

Exercice 1 :(5 points)

Pour tout nombre complexe z , on considère le polynôme : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$.

- 1) Vérifie que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle.
- 2) Déduis-en une factorisation de $P(z)$.
- 3) Résous alors l'équation $P(z) = 0$.
- 4) Soit z_1 et z_2 les solutions autres que 2 ; z_1 ayant la partie imaginaire positive.
 - a) Vérifie que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
 - b) Détermine le module et un argument de z_1 et de z_2 .
- 5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (unité : 2cm), place les points A, B, C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2 .

Exercice 2 :(5 points)

On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t (en années) dans un fragment d'os.

On admet que Q vérifie, à tout instant t , $Q'(t) = -\lambda Q(t)$. ($\lambda \approx 1,2444 \cdot 10^{-4}$ est appelé constante radioactive du carbone 14). Soit Q_0 la quantité du carbone 14 à l'instant $t = 0$.

- 1) Exprime $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0 .
- 2) On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés. Détermine la période T du carbone 14.
- 3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même, pris comme témoin. Calcule l'âge de ces fragments.

Problème :(10 points)

I/ Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + (x - 1)e^{-x}$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-0,38 < \alpha < -0,37$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II/ Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

On notera (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1 cm).

- 1) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
Donne une interprétation graphique des résultats.
- 2) a) Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
b) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) et (D).
- 4) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Etudie les positions relatives de (C) et (D).
- 5) Construis (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = -0,38$.
- 6) a) Détermine les réels a et b tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \rightarrow -xe^{-x}$.
b) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.