

TSExp

Exercice 1 : 5pts

Partie A

On considère un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan complexe. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives

$$z_A = 1 - i\sqrt{3}, z_B = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \text{ et } z_C = (1 + i)^2 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} \right).$$

1. Met sous forme exponentielle z_A , z_B et z_C .
2. Détermine la nature du triangle OAD avec $z_D = 1$.

Partie B

On donne les intégrales $I = \int_0^\pi e^{-t} \cos^2 t \, dt$ et $J = \int_0^\pi e^{-t} \sin^2 t \, dt$

- 1) Calcule $I + J$ et $I - J$.
- 2) En déduis I et J .

Exercice 2 : 5pts

On considère l'équation différentielle $(E): y' = -2y + (2x + 3)e^{-x} + 4$.

1. Montre que la fonction $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$ est solution de (E) .
2. Résous l'équation différentielle $(E_0): y' = -2y$.
3. Démontre que g est solution de (E) si et seulement $g - f$ est solution de (E_0) .
4. En déduis les solutions de (E) .
5. Détermine la solution de (E) vérifiant $y(0) = 4$.

Problème : 10pts

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = -1 + x^2 + \ln x$.

- a) Etudie le sens de variation de g et calcule $g(1)$.
- b) En déduis le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x}$.

- a) Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Calcule $f'(x)$.
 - c) Montre que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduis le tableau de variation de f .
 - d) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ; donne en justifiant un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.
- 3) On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

- a) Détermine une équation de la droite (D) asymptote à (C) en $+\infty$.
- b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
- c) Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D).
- d) Trace (C) et (D) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Proposition de solution

Exercice 1

Partie A

$$z_A = 1 - i\sqrt{3}, z_B = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \text{ et } z_C = (1 + i)^2 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} \right).$$

1. Mettons sous forme exponentielle z_A , z_B et z_C .

$$z_A = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}, z_B = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et}$$

$$z_C = (1 + i)^2 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

2. Déterminons la nature du triangle OAD avec $z_D = 1$.

$$\frac{z_A - z_D}{z_O - z_D} = \frac{1 - i\sqrt{3} - 1}{0 - 1} = -i\sqrt{3}; \text{ alors le triangle } OAD \text{ est rectangle en D.}$$

Partie B

On donne les intégrales $I = \int_0^\pi e^{-t} \cos^2 t \, dt$ et $J = \int_0^\pi e^{-t} \sin^2 t \, dt$

1) Calculons $I + J$ et $I - J$.

$$I + J = \int_0^\pi e^{-t} \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi e^{-t} \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi (e^{-t} \cos^2 t + e^{-t} \sin^2 t) \, dt = \int_0^\pi e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^\pi = -e^{-\pi} + 1.$$

$$I + J = 1 - e^{-\pi}.$$

$$I - J = \int_0^\pi e^{-t} \cos^2 t \, dt - \int_0^\pi e^{-t} \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi (e^{-t} \cos^2 t - e^{-t} \sin^2 t) \, dt = \int_0^\pi e^{-t} \cos 2t \, dt$$

$$u = e^{-t} \Rightarrow u' = -e^{-t}$$

$$v' = \cos 2t \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$I - J = \left[\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-t} \sin 2t \, dt$$

$$u = e^{-t} \Rightarrow u' = -e^{-t}$$

$$v' = \sin 2t \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

$$I - J = \left[\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-t} \cos 2t \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi e^{-t} \cos 2t \, dt$$

$$I - J = -\frac{1}{4} e^{-\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (I - J) \text{ donc } I - J = -\frac{1}{5} e^{-\pi} + \frac{1}{5}.$$

$$2) \text{ En déduisons } I \text{ et } J : \begin{cases} I + J = 1 - e^{-\pi} \\ I - J = -\frac{1}{5} e^{-\pi} + \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-3e^{-\pi} + 3}{5}; J = \frac{-2e^{-\pi} + 2}{5}$$

Exercice 2

1. Montrons que la fonction $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$ est solution de (E) .

On a : $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.

$$f'(x) = -2f(x) + (2x + 3)e^{-x} + 4$$

$$(1 - 2x)e^{-x} = -2(2xe^{-x} + e^{-x} + 2) + (2x + 3)e^{-x} + 4$$

$$(1 - 2x)e^{-x} = -4xe^{-x} - 2e^{-x} - 4 + (2x + 3)e^{-x} + 4$$

$$(1 - 2x)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x} \text{ vraie.}$$

Donc f est solution de (E) .

2. Résolvons l'équation différentielle $(E_0) : y' = -2y$.

$$y(x) = Ae^{-2x} \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrons que g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E_0) .

$$g \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } g'(x) + 2g(x) = (2x + 3)e^{-x} + 4$$

$$\text{Par ailleurs } f'(x) + 2f(x) = (2x + 3)e^{-x} + 4$$

$$\begin{cases} g'(x) + 2g(x) = (2x + 3)e^{-x} + 4 \\ f'(x) + 2f(x) = (2x + 3)e^{-x} + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (g - f)'(x) + 2(g - f)(x) = 0$$

Si et seulement si $g - f$ est solution de (E_0) .

4. En déduisons les solutions de (E) .

$$y(x) = Ae^{-2x} + 2xe^{-x} + e^{-x} + 2 \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

5. Déterminons la solution de (E) vérifiant $y(0) = 4$.

$$y(0) = 4 \Rightarrow Ae^0 + 0e^{-0} + e^{-0} + 2 = 4 \Rightarrow A = 1$$

$$y(x) = e^{-2x} + 2xe^{-x} + e^{-x} + 2$$

Problème

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = -1 + x^2 + \ln x$.

a) Etudions le sens de variation de g et calcule $g(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + x^2 + \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + x^2 + \ln x) = +\infty$$

g est dérivable et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$ alors g est strictement croissante.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	0	$+\infty$

$$g(1) = -1 + 1^2 + \ln 1 = 0$$

b) En déduisons le signe de $g(x)$.

Pour $x \in]0; 1]$, $g(x) \leq 0$

Pour $x \in [1; +\infty[$, $g(x) \geq 0$

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x}$.

a) Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 3 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

b) Calculons $f'(x)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - 1 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c) Montrons que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduisons le tableau de variation de f .

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, x^2 \geq 0 \text{ alors le signe de } f' \text{ est celle de } g.$$

x	0	α	1	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

d) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ; donne en justifiant un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.

Sur $]0; 1[$, f est continue et strictement décroissante,

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } f(1) = -2.$$

$$\text{Or } 0 \in]-2; +\infty[$$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]0; 1[$

$$\text{Encadrement : } \alpha \in]0,3; 0,4[$$

Sur $]1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante,

$$\text{De plus } f(1) = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Or } 0 \in]-2; +\infty[$$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\beta \in]1; +\infty[$

$$\text{Encadrement : } \beta \in]3,3; 3,4[$$

3) On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

a) Déterminons une équation de la droite (D) asymptote à (C) en $+\infty$.

$$\text{Posons } y = x - 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 - \frac{\ln x}{x} - x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc $D: y = x - 3$ est asymptote à la courbe (C)

b) Etudions la position de (C) par rapport à (D).

$$f(x) - y = -\frac{\ln x}{x}$$

Posons $-\ln x \geq 0$

$$\ln x \leq 0$$

$$x \leq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
Position	C / D		D / C

c) Déterminons les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D).

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{-1+x^2+\ln x}{x^2} = 1 \Rightarrow -1 + x^2 + \ln x = x^2 \Rightarrow -1 + \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

$$f(e) = e - 3 - \frac{\ln e}{e} = \frac{e^2 - 3e - 1}{e}$$

$$A\left(e; \frac{e^2 - 3e - 1}{e}\right)$$

d) Traçons (C) et (D) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

