

Série : TSExp Coef : 3 Durée : 3h

Exercice 1 :.....(6 points)

On considère l'équation (E): $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Montre que (E) admet une solution réelle z_0 . Détermine z_0 .
- 2) Montre que (E) admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3)$, $B(2i)$ et $C(6 - 2i)$.
 - a) Place les points A , B et C .
 - b) Interprète géométriquement le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - c) Détermine la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduis que les points A , B et C sont alignés.
- 5) Soit S la transformation d'écriture complexe $z' = e^{\frac{\pi}{3}i} z$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2 :.....(4 points)

I// Soit le nombre complexe $Z = \frac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$.

Ecris Z sous la forme :

- 1) Trigonométrique.
- 2) Exponentielle.

II// On donne : $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Donne la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
- 2) Trouve la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
- 3) Déduis : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Problème :.....(10 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- 1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
b) Détermine un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 4) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 1 cm).

- 1) a) Détermine le domaine de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (C).
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
- 4) Démontre que $f(\alpha) = 3\alpha$.
- 5) Trace (C) et (D).