

Exercice 1 :.....(6 points)

On considère le polynôme p définie par $p(z) = z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i$.

1) a) Montre que p admet une solution réelle z_0 et une solution imaginaire z_1 que l'on déterminera.

b) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - z_0)(z - z_1)(az + b)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$; $b = i$ et $c = -1 - i$.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Calcule le nombre complexes $\frac{a-b}{c-b}$, puis en déduis la nature du triangle ABC .

3) Soit S la similitude directe de centre C qui transforme A en B .

a) Montre que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 1$.

b) Détermine le rapport et l'angle de S .

Exercice 2 :.....(4 points)

I/ Calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 1} - 3x \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5x}}$$

II// Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue en x_0 indiqué :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 ; x_0 = 0 \end{cases}$$

III/ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + ax + b ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{ax+b}{x+1} ; x > 1 \end{cases}$.

Détermine les réels a et b pour que la fonction soit continue et dérivable en 1.

Problème :.....(10 points)**Partie A :**

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $2,19 < \alpha < 2,20$.

3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

1) Détermine le domaine de définition de f , puis calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et (D).

c) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).

4) Trace (C) et (D).