

PREPA
PREMIER
TRIMESTRE
TSE_{exp}
2024-2025

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 :(5 points)Soit l'équation $(E) : iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = 0; z \in \mathbb{C}$.1) Montre l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.2) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que :

$$iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = (z - i)(az^2 + bz + c).$$

3) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .4) Le plan complexe est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$$i; 1 + 2i \text{ et } 2 + i.$$

a) Place les points A, B et C .b) Calcule AB, AC, BC et $\widehat{AC, AB}$; ; puis en-déduis la nature du triangle ABC .c) Détermine z_D , l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.**Exercice 2** :(5 points)On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{2+i}{3-i}$; $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.1) Détermine le module et un argument du nombre complexe z_1 .2) a) Ecris le nombre complexe z_2 sous forme algébrique et démontre que $z_2 = \overline{z_1}$.b) Ecris sous forme exponentielle le nombre complexe z_2 .3) Ecris le nombre complexe z_3 sous forme algébrique.4) On donne $Z = z_2 z_3$.a) Calcule le module et un argument du nombre complexe Z .b) Ecris le nombre complexe Z sous forme algébrique.c) Déduis-en les valeurs exactes de nombres réels $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.**Problème** : (10 points)**Partie A :**On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$.3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.**Partie B :**Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)1) a) Détermine le domaine de définition de f , puis calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.b) Interprète graphiquement le résultat des limites de f en -1 et 1 .2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.b) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et (D) .c) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D) .4) Trace (C) et (D) .

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 :(5 points)On considère l'équation (E) : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$.

- 1) a) Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'abscisses respectives : $z_A = 2i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = -4 + i$.
a) Place les points A, B et C dans le repère.
b) Ecris sous la forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduis la nature du triangle ABC.
- 3) Détermine l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 2 :(5 points)

I// Détermine le domaine de définition des fonction suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

II// Calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+1} - 3x \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5x}}$$

III// Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue en x_0 indiqué :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 ; x_0 = 0 \end{cases}$$

Problème : (10 points)**Partie A :** Etude d'une fonction auxiliaireSoit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1,6 < \alpha < 1,7$.
b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction principaleSoit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f.
- 2) a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Interprète graphiquement le résultat les résultats obtenus.
- 3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.
- 4) a) Détermine l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Etudie la position relative de (T) et (C).
- 5) Trace (C) et (T).

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 :(6 points)

- 1) On considère l'équation (E): $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
 - a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
 - b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4)$.
 - c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.
 - d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i, 1-i, 2i$ et $-2-2i$.
 - a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.
 - b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.
- 3) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
 - a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$ et justifie que $S(B) = C$.
 - b) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

Exercice 2 :(5 points)

I// Détermine la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \frac{x-2}{x^2-1} \quad b) f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad c) f(x) = (x^2-2x+1)^3.$$

II/ Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5+2x}-3}{x-2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \quad c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$$

$$\text{III// On donne : } \begin{cases} f(x) = 3x^2 - 3x + r & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+1}{4x} & \text{si } x > 1; x_0 = 1 \end{cases}$$

Détermine le nombre réel r pour que la fonction f soit continue en x_0 .**Problème :** (9 points)

Dans un centre de prise en charge des malades de la Covid-19, les infectiologues ont modélisé la quantité de chloroquine (en mg) administrée à un patient suivant l'évolution de la maladie, par la fonction g définie par : $g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9$ où t désigne le nombre de jours d'hospitalisation.

- 1) Calcule la quantité de chloroquine reçue par un patient admis au centre de prise en charge au : $2^{\text{ième}}, 4^{\text{ième}}, 5^{\text{ième}}$ et $6^{\text{ième}}$ jour.
- 2) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $[0; 6]$.
Quelle est la quantité maximale de chloroquine que l'on pourra administrer à un patient pendant son hospitalisation.
- 3) Trace dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentant la quantité de chloroquine.
Unité (1cm pour 1 jour sur l'axe (Ox), 1cm pour 10mg sur l'axe (Oy)).
- 4) Détermine graphiquement le nombre de jours qui correspond à une dose de 36 mg de chloroquine.
- 5) Un patient est déclaré guéri lorsque la quantité de chloroquine reçue par jour n'atteint plus 10 mg.
Détermine graphiquement à partir du combienième jour, un patient soumis à ce traitement sera déclaré guéri.

COURS PRIAMS
MATHEMATIQUES

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 : (5 points)On considère le polynôme définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

- 1) Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis factorise $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Place, dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.
- 4) On note E le symétrique de D par rapport à O .
 - a) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_E - z_B}$.
 - b) En déduis la nature du triangle BEA .

Exercice 2 : (5 points)

- 1) Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

- 2) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax + b ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{ax+b}{x+1} ; x > 1 \end{cases}$$

- a) Détermine les réels a et b pour que la fonction soit continue et dérivable en 1.
- b) Pour les valeurs de a et b trouvées, calcule $f(0), f(2)$ et $f(-3)$.

Problème : (10 points)**Partie A :**Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) a) Calcule la dérivée g' de la fonction g ; en déduis que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Dresse le tableau de variation de g .
- 3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Justifie que $0,7 < \alpha < 0,8$.
c) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,01.
- 4) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2 cm)

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (D) par rapport à (C).
- 3) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f .
- 4) Détermine les coordonnées du point A où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).
- 5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 6) Construis les droites (D) et (T), puis la courbe (C).

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 : (5 points)On considère l'équation (E): $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Montre que (E) admet une solution réelle z_0 . Détermine z_0 .
- 2) Montre que (E) admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3)$, $B(2i)$ et $C(6 - 2i)$.
 - a) Place les points A , B et C .
 - b) Détermine la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - c) Interprète géométriquement le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - d) En déduis que les points A , B et C sont alignés.
- 5) Soit S la transformation d'écriture complexe $z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2 : (5 points)On donne les points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $M'\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ d'affixes respectives z et Z défini par : $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

- 1) a) Pour quelles valeurs de z , Z est-il défini ?
b) Exprime X et Y en l'aide de x et y .
- 2) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que :
 - a) Z est un nombre imaginaire pur.
 - b) Z est un nombre réel non nul.
 - c) $|Z| = 1$.

Problème : (10 points)**Partie A :**On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

- 1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$.Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f . Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
- 2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$. En déduis les variations de f .
- 3) a) Détermine les réels a , b , c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
b) En déduis que C_f admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de C_f par rapport à (Δ) .
Vérifie en particulier que C_f rencontre (Δ) en un point unique A .
- 5) Détermine les abscisses des points B et B' de C_f admettant une tangente parallèle à (Δ) .
- 6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
- 7) Trace C_f et (Δ) .

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 :(5 points)

- 1) a) Calcule $(3 + i)^2$.
b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^2 - (1 + 5i)z - 8 + i = 0$.
- 2) On considère le polynôme P définie par : $P(z) = z^3 - (1 + 6i)z^2 + (-13 + 2i)z + 1 + 8i$ où $z \in \mathbb{C}$.
a) Vérifie que $P(i) = 0$.
b) Détermine les deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
c) Dédus-en l'ensemble des solutions de l'équation : $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = -1 + 2i$.
a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Justifie que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.
c) Calcule l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Exercice 2 :(5 points)I// Soit le nombre complexe $Z = \frac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$.Ecris Z sous la forme :

- 1) Trigonométrique.
- 2) Exponentielle.

II// On donne : $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Donne la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
- 2) Trouve la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
- 3) Dédus : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Problème : (10 points)Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.On désigne par (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montre que (Cf) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
- 2) Précise la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
- 3) Etudie les variations de f .
- 4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?
Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
- 5) Trace la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1 ; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
- 7) a) Calcule $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$.
b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f .