

SERIE : TSEXP DUREE : 3 Heures COEF : 3	<u>BACCALAUREAT BLANC</u> <u>EPREUVE DE MATHÉMATIQUE</u>	LYCEE DIBA DE SOGONIKO ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
--	---	--

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D du plan complexe d'affixes respectives : $a = 5 + 4i, b = 4 + i, c = 3 + 5i$ et $d = 6 + 2i$.

- 1) Placer les points A, B, C et D sur le graphique. **(1 pt)**
- 2) Calculer $\frac{d-b}{d-a}$. En déduire la nature du triangle DAB. **(1 pt)**
- 3) On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-5-4i}{z-7-i}$.
 - a) Calculer l'affixe C' du point C par f et placer le point C' sur la figure. **(0,5 pt)**
 - b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$. **(1 pt)**
 - c) Justifier que (E) contient les points D et C. Tracer (E). **(1 pt)**
- 4) On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de J. **(0.5 pt)**

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

- 1)a) Dresser le tableau de variation de f . **(0,75 pt)**
 - b) En déduire que pour tout réel $x > 1, f(x) > 1$. **(0.25 pt)**
- 2) On considère les suites (V_n) et (W_n) telles que pour tout $n, V_n = \frac{U_n-1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n$.
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n > 1, U_n > 1$. **(0,75 pt)**
 - b) Calculer V_1 et W_1 . **(0,5 pt)**
 - c) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. **(1 pt)**
 - d) Exprimer W_n puis V_n en fonction de n . **(1 pt)**
 - e) Montrer que $U_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2n}}$ puis calculer la limite de la suite U_n . **(0,75 pt)**

Problème : (10 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$. **(0,5 pt)**
- 2) Soit l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
Trouver un polynôme h du second degré solution de l'équation (E'). **(0,75 pt)**
- 3)a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction g telle que $g = f - h$ est solution de (E). **(1 pt)**

- b) En déduire l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$. **(0,25 pt)**
- 4) En déduire une solution φ de (E') dont la courbe représentative passe par le point $A(1; 1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses. **(0,75 pt)**

Partie B : Etude de la fonction f .

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2(x - 1)e^{x-1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,5 pt)**
b) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 2x(1 - e^{x-1})$. **(0,75 pt)**
c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. **(0,75 pt)**
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α , et vérifier que $\alpha \in]1,7; 1,8[$. **(0,5 pt)**
- 3) On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.
a) Calculer la limite de $f(x) - x^2$ en $-\infty$. Conclure. **(0,5 pt)**
b) Etudier les positions relatives de (C) et (Γ) . **(0,75 pt)**
- 4) Tracer (C) et la parabole (Γ) . **(1,5 pt)**
- 5) Soit a un réel strictement inférieur à 1. On note $A(a)$ l'aire du domaine du plan délimité par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.
a) Montrer que $A(a) = 2(a - 1)e^{a-1} - 2e^{a-1} + 2$. **(1 pt)**
b) Calculer $A(0)$. **(0,25 pt)**
c) Déterminer la limite de $A(a)$ quand a tend vers $-\infty$. **(0,25 pt)**