

SERIE : TSEXP DUREE : 3 Heures COEF : 3	BACCALAUREAT BLANC EPREUVE DE MATHÉMATIQUE	GROUPE SCOLAIRE CLAIRE FONTAINE ANNEE SCOLAIRE : 2023-2024
---	---	---

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. l'unité graphique est 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0$. **(1 pt)**

2) On pose : $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i$.

a) Justifier que $-2i$ est une racine de $P(z)$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer les complexes a et b tels que : $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$. **(0,5 pt)**

Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $P(z) = 0$. **(0,5 pt)**

3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = -2i$; $Z_B = -2 + 2i$ et $Z_C = 1 + i$. On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. **(0,5 pt)**

b) Déterminer la nature du triangle ABC. **(1 pt)**

c) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques. **(1 pt)**

Exercice 2 (5 points)

On place dans une urne, une boule jaune, p boules blanches et q boules noires. On tire une boule de l'urne, les tirages sont équiprobables.

Soient les événements :

A : <<La boule obtenue est jaune>> ; B : <<La boule obtenue est blanche>> et C : << la boule obtenue est noire>>.

1)a) Calculer la probabilité $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ de chacun des événements A, B et C en fonction de p et q . **(1,5 pt)**

b) Déterminer p et q sachant que $P(A) = \frac{1}{21}$ et que $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique. **(1 pt)**

2) Dans la suite on pose $p = 4$ et $q = 16$.

Deux garçons G_1 et G_2 utilisent cette urne pour réaliser le jeu suivant : deux boules sont tirées simultanément de l'urne. G_2 reçoit 120 francs de G_1 si les deux boules sont de même couleur et G_1 reçoit 180 francs de G_2 si les deux boules sont de couleurs différentes.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de G_1

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(1 pt)**

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Le garçon G_1 a-t-il intérêt à jouer ? **(1, 5 pt)**

Problème (10 points)

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x + 2 \ln(x).$$

- 1)a) Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$. **(1 pt)**
- b) Calculer $g'(x)$. **(0,5 pt)**
- c) Etudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de g . **(0,75 pt)**
- 2)a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$. **(0,5 pt)**
- b) Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$. **(0,25 pt)**
- c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$. **(0,5 pt)**

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = e^x + 2x \ln(x) - 2x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique 4 cm.

- 1)a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. **(1 pt)**
- b) Interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 pt)**
- 2)a) Démontrer que f est continue en 0. **(0,5 pt)**
- b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. **(0,5 pt)**
- c) f est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse. **(0,25 pt)**
- d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu à la question 2)b). **(0,25 pt)**
- 3) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$. **(0,5 pt)**
 - b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. **(1 pt)**
- 4) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 2]$. **(1 pt)**
- 5)a) On pose $K = \int_1^2 x \ln x \, dx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. **(0,75 pt)**
- b) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat. **(0,5 pt)**