

Sujet 7**Castors 24-25****Exercice 1** (4 pts)

- 1- Linéarise $\cos^2\left(\frac{7}{4}x\right)\sin^5(3x)$ (1 pt)
- 2- Résous dans $\mathbb{C} : z^7 = \frac{(-\sqrt{3}+i)^5}{(1+i)^8}$ (0.5 pt)
- 3- Ecris sous forme exponentielle puis sous forme algébrique le nombre complexe $t = \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$ (0.5 pt)
- 4- Détermine les racines quatrièmes de $-8 + 8i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique (1 pt)
- 5- Détermine les racines carrées du complexe $-8 + 6i$ (0.5 pt)
- 6- Détermine l'entier relatif n pour que $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n$ soit un réel (0.5 pt)

Exercice 2 : (6pts)

- 1- Soit α un nombre réel avec $\alpha \in]-\pi; \pi[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe (E): $z^2 - 2(1 + i\sin\alpha)z + 2i\sin\alpha = 0$
 - a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (1 pt)
 - b) Mettre sous forme trigonométrique les solutions de (E) (0.5 pt)
- 2- Soit z un nombre complexe tel que $\arg(-1 - i\sqrt{3}) + \arg z = \frac{-7\pi}{15}$.

Détermine $\arg(-z)$; $\arg(\bar{z})$ et $\arg(-\bar{z})$ (1 pt)

3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^9 = 256(-1 + i\sqrt{3})$ (1 pt)

4- Mettre sous forme exponentielle $Z = \cos\left(\frac{11\pi}{74}\right) - i\left(i\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{74}\right)\right)$ (0.5 pt)

5. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation ; $2|Z| + (1 - 7i)\bar{Z} = 63 + 51i$ (1 pt)

6- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation ; $(Z - i)^7 = (Z + i)^7$ (1 pt)

Problème 10 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère l'équation

$$(E): z^3 + (5i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 10i\sqrt{3})z + 20i = 0$$

- 1- Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera (1 pt)
- 2- Dédus-en une résolution de l'équation (E) (1 pt)
- 3- Soit A, B et C les points images respectives des solutions z_A ; z_B et z_C de l'équation (E) tel que z_A est la solution non imaginaire pure ayant partie imaginaire positive, z_B

La solution imaginaire pure et z_C la troisième solution

a-Place ces points dans le plan complexe . (1 pt)

b-Soit I le point d'affixe $z_I = -i$; calcule $\frac{z_B - z_I}{z_C - z_I}$. Déduis-en la nature du triangle BCI (0.5 pt)

c-Détermine l'affixe de D pour ABCD soit un parallélogramme (0.5 pt)

d-Détermine le périmètre du quadrilatère ABCD puis l'aire du triangle BCI (0.5 pt)

e-Montre que les points B,C et I sont sur le même cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon. (0.5 pt)

f-Soit le complexe T défini par $T = \frac{1}{2}(z_A - z_C)$. Détermine les racines quatrièmes de T sous forme exponentielle puis sous forme algébrique . (1 pt)

4- On pose $Z = \frac{-iz}{z+2-5i}$, $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec X ; Y ; x et y des nombres réels

a-Exprime X et Y en fonction de x et y (1 pt)

b-Détermine les ensembles (E) des points M(z) vérifiant :

$b_1)$ $|Z| = 1$ (0.5 pt) $b_2)$ $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (0.5 pt)

$b_3)$ $\arg(Z) = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (0.5 pt) $b_4)$ $|Z| = \frac{3}{2}$ (0.5 pt)

$b_5)$ Z est un réel (0.5 pt) $b_6)$ Z est un imaginaire pur (0.5 pt)