

GRUPE SCOLAIRE LA CLAIRE FONTAINE SERIE : TSEXP	BACCALAUREAT BLANC EPREUVE DE MATHEMATIQUE	DUREE : 3 H COEF : 3	ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
--	---	---------------------------------	---------------------------------------

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. l'unité graphique est 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0$. (1pt)

2) On pose : $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i$.

a) Justifier que $-2i$ est une racine de $P(z)$. (0.25 pt)

b) Déterminer les complexes a et b tels que : $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$. (0.75 pt)

Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0.5 pt)

3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = -2i$; $Z_B = -2 + 2i$ et $Z_C = 1 + i$. On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. (0.75 pt)

b) Déterminer la nature du triangle ABC. (0.75 pt)

c) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques. (1 pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs de coton, un agent a visité huit (8) exploitations agricoles. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16 hectares (ha) de coton. Pour cela l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1) Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 1 ha). (1 pt)

Les résultats des questions suivantes seront arrondis à l'ordre 2.

2) Déterminer le point moyen G de ce nuage de points. (0.5 pt)

3) On note $V(X)$ la variance de X et $V(Y)$ la variance de Y et $COV(X, Y)$ la covariance de X et Y.

Justifier que $V(X) = 4,18$; $V(Y) = 8,44$. (1 pt)

Calculer $COV(X, Y)$. (0.5 pt)

4a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série. (0.25 pt)

b) Interpréter le résultat obtenu. (0.25 pt)

5)a) Justifier qu'une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés, est $y = 1,28x + 0,54$. (0.75 pt)

b) Tracer la droite (D) sur le graphique précédent. (0.25 pt)

6) Utilisez l'ajustement linéaire pour répondre à la préoccupation de l'exploitant. (On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat). (0.5 pt)

Problème

Partie A : Résolution d'équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$. (0.5 pt)

2) Soit a et b deux nombres réels et u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (ax + b)e^x$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1). (0.5 pt)

b) Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de l'équation (1). (0.5 pt)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1). (0.25 pt)

3) Déterminer la solution particulière de (1) qui s'annule en 0. (0.5 pt)

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (0.5 pt)

2) Étudier le sens de variation de g , puis dresser le tableau de variation de g . (1 pt)

3) On admet que l'équation $g'(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions. (0.25 pt)

b) L'autre solution est notée α . Montrer que $-1.6 \leq \alpha \leq -1.5$. (0.25 pt)

4) Déduire de tout ce qui précède le signe de g suivant les valeurs de x . (0.25 pt)

Partie C : Etude de la fonction principale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0.5 pt)

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = e^x g(x)$. En déduire le sens de variation de f . (0.75 pt)

3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. (0.5 pt)

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (0.25 pt)

4) Dresser le tableau de variation de f . (0.5 pt)

5) Tracer la courbe (C) représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm). (1.25 pt)

6) Soit m un réel négatif.

a) Interpréter graphiquement l'intégrale : $\int_m^0 f(x) dx$. (0.25 pt)

b) Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties. (0.75 pt)

c) En déduire $\int_m^0 f(x) dx$. (0.75 pt)