

EXAMEN DE BACCALAURÉAT BLANC**SESSION DE MAI 2025****Épreuve : Mathématiques****Série : TSExp****Durée : 3 heures****Coefficient : 3****EXERCICE 1** ----- (7 points)I/ Dans le plan complexe (p) rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$; $z_B = -2 + i$; $z_C = 1 - 2i$ 1- Place les points A, B et C dans le plan (1pt)2- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme le point A en B . (1pt)3- On donne l'application s qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = (1 + i)z - 2 - i$
Détermine les éléments caractéristiques de s . (1pt)II/ Intègre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + \frac{9\pi^2}{4}y = 0$ (1pt)III/ 1) a) Démontre que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$. (0,5pt)b) En déduis la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$. (1pt)2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ a) Calcule la dérivée de f' de f . (0,5pt)b) Calcule à l'aide d'une intégration par parties $J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x) dx$ (1pt)**EXERCICE 2** ----- (5 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour deux hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1) On effectue à l'instant $n = 0$ une injection de **10 ml** de ce médicament. On estime que **20%** du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on note U_n la quantité de médicament en ml, restante dans le sang au bout de n minutes. Ainsi on a $U_0 = 10$.

- a) Montre que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8U_n$ (0,5pt)
- b) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de la suite (U_n) (0,5pt)
- c) Pour tout entier naturel n , donne l'expression de U_n en fonction de n . (0,5pt)
- d) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restante dans le sang devient-elle inférieure à 1% de la quantité initiale ? Justifie ta réponse. (0,5pt)
- 2) On programme une machine de façon que :
- à l'instant $n = 0$, elle injecte **10 ml** de médicament,
 - toutes les minutes, elle injecte **1 ml** de médicament.
- On estime que **20%** du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on note V_n la quantité de médicament, en ml, présente dans le sang du patient au bout de n minute.
- a) Justifie que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,8V_n + 1$ (0,5pt)
- b) Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = V_n - 5$. Démontre que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme. (1pt)
- c) Détermine l'expression de W_n et de V_n en fonction de n . (1pt)
- d) Calcule la limite de la suite (V_n) puis en donne une interprétation. (0,5pt)

PROBLEME

 ----- (8 points)

PARTIE A

 ----- Etude d'une fonction auxiliaire ----- (4 points)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - xe + 1$ où $e \approx 2,71$

1. Calcule les limites de g en 0^+ et en $+\infty$ (0,75pt)
2. Etudie le sens de variation de g et dresse le tableau de variation. (1pt)
3. Montre que dans $[0,5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution notée α . (0,75pt)
4. Détermine un encadrement de α à **0,1 près**. (0,75pt)
5. En déduis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x dans $]0; +\infty[$ (0,75pt)

PARTIE B

 ----- Etude de la fonction principale ----- (4 points)

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

1. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ (0,75pt)
2. Etudie le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et dresse le tableau de variation (0,75pt)
3. Montre que $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$ (0,75pt)
4. Déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$. (0,75pt)
5. Construis (Γ) (1pt)