
UN BUT** UNE FOI

ACADÉMIE D'ENSEIGNEMENT BAMAKO RIVE GAUCHE

BACCALAURÉAT BLANC : SÉRIE :TSEXP

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUESLYCÉE PRIVÉ : LES CHAMPIONS (LPC-BOUL)DURÉE : 3h COEFFICIENT : 3

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 5 points

1) P est un polynôme à variable Z définie par : $P(Z) = Z^3 + 3iZ - 5 + 5i$.

a) Vérifier que le nombre complexe $-1 - i$ est une racine P .

b) Déterminer les complexes a et b tels que : $P(Z) = (Z + 1 + i)(Z^2 + aZ + b)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o; u; v)$. On donne trois points

A, B et C d'affixe respective : $Z_A = -1 - i$; $Z_B = 2 - i$ et $Z_C = -1 + 2i$

a) Déterminer l'ensemble D des points M d'affixes Z tels que :

$|Z - 2 + i| = |Z + 1 - 2i|$, puis vérifier que A appartient à D .

b) Déterminer un argument du nombre complexe

$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$.

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC .

3. On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C .

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S .

b) Donner l'écriture complexe de S .

c) (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC . Déterminer les caractéristiques de (C') image de C par S .

Exercice 2 : 6 points

I) Une urne contient dix boules indiscernables au toucher: cinq vertes, trois rouges et deux jaunes. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements

A : « les boules tirées sont vertes » ;

B : « les boules tirées sont de la même couleur » ;

C : « les boules tirées sont chacune de couleur différente ».

1. Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de couleur obtenues après le tirage.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

II) Soit la suite U_n définie par $U_0 = 0$ $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$

1) Le plan est rapporté à un repère orthogonormé (o, i, j) représente graphiquement les quatre premiers termes de la suite (unité 2cm)

2) a) Démontre par récurrence que $U_n < \frac{5}{2}$

b) Démontre que la suite U_n converge

- 3) Soit la suite V_n définie par $V_n = U_n - \frac{5}{2}$
- a) Démontre que la suite V_n est géométrique, on précisera la raison et le premier terme
- b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n
- c) Etudie la convergence de U_n

Problème 9 points

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$

- 1) Vérifie que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x + 3)e^{-2x}$ est solution de (E)
- 2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y' + 2y = 0$
- b) Résous (E') et en déduis les solutions de (E)
- 3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (2x - 3)e^{-2x}$

- 1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
- 2) Etudie le sens de g variation de puis dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution telle que : $0,3 < \alpha < 0,4$
- b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x - 1)e^{-2x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .
(Unité graphique : 2cm)

- 1) Détermine les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = g(x)$
- b) En déduis les variations de f et dresse le tableau de variation de f
- 3) Montre que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1 - \alpha}{3 - 2\alpha}$.
- 4) a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
- b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) sur $\mathbb{R}$
- c) Montre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 6) Tracer (T), (D) et (C).

Partie D: Calcule d'aire

Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. $\mathcal{A}(\lambda)$ désigne l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$

- 1) Calcule $\mathcal{A}(\lambda)$
- 2) Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$