

Le sujet est composé de deux situations et d'une évaluation des compétences tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les traces de recherches même incomplètes ou infructueuses seront valorisées. Le candidat pourra commencer par la situation de son choix.

SITUATION 1 : 4 points

- I. Donner sous forme algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$
- II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$
 1. a°) Déterminer la solution réelle de cette équation.
b°) Montrer que i est solution de cette équation.
c°) Déterminer la troisième solution de cette équation.
 2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $1, i$ et $2 + i$
 - a°) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - b°) En déduire la nature du triangle ABC.
 - c°) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - d°) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon r à déterminer.

SITUATION 2 : 3 points

Soit (U_n) une suite dans l'ensemble des nombres complexes définie par son premier terme U_0 et par la relation (E) : $\forall n \in \mathbb{N} ; (1 + i)U_{n+1} = U_n + 1 + i$

- 1) On pose $U_0 = 1 - i$, Calculer U_1 et U_2 puis en déduire U_n . Que peut-on conclure pour la suite (U_n) ?
- 2) On pose $U_0 = 2 - i$ et (W_n) la suite définie par : $W_n = U_n + \alpha$
 - a) Déterminer α pour que (W_n) soit une suite géométrique.
 - b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n .
 - c) Calculer $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_{n-1} + W_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} + U_n$

SITUATION 3 : 3 points

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher comme indiqué portant chacune un numéro comme indiqué sur la figure ci-contre :

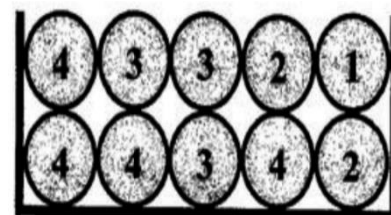
On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard, Successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- 1) Soit A l'évènement « les deux boules tirées portent un numéro pair »

Montrer que $P(A) = \frac{1}{3}$.

- 2) On répète l'expérience précédente trois fois telle qu'à chaque fois on remet les deux boules tirées dans l'urne à la fin de l'expérience. Soit X la

variable aléatoire associé au nombre de réalisation de l'évènement A. Montrer que $P(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .



SITUATION 4 : 7 points

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

- 1- Intégrer l'équation différentielle (E).

2- Déterminer la solution particulière (E) telle que : $\begin{cases} h(0) = -2 \\ h'(0) = -1 \end{cases}$

Partie B :

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^x + x$ et $g(x) = (x - 1)e^x + 1$ où (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives des fonctions f et g

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- a) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

3- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$, puis étudier leur position.

c) Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = g(x)$

e) Dresser le tableau de variation de f .

f) Construire la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On admet qu'il existe un réel $\alpha \in]1; 2[$ tel que $f(x) = 0$)

Partie C

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_n^{n+1} (x + 1)e^{-x} dx$

1) Montrer que $I_n = -(n + 3)e^{-(n+1)} + (n + 2)e^{-n}$ (On pourra utiliser l'intégration par parties)

2) Etudier la convergence de la suite (I_n) .

EVALUATION DES RESSOURCES : 3 points

Pendant un cours de physique-chimie dans une classe de Terminale scientifique, le professeur donne l'exercice ci-dessous à ses élèves :

« Une substance chimique se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant $t=0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.

Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, trouve le temps nécessaire pour que la substance soit totalement dissoute. »

Après un temps de recherche, les élèves n'arrivent pas à proposer une solution.

Le professeur leur demande donc de se faire aider. Etant l'un des meilleures élèves scientifiques de ton établissement, ils te sollicitent. A l'aide d'une argumentation rigoureuse basée sur tes connaissances mathématiques au programme, aides tes camarades.

Repose c'est très difficile pour cette exercice du
TSEXP mathématiques
S2 ONE VIP OU S2 WARALABAN