

Prépa Bac 2026

SUJET N°13

Exercice

- 1) On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - (2\sqrt{3} + 2i)z^2 + (4 + 4i\sqrt{3})z - 8i$.
 - a) Montrer qu'il existe un réel α tel que $P(i\alpha) = 0$.
 - b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $P(z) = (z - i\alpha)(z^2 + bz + c)$.
 - c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Dans le plan complexe orienté, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2i$.
 - a) Placer les points A, B et C .
 - b) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle (C) de centre O dont on précisera le rayon.
 - c) Calculer le module et un argument du nombre complexe $K = \frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du triangle OAB .
 - d) Calculer le module et un argument du nombre complexe $L = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC .
- 3) Soit h l'homothétie de rapport 3 qui transforme le point A en B .
 - a) Déterminer l'écriture complexe de h .
 - b) Donner l'expression analytique de h .
 - c) Déterminer une équation de la droite (D') , image par h de la droite $(D) : -2x + y + 1 = 0$.

Problème

Partie A : On considère l'équation différentielle $(E) : \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

- 1) Déterminer le réel α , tel que la fonction v définie par $v(x) = \alpha x e^{-2x} + 2$ soit une solution de (E) .
- 2) Donner les solutions de l'équation différentielle $(E') : \frac{1}{2}y' + y = 0$.
- 3) Démontrer que la fonction u est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de (E') .
- 4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) . Déterminer la solution particulière h de (E) vérifiant : $h(0) = 0$.

Partie B : On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (2(3x - 1)e^{-2x} + 2, & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.
 - a) Etudier les variations de g .
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $0,2 < \alpha < 0,3$.
- 2) Etudier la continuité de f en 0.
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 6) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on montrera que, $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$).
- 7) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de (C_f) avec (Ox) .
- 8) Dresser le tableau de variation de f .
- 9) Tracer (C_f) .
- 10) Soit λ un réel strictement négatif. On note $A(\lambda)$ l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe (C_f) .
 - a) On pose : $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$. Déterminer les réels a et b pour que : $F'(x) = (3x - 1)e^{-2x}$.
 - b) Calculer $A(\lambda)$ en cm^2 .
 - c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.