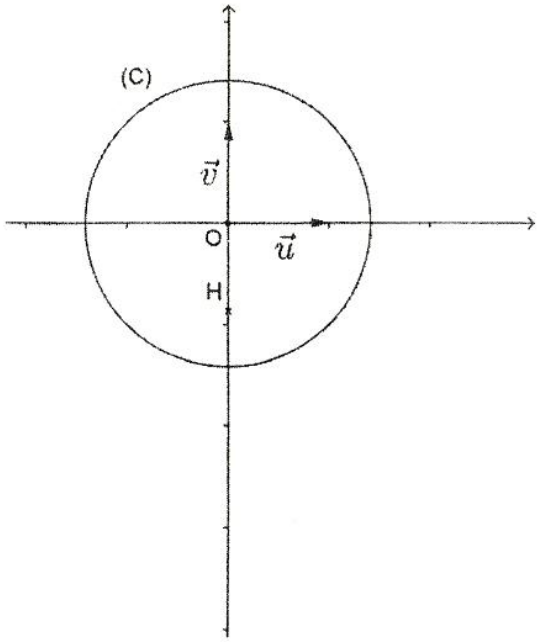
d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3 (On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2).

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.

Annexe (à rendre avec la copie)



(figure 1)



(figure 2)

MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales
Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (5 points)

1/ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25.$ Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $R=5$.

2/ a) $\vec{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$. $M\in(P)\Leftrightarrow \vec{JI}.\vec{JM}=0\Leftrightarrow 2x-2y--z+5=0.$ Il en résulte que (P) est le plan d'équation $2x-2y--z+5=0.$

b) $d(I,P)=\dfrac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J\in(P)$ et $\vec{JI}$ est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\vec{AI}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{AI}=3\vec{JI}$ par suite les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{JI}$ sont colinéaires, d'où $A\in(IJ)$.

b) $AJ=\sqrt{16+16+4}=6.$

4/ a) On sait que $\begin{cases}A\in(IJ)\\(IJ)\perp(P) \text{ en } J\\M\in(C)\subset(P)\end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM=\sqrt{AJ^2+JM^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}.$

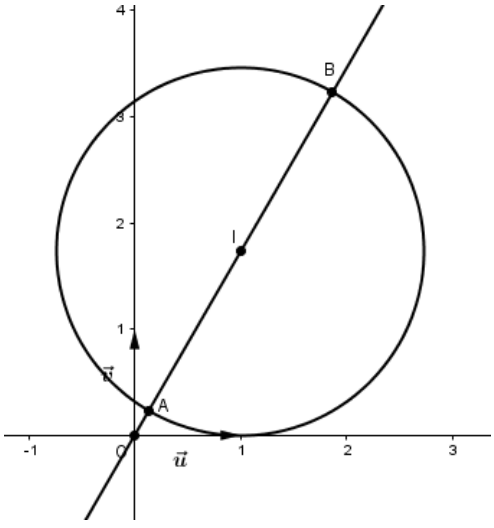
c) Pour tout M du cercle (C), $AM=2\sqrt{13}$ donc $M\in(S')$, il en résulte que $(C)\subset(S')$ et puisque $(C)\subset(P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

Exercice 2 (5 points)

1/ a) $\Delta=\left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-4e^{i\frac{2\pi}{3}}=12e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2.$

b) Soit $\delta=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z'=\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}=\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$



$$z'' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2/ a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $OA = OI - IA = 2 - \sqrt{3}$.
$OB = OI + IB = 2 + \sqrt{3}$.

c) $|z_A| = OA = 2-\sqrt{3}$ et $\arg(z_A) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_A = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$|z_B| = OB = 2+\sqrt{3}$ et $\arg(z_B) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_B = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 3 (6 points)

1/ a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. le signe est celui de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

b) $g(1) = 1$. La fonction g admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 1 égal à 1, il en résulte que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = 2 - 2\frac{\ln x}{x} = 2\frac{(x-\ln x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}.$$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	↗	$+\infty$
	‖	$-\infty$	

3/ a) Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 1, alors T à pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2x$.
Il en résulte que Δ est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(\ln x)^2\right] = +\infty \end{cases}$. On en déduit que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x)-2x = \left[-(\ln x)^2\right] \le 0$ donc C_f est au-dessous de la droite Δ et le point de coordonnées $(1,2)$ est un point d'intersection.

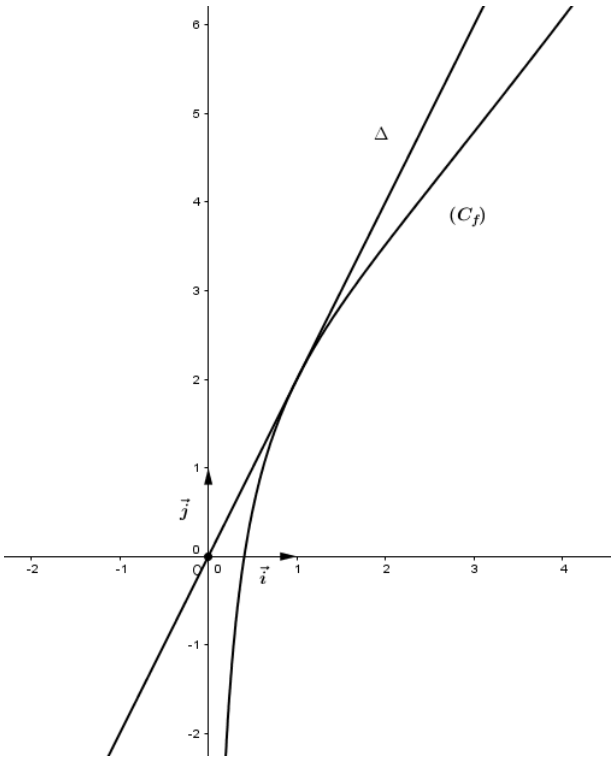
4/ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) = \square$.

$0 \in \square$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{4}\right) \square -1.4 < 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) \square 0.5 > 0 \end{cases}$. Il en résulte que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b)



c) $A = \int_1^e |f(x)-2x|\,dx = \int_1^e (\ln x)^2\,dx$.

On pose $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$

$A=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=(e-2)\,ua.$

Exercice 4 (4 points)

1/ a) $u_1=qu_0=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}.$

b) La suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0.$

c) S_n est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc

$S_n=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right).$

2/ La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=e^x-1.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘		↗	

$h(0)=0.$ La fonction h admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 0 égal à 0, il en résulte que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)\geq 0$, on en déduit que $e^x\geq x+1.$

3/ a) $v_0=1+u_0=\dfrac{4}{3}$ et $v_1=(1+u_0)(1+u_1)=\dfrac{40}{27}.$

b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-v_n=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1})-(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$

$=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1}-1)=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)u_{n+1}>0$

car $u_n=q^nu_0=\dfrac{1}{3^{n+1}}>0$ pour tout entier naturel n.

Ainsi la suite (v_n) est croissante.

c) D'après 2/ on a pour tout entier k, $1+u_k\leq e^{u_k}.$

Pour $k=0,\ 0<1+u_0\leq e^{u_0}$

Pour $k=1,\ 0<1+u_1\leq e^{u_1}$

.

.

.

Pour $k=n,\ 0<1+u_n\leq e^{u_n}$

En multipliant membre à membre, on obtient $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n) \leq e^{u_0+u_1+....u_n}$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $v_n \leq e^{S_n} = e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) La suite (v_n) est croissante et pour tout entier naturel n, $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)} \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ car $0 < 1 - \frac{1}{3^{n+1}} < 1$

donc elle est majorée par $\sqrt{e}$, il en résulte qu'elle est convergente.

e) On sait que $v_n \leq \sqrt{e}$ de plus la suite (v_n) est croissante donc $v_n \geq v_0 = \frac{4}{3} > 1$, ainsi $1 < v_n \leq \sqrt{e}$ et puisque (v_n) est convergente vers l et par passage à la limite, on obtient $1 \leq v_n \leq \sqrt{e}$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Épreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : **Sciences expérimentales**	**Session de contrôle**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2/ Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\vec{JI}.\vec{JM}=0$.

a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que $AJ=6$.

4/ Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

Exercice 2 : (5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-4e^{i\frac{\pi}{3}}z+e^{2i\frac{\pi}{3}}=0$.

1/ a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) .On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1+i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

a) Écrire z_I sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B tels que $OA < OB$.

Placer A et B, puis justifier que $OA = 2-\sqrt{3}$ et $OB = 2+\sqrt{3}$.

c) En déduire que les affixes respectives z_A et z_B des points A et B sont les solutions de l'équation (E).

<u>Exercice 3</u> : (6 points)

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$..

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par C_f la courbe représentative de f et par Δ la droite d'équation $y = 2x$.

a) Vérifier que Δ est la tangente à C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Étudier la position relative de C_f et Δ.

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe C_f.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite Δ, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A} = e - 2$.

Exercice 4 : (4 points)

1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

a) Calculer u_1.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2/ En étudiant les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, montrer que

$1 + x \leq e^x$, pour tout réel x.

3/ Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = (1+u_0)(1+u_1)\times \ldots\ldots \times (1+u_n).$$

a) Calculer v_0 et v_1.

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

e) Soit ℓ la limite de (v_n).

Montrer que $1 < \ell \leq \sqrt{e}$.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

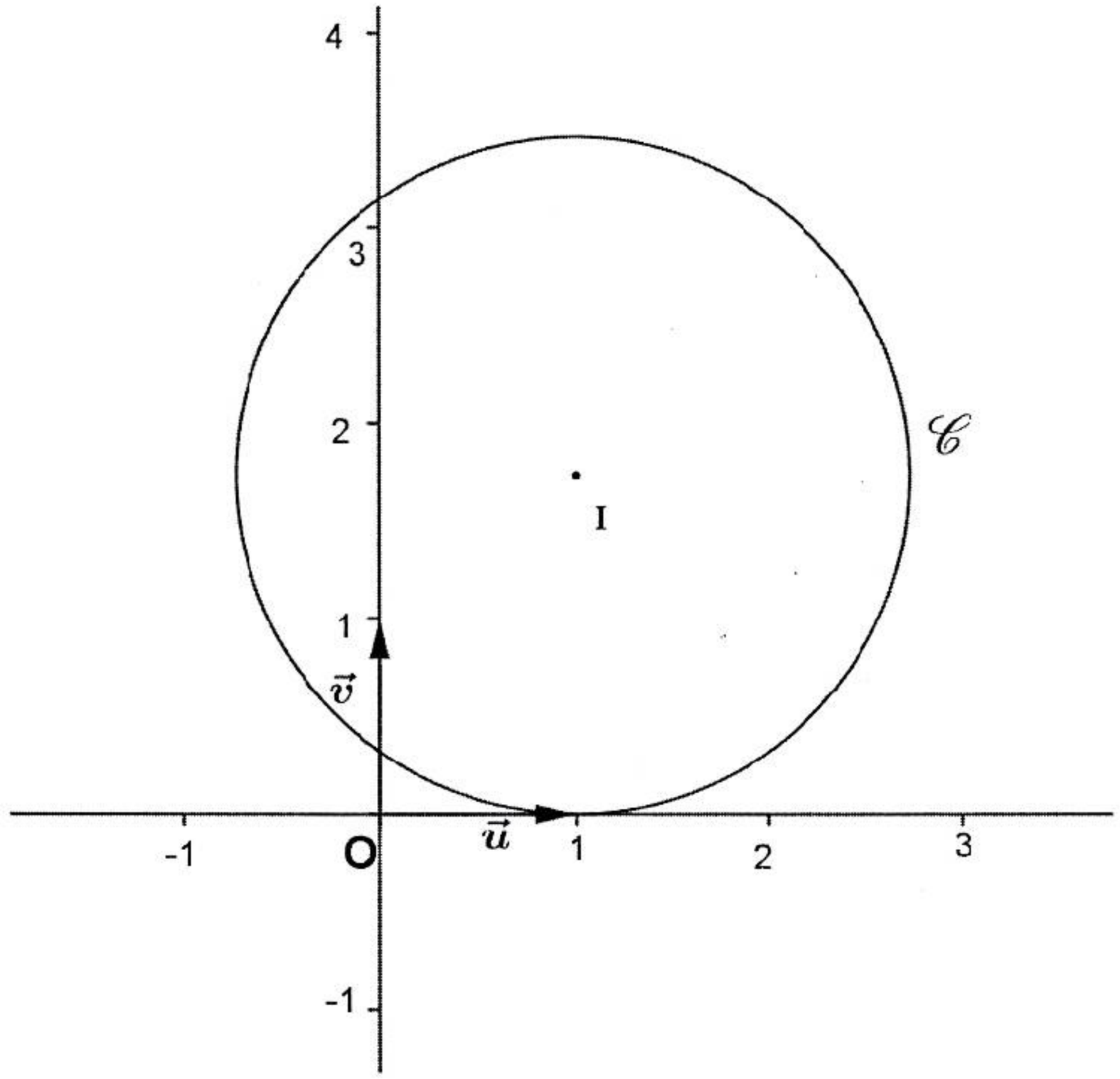
Signatures des surveillants

.....

.....

Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

Annexe (à rendre avec la copie)



MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales
Session principale : juin 2015

Exercice 1 (Thèmes : produit vectoriel ; droite dans l'espace ; sphère)

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A\in(P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B\in(P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C\in(P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de (P).

c) $1+1+4-2=2\neq 0$ donc $D\notin(P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H=A*B$ donc c'est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un normal à (P) donc il est directeur de Δ de plus le point $H=A*B$ donc $H(1,0,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=1+\alpha\\y=\alpha\\z=1+\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$.

4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de Δ donc $MA=MB=MC$.
Ou bien : $M\in\Delta$ donc $M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$.

$$\begin{cases}MA^2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2\\MB^2=\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2\\MC^2=(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2\end{cases}\text{ donc } MA=MB=MC.$$

b) $I\in\Delta$ donc $I(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$ $IA=ID\Leftrightarrow IA^2=ID^2\Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2=(\alpha-3)^2\Leftrightarrow\alpha=1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de Δ tel que $IA=ID$.

c) Le point $I\in\Delta$, d'après a) et b), $IA=IB=IC=ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA=\sqrt{5}$.

Exercice 2 (Thème : Nombres complexes)

1/ a) $|a| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) Il suffit de tracer la droite d'équation $x = 1$ et de remarquer que $(\text{Im}(a) > 0)$.

2/ a) $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + 24i\sqrt{2} = -12 + 24i\sqrt{2} = 12\left(-1 + 2i\sqrt{2}\right) = 12a^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}\left(1 + i\sqrt{2}\right)$.

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i - 1 - i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[-1 + i\left(1-\sqrt{2}\right)\right].$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i + 1 + i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[1 + i\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

3/ a) $\frac{z_1 + z_2}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ donc $K = M_1 * M_2$.

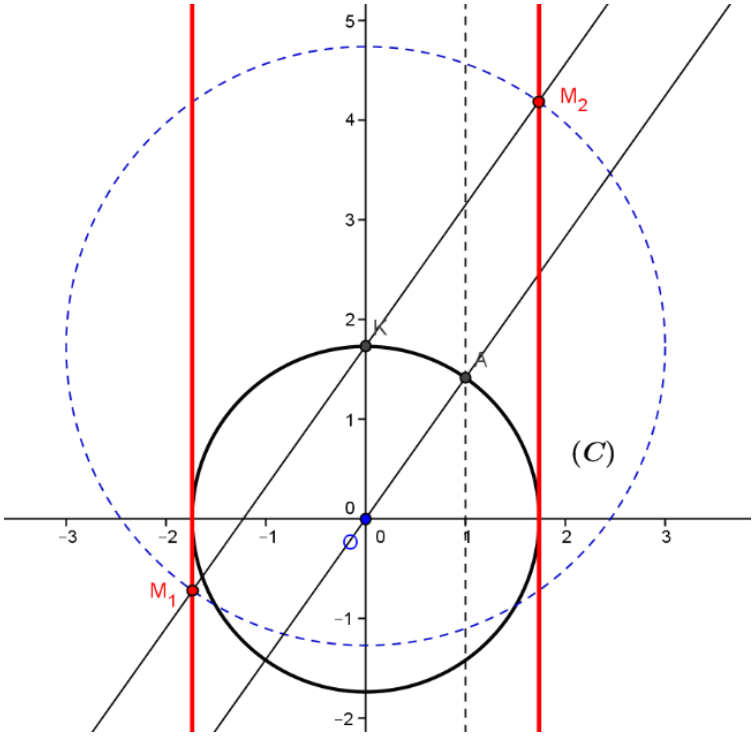
b) $\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6}\right)}{\left(1 + i\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6}\right)\left(1 - i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\left(1 + i\sqrt{2}\right)\left(1 - i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$

$\frac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires donc $(M_1M_2) \parallel (OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}\right| = \sqrt{36} = 6.$

d) Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Ou bien : Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.



Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

1/ a) $r = \dfrac{\text{cov}(t,C)}{\sigma_t \sigma_C} = 0.99998.$

b) $r = 0.99998$, il y a une très forte corrélation $\left(|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) $C = bt + a$ avec $b = \dfrac{\text{cov}(t,C)}{\sigma_t^2} = 23.19$ et $a = \overline{C} - b\overline{t} = 1.68.$ Ainsi $C = 23.19t + 1.68.$

d) Pour $t = 188$, on obtient $C = 4361.4 \text{ cm}^3$.

2/ a) $C = \alpha t + 40\beta + 745.$

b) On sait que $C = 23.19t + 1.68 = \alpha t + 40\beta + 745$ par identification $\alpha = 23.19$ et $\beta = \dfrac{1.68 - 754}{40} = -18.808.$

3/ $C = 23.19t - 18.808g + 745.$ Pour $g = 50$ et $t = 188$, on obtient $C = 4173.32 \text{ cm}^3$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; bijection ; notion d'aire)

1/ a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite $y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$ le signe est celui de $-\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	
Positions	‖	$\mathscr{C}$ est au dessus de Δ		$\mathscr{C}$ est en dessous de Δ	

2/ a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{(x^2 - 1) + \ln x}{x^2}.$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

x	0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

c) Pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0.$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0.$

d) On a $f'(1) = 0$ de plus pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0.$

Il en résulte que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0.$

e)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	

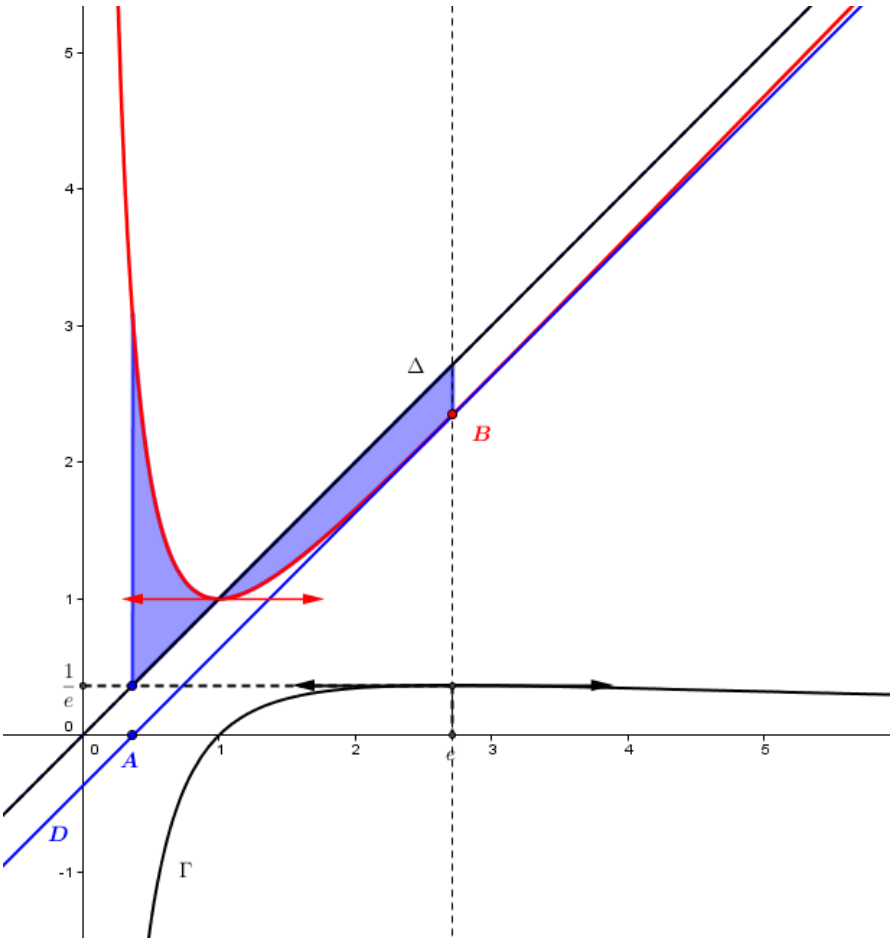
3/ a) $D \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = e$. On en déduit qu'il existe une unique tangente D à $\mathscr{C}$ au point $B\left(e, e-\frac{1}{e}\right)$.

b) $D : y = f'(e)(x-e)+f(e) = x-\frac{1}{e}$.

4/ a) $D : y = x-\frac{1}{e}$. Pour $x=\frac{1}{e}, y=0$ donc $A \in D$.

b) $D \parallel \Delta$ et passe par A.

c)



5/ $A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x)-x|\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$= \left[-\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{1}^{e} = 1 \text{ua}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : **Sciences expérimentales**	**Session principale**

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A, B et C déterminent un plan qu'on notera (P).

b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P).

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H.

Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

4/ Soit M un point de Δ.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1-\sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.

Exercice 3: (3 points)

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C, exprimée en cm^3, chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm.

t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1/ a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C.

b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t, C).

c) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).

d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm ?

2/ En fait, la capacité vitale C (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation (R) : $C = \alpha t + \beta g + 754$, où α et β sont des constantes (ne dépendant pas de t et g).

a) Donner l'expression de C pour $g = 40$.

b) En déduire, en utilisant 1/ c), les valeurs de α et β.

3/ Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant 188 cm.

<u>Exercice 4</u> : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

(x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de $\mathscr{C}$ et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A(\dfrac{1}{e},0)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

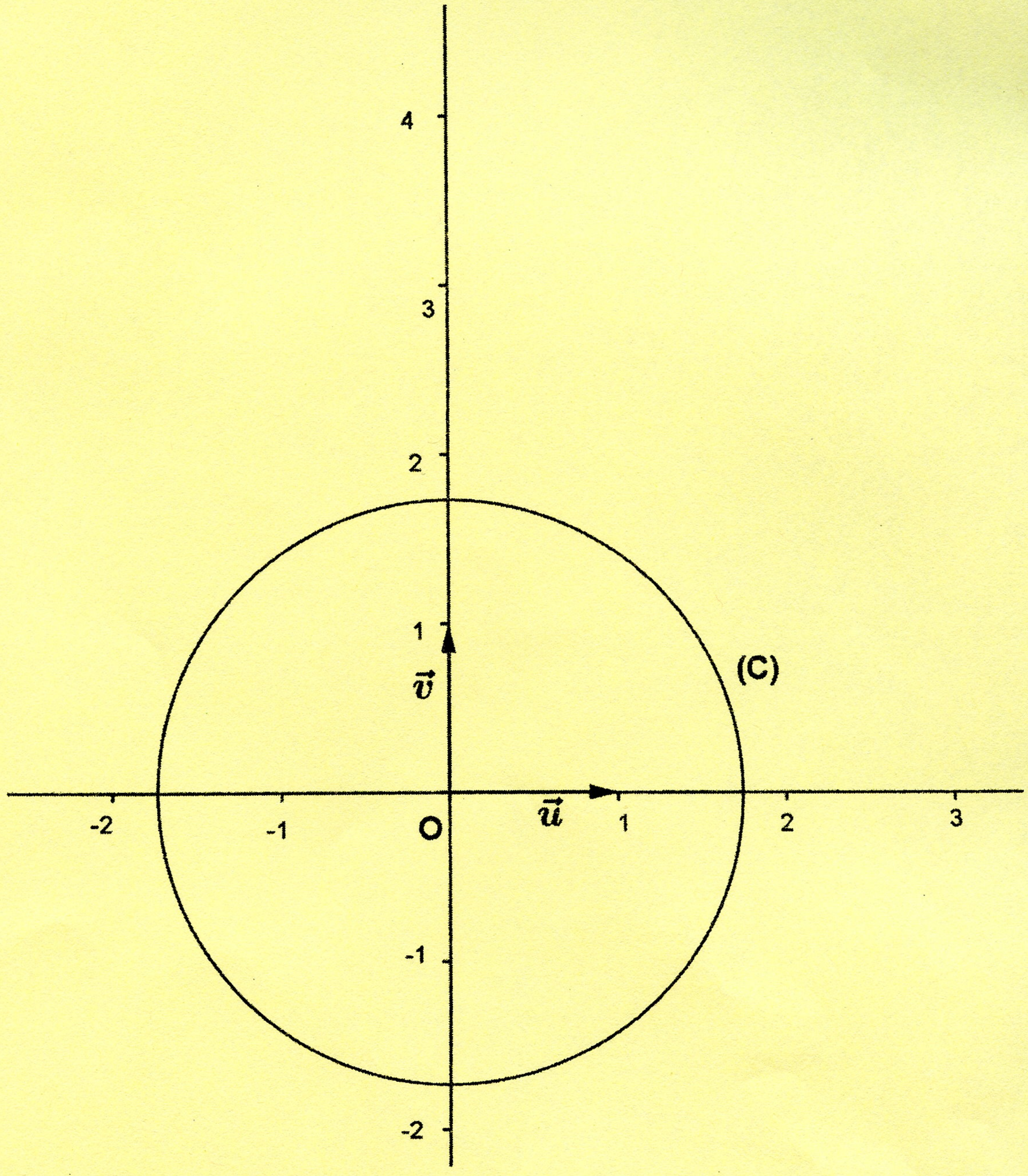
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5/ Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=e$.

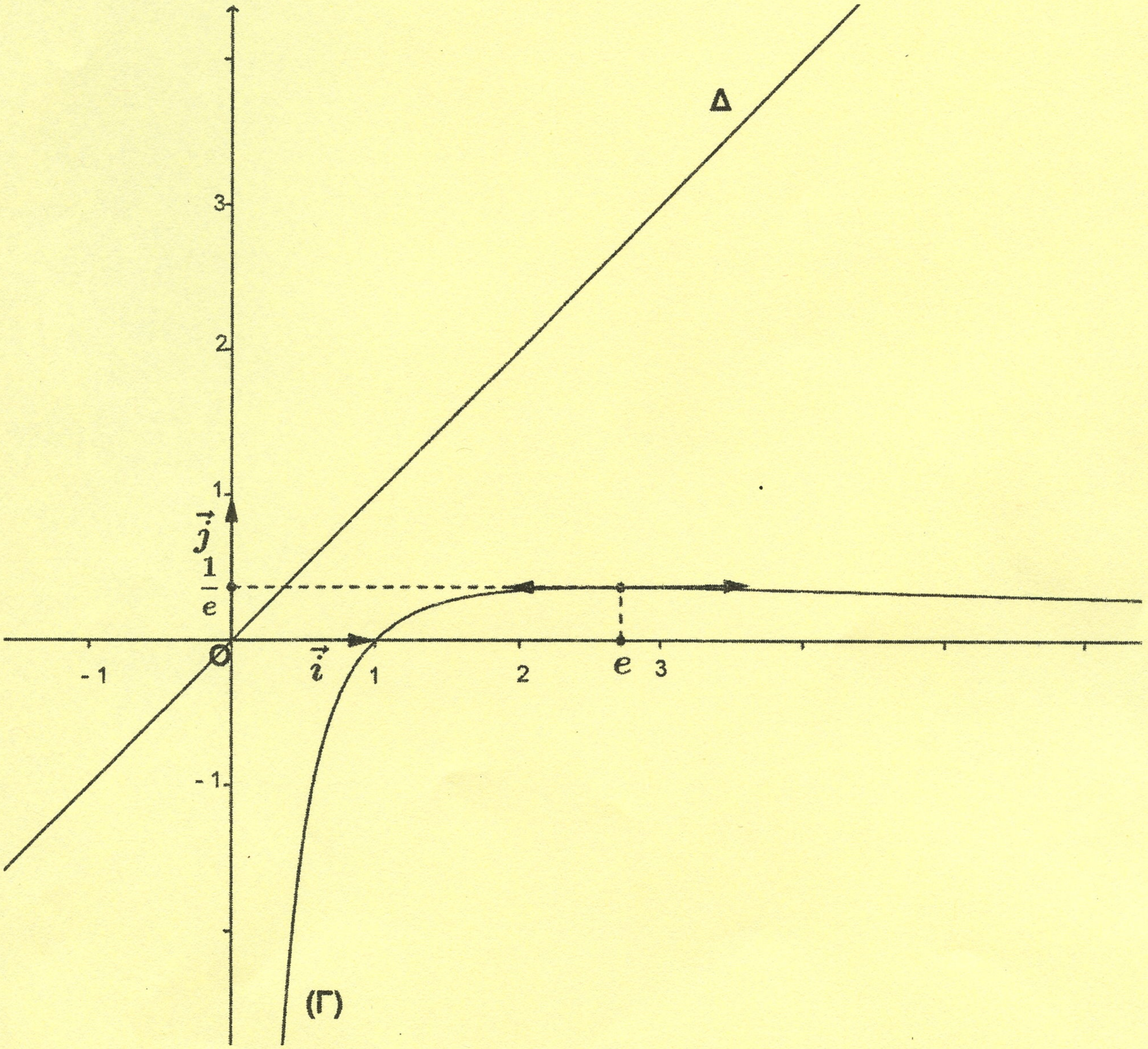
Calculer $\mathscr{A}$.

Annexe (à rendre avec la copie)

(Figure 1)



(Figure 2)



Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session de contrôle 2016

Exercice 1

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

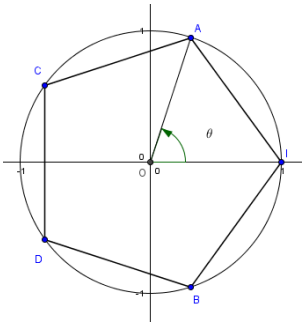
2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que $d\left(E,(OIJ)\right)=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.



Exercice 2

1) a) $a=e^{i\theta}$, $\bar{a}=e^{-i\theta}$, $a^2=e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^{-2}=e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a+\bar{a}=2\,Re(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1=a^2-a\left(a+\bar{a}\right)+1=a^2-a^2-\left|a^2\right|+1=0$ ce qui prouve que a est solution de l'équation (E).

$\bar{a}^{-2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a}+1=\overline{a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1}=0$ ce qui prouve que $\bar{a}$ est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1)\left(z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=z^5-1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5-1=(a-1)\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)\left(a^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)=0$, il en résulte que

$a^5-1=0\Leftrightarrow a^5=1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k\in\{1,2,3,4\}$.

b) $\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{5}>0\\ \sin\frac{2\pi}{5}>0\end{cases}$, $\mathrm{Im}(1)=0$, $\cos\frac{4\pi}{5}<0$, $\cos\frac{6\pi}{5}<0$ et $\sin\frac{8\pi}{5}<0$. Il en résulte que $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).

Exercice 3

1) a) Puisqu'il y a exactement 3 microscopes défectueux donc le premier microscope non défectueux est obtenu au plus au quatrième choix, on en déduit que $n\le 4$.

b) $p_1=\frac{7}{10}$ et $p_2=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

c) $p_3=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$ et $p_4=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}$.

2) a) Les valeurs prises par X sont $\{1,2,3,4\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

b) $E(x)=\sum_1^4 x_ip_i=1\times\frac{7}{10}+2\times\frac{7}{30}+3\times\frac{7}{120}+4\times\frac{1}{120}=\frac{46}{120}=\frac{23}{60}=0.38.$

3) a) $p(Y\le T)=1-e^{-\lambda T}$.

b) $p(Y\ge 5)=1-p(Y\le 5)=e^{-5\lambda}=0.7\Leftrightarrow -5\lambda=\ln 0.7\Leftrightarrow\lambda=-\frac{\ln 0.7}{5}=0.071.$

c) $p(Y\ge 10\setminus Y\ge 5)=\frac{p((Y\ge 10)\cap(Y\ge 5))}{p(Y\ge 5)}=\frac{p(Y\ge 10)}{p(Y\ge 5)}=e^{-5\times 0.071}=0.701.$

Exercice 4

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x\in]0,1[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$, il en résulte que $x<\frac{1}{x}$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}>0$, il en résulte que $x>\frac{1}{x}$.

c) Si $x \in]0,1[$, $x<\frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x>\frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. La droite $x=0$ est une asymptote de (C_f).

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$. La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f'(1)=g(1)-g(1)=0$.

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$2e$	↗	$+\infty$

4) a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x>0$ car $x^2-2x+2>0$, $(\Delta=-4)$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (C_h).

b) Voir figure.

5) a) $\int_1^x\left(f(t)-h(t)\right)dt=\int_1^x\left(t^2-2t+2\right)e^t dt=\int_1^x\left(t^2+2t\right)e^t dt+2\int_1^x e^t dt-4\int_1^x te^t dt$

$=\left[g(t)\right]_1^x+2\left[e^t\right]_1^x-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x-e+2e^x-2e-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x+2e^x-3e-4\int_1^x te^t dt$

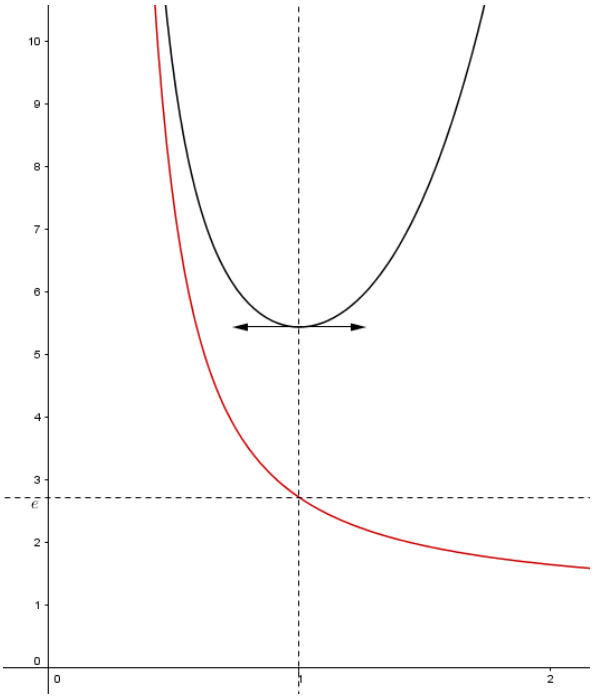
On pose $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(x)=e^t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u(x)=1\\ v(x)=e^t\end{cases}$

$\int_1^x te^t dt=\left[te^t\right]_1^x-\int_1^x e^t dt=xe^x-e-\left[e^t\right]_1^x=xe^x-e^x$.

Donc $\int_1^x\left(f(t)-h(t)\right)dt=x^2e^x+2e^x-3e-4\left(xe^x-e^x\right)=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e$.

b) $A_\alpha = \int_\alpha^1 \left(f(t) - h(t)\right)dt = 3e - \left(\alpha^2 - 4\alpha + 6\right)e^\alpha.$

$\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A_\alpha = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} 3e - \alpha^2 e^\alpha - 4\alpha e^\alpha + 6e^\alpha = 3e.$



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Sciences expérimentales**	
	Durée : **3 h**	Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**	

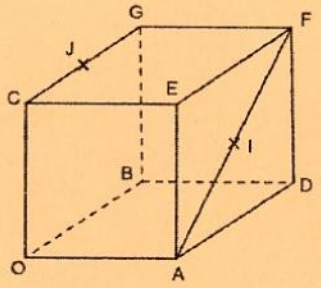
Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].



1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

   b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

   b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

   c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

   Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$.

   Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

Exercice 2 (5 points)

Dans la <u>figure 1</u> de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

   a) Donner, en fonction de θ, l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

   b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

2) a) Justifier que $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   b) Montrer que a et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^5-1=(z-1)\left[z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right]\left[z^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z+1\right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

Exercice 3 (4,5 points)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :
Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.
- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{ième}$ choix » et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2.

c) Montrer que $p_3=\frac{7}{120}$ et que $p_4=\frac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.

c) On prend $\lambda = 0,071$.
Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Exercice 4 (6,5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x\in]0,1[$ et $x\in]1,+\infty[$.

c) En déduire que si $x\in]0,1[$ alors $g(x)<g(\frac{1}{x})$ et que si $x\in]1,+\infty[$ alors $g(x)>g(\frac{1}{x})$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la <u>figure 2</u> de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_h)$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$.

Exprimer en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\mathscr{A}_\alpha$.

Annexe (à rendre avec la copie)

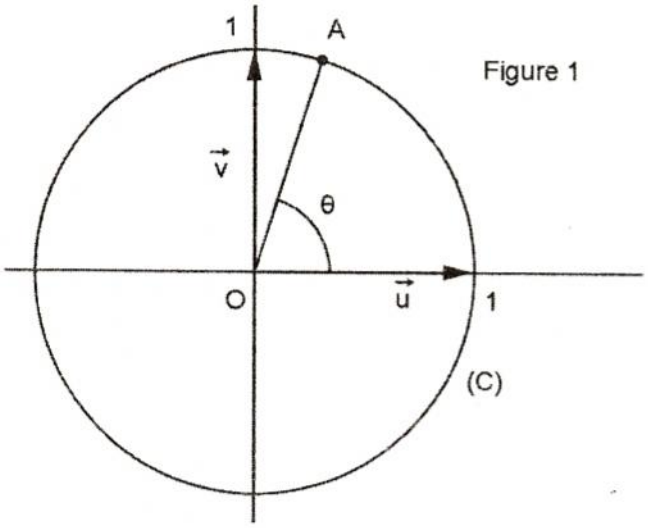
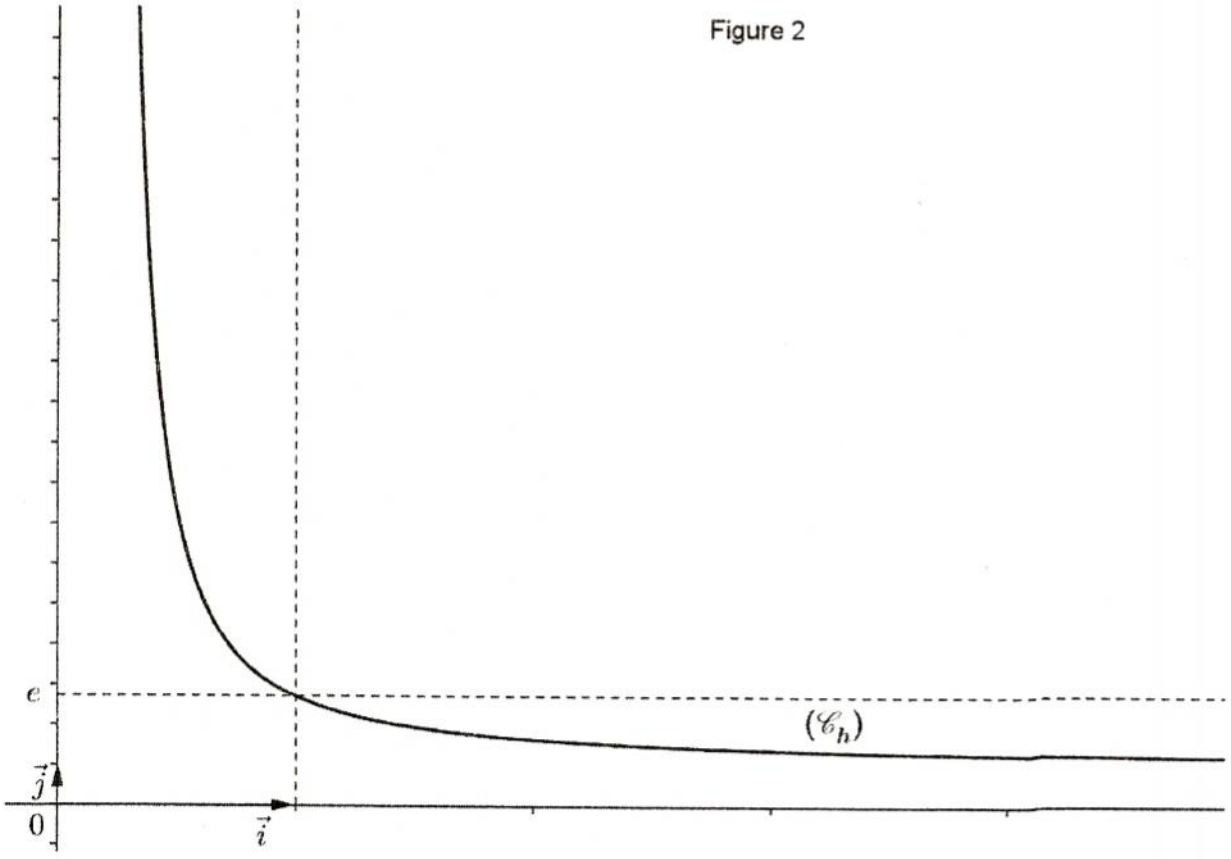


Figure 1

Figure 2



Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session principale 2016

Exercice 1

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5\neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) $d(I,P)=\sqrt{3}<R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2}$ et puisque $J\in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q)=3\sqrt{3}>R$, on en déduit que $S\cap Q=\varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2x+2y-2z+2=2(x+y-z+1)$.

4) $\begin{cases}M\in S\\V_{(ABCM)}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\\frac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right|=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\x+y-z-5=0 \text{ ou } x+y-z+7=0\end{cases}\Leftrightarrow M\in(S\cap P)\cup(S\cap Q)\Leftrightarrow M\in S\cap P=\mathscr{C}$.

Exercice 2

1) a) Voir figure.

b) $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

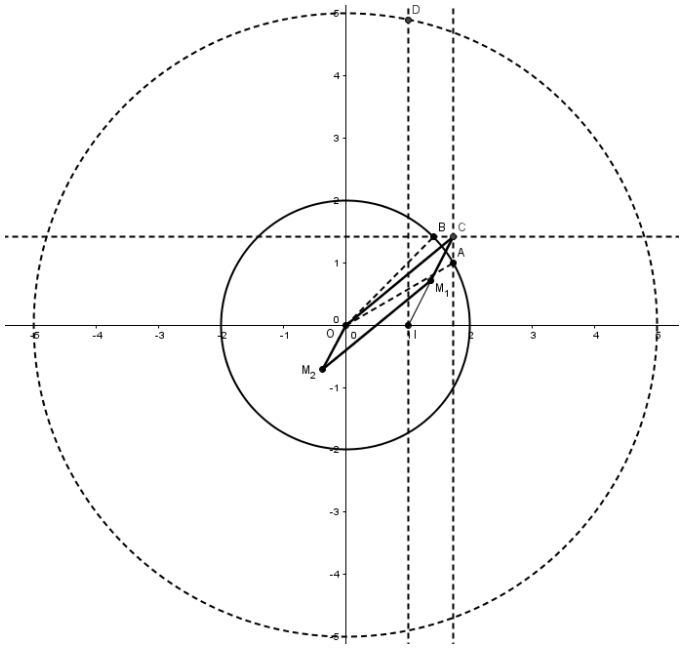
2) a) $\begin{cases}Re(c)=Re(a)\\Im(c)=Im(b)\end{cases}$,

on en déduit que $c=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$.

b) $c^2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^2=3-2+2\sqrt{6}i=1+2i\sqrt{6}$.

3) a) $OD=\left|c^2\right|=\sqrt{1+24}=5$.

b) D'une part $OD=5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part



$\mathrm{Re}\left(c^2\right)=1$ donc D appartient à la droite
d'équation $x=1$ d'où la construction de D.
(En tenant compte de $\mathrm{Im}\left(c^2\right)>0$)

4) $\Delta=4+8i\sqrt{6}=4c^2$. Soit $\delta=2c$.
$z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$.

5) a) $z_1=\dfrac{1+c}{2}$, il en résulte que M_1 est le milieu de [IC].

b) $c=z_1-z_2\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Voir figure.

Exercice 3

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left(2x\ln x-x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}=-1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln x+\dfrac{1}{x}=+\infty$, il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta: y=x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1\right)=-\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x}\right)^2=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)\geq0$ de plus $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

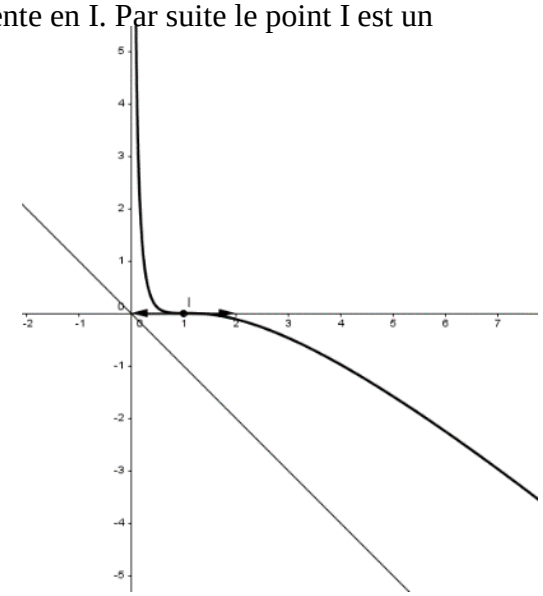
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$

c) $f(1)=0$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

d) $f'(1)=0$ donc $\mathscr{C}$ admet au point $I(1,0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3) a) Voir figure.



b) $A=\int_1^e|f(x)|dx=-\int_1^e f(x)dx=-\left[2(x\ln x-x)-\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e$

$=\dfrac{e^2-7}{2}$ (ua).

4) a) $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) Puisque pour tout $x>0, \sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que

$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\le 0$ ou encore $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\le 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B.

1) $u_3=\sum_{k=1}^{3}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln^2 2+\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)+\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)=0,726.$

2) a) $u_{n+1}-u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ car $(1+\frac{1}{n+1}>1)$ par suite la suite (u_n) est croissante.

b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$..

c) On a $\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ alors $\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Il en résulte que $u_n\le 1-\frac{1}{n+1}$

d) On a $u_n\le 1-\frac{1}{n+1}<1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente vers un réel L.

Pour $n\ge 3,\ u_3\le u_n\le 1-\frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$ alors $0.7<0.726\le L\le 1$..

Exercice 4

1) a) $r=-0.97$.
b) D : y = -2.64x + 34.66.
c) Pour x = 10, on obtient y = -2,64.10 +34,66 = 8.26.

2) a) $Z=\ln y=-0.11x+3.57 \Leftrightarrow y=e^{-0.11x+3.57} \Leftrightarrow y=e^{3.57}e^{-0.11x} \Leftrightarrow y=35.52e^{-0.11x}$.
b) Pour x=10, on obtient $y=35.52.e^{-1.1}\approx 11,82$.

3) L'allure du nuage est proche de l'allure de (C) et n'a pas l'allure d'une droite alors le deuxième ajustement est plus adapté.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT**	Épreuve : **MATHÉMATIQUES** Section : **Sciences expérimentales** Durée : **3 h** — Coefficient : **3**
SESSION 2016	**Session principale**

(Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3)

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

   a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

   b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon.

   c) Déterminer $Q\cap S$.

3) On donne les points $A(0,0,1)$, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,5)$.

   a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b) Montrer que pour tout point M(x, y, z) de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A et B.

   b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

   a) Déterminer l'affixe c du point C.

   b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe c^2.

   a) Montrer que $OD=5$.

   b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercice 3 (6,5 points)

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y=-x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) pour $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Soit $x>0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarquant que $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\le 1-\dfrac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ et que $0,7<\ell\le 1$.

Exercice 4 (3,5 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

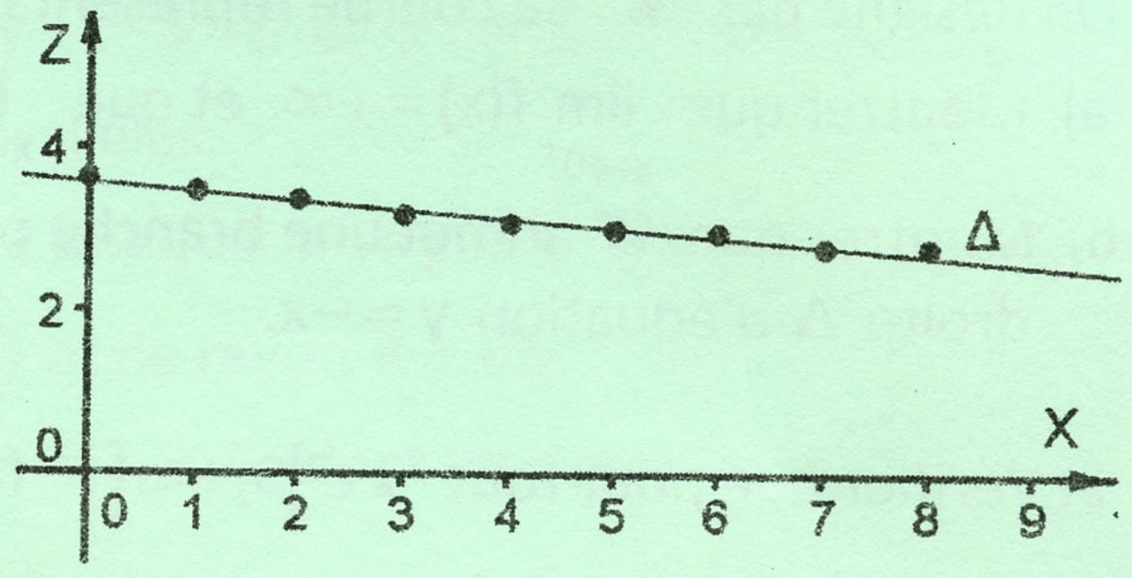
1) a) Déterminer, à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X.
(les coefficients seront arrondis au centième).

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose $Z = \ln(Y)$.

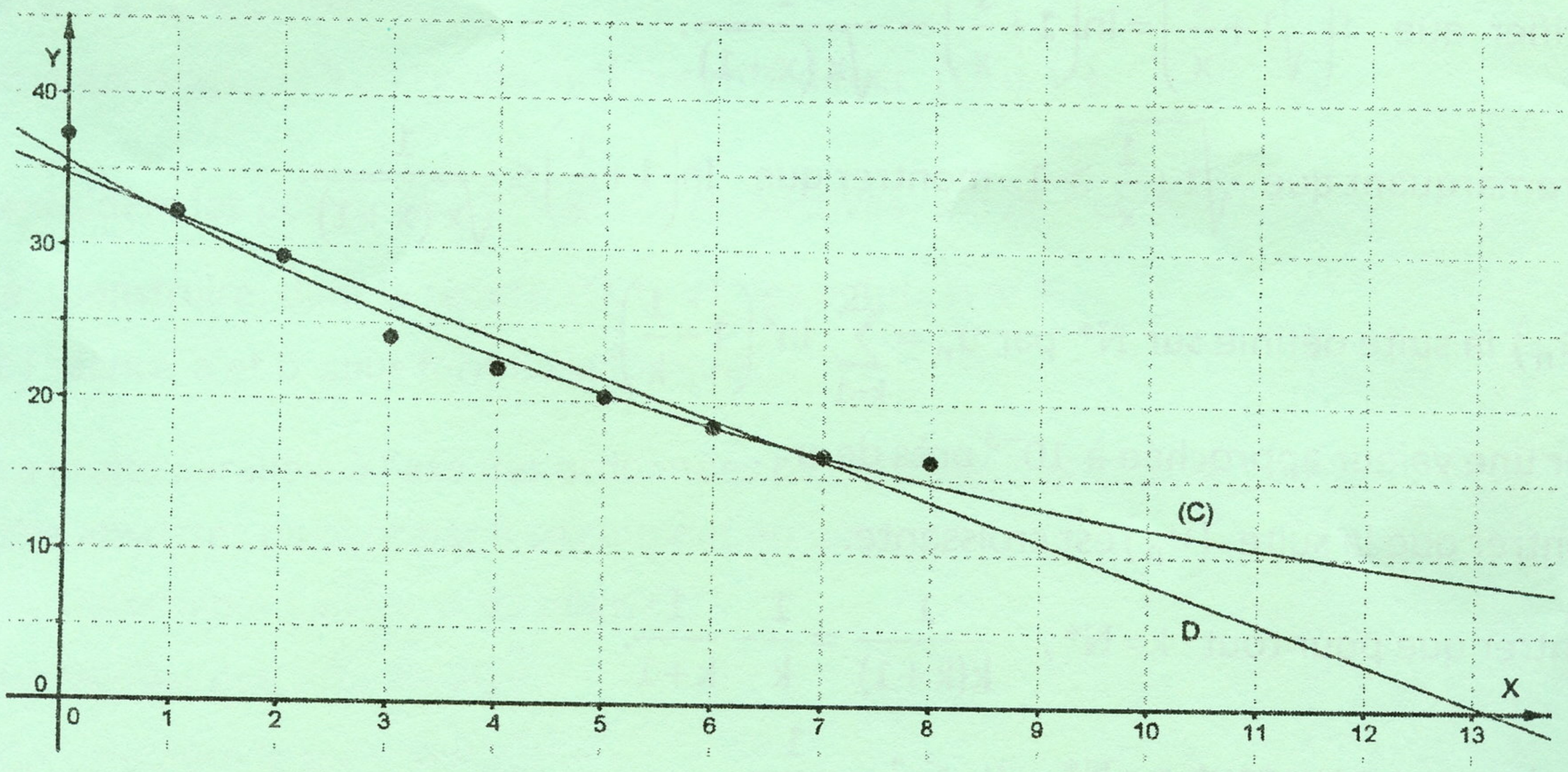
Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X, Z) et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z = -0,11x + 3,57$.



a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y = 35,52\, e^{-0,11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1) b) , la courbe (C) d'équation $y = 35,52\, e^{-0,11x}$ et le nuage de points de la série (X, Y).



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ? Justifier la réponse.

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session de contrôle 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

1°) a) ⇨ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

⇨ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

b) ⇨ $\Omega = C * D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$.

b) $V_{(OAEG)} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AO}\right|$ avec $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}|-27+0+0| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD)

Donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P\perp(CD)$.

b) Soit P' : $x - y - z - 3 = 0$

⇨ $3 - 0 + 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$.

⇨ $3 - 3 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in P'$.

⇨ $0 - 0 + 3 - 3 = 0$ donc $G \in P'$.

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P : x - y + z - 3 = 0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x - 9y + 9z + d = 0$,

Or $A(3,0,3) \in P$ signifie $9\times3-9\times0+\times0+d=0$ signifie $d = -27$

Donc $P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0$ signifie $P : x - y + z - 3 = 0$.

4) a) $(S): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $P: x-y+z-3=0$ donc $d(\Omega,P)=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega,P)=R$. Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

Signifie $\begin{cases} H\in P \\ H\in D\left(\Omega,\overrightarrow{n_p}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

signifie $\begin{cases} \frac{3}{2}+\alpha-\frac{3}{2}+\alpha+\frac{3}{2}+\alpha-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ Ainsi $H(2,1,2)$

Exercice 2 :

De quoi s'agit -il ?

- **Racines cubiques d'un nombre complexe donné**
- **Construction de points M(z) sachant $|z|$ et arg(z)**
- **Complexe et géométrie**

A/

1) a) $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

b) $Z^3=2\sqrt{2}i=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z=2\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$.

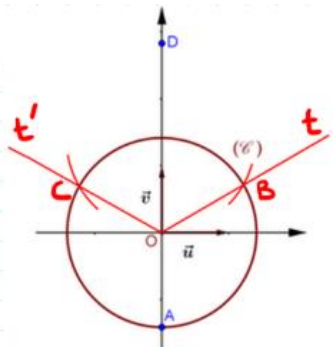
Signifie $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$ sont

$Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

2) a) $\Rightarrow z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B|=\sqrt{2} \\ \arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

signifie $B\in\zeta\cap[Ot)$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.



$\Rightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C|=\sqrt{2} \\ \arg(z_C)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

signifie $C\in\zeta\cap[Ot')$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot'})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

b) $\Rightarrow z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement : $\Rightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=-\overline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=-\overline{z_B}$.

$=-\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\Rightarrow z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-\sqrt{6}$.

$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=3\sqrt{2}\,i$.

Donc $\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=-\sqrt{3}\,i\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$. Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

Autrement : $z_C=-\overline{z_B}$ signifie $S_{(O,\vec{v})}(B)=C$ signifie $(O,\vec{v})\perp(BC)$

Or $(O,\vec{v})=(AD)$, Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

d) $\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}i=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=2\sqrt{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Donc $z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC)\perp(AD)$;

Ainsi ABDC est un losange.

B/ 1) a) $\Rightarrow z_N^3=\left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\alpha^3e^{i2\pi}=\alpha^3$.

$\Rightarrow z_P^3=\left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3=\alpha^3e^{-i2\pi}=\alpha^3$.

b) $\Rightarrow z_N^3=z_P^3=\alpha^3$.

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul α^3 sont z_N, z_P et z_M et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) $\Rightarrow$ MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et MN = MQ signifie MNQP est un parallélogramme(car MNP est un triangle équilatéral)

signifie $z_{\overrightarrow{MN}} = z_{\overrightarrow{PQ}}$ signifie $z_N - z_M = z_Q - z_P$ signifie $z_Q = -z_M + z_P + z_N$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie $\alpha^3 = -2\alpha$.

b) ⇨ MNQP est un losange signifie $\alpha^3 = -2\alpha$ signifie $\alpha\left(\alpha^2 + 2\right) = 0$

signifie $\alpha^2 + 2 = 0$ car $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie $\alpha^2 = -2$ signifie $\alpha = i\sqrt{2}$ ou $\alpha = i\sqrt{2}$.

Exercice 3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique**
- **Fonction réciproque**
- **Résolution d'équations**

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$ et $\ln(x+1) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$.

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote a ($\mathscr{C}$).

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

La droite Δ : y = 1 est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{x\left(\ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(x)\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$= \frac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x \in]0,+\infty[$; $1+\dfrac{1}{x} > 1$ et $x+1 > 1$

Donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et $\ln(x+1) > 0$

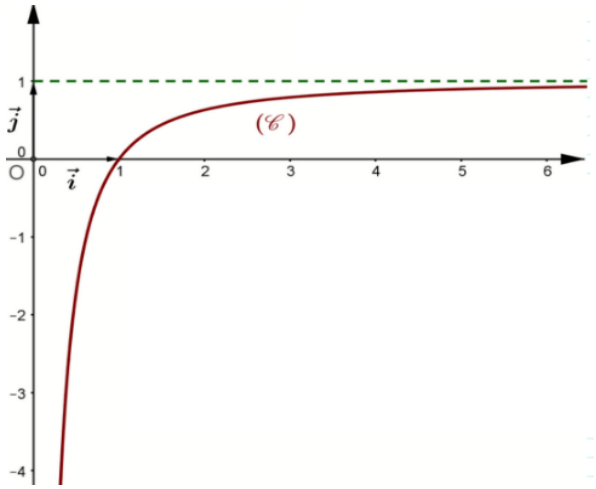
Ainsi $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1) > 0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$.

Donc pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) > 0$ Par suite f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	↗	1

d)



3) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ car f^{-1} est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$.

b) pour tout $n\geq 2$; $a_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n)=\dfrac{1}{n}$

signifie $\dfrac{\ln(a_n)}{\ln(a_n+1)}=\dfrac{1}{n}$

signifie $n\ln(a_n)=\ln(a_n+1)$

signifie $\ln\left((a_n)^n\right)=\ln(a_n+1)$

signifie $(a_n)^n=a_n+1$.

Ainsi a_n est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+1)=2$.

Exercice 4 :

De quoi s'agit -il ?

- **Lecture graphique**
- **Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle**
- **Modélisation**

1) a) $f(0) = 0$; $f'(0) = \dfrac{+1}{+2}=\dfrac{1}{2}$.

b) f est solution de l'équation $y' = ay + b$ donc $f'(x) = a f(x) + b$, pour tout réel x.

d'où $f'(0) = a\ f(0) + b$ ainsi ; $b=f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

2) a) f solution de l'équation : $y'=ay+\dfrac{1}{2}$

Donc $f'(x)=af(x)+\dfrac{1}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Signifie $af(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}$ signifie $f(x)=\dfrac{1}{a}\left(f'(x)-\dfrac{1}{2}\right)$ car $a\neq 0$.

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{1}{a}\left(f'(x)-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) S est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 4.

Donc $S=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{a}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]_0^4$

$=\frac{1}{a}\left(f(4)-2-\left(f(0)-0\right)\right)=\frac{1}{a}\left(2-2e^{-1}-2\right)=\frac{-2e^{-1}}{a}$.

c) On a $S=\frac{-2e^{-1}}{a}=8e^{-1}$ signifie $a=\frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}}=-0{,}25$.

3) f solution de l'équation différentielle $y'=-0{,}25\ y+\frac{1}{2}$

Donc $f(x)=ce^{-0{,}25x}-\frac{\frac{1}{2}}{-0{,}25}=ce^{-0{,}25x}+2$.

Or $f(0)=0$ signifie $c+2=0$ signifie $c=-2$

Ainsi $f(x)=2-2e^{-0{,}25x}$.

4) **a)** $h(3)=2-2e^{-0{,}25\times 3}=2-2e^{-0{,}75}\simeq 1{,}05\,\text{m}$.

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

b) $h(t)>1{,}98$ signifie $2-2e^{-0{,}5t}>1{,}98$ signifie $2e^{-0{,}5t}<0{,}02$ signifie $e^{-0{,}5t}<0{,}01$

signifie $-0{,}5\,t<\ln(0{,}01)$ signifie $t>-\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}5}\simeq 18{,}42$.

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

●●○●●

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

SESSION **2017**

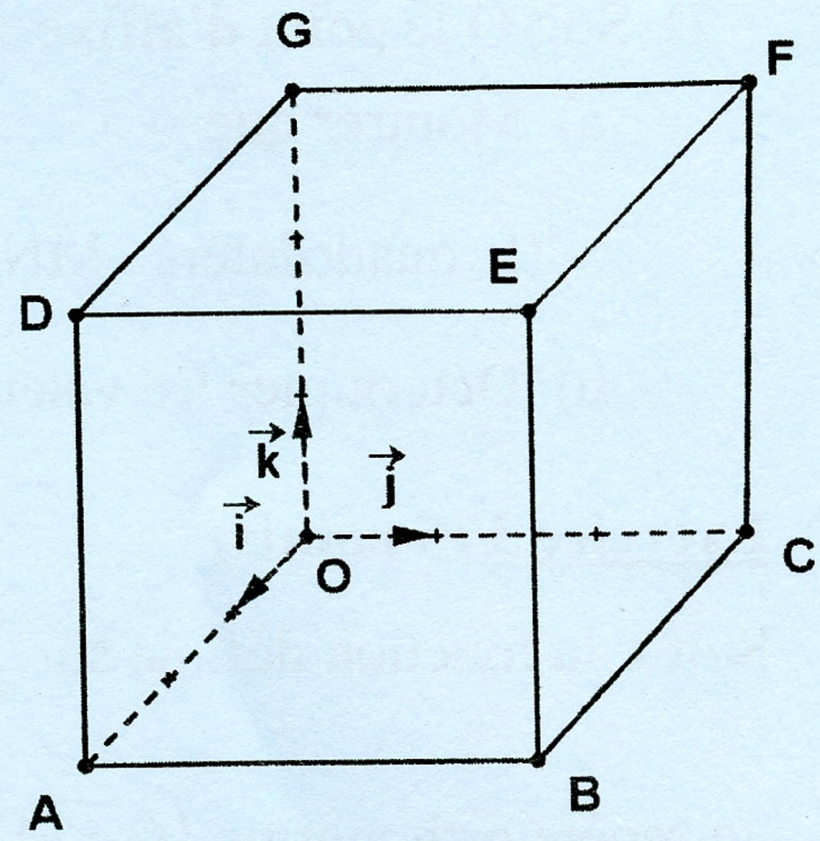
Épreuve : **Mathématiques**	
Section : **Sciences expérimentales**	
Durée : 3h	Coefficient : 3
Session de contrôle	

Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que A(3,0,0) ; C(0,3,0) et G(0,0,3).



1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω milieu de[CD] .

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG .

3) On désigne par P le plan passant par les points A , E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x - y + z - 3 = 0$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2 (5points)

A/1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}\,i$ et $z_D = 2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$z_B = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) Vérifier que $z_B = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC) \perp (AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer $z_N{}^3$ et $z_P{}^3$.

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ($\alpha^3 = -2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x(\ln(x+1)-\ln x)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}(\frac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n = x+1$.

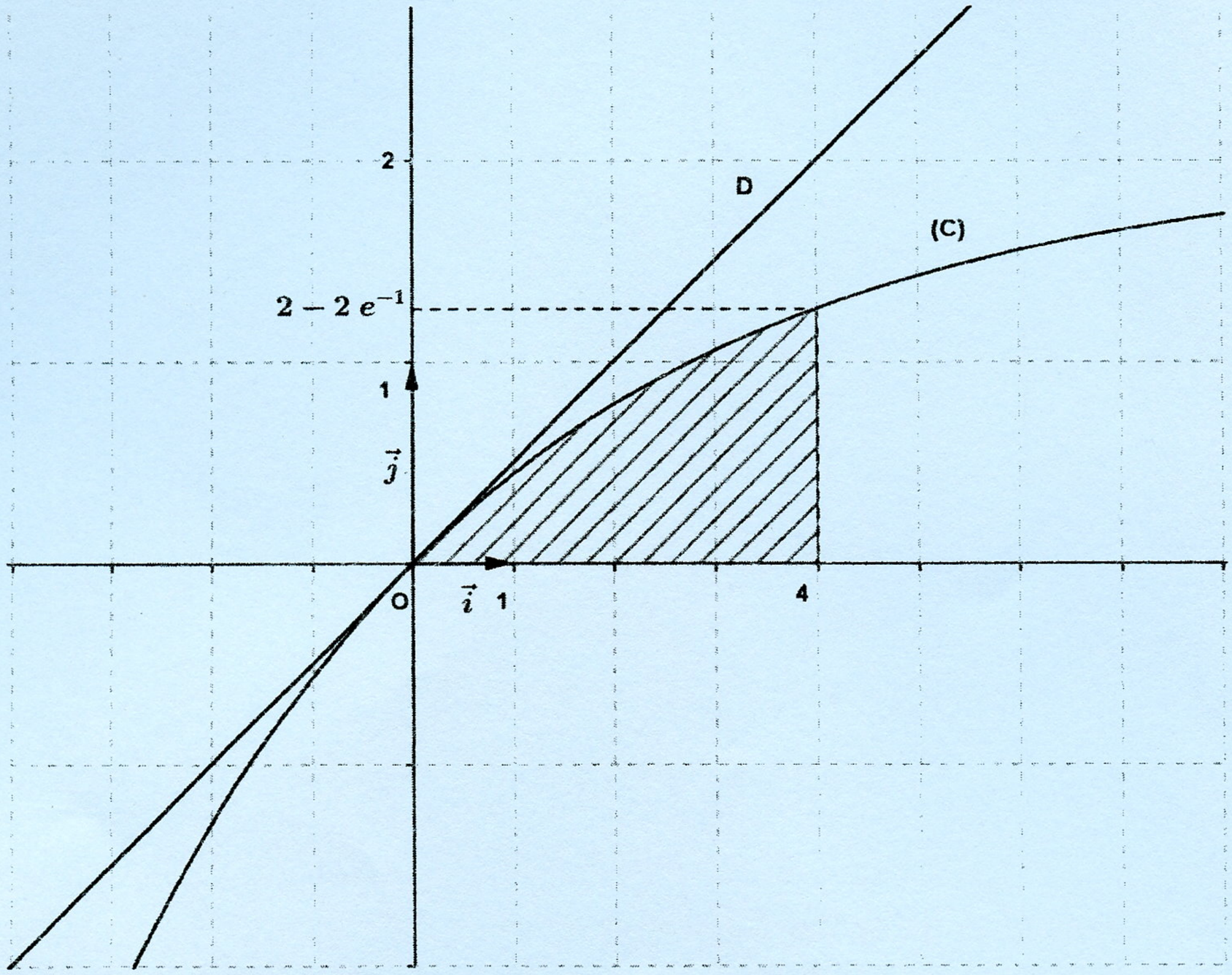
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$.

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci–dessous :

- la courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f solution d'une équation différentielle du type $y'=ay+b$ où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.
- la droite D est la tangente à (C) au point O.
- $f(4)=2-2e^{-1}$.

On désigne par S l'aire en (u.a) de la partie hachurée et on admet que $S = 8e^{-1}$.



1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

   b) En déduire que $b=\frac{1}{2}$.

2) a) Justifier que pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)$

   b) En déduire que $S=\frac{-2\,e^{-1}}{a}$.

   c) Montrer alors que $a=-0,25$.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=2-2e^{-0.25x}$.

4) On admet que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ modélise l'évolution de la hauteur d'une certaine espèce de maïs. Autrement dit : si on note h(t) la hauteur en mètres de cette espèce de maïs à l'instant t (exprimé en semaines) alors $h(t)=2-2\,e^{-0.25\,t}$.

   a) Déterminer la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines.

   b) Au cours de quelle semaine la hauteur d'une plante de maïs dépassera-t-elle 198 cm ?

Section : . . . . . N° d'inscription : . . . . . Série : . . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . .

Date et lieu de naissance : . . . . . .

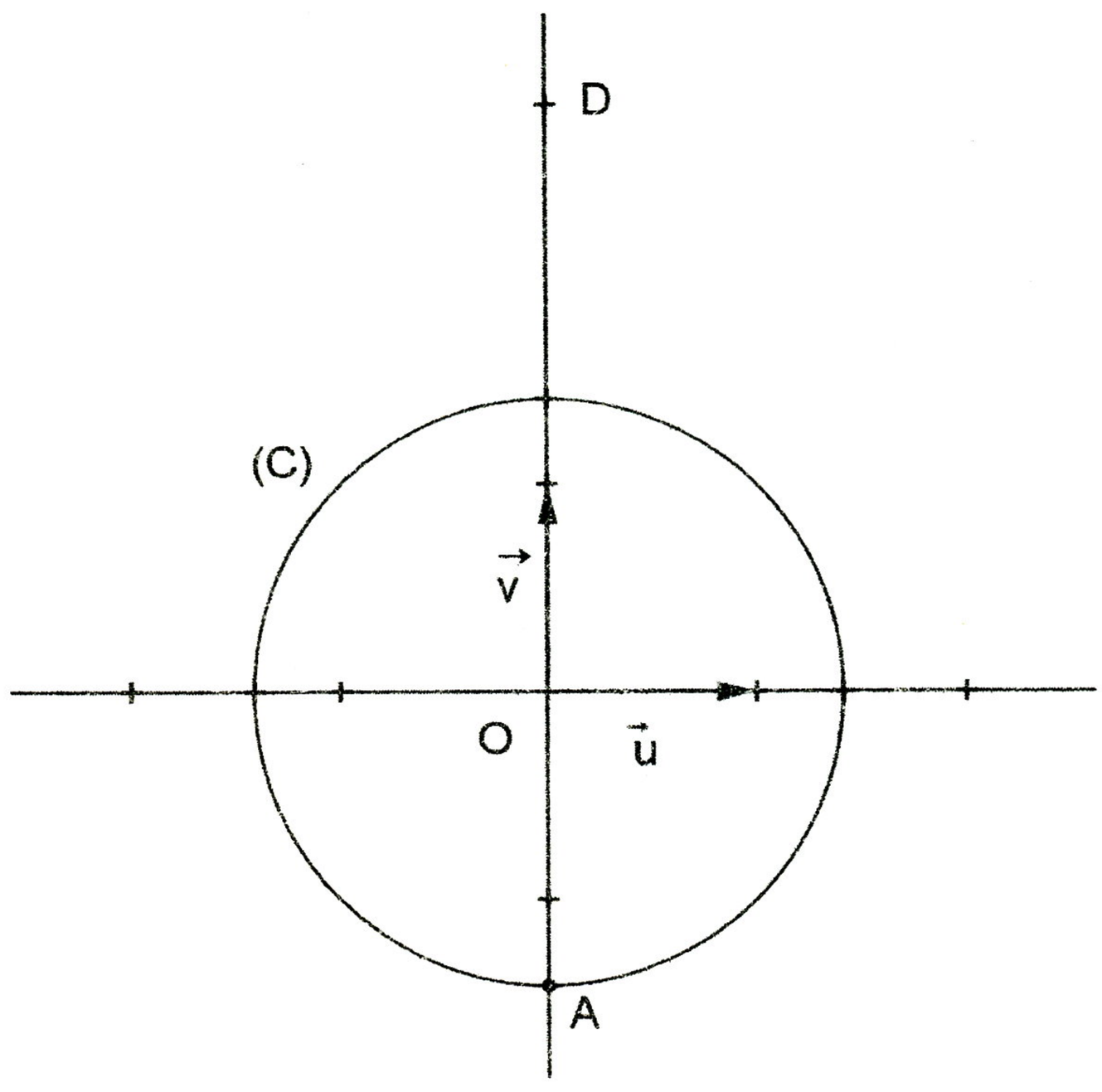
Signatures des surveillants

. . . . . .

. . . . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Sciences expérimentales**

Annexe à rendre avec la copie



Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session principale 2017

Exercice n°1 :

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère**
- **Droite tangente à un cercle**

1°) a) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$,

Donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$.

b) $O\in P\bigcap(OA)$ ①

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA}\perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan *P* en *O*.

c) On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ ainsi,

$$d\left(O,(BC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+8^2}}=\sqrt{2}.$$

2) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$ signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2+2^2+2^2+1^2$

signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=11>0$

Donc (S) est la sphère de centre *A*(2,2,1) et de rayon R = $\sqrt{11}$.

3) a) $OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

b) D'après la question **1-b)**, O est le projeté orthogonal de A sur le plan *P*,
donc $d(A,P) = OA = 3 < R = \sqrt{11}$.
Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon
$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\sqrt{11}^2-3^2}=\sqrt{11-9}=\sqrt{2}$.

c) $(BC)\subset P$; C $\subset P$ et $d\big(O,(BC)\big)=\sqrt{2}$ donc (*BC*) est tangente au cercle C.

4) **a)** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H\in(BC)$ ($\star$).

$OH=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}=r$ ($\star\star$).

D'apres ($\star$) et ($\star\star$), on conclut que $(BC)\cap$C $=\{H\}$.

Exercice n°2 :

De quoi s'agit -il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans IC**
- **Complexe et géométrie**

1) **a)** $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\sqrt{5}^2+2\times\sqrt{5}\times 2i+(2i)^2=5+4i\sqrt{5}-4=1+4i\sqrt{5}$.

b) $\Delta=\left[-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2-4\times1\times\left(1+4i\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}+2i\right)^2-4\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

c) $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\left[i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2$, donc $\delta=i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)$ par suite :

$$a=\frac{\sqrt{5}+2i+i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et $a=\dfrac{\sqrt{5}+2i-i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Donc les solutions de (*E*) sont a et b.

2) **a)** $OQ=|z_Q|=\left|\sqrt{5}+2i\right|=\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=\sqrt{9}=3$, donc $Q\in$ C $_{(O,3)}$ = C .

b) $Q\in$C $\cap\{y=2\}$, avec Re(z_A) > 0.

3) **a)** $OA=|a|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1+i\sqrt{3}\right|=\dfrac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc A $\in$C .

$OB=|b|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1-i\sqrt{3}\right|=\dfrac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc B $\in$C .

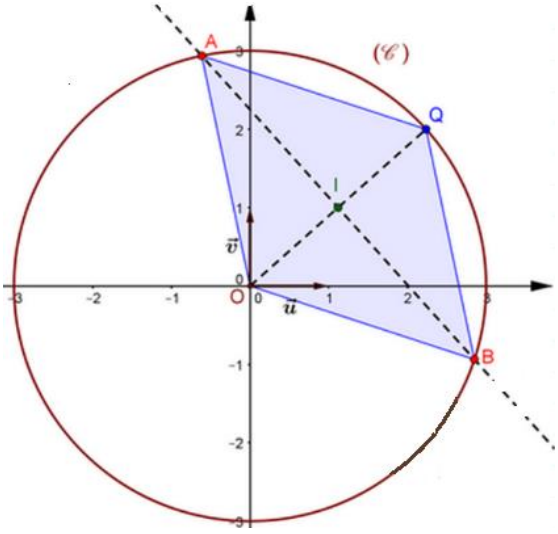
b) $z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}=a+b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left[\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\sqrt{5}+2i=z_Q=z_{\overrightarrow{OQ}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) On a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ donc le quadrilatère *OAQB* est un parallélogramme, de plus *OA* = *OB* ainsi *OAQB* est un losange.

d) On construit le point *I* milieu du segment [*OQ*]

La perpendiculaire à (*OQ*) passant par I coupe le cercle C en A et B tel que Im(z_A) > 0, car $a=\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2+\sqrt{15}}{2}$ et $b=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2-\sqrt{15}}{2}$.



Exercice n°3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Fonction en exponentielle (limites, variations, points d'inflexions, construction de points sur une représentation graphique donnée)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**
- **Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle**

1) **a)** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}.e^{-x}=-\infty$.

(C) admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$.

c) $\lim\limits_{+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}+x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0+0=0$.

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) **a)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\times\left(1+x^2\right)=\left(2x-\left(1+x^2\right)\right)e^{-x}$

$=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}=-\left(x^2-2x+1\right)e^{-x}=-\left(x-1\right)^2e^{-x}$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\le 0$ et $f'(1)=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	0

3) **a)** $T_0 : y = f'(0)\,x + f(0)$ avec $f'(0) = -e^0 = -1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\left[2 \times 1 \times (x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$.

$$= -e^{-x}\left(2x - 2 - x^2 + 2x - 1\right) = \left(x^2 - 4x + 3\right)e^{-x}$$

$$= (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi A et B sont deux points d'inflexions de (C).

4) **a)** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^{-x} = \left(1 + x^2\right)g(-x)$.

Donc : $f(1) = 2g(-1)$ et $f(3) = 10\,g(-3)$.

b) $A\left(1; f(1)\right)$ et $f(1) = 2g(-1) = 2y_E$, donc $A(1; 2y_E)$.

$B\left(3; f(3)\right)$ et $f(3) = 10\,g(-3) = g\left(\ln(10) - 3\right) = y_F$, donc $B(3; y_F)$.

T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

5) **a)** T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

b) Voir figure.

6) **a)** Voir figure.

b) $x \mapsto -\left(x^2+2x+3\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $F'(x) = -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}\left(x^2+2x+3\right)\right]$

$$= -e^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-3\right) = -e^{-x}\left(-x^2-1\right)$$

$$= \left(1+x^2\right)e^{-x} = f(x).$$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

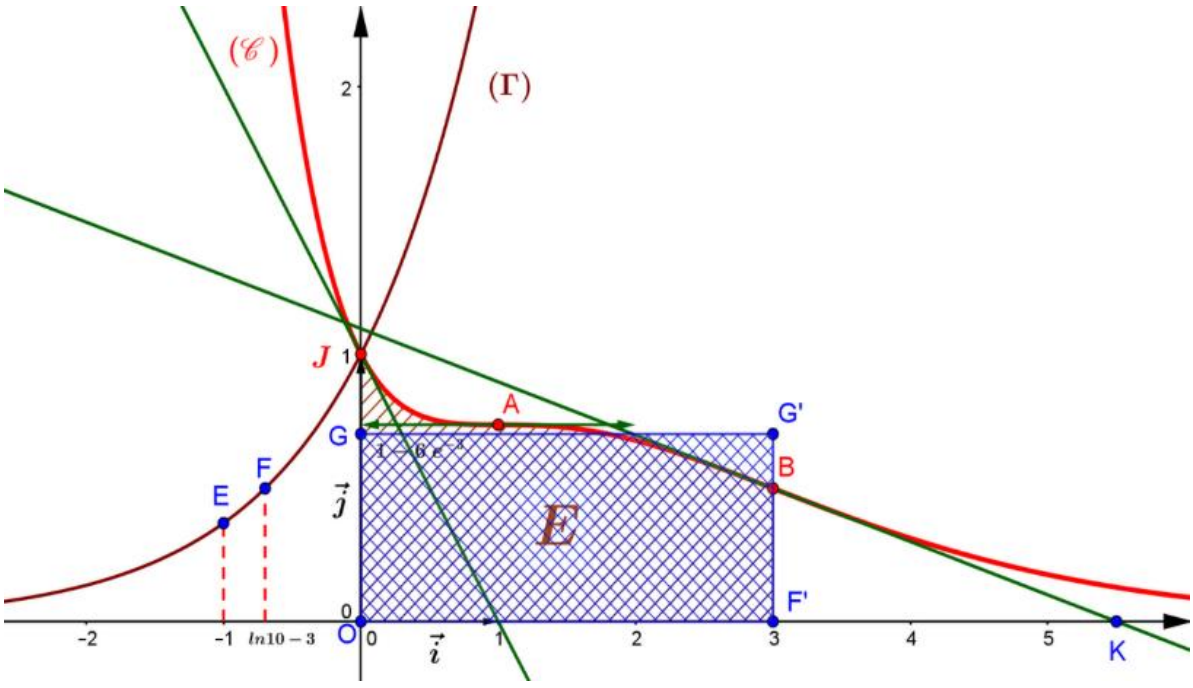
c) $S = \int_0^3 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^3 = F(3) - F(0) = -18e^{-3} + 3 = 3 - 18e^{-3}$.

d) $\overline{f} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}\left(3-18e^{-3}\right) = 1-6e^{-3}$.

e) $S = 3 \times \overline{f} = 3 \times \left(1-6e^{-3}\right)$.

Soient G' (3 ; $1 - 6\,e^{-3}$) ; F'(3 ; 0) et **A** l'aire du rectangle $OF'G'G$,

Donc $S = OF' \times OG$ = **A**.



Exercice n°4 :

De quoi s'agit -il ?

- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité totale**
- **Loi binomiale**

1) **a)** $p(U)=1-p(\overline{U})=1-\frac{5}{100}=0,95$.

b) $p(D/U)=\frac{92}{100}=0,92$ et $p(D/\overline{U})=\frac{55}{100}=0,55$.

2) **a)** $p(D)=p(D\cap U)+p(D\cap\overline{U})=p(D/U)\times p(U)+p(D/\overline{U})\times p(\overline{U})$

$=0,92\times 0,95+0,55\times 0,05=0,9015$.

b) $p(U/D)=\frac{p(U\cap D)}{p(D)}=\frac{0,92\times 0,95}{0,9015}=\frac{1748}{1803}\simeq 0,9694$.

3) **a)** $p_n=1-\overline{p_n}$ avec $\overline{p_n}$ est la probabilité qu'aucune de ces femmes ait une grossesse multiple.

C'est à dire que n femmes ait une grossesse unique.

Ainsi : $p_n=1-(p(U/D))^n=1-(0,9694)^n$.

Autrement : X suit une loi binomiale de paramètres n ($n\geq 2$) et $p=p(\overline{U}/D)$

$$p_n=p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-(0,9694)^n .$$

b) $p_n>0,9$ signifie $1-(0,9694)^n>0,9$

signifie $(0,9694)^n<0,1$

signifie $\ln((0,9694)^n)<\ln(0,1)$

signifie $n\ln(0,9694)<\ln(0,1)$

signifie $n>\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9694)}\simeq 74,09$ car $\ln(0,9694)<0$.

Ainsi le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 est n = 75.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Sciences expérimentales** Durée : 3h — Coefficient : 3 **Session principale**

Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,2,1), B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

b) On note P le plan (OBC).

En remarquant que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$.

Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

3) a) Calculer la distance OA.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).

4) On considère le point $H(1,-1,0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

Exercice 2 (4,5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4\sqrt{5}\,i = 0$.

a) Calculer $(\sqrt{5} + 2i)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.

c) En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad b = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan,

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5}+2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à (C).

b) Construire alors le point Q.

3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère OAQB est un losange.

d) Construire alors les points A et B.

<u>Exercice 3</u> (7points)

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de (C).

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x$.
- E et F sont les points de (Γ) d'abscisses respectives (-1) et $\ln 10-3$.
- G est le point de coordonnées $(0\ ,\ 1-6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10\,g(-3)=g(\ln 10-3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\frac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe (C) au point B.

b) Tracer la courbe (C) dans l'annexe (On placera les tangentes à (C) en A, en J et en B).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 3$.

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur IR.

c) Calculer S.

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,3] est égale à $1 - 6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S.

Exercice 4 (3,5points)

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer p(U)

b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer p(D) .

b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n \geq 2$).

On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

Section : . . . . . N° d'inscription : . . . . . Série : . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . .

Date et lieu de naissance : . . . . . .

Signatures des surveillants

. . . . . .

. . . . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Sciences expérimentales**

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

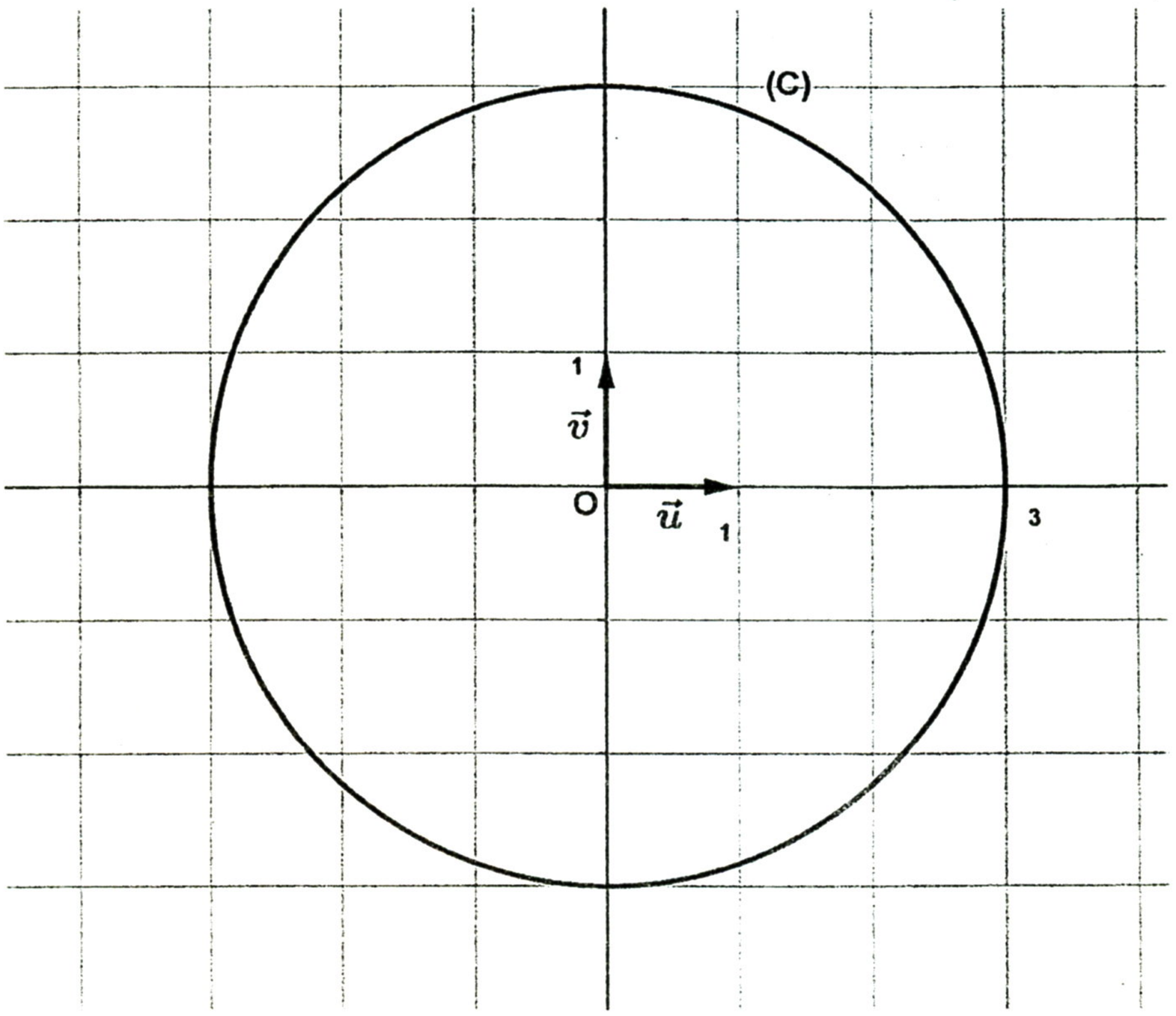
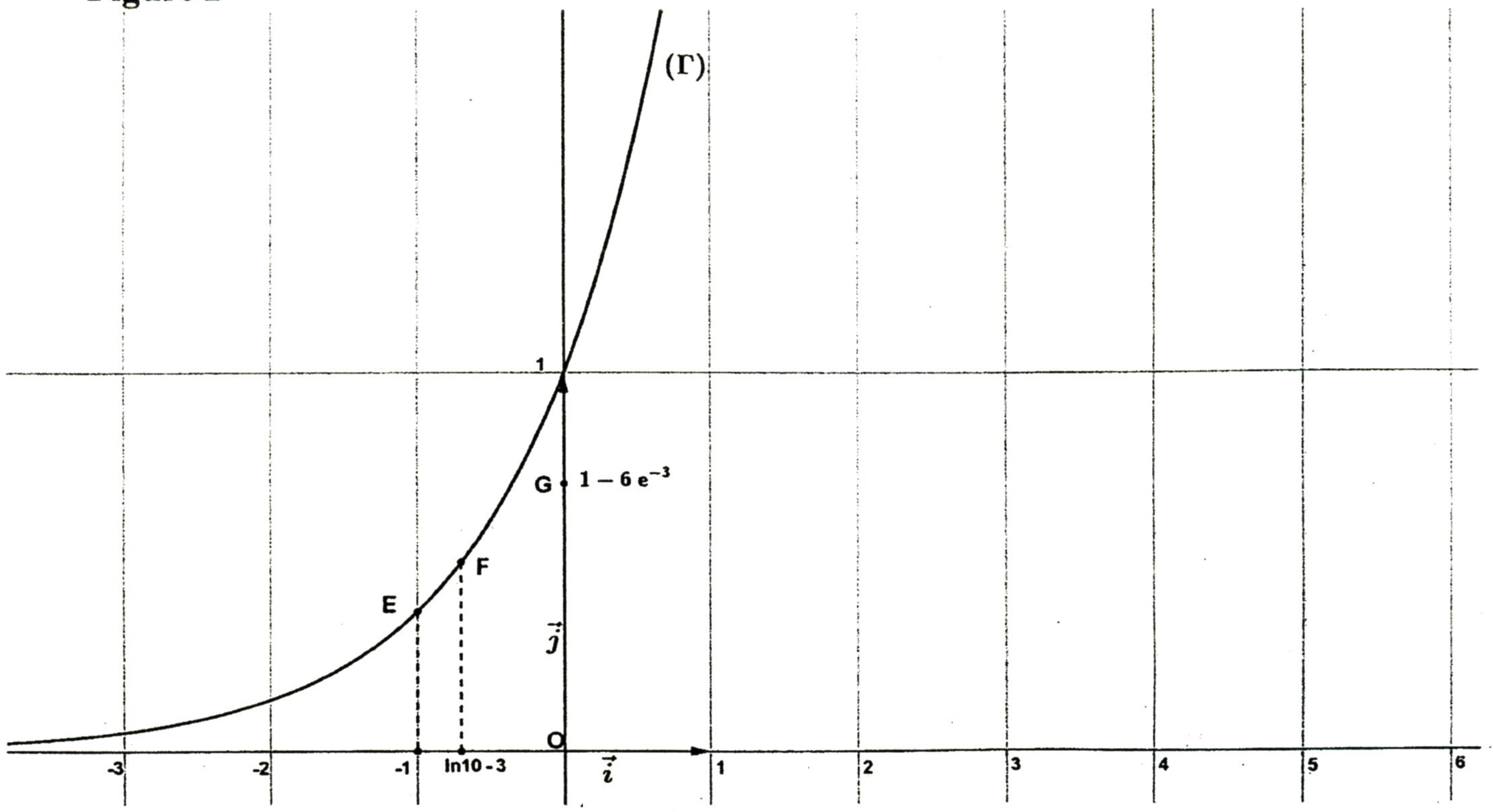


Figure 2



Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Science expérimentales)

Session de contrôle 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan**
- **Volume d'un tétraèdre**

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$$ ainsi $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$

b. On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\frac{1}{6}\left|-4-8\right|=2$

2. Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ vecteur normal à P donc $P:2x+2y+4z+d=0$

On a $C(0;0;2)\in P$ donc $d=-8$ ainsi $P:x+y+2z-4=0$

3.

a. On a $M(x;y;z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1-8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=11$

donc S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

b. On a $d(I,P)=\frac{\left|-1+1-2-4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}<\sqrt{11}$ donc $P\cap S$ est un cercle de rayon

$r=\sqrt{11-6}=\sqrt{5}$

c. On a $B\in P$ et $C\in P$ et puisque $0^2+4^2+0^2+2\times0-2\times4+2\times0-8=0$ donc $B\in S$ et puisque $0^2+0^2+2^2+2\times0-2\times0+2\times2-8=0$ donc $C\in S$ de plus

$BC=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ donc $[BC]$ est un diamètre du cercle (ς) et ainsi

$H=B*C$ d'où $H(0;2;1)$

4. **a.** On a $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} x_M-1=-a \\ y_M-1=3a \\ z_M-1=-a \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_M=1-a \\ y_M=1+3a \\ z_M=1-a \end{cases}$ ainsi

$M(1-a;1+a;1-a)$

b. on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 3a-3 \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 1+3a \\ -1-a \end{pmatrix}$ d'où

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=(1-a)^2+(3a-3)(1+3a)-(1-a^2)=11a^2-3-8a=(a-1)(11a+3)$

c. On a $E\in(AB)\cap(\varsigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CE}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ (a-1)(11a+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ a=1 \ ou \ \ a=-\dfrac{3}{11} \end{cases}$

pour $a=1$ on a $E(0;2;0)$ or puisque $H(0;2;1)$ donc $HE=1\neq\sqrt{5}$ d'où $E\notin(\varsigma)$

ainsi $a=\dfrac{-3}{11}$ d'où $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$

d. On a $V'=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\left(\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{3}{11}\left[\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AI}\right|\right]=\dfrac{3}{11}V$

Exercice n°2 :

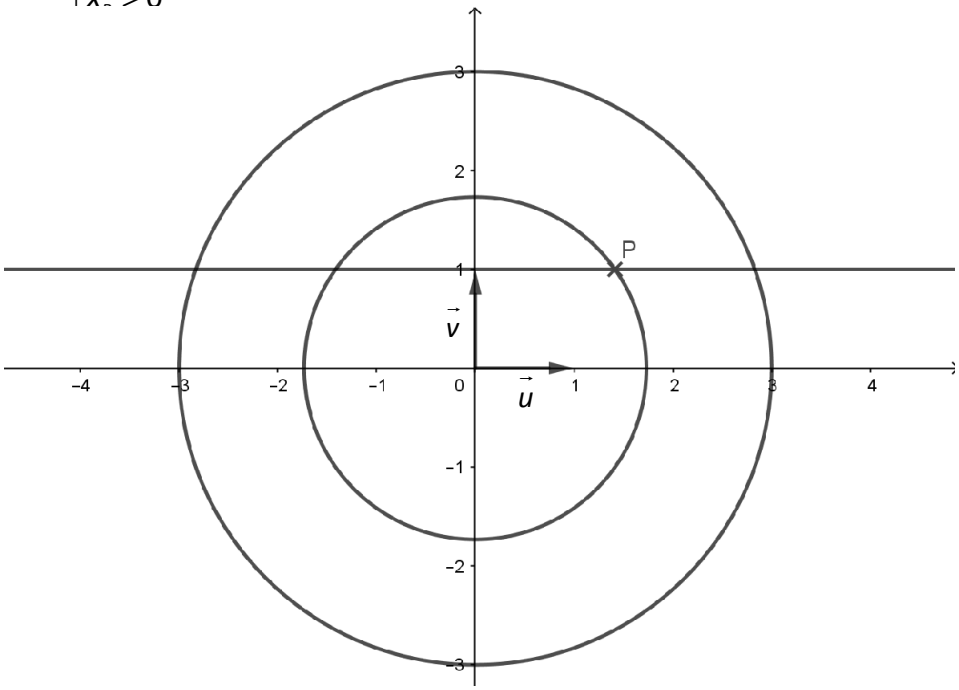
De quoi s'agit-il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

I.

1. **a.** On a $OP=|P|=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ d'où $P\in(C)$

b. On a $\begin{cases} y_P=1 \\ x_P>0 \end{cases}$ et $P\in(C)$ donc $P\in(C)\cap\Delta: y=1$ avec $x_P>0$ d'où la construction



c. On a $\begin{cases}\arg(P)\equiv\alpha[2\pi]\\ |P|=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow P=\sqrt{3}e^{i\alpha}$

2.

a. On a $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi]\equiv\alpha+\alpha[2\pi]\equiv 2\alpha[2\pi]$

b. On a $Q\in(C')$ donc $|q|=3$ et puisque $\arg(q)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi]\equiv 2\alpha[2\pi]$ d'où $q=3e^{i2\alpha}$

c. On a $p^2=\left(\sqrt{3}e^{i\alpha}\right)^2=3e^{i2\alpha}=q$ donc $q=\left(\sqrt{2}+i\right)^2=2+2i\sqrt{2}-1=1+2i\sqrt{2}$

II.

1. a. On a $\Delta=64-4\times16\times9=-512$ d'où $\delta=i\sqrt{512}=16\sqrt{2}i$

d'où $z'=\dfrac{8-16i\sqrt{2}}{32}=\dfrac{1}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z'=\dfrac{8+16i\sqrt{2}}{32}=\dfrac{1}{4}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z'=\dfrac{\bar{q}}{4}$ et $z''=\dfrac{q}{4}$

b. On pose $Z=z^2$

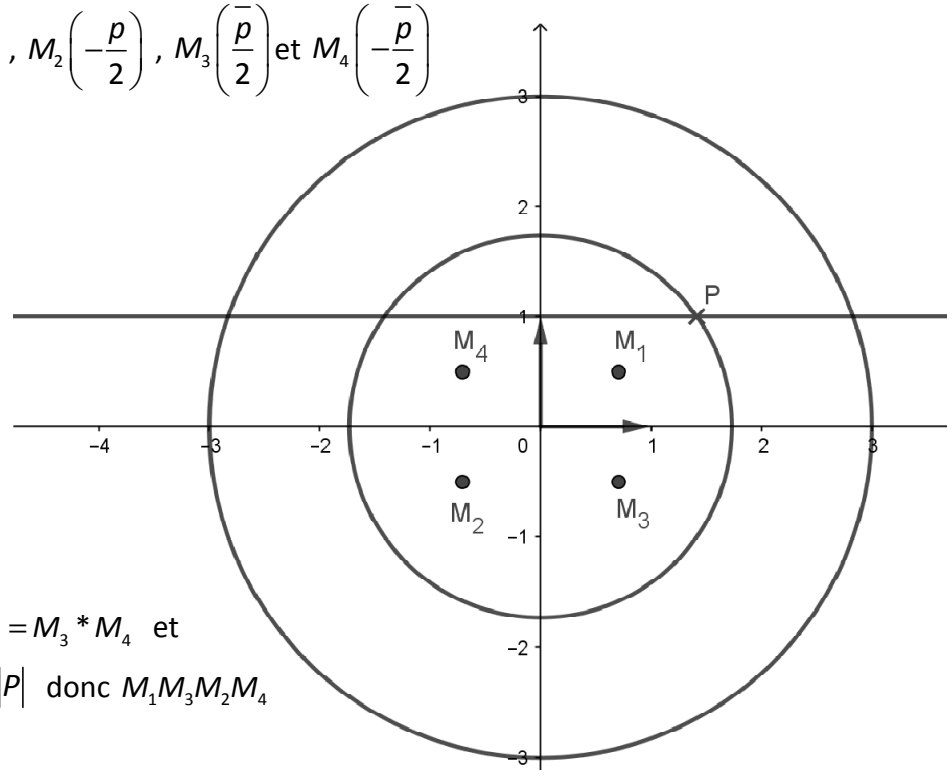
On a z solution de (E') équivaut à $Z^2-8Z+9=0$ équivaut à $Z=\dfrac{q}{4}$ ou $Z=\dfrac{\bar{q}}{4}$

équivaut à $z^2=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ ou $z^2=\dfrac{\overline{p^2}}{4}=\left(\dfrac{\bar{p}}{2}\right)^2$

équivaut à $z=\dfrac{p}{2}$ ou $z=-\dfrac{p}{2}$ ou $z=\dfrac{\bar{p}}{2}$ ou $z=-\dfrac{\bar{p}}{2}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{p}{2};-\dfrac{p}{2};\dfrac{\bar{p}}{2};-\dfrac{\bar{p}}{2}\right\}$

2. a. On a $M_1\left(\dfrac{p}{2}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{p}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{\bar{p}}{2}\right)$ et $M_4\left(-\dfrac{\bar{p}}{2}\right)$



b. On a $M_1*M_2=M_3*M_4$ et

$M_1M_2=M_3M_4=|P|$ donc $M_1M_3M_2M_4$

est un rectangle

Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction en exponentielle (limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**

A. 1. a. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2-xe^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-e^x\right]=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2-xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-e^x\right]=-\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2-xe^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\right]=-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2-xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\right]=-\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x ,

$$f'(x)=2(x+1)-e^x-xe^x=2(x+1)-e^x(x+1)=(x+1)(2-e^x)$$

b. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=\ln 2$ et on a $2-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$

d'où

x	$-\infty$		-1		$\ln 2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e^{-1}	↗	$1+(\ln 2)^2$	↘	

3. a. On a $f'(0)=g'(0)=1$ et $f(0)=g(0)=1$ d'ou $T: y=x+1$

b. Puisque (Γ) est au dessus de (Δ) donc $e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

autrement : Soit $h:x\mapsto e^x-(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x)=e^x-1$ d'où

D'où $h(x)=e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4.

a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=e^x-(x+1)^2+xe^x=(x+1)(e^x-x-1)$

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=xe^x-x^2-x=x(e^x-x-1)$

c. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=(x+1)(e^x-(x+1))=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ d'où

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$e^x-f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Conclusion : Γ au dessous de (C_f) pour tout $x\in]-\infty;-1[$

Γ au dessus de (C_f) pour tout $x\in]-1;+\infty[\setminus\{0\}$

Γ coupe (C_f) aux points $(-1;e^{-1})$ et $(0;1)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=x(e^x-(x+1))=0 \Leftrightarrow x=0$ d'où

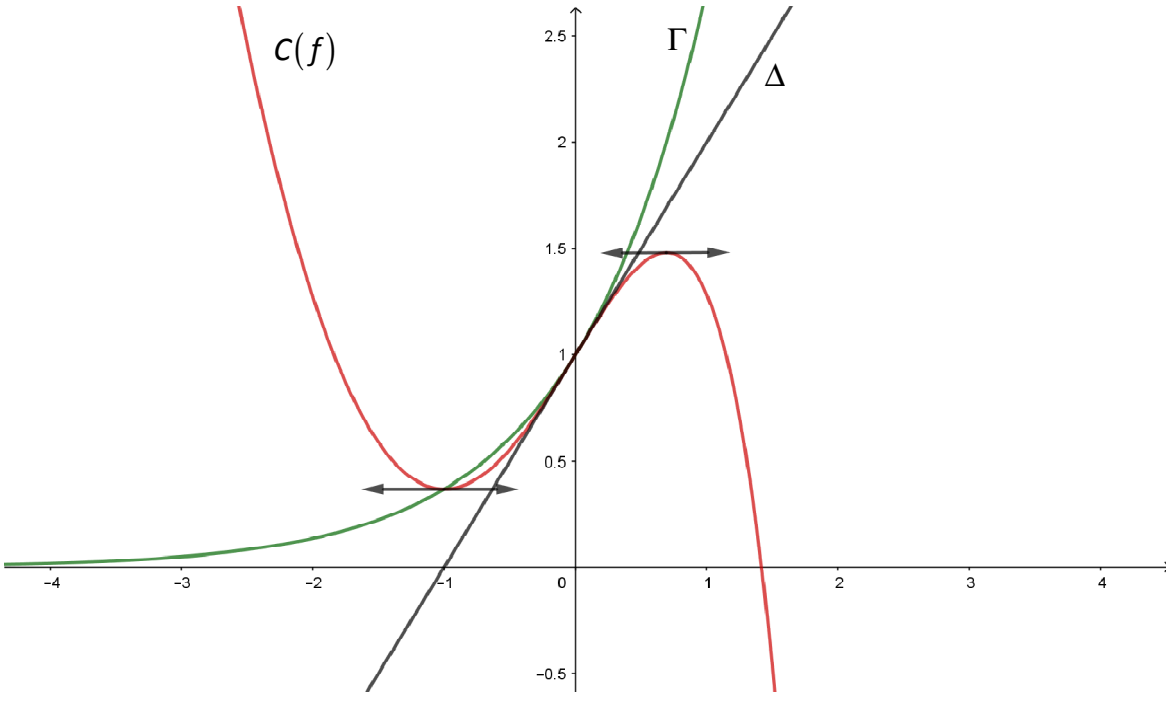
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(x+1)-f(x)$		$-$	0	$+$	

Conclusion : Δ au dessous de (C_f) pour tout $x\in]-\infty;0[$

Δ au dessus de (C_f) pour tout $x\in]0;+\infty[$

Γ coupe (C_f) au point $(0;1)$

5.



6. On a

$$A=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{x}+xe^{x}-x^{2}-2x-1dx=\left[xe^{x}-\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction** $\sqrt[n]{\ }$
- **Suites** $u_{n+1}=f(u_n)$ **(monotonie, résonnement par récurrence , absurde, convergence)**

1. Soit $M(x;y)\in\wp\setminus\{O\}$

   On a $M\in(C)\cap(D)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}g(x)=x\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{4x}=x\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x^{3}=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$

   d'où $\alpha=\sqrt[3]{4}$

2.

   a. On a $u_0=4$, $u_1=f(4)=1$, $u_2=f(1)=2$ et $u_3=f(2)=\sqrt{2}$ donc $u_1<u_3<u_2<u_0$

   b. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

   Pour $n=0$ on a $u_0=4>0$

   Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$

   On a $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{2}{\sqrt{u_n}}>0$

   Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

   c. Soit $n\in\mathbb{N}$, si $u_{n+1}\le u_n$ alors $0<\sqrt{u_{n+1}}\le\sqrt{u_n}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\frac{1}{\sqrt{u_n}}$ ainsi

   $\frac{2}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\frac{2}{\sqrt{u_n}}$ donc $u_{n+2}\ge u_{n+1}$

   d.

   Puisque si $u_{n+1}\le u_n$ alors $u_{n+2}\ge u_{n+1}$ donc (u_n) n'est pas décroissante

Et si $u_n \le u_{n+1}$ alors $0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{u_{n+1}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \le \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ d'où $u_{n+2} \le u_{n+1}$

donc (u_n) n'est pas croissante

Conclusion : (u_n) n'est pas monotone

3. Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}}}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x}} = 2^{\frac{2}{4}} x^{\frac{1}{4}} = (4x)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4x} = g(x)$$

4.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(v_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} = v_{n+1}$

$$g(w_n) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = w_{n+1}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le v_{n+1} \le \alpha \le w_{n+1} \le w_n$

Pour $n = 0$, on a $u_1 < u_3 < \alpha < u_2 < u_0$ d'où $v_0 < v_1 < \alpha < w_1 < w_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$

montrons que $v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$

on a $0 < v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$ et g croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g(v_n) < g(v_{n+1}) < g(\alpha) < g(w_{n+1}) < g(w_n)$ d'où $v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le v_{n+1} \le \alpha \le w_{n+1} \le w_n$

c. On a (v_n) est une suite croissante et majorée par α donc convergente vers $\ell \in [0;+\infty[$ et puisque $v_{n+1} = g(v_n)$ et g continue sur $[0;+\infty[$ d'où $g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque $v_n \ge v_0 = 1 > 0$ d'où $\ell > 0$ ainsi $\ell = \alpha$

On a (w_n) est une suite décroissante et minorée par α donc convergente vers $\ell \in [0;+\infty[$ et puisque $w_{n+1} = g(w_n)$ et g continue sur $[0;+\infty[$ d'où $g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque et puisque $0 < \alpha \le w_n \le w_0 = 4$ d'où $\ell > 0$ donc $\ell = \alpha$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences expérimentales***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1/ a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCI.

2/ On désigne par P le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+y+2z-4=0$.

3/ Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre I est de rayon $\sqrt{11}$.

b) Montrer que $P\cap(S)$ est un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $\sqrt{5}$.

c) Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$.

En déduire les coordonnées du point H, centre de $(\mathcal{C})$.

4/ Soit a un réel et M le point défini par $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer à l'aide du réel a, les coordonnées du point M.

b) Montrer que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=(a-1)(11a+3)$.

c) En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ au point E défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$.

d) Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre AECI est égal à $\frac{3}{11}\mathcal{V}$.

Exercice 2 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, (C) et (C') sont deux cercles de même centre O et de rayons respectifs $\sqrt{3}$ et 3.

I) 1/On considère le point P d'affixe $p=\sqrt{2}+i$.

a) Vérifier que le point P appartient à (C).

b) Construire le point P.

c) On désigne par α un argument du nombre p. Donner l'écriture exponentielle de p.

2/Soit Q le point du cercle (C') tel que $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\right)\equiv\alpha[2\pi]$. On note q l'affixe du point Q .

a) Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OQ}\right)$.

b) Ecrire le nombre complexe q sous forme exponentielle.

c) En déduire que $p^2=q$ puis que $q=1+2\sqrt{2}\,i$.

II) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations

$(E): 16z^2-8z+9=0$ et $(E'): 16z^4-8z^2+9=0$.

1/ a) Montrer que les solutions de l'équation (E) sont les nombres $\frac{q}{4}$ et $\frac{\bar{q}}{4}$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E').

2/ a) Construire dans l'annexe les points images des solutions de l'équation (E').

b) Montrer que ces points sont les sommets d'un rectangle.

Exercice 3 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2-xe^x$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement.

2/ a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x+1)(2-e^x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative (Γ) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$ et la droite Δ d'équation $y=x+1$.

a) Montrer que la droite Δ est une tangente commune à (C_f) et (Γ) au point d'abscisse 0.

b) Justifier que pour tout réel x, $e^x-(x+1)\geq 0$.

4/ a) Vérifier que pour tout réel x, $e^x-f(x)=(x+1)(e^x-x-1)$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $(x+1)-f(x)=x(e^x-x-1)$.

c) Etudier la position relative de (C_f) et (Γ), puis de (C_f) et Δ.

5/ Tracer dans l'annexe, la courbe (C_f).

6/ On désigne par A l'aire en (u .a) de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

Montrer que $A=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$.

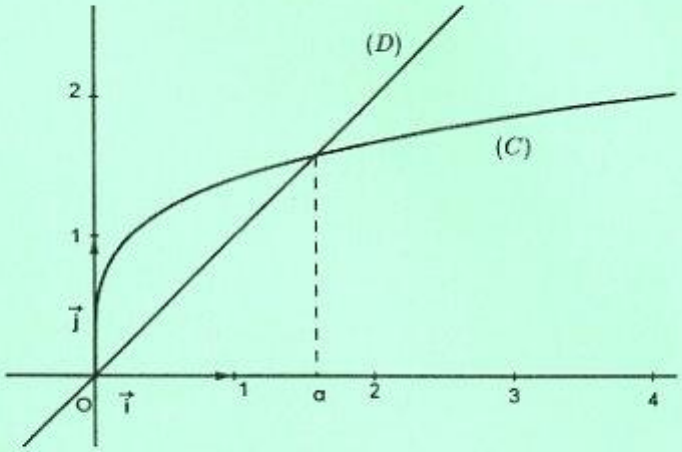
Exercice 4 (4 points)

Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

(C) est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$g(x)=\sqrt[4]{4x}$,

la droite (D) d'équation $y=x$ coupe la courbe (C) au point O et en un autre point d'abscisse α.



1/ Vérifier que $\alpha=\sqrt[3]{4}$.

2/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on désigne par (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=4, \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a) Classer dans l'ordre croissant les réels u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$, Montrer que, si $u_{n+1}\leq u_n$ alors $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

d) Montrer que la suite (u_n) n'est pas monotone.

3/ Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)=f(f(x))$.

4/ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_{2n+1}$ et $w_n=u_{2n}$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=g(v_n)$ et $w_{n+1}=g(w_n)$.

b) En utilisant la monotonie de la fonction g, montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\leq v_{n+1}\leq\alpha\leq w_n\leq w_{n+1}$.

c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve : **Mathématiques** -Section : **Sciences expérimentales** -Session de **contrôle - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

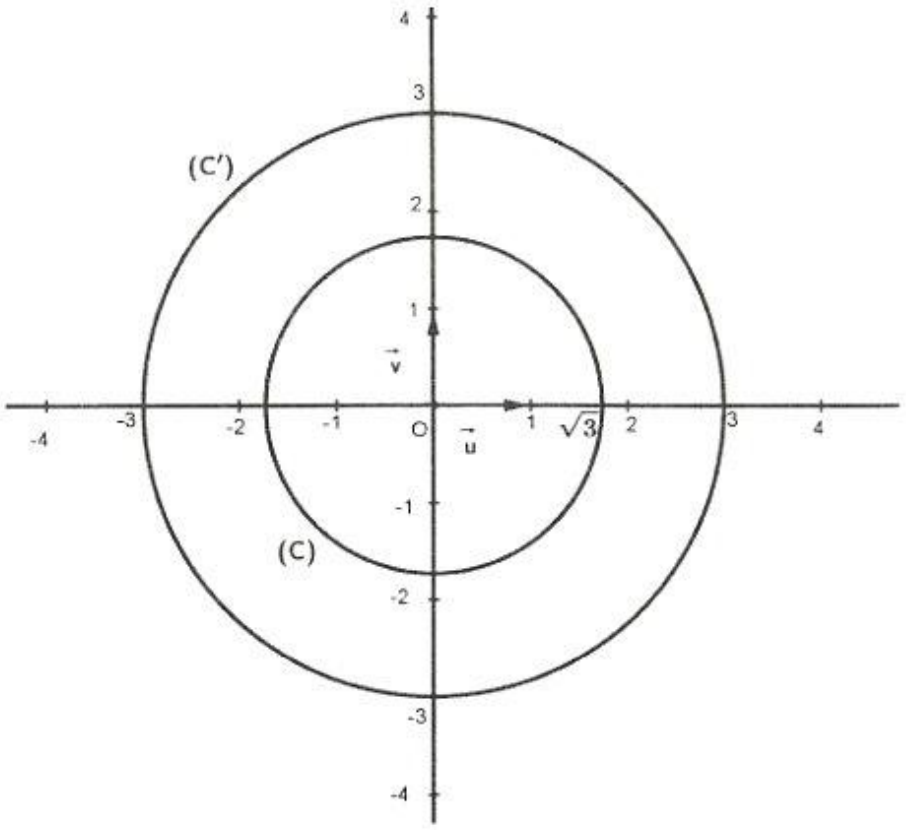


Figure 1

Ne rien écrire ici

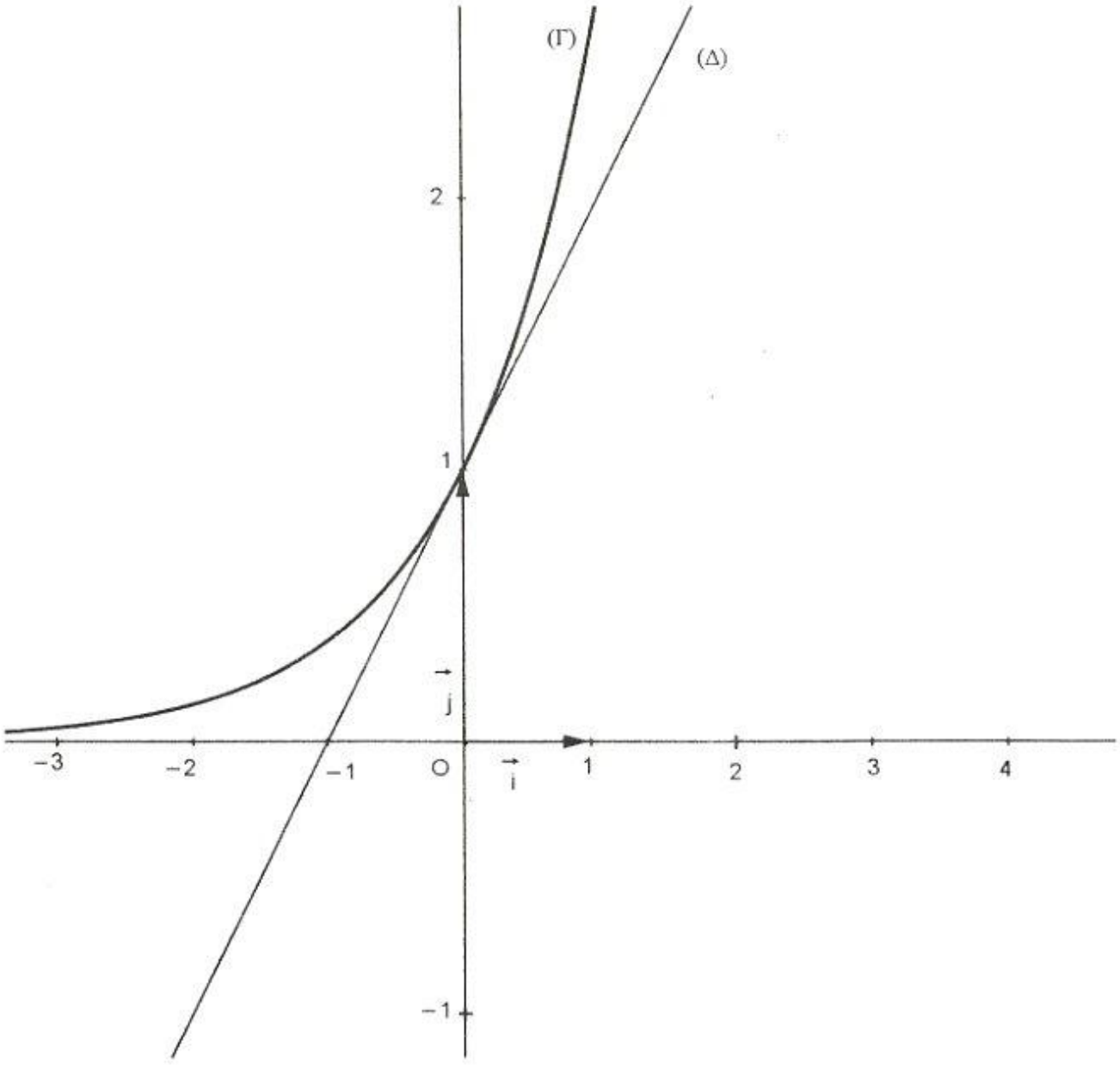


Figure 2

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences expérimentales)

Session principale 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan , plan tangent à une sphère**
- **Volume d'un tétraèdre**

1. $A(x;y;z)\in Q\cap\left(O,\vec{i}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;0;0)$

$B(x;y;z)\in Q\cap\left(O,\vec{j}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;2;0)$

$C(x;y;z)\in Q\cap\left(O,\vec{k}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(0;0;\sqrt{2}\right)$

2. Puisque $S: x^2+y^2+z^2=1$ donc S est la sphère de centre O et de rayon 1

On a $d(\mathrm{O},Q)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1+2}}=1$ donc Q est tangent à la sphère S

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

$M(x;y;z)\in Q\cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+\alpha \\ y=0+\alpha \\ z=0+\sqrt{2}\alpha \\ x+y+\sqrt{2}z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\sqrt{2}\alpha \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Conclusion : $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. On a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}a\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{4}{a}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}=\begin{vmatrix}0 & \frac{4}{a}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{4}{a}\end{vmatrix}\vec{k}=\frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{i}+\sqrt{2}a\vec{j}+4\vec{k}$

ainsi $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$

4. **a.** Puisque $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CMN) donc une

équation du plan (CMN) est $\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z+d=0$ et puisque

$C(0;0;\sqrt{2})\in(CMN)$ donc $d=-4\sqrt{2}$ ainsi $(CMN):\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z-4\sqrt{2}=0$

équivaut à $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

b. on a $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

donc $d=d(O,(CMN))=\frac{|-4a|}{\sqrt{16+a^4+8a^2}}=\frac{4a}{\sqrt{(4+a^2)}}=\frac{4a}{4+a^2}$

et puisque $1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=\frac{a^2+4-a^2+4a-4}{a^2+4}=\frac{4a}{4+a^2}$ donc $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$

c. On a $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$ est maximale lorsque $\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=0$ donc $a=2$

5. **a.** on a $V(OCMN)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}).\overrightarrow{CO}\right|=\frac{1}{6}\left|4\sqrt{2}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

autrement : $V(OCMN)=\frac{A(OMN)\times OC}{3}=\frac{a\times\frac{4}{a}\times\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. On a $V(OCMN)=\frac{A(CMN)\times d}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}$

puisque $d\leq 1$ donc $\frac{1}{d}\geq 1$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}\geq 2\sqrt{2}$

c. on a $A(CMN)=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{2}}{d}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow d=1\Leftrightarrow a=2$ donc $M=A$ et $N=B$

Exercice n°2 :

De quoi s'agit-il ?

- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité total**
- **Variable aléatoire et espérance**
- **Loi Binomiale**

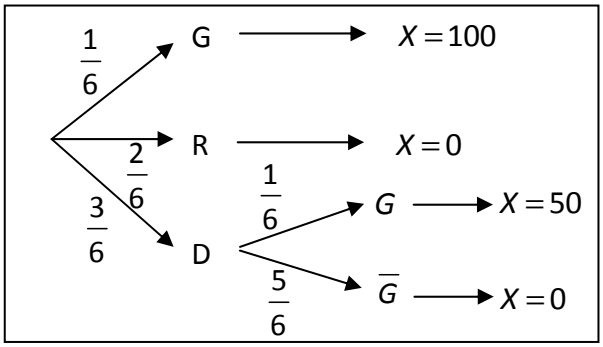
1.

a. On a $p(G_1)=\frac{1}{6}$

b. On a $p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

c. On a $p(G_1\cup G_2)=p(G_1)+p(G_2)-p(G_1\cap G_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-0=\frac{1}{4}$

2.



a. On a $X(E)=\{0;50;100\}$

$p(X=0)=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}$

Autrement : $p(X=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$p(X=50)=p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$p(X=100)=p(G_1)=\frac{1}{6}$

b. Le montant moyen à recevoir par un client est

$E(X)=0+50\times\frac{1}{12}+100\times\frac{1}{6}=\frac{125}{6}=20,833DT$

3. Y suit une loi binomiale de paramètre $n=200$ et $p=0,25$ alors $E(Y)=200\times0,25=50$

4. Le montant moyen qu'il doit prévoir de dépenser est $200\times E(X)=200\times\frac{250}{12}=4166,7$

Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

1. On a $(E): z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$

   Puisque $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1$ donc

   $z' = \dfrac{i\sqrt{3}-1}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z'' = \dfrac{i\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.

   a. On a $P\left(i\sqrt{3}\right) = 3\left(i\sqrt{3}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right)^3 - 18\left(i\sqrt{3}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right) + 3$

   $= 27 - 7i\sqrt{3}\left(-i3\sqrt{3}\right) + 18\times 3 - 21 + 3 = 27 - 63 + 54 - 21 + 3 = 0$

   On a $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 - 18\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 3$

   $= 3e^{i\frac{4\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18e^{i\frac{2\pi}{3}} + 7i\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 3$

   $= -3e^{i\frac{\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{7i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{21}{2} + 3$

   $= -3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 7i\sqrt{3} + 9 - 9i\sqrt{3} + \dfrac{7i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{21}{2} + 3$

   $= -12 + 12 + i\sqrt{3}\left(-\dfrac{3}{2} - 2 + \dfrac{7}{2}\right) = 0$

   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

   $P\left(\dfrac{-1}{z}\right) = \dfrac{3}{z^4} + \dfrac{7i\sqrt{3}}{z^3} - \dfrac{18}{z^2} - \dfrac{7i\sqrt{3}}{z} + 3 = \dfrac{3 + 7i\sqrt{3}z - 18z^2 - 7i\sqrt{3}z^3 + 3z^4}{z^4} = \dfrac{P(z)}{z^4}$

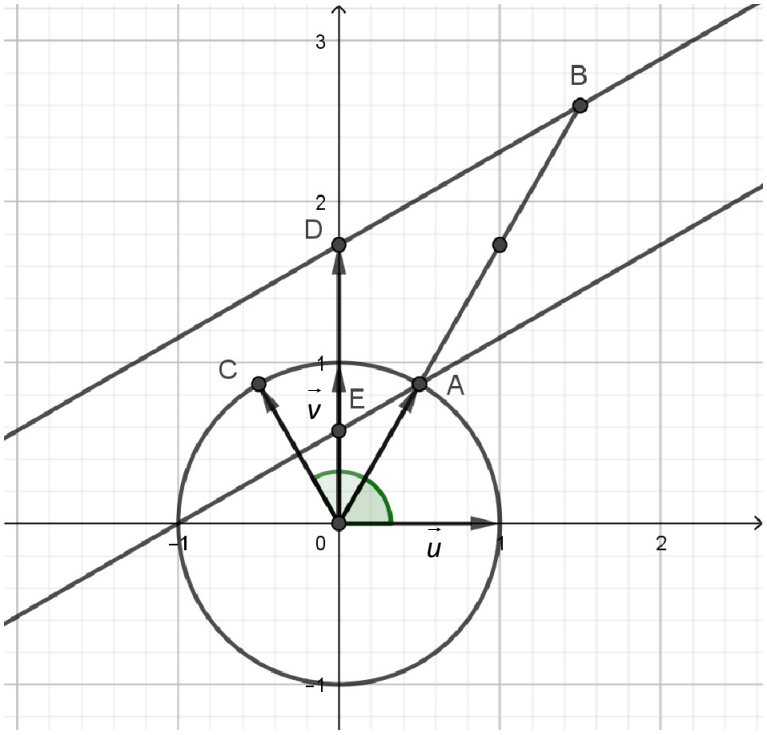
   c. On a $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\dfrac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\sqrt{3}i\right) = 0$

   $P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-\dfrac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$

   d'où $\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$

3.

a.



b. On a $z_D = z_A + z_c = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

c. On a $aff\left(\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $aff\left(\overrightarrow{EA}\right) = z_A - z_E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - iy = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)$

$(AE)//(BD)$ donc $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - y \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

équivaut à $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $z_E = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

Autrement : dans le triangle OBD on a $(EA)//(BD)$ d'après Thales puisque

$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ ainsi $z_E = \frac{1}{3}z_D = \frac{i\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique pour déterminer les images et les limites d'une fonction ainsi que le signe de sa fonction dérivée**
- **Fonction en exponentielle et ln (limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires et encadrement**
- **Fonctions primitives**

A. **1.** On a $u(1)=0$, $u(\alpha)=0$, $u'(4)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u(x)}{x}=1$

2.

x	0		1		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		4		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

B.

1. **a.** Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$,

$$e^{u(x)}-u(x)=e^{x-1-4\ln x}-(x-1-4\ln x)=\frac{e^{x-1}}{e^{4\ln x}}-(x-1)+4\ln x=\frac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4\ln x=f(x)$$

b. On a $f(\alpha)=e^{u(\alpha)}-u(\alpha)=e^0-0=1$

c. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^5}\right)e^{-1}-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+4\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$

autrement : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{u(x)}\times\dfrac{u(x)}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)+\infty$

e. La droite $\Delta: x=0$ est une asymptote à (C)

(C) admet une branche parabolique de direction $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$

2.

a. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=e^{u(x)}-u(x)$

$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}-u'(x)=u'(x)\left[e^{u(x)}-1\right]$

b. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=u'(x)\left(e^{u(x)}-1\right)$

On a $e^{u(x)}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{u(x)}\geq 1 \Leftrightarrow u(x)\geq 0$ d'où

x	0		1		4		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	
$e^{u(x)}-1$	‖	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in\left]1;4\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$

c. Le tableau de variation de f :

x	0		1		4		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$f(4)$	↘	1	↗	$+\infty$

3.

a. Soit $h(x)=e^x-2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x)=e^x-2$

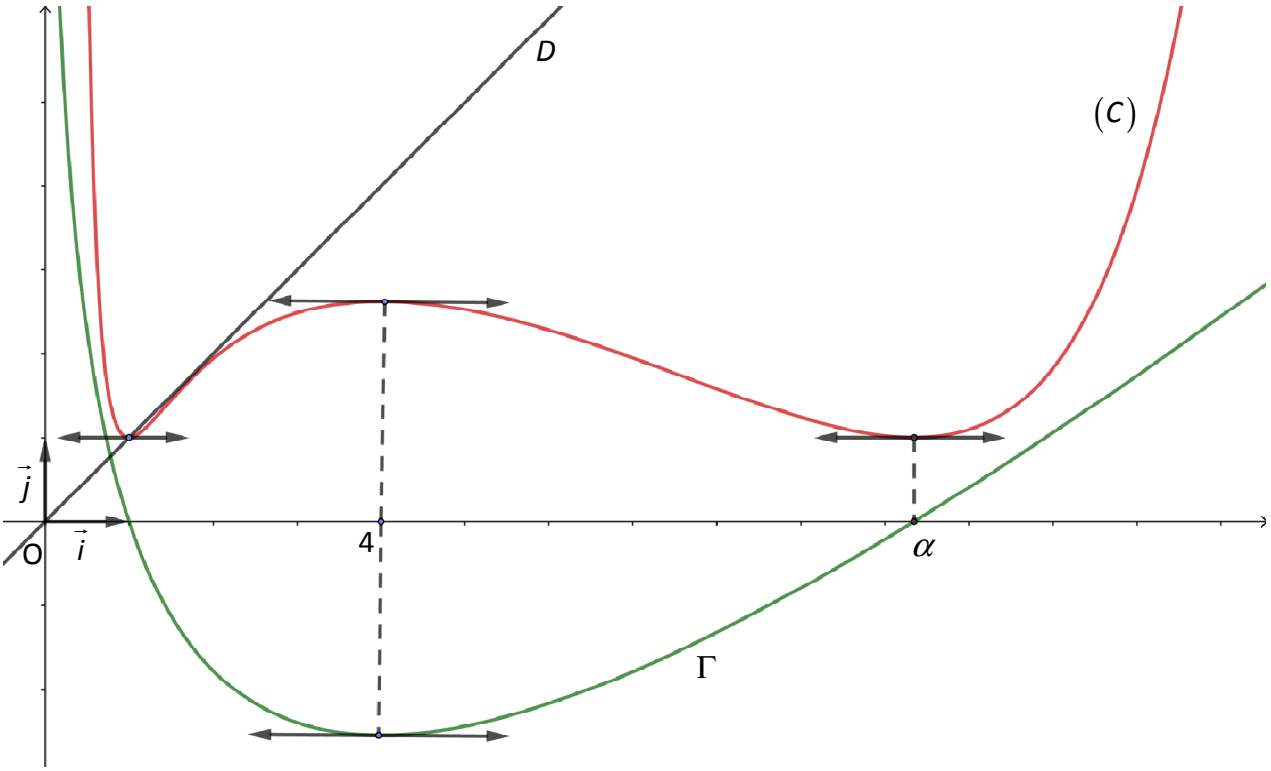
On a $h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$ d'où

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(\ln 2)$	↗	$+\infty$

On a $h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$ donc $h(x)>0$ pour tout réel x

b. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ on a $f(x)-u(x)=e^{u(x)}-2u(x)>0$ d'où (C) est au dessus de (Γ)

c.



4. **a.** On a

$$A' = \int_3^5 |u(x)|dx = \int_3^5 -u(x)dx = \int_3^5 (-x+1+4\ln x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + 4x\ln x - 4x\right]_3^5$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\ln x - 3x\right]_3^5 = \left(-\frac{25}{2} + 20\ln 5 - 15\right) - \left(-\frac{9}{2} + 12\ln 3 - 9\right) = 20\ln 5 - 12\ln - 14$$

b. On a pour tout $x \in [3;5]$, $-u(x) < f(x) < f(4)$

d'où $\int_3^5 -u(x)dx < \int_3^5 f(x)dx < \int_3^5 f(4)dx$ donc $A' < A < 2f(4)$

or on a $A' \simeq 5,00541 > 5$ et $2f(4) \simeq 5,24 < 5,25$ d'où $5 < A < 5,25$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences expérimentales***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1/ Soit le plan Q d'équation $x+y+\sqrt{2}\,z-2=0$.

Montrer que le plan Q coupe les axes $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{k})$ respectivement aux points $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,\sqrt{2})$.

2/ Soit la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont tangents et déterminer leur point de contact.

3/ Soit a un réel strictement positif. On considère les points $M(a,0,0)$ et $N\left(0,\frac{4}{a},0\right)$.

Déterminer en fonction du réel a, les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}$.

4/ a) Montrer qu'une équation du plan (CMN) est $4x+a^2y+2a\sqrt{2}\,z-4a=0$.

b) Soit d la distance du point O au plan (CMN). Montrer que $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$.

c) En déduire la valeur du réel a pour laquelle la distance d est maximale.

5/ a) Montrer que pour tout réel $a>0$, le volume du tétraèdre OCMN est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) En déduire que pour tout réel $a>0$, l'aire du triangle CMN est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$.

c) Identifier les points M et N pour lesquels l'aire du triangle CMN est égale à $2\sqrt{2}$.

Exercice 2 (3 points)

Dans un magasin, un jeu de hasard a été organisé comme suit : le client lance un dé cubique équilibré dont une face porte la lettre G, deux faces portent la lettre R et trois faces portent la lettre D.

- Si la face supérieure du dé porte G, le client reçoit un montant de 100 DT et le jeu s'arrête.
- Si la face supérieure du dé porte R, le client ne reçoit rien et le jeu s'arrête.
- Si la face supérieure du dé porte D, le client effectue un deuxième lancer : si la face supérieure du dé au deuxième lancer porte G, le client reçoit un montant de 50 DT et si la face supérieure du dé au deuxième lancer porte l'une des lettres R ou D, le client ne reçoit rien et le jeu s'arrête.

On considère les événements suivants :

G_1 :« Le client reçoit un montant de 100 DT » et G_2 :« Le client reçoit un montant de 50 DT ».

1/ a) Déterminer $p(G_1)$, la probabilité de l'événement G_1.

b) Montrer que $p(G_2)=\frac{1}{12}$.

c) En déduire que la probabilité qu'un client reçoit un montant non nul est égale à $\frac{1}{4}$.

2/ On désigne par X la variable aléatoire qui associe le montant reçu par un client lors de sa participation à ce jeu. (X prend la valeur 0 lorsque le client ne reçoit rien).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X), le montant moyen à recevoir par un client.

3/ On suppose que 200 clients ont participé à ce jeu. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant reçu un montant non nul et E(Y) le nombre moyen de clients gagnants.

Déterminer, en justifiant, E(Y).

4/ Le gérant de ce magasin a prévu 1200 DT comme montant global à distribuer.

Le gérant a-t-il bien estimé ce montant ?

Exercice 3 (5 points)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-i\sqrt{3}\,z-1=0$.

(On donnera les solutions sous forme exponentielle).

2/ Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $P(z)=3z^4-7i\sqrt{3}\,z^3-18\,z^2+7i\sqrt{3}\,z+3$.

a) Vérifier que $P(i\sqrt{3})=0$ et que $P(e^{i\frac{\pi}{3}})=0$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $P\left(\frac{-1}{z}\right)=\frac{1}{z^4}\cdot P(z)$.

c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ sont deux solutions de l'équation $P(z)=0$.

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$.

a) Construire les points A ,B et C.

b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous la forme cartésienne.

c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E.

Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 4 (7 points)

Dans **la figure** de l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

(Γ) est la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x-1-4\ln x$,

l'axe des ordonnées est une asymptote à (Γ),

la droite $D: y = x$ est une direction asymptotique à (Γ) au voisinage de $+\infty$,

la courbe (Γ) admet une unique tangente horizontale au point d'abscisse 4,

la courbe (Γ) coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en deux points d'abscisses respectives 1 et α.

A/ Déterminer graphiquement

1/ $u(1)$, $u(\alpha)$, $u'(4)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{x}$.

2/ Les signes respectifs de $u(x)$ et $u'(x)$.

B/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x) = e^{u(x)} - u(x)$.

b) Calculer $f(\alpha)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

e) Donner les branches infinies de la courbe (C).

2/ a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = u'(x).\left(e^{u(x)} - 1\right)$.

b) Justifier que $f'(x) > 0$, si et seulement si, $x\in]1,4[\cup]\alpha,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que pour tout réel x, $e^x - 2x > 0$.

b) Déduire la position relative de (C) et (Γ).

c) Tracer dans l'annexe la courbe (C).

4/ On désigne par

A : l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = 0$,

A' : l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = 0$.

a) Montrer que $A' = 20\ln 5 - 12\ln 3 - 14$.

b) Montrer que $A' < A < 2f(4)$. En déduire que $5 < A < 5{,}25$.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

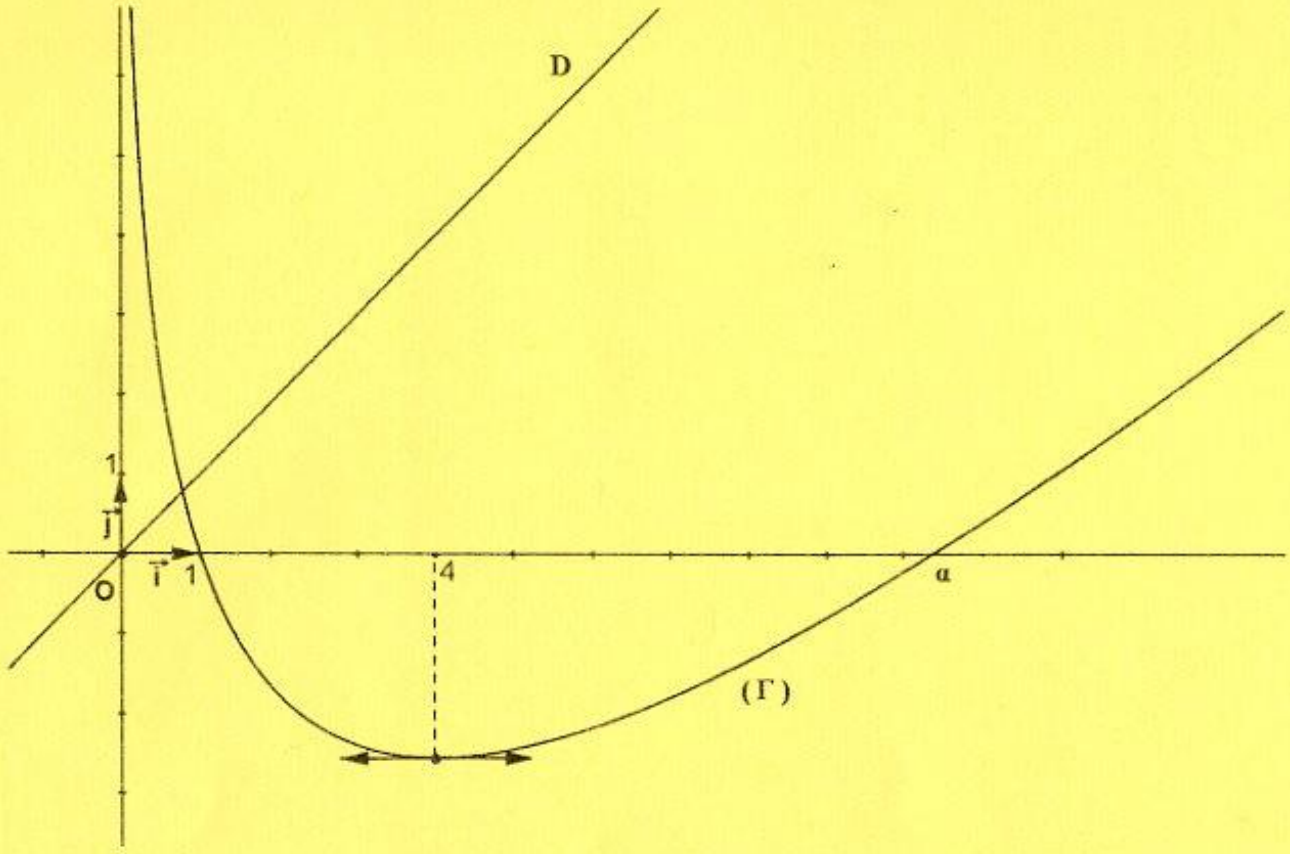
Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve: **Mathématiques** -Section: **Sciences expérimentales**-Session **principale (2018)**

Annexe à rendre avec la copie



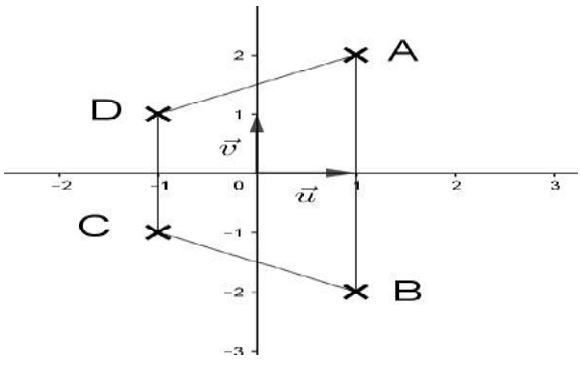
Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

Session contrôle

Exercice 1 ;(4 points)

Questions	solutions
1)	b/
2)	b/
3)	**c/**
4) **i/**	**a/**
ii/	**c/**

Exercice 2 (4 points)

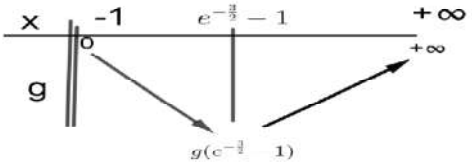
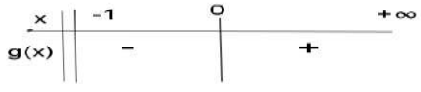
Questions	Solutions
1) a/	$(3+2i)^2 = 9+12i+(2i)^2 = 5+12i$
b/	$(E_1): z^2+iz+1+3i=0$ $\Delta = b^2-4ac = i^2-4(1+3i)$ $= -1-4-3i = -(5+12i) = [i(3+2i)]^2$ $z' = \frac{-i-i(3+2i)}{2} = -2i+1$ $z'' = \frac{-i+i(3+2i)}{2} = i-1$
c/	$(E_2): z^2-iz+1-3i=0$ $z^2-iz+1-3i=0 \Leftrightarrow \overline{z^2-iz+1-3i=0} \Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}+1+3i=0$ Alors si z est solution de (E_2) alors $\overline{z}$ est solution de (E_1) Donc les solutions de (E_2) sont $1+2i$ *et* -1-i
2)	On a $(z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i) = z^4+3z^2+6z+10$ d'où $z^4+3z^2+6z+10=0 \Leftrightarrow (z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i)=0$ $\Leftrightarrow z^2-iz+1-3i=0$ ou $z^2+iz+1+3i=0$ $\Leftrightarrow z=1+2i$ ou z = -1-i ou $z=1-2i$ ou $z=-1+i$
3) a/	
b/	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1-2i-1-2i = -4i$ $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -1-i+1-i = -2i$ Alors $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{DC}}} = 2 \in IR$ alors $(AB)\|(DC)$ ainsi ABCD est un trapèze
c/	$A = \frac{(AB+DC)\times h}{2} = 6$ u a

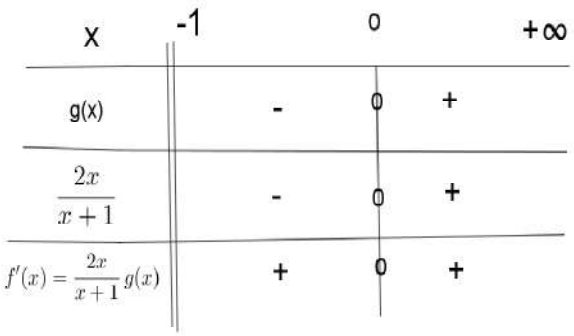
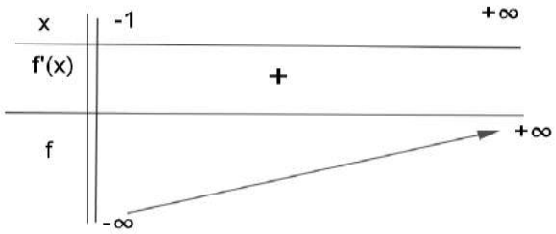
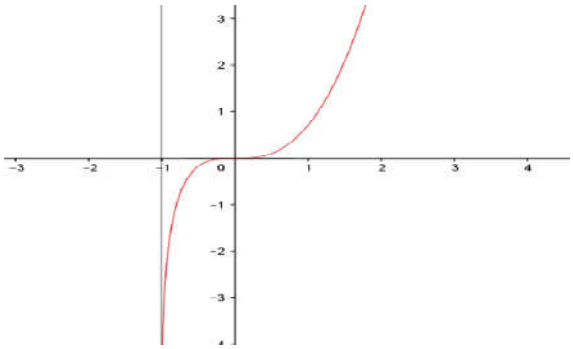
Exercice 3 (5 points)

Questions	Solution
1) a/	$M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$ $\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+4z)+5=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+2)^2-4+5=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=2^2$ Donc S est une sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon R = 2
b/	$d(\Omega,P)=\dfrac{\lvert 1+2-2+1\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}\prec R=2$ Donc $S\cap P$ est un cercle de centre $K(a,b,c)$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ $on\ a\begin{cases}\overrightarrow{\Omega K}=\alpha\overrightarrow{n_P}\\ K\in p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=\alpha\\ b+2=-2\alpha\\ c+2=2\alpha\\ a-2b+2c+1=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha+1\\ b=-2\alpha-2\\ c=2\alpha-2\\ \alpha+1-2(-2\alpha-2)+2(2\alpha-2)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{9}\\ b=-\dfrac{14}{9}\\ c=-\dfrac{22}{9}\\ \alpha=-\dfrac{2}{9}\end{cases}$ Alors $K(\frac{7}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9})$
2)	$(K\Omega)$ est une droite qui passe par $\Omega(1,-2,-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ ($\overrightarrow{n_P}$ est un vecteur normal à P) $M(x,y,z)\in(K\Omega)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=t\ \overrightarrow{n_p},\ t\in IR\ \Leftrightarrow\begin{cases}x-1=t\\ y+2=-2t\\ z+2=t\end{cases}$ Donc $(K\Omega):\begin{cases}x=1+t\\ y=-2-2t\\ z=-2+2t\end{cases},\ t\in IR$
3) a/	Q est le plan tangent à S au point $I(\alpha,\beta,\gamma)$ donc $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+2\\ \gamma+2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q donc $Q:(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z+d=0$ or $I(\alpha,\beta,\gamma)\in Q$ donc $(\alpha-1)\alpha+(\beta+2)\beta+(\gamma+2)\gamma+d=0$ $\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$ Et le faite que le point $I\in S$ alors

	$\alpha^2-2\alpha+\beta^2+4\beta+\gamma^2+4\gamma+5=0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\alpha-4\beta-4\gamma-5$ donc on aura : $\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$ $\Leftrightarrow d=-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$ $\Leftrightarrow d=-\left(2\alpha-4\beta-4\gamma-5\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$ $\Leftrightarrow d=-\alpha+2\beta+2\gamma+5$ Ainsi $Q:(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0$
b/	$N(-1,2,-6)$ On a $\begin{cases}-1=1+t\\2=-2-2t\\-6=-2+2t\end{cases}\Rightarrow t=-2$ ainsi $N(-1,2,-6)\in(K\Omega)$
c/	I est un point du cercle (C) donc KI=2. $\overrightarrow{I\Omega}\,.\,\overrightarrow{IN}=KI^2-KN.K\Omega=0$ d'où N est point de Q.

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$g(x)=(x+1)\ln(x+1)+\frac{x}{2}$ et $x\in]-1,+\infty[$ On a $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\ln(x+1)=0$
b/	Pour tout $x\in]-1,+\infty[$ on a $g'(x)=\ln(x+1)+1+\frac{1}{2}=\ln(x+1)+\frac{3}{2}$
c/	$g'(x)=0\Leftrightarrow\ln(x+1)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}-1$  $g(e^{-\frac{3}{2}}-1)=-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{3}{2}}\right)\prec0$
d/	$g(0)=0$ 
2) a/	Soit $f(x)=x^2\ln(x+1)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x+1)=+\infty$ La représentation graphique de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
b/	$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x^2\ln(x+1)=-\infty$ En effet ;

	$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\ln(x+1)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^+}x^2=1$ La droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale de la représentation graphique de f
c/	pour tout $x\in]-1,+\infty[$ on a $f'(x)=2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{2x}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1)+\dfrac{x}{2}\right)$ $=\dfrac{2x}{x+1}g(x)$
d/	Déterminons le signe de $f'(x)$  Soit alors le tableau de variation de f 
e/	
3) a /	Pour tout $n\geq 1$ on pose $I_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$ Pour tout $x\neq -1$ on a $x-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{x^2-1+1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$
b /	$I_1=\int_0^1 x\ln(x+1)dx$ On intègre par partie $u(x)=\ln(x+1)$ $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $v'(x)=x$ $v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$$

Donc

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \frac{1}{4}$$

4) a/ On pose $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

h est une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$h'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{(x+1)} - 1 = \ln(x+1)$ ainsi h est une primitive de la fonction $x \to \ln(x+1)$ sur $]-1,+\infty[$

b/ On va utiliser une intégration par partie

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx$ on pose

$u(x) = x^{n+1}$ $\quad$ u'(x) $= (n+1)x^n$

$v'(x) = \ln(x+1)$ $\quad$ v(x) $= h(x)$

$$I_{n+1} = \left[x^{n+1}h(x)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n h(x)dx = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\int_0^1 x^n\left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]dx$$

Donc $= 2\ln 2 - 1 - (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - (n+1)\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx + (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx$

$$= 2\ln 2 - 1 - (n+1)I_{n+1} - (n+1)I_n + \frac{n+1}{n+2}$$

Ainsi on déduit que

$$(n+2)I_{n+1} = -1 + 2\ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1)I_n$$

c/ Pour $n = 1$ on trouve $3I_2 = -1 + 2\ln 2 + \frac{2}{3} - 2I_1$ alors on déduit que

$$I_2 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6} = -\frac{5}{18} + \frac{2}{3}\ln 2$$

I_2 est l'aire de la partie du plan illimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respectuves x = 0 et x = 1

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Une primitive de la fonction f définie sur $]-\infty,0[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ est :

a) $F(x)=x+\ln(x)-1$ b) $F(x)=x+1+\ln(-x)$ c) $F(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

2) Soit f une fonction strictement positive, paire et continue sur $[-1,1]$.

Soit $I=\int_0^1 f(x)dx$, alors

a) $\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx=I^2$ b) $\int_0^{-1} f(x)dx=-I$ c) $\int_0^{-1} f(x)dx=I$

3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_0=2$ et $U_{n+1}=2U_n^2$. Alors

a) (U_n) est géométrique b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\dfrac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

4) Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un sondage effectué dans une population de 100 individus.

	Fumeurs	Non fumeurs
Hommes	15	35
Femmes	10	40

i) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit un non fumeur sachant que c'est un homme est :

a) 0,7 b) 0,35 c) 0,66

ii) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit une femme non fumeur est :

a) 0,2 b) 0,8 c) 0,4

Exercice 2 (4 points)

1) a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2+iz+1+3i=0$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E_2) : $z^2-iz+1-3i=0$.

2) Déduire alors l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$(E): z^4+3z^2+6z+10=0$.

3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1+2i ,1-2i , -1-i et -1+i .

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Montrer que ABCD est un trapèze.

c) Calculer l'aire de ce trapèze.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$.

On désigne par P le plan d'équation $x-2y+2z+1=0$.

1) a) Montrer que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon R = 2.

b) Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et P est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $K\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9}\right)$ et dont on déterminera le rayon r.

2) Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite $(K\Omega)$ est

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=-2+2t \end{cases} ; \ t\in\mathbb{R} \ .$$

3) Soit $I(\alpha,\beta,\gamma)$ un point de la sphère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ le plan tangent en I à $\mathcal{S}$.

a) Montrer qu'une équation du plan $\mathcal{Q}$ est

$$(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0 \ .$$

b) Vérifier que $N(-1,2,-6)$ est un point de $(K\Omega)$.

c) Montrer alors que tous les plans $\mathcal{Q}$ tangents à $\mathcal{S}$ en un point de $\mathcal{C}$ passent par N.

Exercice 4 (7 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)\ln(x+1)+\frac{x}{2}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1)=0$.

b) Vérifier que pour tout $x>-1$, $g'(x)=\ln(x+1)+\frac{3}{2}$.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln(x+1)$.

On désigne par (**C**) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer la limite de f à droite en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $f'(x)=\frac{2x}{x+1}g(x)$, pour tout $x>-1$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Construire la courbe (**C**). (On précisera la tangente au point O).

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier $n\geq 1$, $I_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

3) a) Vérifier que $\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$, pour tout $x\neq -1$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_1=\frac{1}{4}$.

4) a) Vérifier que la fonction $x\mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto \ln(x+1)$.

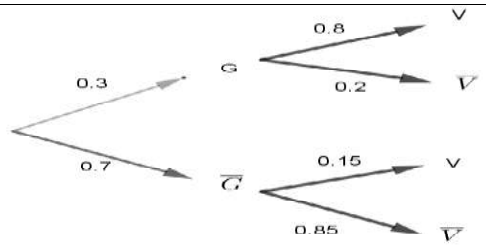
b) Montrer que $(n+2)I_{n+1}=-1+2\ln 2+\frac{n+1}{n+2}-(n+1)I_n$.

c) Préciser la valeur de I_2 et interpréter graphiquement cette valeur.

Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

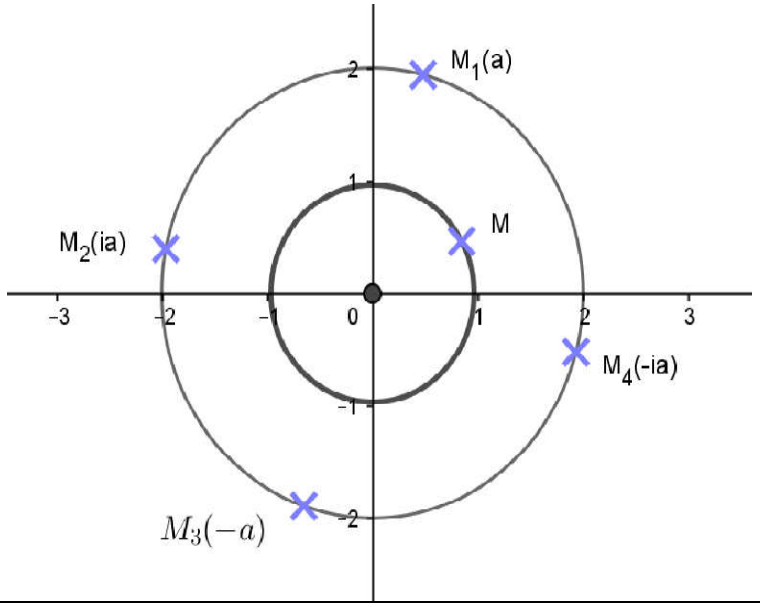
Session principale

Exercice 1 (4 points)

Questions	Solution
1)	
2)	$p(V) = p(V/G)p(G) + p(V/\overline{G})p(\overline{G})$ $= 0.3\times 0.8 + 0.7\times 0.15 = 0.345$
3)	$p(\overline{G}/V) = \dfrac{p(\overline{G}\cap V)}{p(V)} = \dfrac{0.15\times 0.7}{0.345} = 0.304$
4)	$p = C_{10}^{2}\times(0.8)^{2}\times(0.2)^{8} = 0.0000737$
5) a/	La probabilité demandée est $(0.2)^{n}$
b/	$p_n = 1-(0.2)^{n}$
c/	$p_n \geq 0.9 \Leftrightarrow 1-(0.2)^{n} \geq 0.9 \Leftrightarrow (0.2)^{n} \leq 0.1$ $\Leftrightarrow n\ln(0.2) \leq \ln(0.1)$ $\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)} \Leftrightarrow n \geq 1.43$ alors le plus petit valeur est $n = 2$

Exercice 2(4 points)

Questions	solutions
1) a/	$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ on a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$
b/	on a : $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\right)$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)+i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ et d'autre part on a $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+2i\,\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et par conséquent

	on aura $\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases}$ Or on sait que $\frac{11\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{cases}$
2) a/	on a $a=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ donc $a^4=\left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4=16e^{i\frac{5\pi}{3}}=16\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$.
b/	b/ $z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow z^4=a^4\Leftrightarrow z^4-a^4=0\Leftrightarrow\left(z^2-a^2\right)\left(z^2+a^2\right)=0\Leftrightarrow$ $(z-a)(z+a)(z+ia)(z-ia)=0\Leftrightarrow z=a$, $z=-a$, $z=ia$ et $z=-ia$
c/	

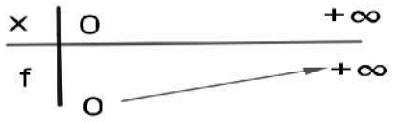
Exercice 3 (5 points)

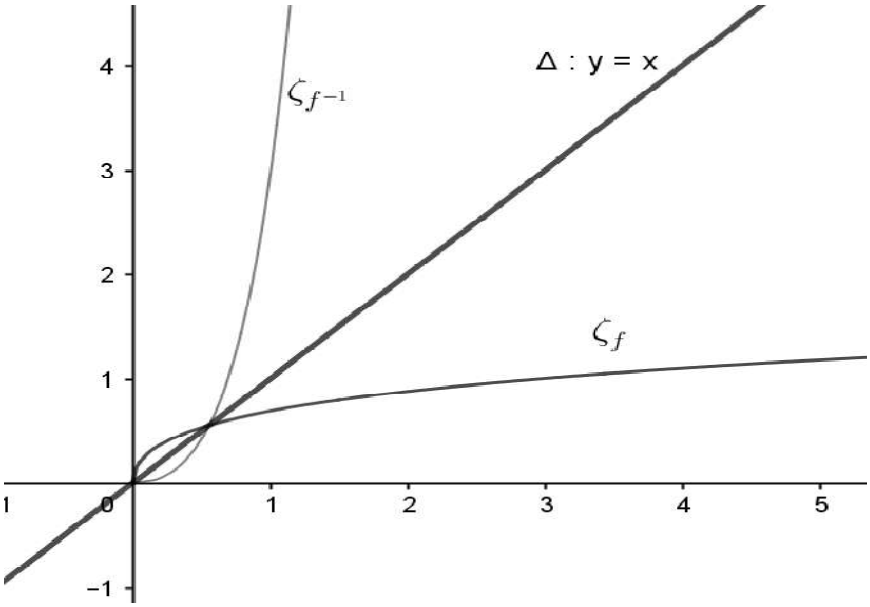
Questions	**Solution**
1) a/	on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et alors les points A , B et C définissent un plan P.
b/	$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc P a pour équation : $-6x-6y+6z+d=0$ et comme $A(-2,1,1)\in P$ donc $12-6+6+d=0$ donc $d=-12$ et alors $P:-6x-6y+6z-12=0$ alors P: $x+y-z+2=0$

2) a/	on a $2+2-0+2=6\neq 0$ donc $E\notin P$
b/	$V_{EABC}=\frac{1}{6}\left\lvert\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right\rvert=\frac{1}{6}\left\lvert\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rvert=6$
3)	$\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ qui est un vecteur normal de P donc $\Delta\perp P$ $M\left(x\quad y\quad z\right)\in P\bigcap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\alpha+\alpha-\left(-\alpha+2\right)+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\x=0\\y=0\\z=2\end{cases}$ Donc $P\cap\Delta=\left\{H\left(0,0,2\right)\right\}$
4) a/	$\alpha\neq 0$ et $M\left(\alpha,\alpha,-\alpha+2\right)\in\Delta$ $V_{MABC}=\frac{1}{6}\left\lvert\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right\rvert=\frac{1}{6}\left\lvert\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha+2\\\alpha-1\\-\alpha+1\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert 3\alpha\right\rvert$
b/	$V_{MABC}=2\,V_{EABC}\Leftrightarrow\left\lvert 3\alpha\right\rvert=12\Leftrightarrow\alpha=4$ ou $\alpha=-4$ donc $M\left(4,4,-2\right)$ ou $\mathrm{M}\left(-4,-4,6\right)$

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$f\left(x\right)=\ln(1+\sqrt{x}\,)$ On a la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positif sur $\left[0,+\infty\right[$ alors la fonction f est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et on a pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$
b/	$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\left(+\infty\right)\times 1=+\infty$ En effet $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

	$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=1$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif
c/	$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{x}.\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}=0\times 0=0$ En effet : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)}=0$ Donc la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.
d/	
e/	f est continu et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$.
f/	soit $x\in[0,+\infty[$ et $y\in[0,+\infty[$ tel que $f^{-1}(x)=y$ $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\ln(1+\sqrt{y})=x\Leftrightarrow 1+\sqrt{y}=e^x$ $\Leftrightarrow\sqrt{y}=e^x-1\Leftrightarrow y=\left(e^x-1\right)^2$ donc pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x)=\left(e^x-1\right)^2$
2) a/	$I=\left[\frac{1}{4},1\right]$ On a $\frac{1}{4}\le x\le 1$ donc $\frac{1}{2}\le\sqrt{x}\le 1$ donc $\frac{3}{4}\le x+\sqrt{x}\le 2$ donc $\frac{1}{2}\le\frac{1}{x+\sqrt{x}}\le\frac{4}{3}$ d'ou $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{2}{3}$ soit donc pour tout $x\in I$, $f'(x)\le\frac{2}{3}$
b/	On pose $u(x)=f(x)-x$ u est dérivable sur I et on a pour tout $x\in I$ $u'(x)=f'(x)-1\prec 0$ alors la fonction u est strictement décroissante sur I. u est continu et strictement décroissante sur I alors elle réalise une bijection de I sur $u(I)=\left[\ln 2-1,\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right]=J$ et comme $0\in J$ alors l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans I. De plus $u(0.5)\times u(0.6)\prec 0$ donc $0.5\prec\alpha\prec 0.6$

3) a/	
b/	$A = 2\int_0^{\alpha}\left(x - f^{-1}(x)\right)dx = 2\int_0^{x} x - \left(e^x - 1\right)^2 dx = 2\int_0^{\alpha}(x - e^{2x} + 2e^x - 1)dx$ $= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - x\right]_0^{\alpha}$ $= \alpha^2 - e^{2\alpha} + 4e^{\alpha} - 2\alpha - 3$
4) a/	on a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ donc vrais pour n= 0 Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ On a $\frac{1}{4} \le u_n \le 1$ et f est une fonction strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ alors $f(\frac{1}{4}) \le f(u_n) \le f(1)$ donc $\frac{1}{4} \le \ln(\frac{3}{2}) \le u_{n+1} \le \ln 2 \le 1$ alors $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ par suite pour tout $n \in IN$ $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$.
b/	f est dérivable sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{4},1\right]$, $f'(x) \le \frac{2}{3}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le faite que $u_n, \alpha \in I$ donc $\left\|f(u_n) - f(\alpha)\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n - \alpha\right\| \Leftrightarrow \left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n - \alpha\right\|$ et on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in IN$ $\left\|u_n - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ On a $\left\|u_0 - \alpha\right\| = \left\|1 - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour n=0

	Soit $n \in IN$ supposons que $\left\|u_n - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $\left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ On sait que $\left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n - \alpha\right\|$ donc $\left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors $\left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ et par suite pour tout $n \in IN$ on a $\left\|u_n - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c/	c/ on a $\left\|u_n - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ donc la suite est convergente et converge vers α
d/	on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ et f^{-1} est continu en α donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

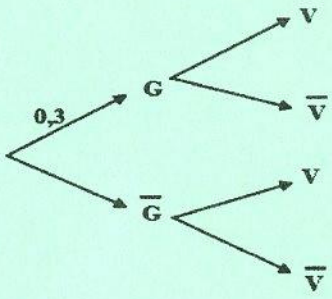
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à remettre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

Une étude statistique montre que dans une ville donnée, 15 % des individus âgés de moins de 60 ans et 80 % des individus âgés de plus de 60 ans ont été vaccinés contre la grippe.
Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30 % de la population de cette ville.
On choisit, au hasard, une personne de cette population et on considère les évènements suivants :

- G : " La personne est âgée de plus de 60 ans ".
- V : "La personne est vaccinée".



1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2) Montrer que la probabilité pour qu'une personne soit vaccinée est égale à 0,345.
3) La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans ?
4) On choisit au hasard 10 personnes âgées de plus de 60 ans. Calculer la probabilité pour que deux exactement d'entre elles soient vaccinées.
5) On choisit, au hasard, *n* personnes âgées de plus de 60 ans.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'aucune d'entre elles ne soit vaccinée ?
   b) Déterminer la probabilité p_n pour que l'une au moins d'entre elles soit vaccinée.
   c) Déterminer la plus petite valeur de *n* pour que $p_n \geq 0,9$.

Exercice 2 (4 points)

1) Soit le nombre complexe a défini par $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$.

a) Montrer que $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

b) Donner les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

2) a) Vérifier que $a^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.

c) Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, Γ est le cercle trigonométrique et H est le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Placer les images des solutions de l'équation (E).

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne

les points $A(-2,1,1)$, $B(-1,-1,0)$, $C(1,1,4)$, $H(0,0,2)$ et la droite Δ

dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 2 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P.

b) Montrer qu'une équation de P est $x + y - z + 2 = 0$.

2) Soit le point E (2, 2, 0).

a) Vérifier que E n'appartient pas à P.

b) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

3) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P en un point que l'on précisera.

4) Soit $\alpha \neq 0$ et M (α ; α ; $-\alpha+2$) un point de Δ.

a) Calculer en fonction de α le volume du tétraèdre MABC.

b) En déduire les coordonnées des points M pour lesquels le volume du tétraèdre MABC est égal au double du volume du tétraèdre EABC.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

f) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f^{-1}(x)=(e^x-1)^2$.

2) Soit l'intervalle $I=\left[\frac{1}{4},1\right]$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x)\leq\frac{2}{3}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans l'intervalle I une unique solution α vérifiant $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

3) Dans ***la figure 2*** de l'annexe jointe, on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le réel α et la droite Δ d'équation $y=x$.

a) Tracer dans ***la figure 2*** les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$, où $C_{f^{-1}}$ est la courbe représentative de la fonction f^{-1}. (On précisera les demi-tangentes en O).

b) Calculer, en fonction de α, l'aire de la partie du plan limitée par C_f , $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n). \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in\left[\frac{1}{4},1\right]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d) Soit la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par $v_n=f^{-1}(u_n)$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....

Epreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences expérimentales
(Session principale 2019)

Annexe (à rendre avec la copie)

Figure 1

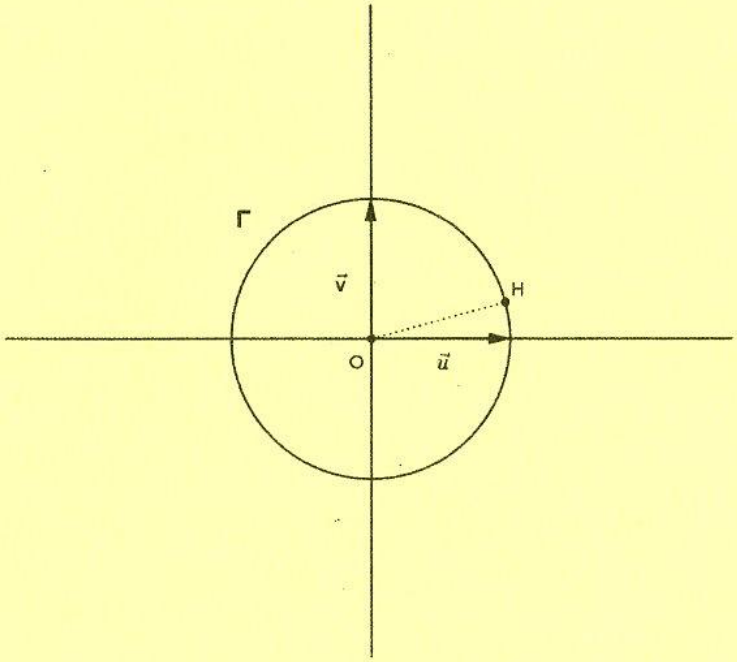


Figure 2

