

sujet n°1

Série : TS'Exp Coef: 3 Durée : 3h

sujet n°1

Exercice 1 :.....(6 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = iz^3 + (5 - 2i)z^2 - (4 + 9i)z - 9 - 6i$.

a) Vérifie que $3i$ est une solution de l'équation : $P(z) = 0$.

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3i)(iz^2 + az + b)$.

2) a) Calcule $(2 + i)^2$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $iz^2 + (2 - 2i)z + 2 - 3i = 0$.

c) Dédus des questions 1.a) et 2.b) les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B d'abscisses respectives :

$z_A = -1$ et $z_B = 3 + 2i$.

a) Détermine z_K l'abscisse du point K milieu du segment $[AB]$.

b) On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan d'abscisse z tels que : $|z - 1 - i| = \sqrt{5}$.

Justifie que le point B appartient à (Γ) .

c) Détermine (Γ) .

Exercice 2 :.....(4 points)

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$.

1) Soit φ la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Calcule la dérivée de la fonction φ et déduis-en la valeur de I .

2) a) Sans calculer explicitement J et K , vérifie que : $I + J = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , trouve une relation liant K et J .

c) Dédus-en les valeurs de J et K .

Problème :.....(10 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$, par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

2) Démontre qu'il existe un unique réel α tel que $g(x) = 0$ avec $0,65 < \alpha < 0,66$.

3) Etudie le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1) Détermine la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C).

b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).

3) a) Démontre que $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresse le tableau de variation de f .

4) Montre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$. Donne alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5) Calcule les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D).

Donne une équation de cette tangente (T).

6) Trace (C), (D) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7) Détermine l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{-1}$.

sujet n° 2

Série : TS'Exp Coef : 3 Durée : 3h

sujet n° 2

Exercice 1 :.....(5 points)

On donne l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.

- 1) a) Résous dans $\mathbb{C}$ cette équation.
b) Ecris les solutions sous la formes algébrique et sous la forme trigonométrique.
c) Place les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative.
d) Quelle est la nature du triangle OAB ?
- 2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
 $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.
a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .
b) Détermine sous la forme trigonométrique, puis sous la forme algébrique l'affixe du point A' , image de A par f .
c) En déduis les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 :.....(5 points)

Soit la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$.

- 1) a) Calcule U_1, U_2, U_3 et U_4 (on peut donner les résultats à 10^{-2} près).
b) Formule une conjecture sur le sens de variation de cette suite (U_n) .
- 2) a) Démontre que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$.
b) Démontre que, pour tout entier naturel n , $U_n \leq n + 3$.
c) Déduis-en une validation de la conjecture précédente.
- 3) On désigne par (V_n) la suite définie par sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - n$.
a) Détermine la nature de la suite (V_n) et sa raison.
b) Déduis-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
c) Détermine la limite de la suite (U_n) .

Problème :.....(10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

- 1) Montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.
- 2) Etudie le sens de variation de g .
- 3) Calcule $g(0)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de f .
- 3) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
b) Etudie suivant les valeurs de x la position relative de (C) par rapport à (D).
- 4) Trace la courbe (C) et la droite (D).
- 5) a) Détermine les nombres réels a et b pour la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H : x \mapsto H(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction : $x \mapsto -xe^{2x}$.
b) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.