

BAC BLANC Mathématiques			
Lycée Modibo KANE (LM.KANE) SERIE : T.S.Exp	Année : 2022 / 2023	DUREE : 3 heures	COEF : 3

Exercice 1 : (5 points)

- 1) Calculer : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$
- 2) On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe
 - a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (que l'on déterminera)
- 3) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes
- 4) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), z_B = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1 + i) \text{ et } z_C = -1$$

- a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B
 - b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe
- 5) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel
 - a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique
 - b) Démontrer que : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD
- 6) Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O . On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B
 - a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques
 - b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par S

Exercice 2 : (6 points)

I) On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer u_1 et u_2
- 2) a. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$
 - b. Déduis-en que (u_n) est décroissante.
 - c. Déduis-en que (u_n) est convergente.

3). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

a. Montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et calcule v_0 .

b. Exprime v_n en fonction de n .

c. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$.

d. Déduis-en alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4). On pose $s_n = u_0 + u_1 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ où n est un entier naturel non nul.

Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $s_n = \frac{55}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$.

II) Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages

- 1) Calculer la probabilité de l'évènement A : <<Tirer 2 chaussures de la même couleur >>
- 2) Calculer la probabilité de l'évènement B : <<Tirer un pied gauche et un pied droit >>
- 3) Montrer que la probabilité de l'évènement C : <<tirer les deux chaussures d'un même modèle >> est $\frac{1}{19}$

Problème : (9 points)

On considère la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$ On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm

PARTIE A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variations
2. Calcule $g(-1)$ et $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B :

1. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale.
2. a. Montre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.
b. Etudier les positions relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) .
3. a. Calcule $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
b. Dresse le tableau de variations de f .
4. a. Montre que le point I, intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les asymptotes.
b. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les asymptotes.
5. Discute graphiquement et en fonction du paramètre m , le nombre de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x) = m$
- 6) Soit α un réel tel que $-1 \leq \alpha < 0$ et soit (Δ) la région du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$; $x = \alpha$; $y = x - 2$
Calcule en fonction de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de (Δ)