

EXAMEN : Baccalauréat Blanc2

Série : TEXP

Année scolaire : 2025-2026

EPREUVE : Mathématiques

DUREE : 3heures

COEFF : 3

Exercice 1 : _____ (5pts)

I. Pour tout complexe z on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1) Détermine le polynôme Q tel que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.

3) Ecris les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis les représente dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

II. Considérons les points A, B, C et D du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); B(-1 + i); C(-1 - i) \text{ et } D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D .

Détermine l'écriture complexe de r .

3) Quelle est la nature du triangle ΩAD ?

4) Détermine l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD .

5) On pose $U_n = (z_A)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A .

Détermine la valeur minimale de n pour laquelle U_n est un réel.

6) Donne la forme algébrique de U_{2019} .

Exercice 2 : _____ (5pts)

A) Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.

La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactérie. On suppose que la population augmente de 6,5% toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactérie à la préparation toutes les heures.

On note R_n le nombre le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures. On admettra que pour entier naturel $R_{n+1} = 100 + 1,065R_n$.

On introduit la suite (U_n) définie sur $U_n = R_n + \frac{100000}{65}$.

1) Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Exprime (U_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n .

3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la

capacité maximale du milieu ?

B) On considère les équations différentielles (E): $f'' + 4f = 3\cos x$ et (E'): $f'' + 4f = 0$

- 1) Quelles sont les fonctions g solutions de (E')?
- 2) Vérifie que la fonction $\cos x$ est solution de (E).
- 3) g étant une solution de (E') vérifie que toute fonction h définie par $h(x) = g(x) + \cos x$ est une solution de (E).

Problème : _____ (10pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{-x}$.

- 1) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2) Montre que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$.
- 3) Étudie les variations de la fonction g , puis dresse le tableau de variation de sur $\mathbb{R}$.
- 4) Déduis que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 1$ et $1 + xe^x > 0$.

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + xe^x)$.

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; puis interprète le résultat géométriquement.
- 2) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Vérifie que : $(\forall x \in]0 ; +\infty[) : f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$.
c) Montre que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = x$.
- 3) a) Vérifie que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - x = \ln(g(x))$.
b) Détermine la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f) .
- 4) a) Montre que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{1+xe^x}$.
b) Dresse le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
- 5) Construis la courbe (C_f) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- 6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1 ; +\infty[$.
a) Montre que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer
b) Montre que h^{-1} est dérivable en 0 puis calcule $(h^{-1})'(0)$.